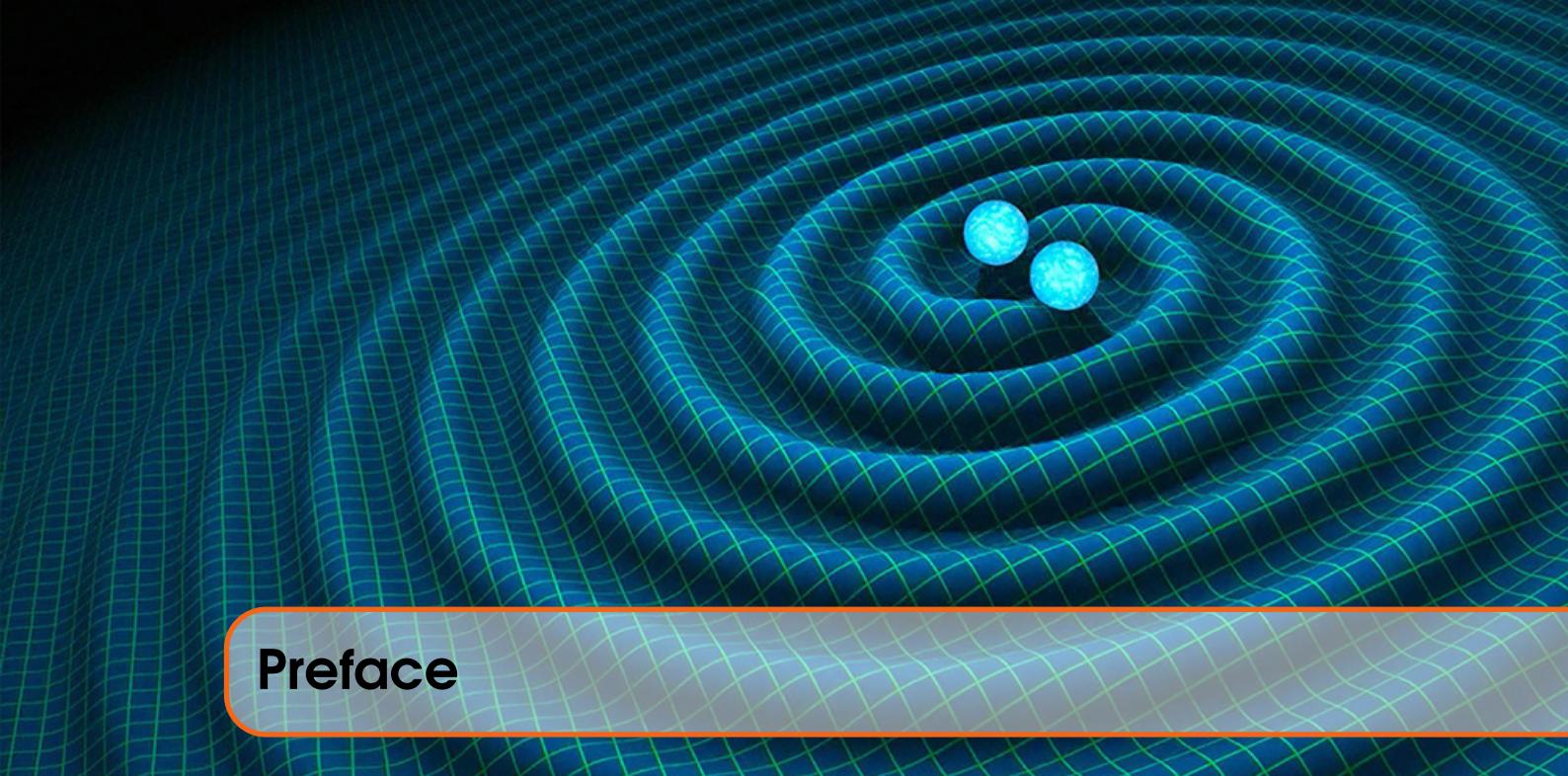


天文奥赛集训讲义

李嘉轩

北京大学物理学院天文学系

2018年7月



Preface

开往集训地的大巴已经出发，看着窗外熟悉又陌生的高楼，不禁令人感慨：时间过得真快！2013年7月是我第一次参加集训。当时与好友肖戴凝一起和大家在小南辛堡度过了愉快的几天。那年青春年少，白天听老师和浩淼兄弟讲课，晚上大家兴致勃勃地用望远镜观测各种天体。当时高年组的大神（当时还不经常叫“大佬”）孙凤梧经常带我们认星找星。那年集训过得愉快而充实，我也从同学们身上学到了很多很多东西。可以说，没有那次天文奥赛集训，我很可能走不到今天。

转眼间五年过去了，离我参加的最后一次集训也已过去了两年。今天走进北京天文馆，我的内心又有些忐忑不安，脑海中浮现出的是高二时来到这里时心中的期许、脑中的公式、包里的星图……2014、2015年参加IOAA的时候，大家或多或少都有些物理知识没有学习/接触过，导致了成绩的不理想。今年以老师的身份参加集训，我想让大家多了解一些物理知识，好为天体物理的学习和奥赛理论考试打好基础。由于编写时间仓促，很多地方都有可能写错，还请同学们包容，也请同学们保管好讲义，不要外传。

“在遗忘中不舍，醉醒交错”，此时此刻，心中有太多感慨无法讲出。只愿今年大家能够认真集训，结成友谊，在国际奥赛中取得好成绩，让更多中国队的名字出现在金牌名单上！

章首图片来源：

前言：[LIGO Collaboration](#).

第1章：[Google图片搜索Mathematical Physics](#).

第2章：[Keck Observatory](#).

第3章：[MPA:The Violent Birth of Neutron Stars](#).

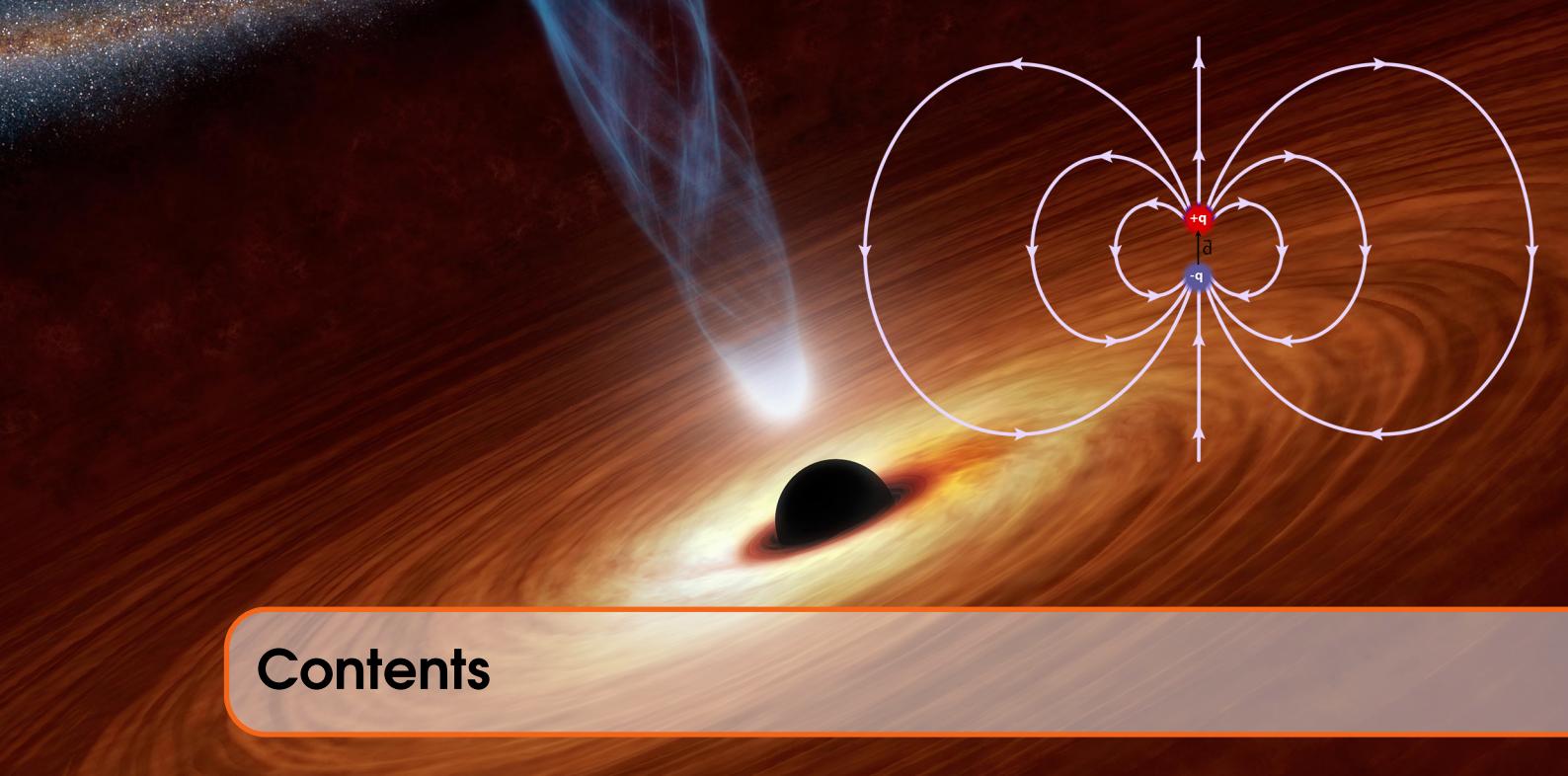
第4章：[Illustris-TNG Project](#).

第5章：[*The polarization of the CMB with Planck and the reionization of the universe by Graca Rocha from Planck Team.*](#)

Copyright © 2018 Jiaxuan Li

First edition, July 2018

未经允许，请勿传播。



Contents

I

第一部分：数学和物理基础

1	数学基础	11
1.1	微积分	11
1.1.1	数系	11
1.1.2	微分与积分	11
1.1.3	矢量分析	12
1.1.4	级数与展开	13
1.1.5	最小二乘法	14
1.2	波动方程	15
1.3	球面三角	16
2	电磁学与光学	17
2.1	电磁学	17
2.1.1	库仑力与洛伦兹力	17
2.1.2	Maxwell方程组	18
2.1.3	电磁场的能量和动量	18
2.1.4	介质界面上的边界条件	19
2.2	光的折射与反射	20
2.2.1	电磁波	20

2.2.2 Snell定律	20
2.2.3 介质的折射率	20
2.2.4 菲涅尔 (Fresnel) 公式	20
2.3 狹义相对论	21
2.3.1 Lorentz变换	21
2.3.2 狹义相对论的光学效应	23
2.3.3 狹义相对论力学	27
2.4 光的干涉与衍射	28
3 热力学与统计物理	31
3.1 热力学系统简介	31
3.1.1 热力学系统分类	31
3.1.2 描述热力学系统	31
3.2 统计物理	33
3.2.1 色散关系	33
3.2.2 理想气体的压强	33
3.2.3 经典气体的统计	33
3.2.4 碰撞与散射	36
3.2.5 关于黑体辐射	37
3.3 热力学	39
3.3.1 热容量	39
3.3.2 理想气体的绝热过程	39
3.3.3 理想气体的声速	41

II

第二部分：天体物理和宇宙学

4 天体物理	45
4.1 天体力学	45
4.2 引力透镜	45
5 宇宙学	53
5.1 相对论宇宙学基础	53
5.1.1 宇宙学原理	53
5.1.2 度规和Einstein场方程	53
5.1.3 宇宙的动力学	55
5.2 宇宙的演化	57
5.2.1 Hubble距离和时间	57
5.2.2 红移和Time Dilation	59

5.2.3	宇宙的演化	61
5.2.4	宇宙学模型	62
5.3	宇宙学中的距离	63
5.3.1	Radial Comoving Distance	63
5.3.2	Transverse Comoving Distance	64
5.3.3	Angular Diameter Distance	65
5.3.4	Luminosity Distance	67
5.3.5	视界	68
5.3.6	Distance modulus	69
5.4	超新星宇宙学	70
5.5	大爆炸宇宙学	72

III

Miscellany

6	答题须知	75
6.1	关于观测考试的建议 (by 夏一飞)	75
6.1.1	写在前面	75
6.1.2	观测考试的基本题型	76
6.1.3	考前可以抱佛脚的	77
6.1.4	考试时的注意事项	77
7	IOAA评分标准	79
8	补充材料	81
	Bibliography	83
	Articles	83
	Books	84

第一部分：数学和物理基础

1	数学基础	11
1.1	微积分	
1.2	波动方程	
1.3	球面三角	
2	电磁学与光学	17
2.1	电磁学	
2.2	光的折射与反射	
2.3	狭义相对论	
2.4	光的干涉与衍射	
3	热力学与统计物理	31
3.1	热力学系统简介	
3.2	统计物理	
3.3	热力学	



在天文奥赛中，坚实的数学基础是不可缺少的。相信大家对于中学数学已经很熟悉了。下面笔者简单地介绍一些常用的大学数学。对于本部分，大部分同学可以不求甚解，少部分精力充沛的同学可以参考任何一本《高等数学》、《线性代数》和《数学物理方法》进一步学习。

1.1 微积分

1.1.1 数系

我们常见的数系有实数和复数。实数大家都已经熟悉。复数 (**complex number**) 深深地影响了现代物理。在中文中，“复”既有英文中的complex之意，也有“二元”之意。

Theorem 1.1.1 — 复数的欧拉公式. 一个复数 z 可以表示为：

$$z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1.1)$$

其中 r 称为模长， θ 称为辐角。

有了复数的欧拉表示，复数的乘法与除法可以很轻松地进行。

1.1.2 微分与积分

本部分可以参看李忠老师的《高等数学》(北京大学出版社)。下面只介绍一下常见积分公式：

1.

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C.$$

2.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

3.

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

4.

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

5.

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Exercise 1.1 [IOAA2015 T11] The mass density of an object is inversely proportional to the radial distance from the center of the object with a factor of proportionality $\alpha = 5.0 \times 10^{13} \text{ kg/m}^2$. If the escape velocity at the surface of the object is $v_0 = 1.5 \times 10^4 \text{ m/s}$, calculate the total mass of the object. ■

1.1.3 矢量分析

Theorem 1.1.2 — 向量恒等式. 任意两个向量 \vec{a} 和 \vec{b} , 都满足以下的公式:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta; \quad (1.2)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta; \quad (1.3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; \quad (1.4)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}; \quad (1.5)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}); \quad (1.6)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \text{平行六面体的体积}. \quad (1.7)$$

直角坐标 (x, y, z) , 体积元 $dxdydz$.

球坐标 (r, θ, ϕ) , 体积元 $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$.

柱坐标 (ρ, ϕ, z) , 体积元 $\rho d\rho d\phi dz$.

三种坐标之间的关系:

$$x = r \sin \theta \cos \phi = \rho \cos \phi; \quad (1.8)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi = \rho \sin \phi; \quad (1.9)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (1.10)$$

Definition 1.1.1 — 梯度算符 nabla.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z; \quad (1.11)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_\phi. \quad (1.12)$$

Theorem 1.1.3 标量场 $f(x, y, z)$ 的梯度 (gradient):

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z; \quad (1.13)$$

矢量场 $\vec{A}(x, y, z) = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$ 的散度 (divergence):

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (1.14)$$

矢量场 $\vec{A}(x, y, z) = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$ 的旋度 (curl):

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z. \quad (1.15)$$

Exercise 1.2 证明以下式子:

$$\nabla r = \vec{e}_r;$$

$$\nabla \cdot \vec{r} = 3.$$

■

Definition 1.1.2 — 拉普拉斯算符 Laplacian.

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (1.16)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (1.17)$$

Theorem 1.1.4 高斯定理 Gauss's Theorem:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}. \quad (1.18)$$

斯托克斯定理 Stokes's Theorem:

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (1.19)$$

1.1.4 级数与展开

Theorem 1.1.5 — 泰勒级数 Taylor Series.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (1.20)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (1.21)$$

Proposition 1.1.6 一些常用函数的展开式:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (1.22)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (1.23)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1.24)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (1.25)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \dots \quad (1.26)$$

1.1.5 最小二乘法

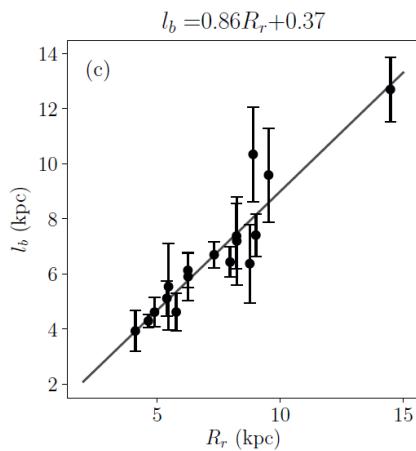


Figure 1.1: 最小二乘法拟合

我们现在有一堆数据 (x_i, y_i) , 我们期望它们呈线性关系 $y = a_0 + a_1 x$ 。最小二乘法的意思是使卡方

$$Q(a_0, a_1) = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

最小。学过微积分的同学知道，这样一个二元函数最小的条件是：

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = \frac{\partial Q}{\partial a_1} = 0, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial a_0^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial a_1^2} > 0. \quad (1.28)$$

得到：

$$a_1 = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}, \quad (1.29)$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}. \quad (1.30)$$

1.2 波动方程

我们经常研究波动，波常用波动方程来描述。

Theorem 1.2.1 — 波动方程.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 u = 0. \quad (1.31)$$

如果对于一个物理系统，可以用力学方法写出一个这样的方程，那就说明该系统可以存在一个波动解。波动分为纵波和横波。其中 v 是波速（相速度）。比如在真空中电场可以满足

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{E} = 0,$$

所以电磁波的波速是 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

我们做一些数学游戏，假设振动量 $u(\vec{r}, t)$ 随着时间是简谐振动的，具有形式 $u(\vec{r})e^{-i\omega t}$ ，带入就得到：

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \right) u(\vec{r}) = 0. \quad (1.32)$$

这个方程叫做Helmhotz方程。我们常定义一个量叫波数 $k = \omega/v$ ，这样Helmhotz方程就好看了：

$$(\nabla^2 + k^2) u(\vec{r}) = 0. \quad (1.33)$$

Helmhotz方程的一个解是平面波解。从而我们已经得到了波动方程的一个通解形式：

$$u(\vec{r}, t) = u_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}. \quad (1.34)$$

Exercise 1.3 验证平面波 $u(\vec{r}) = u_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ 满足上述Helmhotz方程(1.33)。 ■

Theorem 1.2.2 除了波动方程，你们以后还会接触到以下一些经典的数学物理方程。

热扩散方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u = 0. \quad (1.35)$$

Poisson方程：

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.36)$$

Helmholtz方程：

$$(\nabla^2 + k^2) u = 0. \quad (1.37)$$

Schroedinger方程：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t). \quad (1.38)$$

1.3 球面三角

球面三角的几个基本公式

Theorem 1.3.1 — 球面三角公式. 正弦公式：

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \quad (1.39)$$

边的余弦公式：

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \quad (1.40)$$

角的余弦公式：

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a. \quad (1.41)$$

Exercise 1.4 [IOAA2014 T10] Two Romanian astronomers Ovidiu Tercu and Alex Dumitriu from Galati Romania, recently discovered two variable stars. The galactic coordinates of the two stars are: GalatiV1 ($l_1 = 114.371^\circ$; $b_1 = -11.35^\circ$), and GalatiV2 ($l_2 = 113.266^\circ$; $b_2 = -16.177^\circ$). Estimate the angular distance between the stars Galati V1 and Galati V2. ■



2. 电磁学与光学

2.1 电磁学

2.1.1 库仑力与洛伦兹力

大家高中物理都学过库仑力与洛伦兹力了：

Definition 2.1.1 真空点电荷之间的库仑力：

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}. \quad (2.1)$$

带电粒子在磁场中运动受到的洛伦兹力：

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.2)$$

可以把洛伦兹力写成力密度的形式：

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}. \quad (2.3)$$

Exercise 2.1 氢原子能级。在二十世纪二十年代量子力学诞生之前，量子力学之父们的老师索末菲 (Sommerfield) 提出了 Sommerfield-Bohr 量子化条件。简而言之就是指氢原子外的电子轨道角动量是按照 $L = n\hbar$ 的形式量子化的。请根据此算出氢原子的能级 E_n 和氢原子的经典半径 a_B ，也称为玻尔半径，用 Å 表示。

R 关于约化质量 (reduced mass)。很多同学对约化质量的概念不清楚，实际上很简单。在一个二体系统中， m_1 和 m_2 相互施加径向力，则相对加速度

$$\vec{a}_{21} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{F}_{21}/\mu,$$

其中 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 称为约化质量。可见，如果只站在 m_1 上来研究 m_2 在相互作用力 \vec{F}_{21} 作用下的运动情况，可以则有 $\vec{F}_{21} = \mu \vec{a}_{21}$ ，是牛顿第二定律的形式，而这里的等效质量就是 μ 。



Figure 2.1: 约化质量

2.1.2 Maxwell方程组

根据前人们总结出的电磁学规律，James C. Maxwell写出了精妙的Maxwell方程组，成功用数学形式总结出了电磁学规律，打开了电动力学和狭义相对论的大门。

Theorem 2.1.1 — Maxwell Equations.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0; \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.7)$$

2.1.3 电磁场的能量和动量

电磁场是物质。因此电磁场既具有能量，也具有动量。电磁场具有动量的体现形式正是大家熟悉的光压。下面不加推导地给出电磁场的能量和动量。

Theorem 2.1.2 — 电磁场的能量和动量.

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2; \quad (2.8)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}; \quad (2.9)$$

$$\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}; \quad (2.10)$$

$$\vec{\mathcal{T}} = -\epsilon_0 \vec{E} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{B} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right). \quad (2.11)$$

其中， w 是电磁场的能量密度， \vec{S} 是坡印廷 (Poynting) 矢量，是电磁波的能流密度， \vec{g} 是电磁波的动量密度， $\vec{\mathcal{T}}$ 是电磁场的动量流密度，是一个二阶对称张量。

Proposition 2.1.3 设一个面的单位法向量为 \vec{n} ，那么这个面受到电磁场的应力为

$$\vec{f}_n = -\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{T}}. \quad (2.12)$$

如果法向 \vec{n} 与Poynting矢量正好平行，则这个应力就是我们熟知的光压形式：

$$\vec{f}_n = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \vec{n}. \quad (2.13)$$

从而光压大小正好等于电磁场能量密度。(Recall泡泡的张力)

Poynting矢量 \vec{S} 是重要的。一般情况下我们关心Poynting矢量的时间平均值

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}_0|^2 \vec{n}. \quad (2.14)$$

还可以注意到，动量密度和能流密度正好满足 $\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$ 的关系。

Exercise 2.2 [IOAA2014 T7] For an observer on Earth the pressure of the radiation emitted by Sun is $p_{rad,S}$ and the pressure of the radiations emitted by a star Σ is $p_{rad,\Sigma}$.

Calculate the visual apparent magnitude of the star Σ if the apparent visual magnitude of the Sun is m_S . ■

Exercise 2.3 你在烈日下感受夏日炎炎。(每个氢核聚变成氦核放出7MeV能量，每个¹²C聚变成⁵⁶Fe放出1MeV能量。)

1. 请估算太阳表面温度。
2. 请写出太阳的核聚变中最主要反应的核反应方程式。
3. 估算人一生的时间里，太阳燃烧掉的氢元素有多重。
4. 估算每秒钟有多少个太阳电子中微子穿过人体。 ■

Exercise 2.4 重子：三个夸克组成的粒子。

轻子：电子、 μ 子、 τ 子和相应的反粒子，以及它们对应的正反中微子。

强子：包括重子和介子。 ■

2.1.4 介质界面上的边界条件

根据静电场的高斯定理、环路定理和磁场的性质，在一个介质界面上，有以下的边界条件：

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f; \quad (2.15)$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0; \quad (2.16)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0; \quad (2.17)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \alpha_m. \quad (2.18)$$

2.2 光的折射与反射

2.2.1 电磁波

由真空中的Maxwell方程很容易得到真空中电场和磁场满足的微分方程:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{E} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{B} = 0. \quad (2.20)$$

这是标准的简谐波所满足的方程, 相应的波速为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

2.2.2 Snell定律

大家初中就学过了光的折射定律, 也成为Snell定律, 它是入射波、反射波和折射波的横向波矢必须相等而导致的。

Theorem 2.2.1 — Snell定律.

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (2.21)$$

2.2.3 介质的折射率

介质的折射率与介质的介电系数和磁导率相关:

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}. \quad (2.22)$$

一束光在折射率为 n 的介质中传播, 我们暂且可以认为这束光的速度(相速度)是 $v = c/n$, 即光速变慢了。

2.2.4 菲涅尔 (Fresnel) 公式

光在界面上反射和透射, 不同偏振分量的光有着不同的性质, 这由Fresnel公式来描述:

Theorem 2.2.2 — Fresnel公式.

$$r_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}; \quad (2.23)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}; \quad (2.24)$$

$$r_{\perp} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}; \quad (2.25)$$

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}. \quad (2.26)$$

当 $\theta_1 = \theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}$ 时, $r_{\perp} = 0$, 即p波反射率为0, 整个反射光全部是s波偏振。这个 θ_B 被称为布儒斯特角 (Brewster angle)。

如果是从光密入射到光疏 ($n_1 > n_2$), 当 $\theta_1 = \theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ 时, 会发生全反射。 θ_c 被称为临界角。

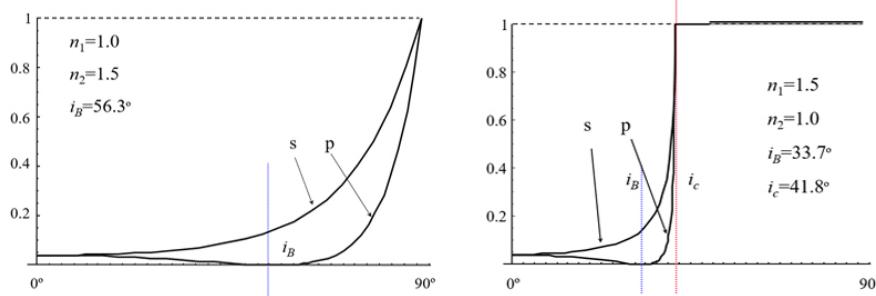


Figure 2.2: 不同折射率条件下的反射率随入射角的变化

2.3 狹義相對論

狹義相對論誕生於1905年，現如今已經過去了113年。有無數關於狹義相對論的參考書，這裡推薦幾本書。適合高中生看的是舒幼生老師的《力學》（北京大學出版社）。如果你已經學過一些數學，可以看任何一本電動力學書，无论是郭硕鴻、Griffith还是Jackson，也可以看任何一本廣義相對論的第一章。

Definition 2.3.1 狹義相對論的兩個基本假設：

真空光速不變：在不同慣性系中觀測到的真空光速都相等；

狹義相對性原理：物理規律對所有慣性系等價（物理規律必須能寫成相對論協變形式）。

2.3.1 Lorentz變換

經典力學中，不同慣性系之間的坐標變換遵循伽利略變換：

$$x' = x - vt,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = t.$$

但是伽利略變換沒法使得真空電磁波所滿足的d'Alembert方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0$$

也協變。因此，究竟是堅持伽利略變換？還是堅持光速不變呢？偉大的愛因斯坦選擇了後者。因此，在光速不變和相對性原理的前提下，產生了**Lorentz**變換來代替之前的伽利略變換：

Definition 2.3.2 — Lorentz坐标变换.

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (2.27)$$

$$y' = y, \quad (2.28)$$

$$z' = z, \quad (2.29)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \quad (2.30)$$

其中的 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 常被称为Lorentz因子，无量纲化的速度为 $\beta = v/c$.

注意，我们讨论狭义相对论都是在惯性系里讨论的，不涉及任何物质的分布和引力问题。由Lorentz坐标变换，可以推出速度的变换公式：

Definition 2.3.3 — Lorentz速度变换.

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}, \quad (2.31)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v / c^2)}, \quad (2.32)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v / c^2)}. \quad (2.33)$$

注意，这个变换式满足光速不变，同时如果一个参照系中粒子运动的速度不超光速，那么无论换到哪个参照系，粒子运动的速度都不超光速。

洛伦兹变换的一个直接后果是，在某个参考系S里两件事同时发生，那么在另一个匀速运动的S'系中两件事就不同时了。下面讨论两个大家喜闻乐见的效应：尺缩效应和钟慢效应。

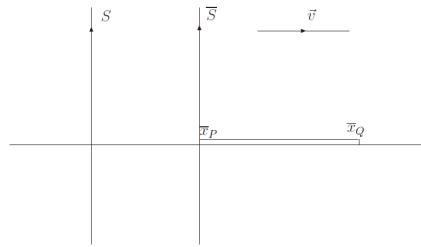


Figure 2.3: 尺缩效应

图2.3中， $\bar{x}_P = \gamma(x_P - vt_P)$, $\bar{x}_Q = \gamma(x_Q - vt_Q)$. 静止在S'系中的尺子PQ长度为 $L_0 = x_Q - x_P$. 在S系中测量尺子长度的时候，需要同时测量两端的位置，即 $t_P = t_Q$ 。所以自然有

$$L = L_0/\gamma.$$

所以在S系中看，运动的尺子缩短了。事实上尺子没有缩短，是同时的相对性问题。在S'系中的观测者看来，S系的观测者先测了Q端，再测的P端。

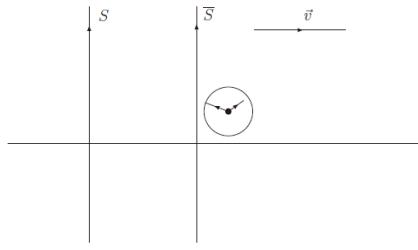


Figure 2.4: 钟慢效应

在图2.4中的 \bar{S} 系里放一个静止的钟，测量时间间隔为 $T_0 = \bar{t}_2 - \bar{t}_1$ 。在S系中，

$$t_1 = \gamma(\bar{t}_1 + \frac{v}{c^2}\bar{x}_1),$$

$$t_2 = \gamma(\bar{t}_2 + \frac{v}{c^2}\bar{x}_2),$$

由于 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ ，所以

$$t_2 - t_1 = \gamma(\bar{t}_2 - \bar{t}_1) = \gamma T_0 > T_0.$$

这就是动钟变慢。现代粒子物理研究已经证实了钟慢效应。静止参考系中半衰期为 τ_0 的 π^+ 介子以10GeV的速度飞翔，相当于洛伦兹因子 $\gamma = E/E_0 = 71$ 。从而在地面参照系看来， π^+ 介子的半衰期已经变成了 $\tau = \gamma\tau_0$ ，可以飞比较长的距离。

2.3.2 狹義相對論的光学效应

在极端天体物理过程中，无论是有静质量的粒子还是没有静质量的光子，往往都具有比较高的能量。这时就没法用经典力学去处理了。我们还经常碰到一个高速运动的带电粒子的辐射，这需要用狭义相对论去近似处理（辐射问题在电动力学里也是近似处理的）。类星体附近高速运动的吸积盘发出的辐射有着红移和蓝移，也需要用狭义相对论来处理。因此，学习一点狭义相对论是必要的。

下面推导的东西可能有更简单的推法，但是我已经不会了。于是只能介绍一种我会的推法。首先介绍一个概念叫波矢 (**wave vector**)。形容单色光的物理量，大概就是光速、波长、频率。为了某种方便，我们定义波矢为： $k = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ 。波矢是个矢量，方向指向单色平面光波传播的方向。定义一个圆频率 $\omega = 2\pi\nu$ 也是很方便的。这样，波矢和圆频率可以代替原来的波长和频率的概念了。在真空中，波矢和圆频率简单地满足 $k = \omega/c$ 。如果采用1234度规，那么4-矢量 $k_\mu = (\vec{k}, i\omega/c)$ 在不同参照系下变换满足这样的关系：

$$\begin{pmatrix} k'_x \\ k'_y \\ k'_z \\ i\omega'/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ i\omega/c \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

写好看点就能写成

$$k'_\mu = L_{\mu\nu} k_\nu, \quad (2.35)$$

其中变换矩阵

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

头灯效应

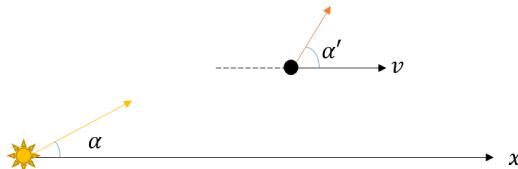


Figure 2.5: 头灯效应

如图, 光源位于 S 系, 观测者位于 S' 系, x 轴正方向与观测者运动方向相同。在 S 系中, 光源发光的方向与 x 轴夹角为 α , 但在观测者看来夹角是 α' . 发出的光的4-波矢为 $k_\mu = (\vec{k}, i\omega/c)$, 观测者接收到的光的4-波矢为 $k'_\mu = (\vec{k}', i\omega'/c)$. 根据角度关系, 我们有:

$$k_x = \cos \alpha \frac{\omega}{c}, \quad (2.37)$$

$$k'_x = \cos \alpha' \frac{\omega'}{c}. \quad (2.38)$$

而两个4-波矢之间又满足Lorentz变换, 从而有

$$k'_x = \gamma k_x - \gamma \beta \omega / c, \quad (2.39)$$

$$i\omega'/c = -i\gamma\beta k_x + i\gamma\omega/c. \quad (2.40)$$

联立四式, 得到两个式子

$$\cos \alpha' \omega' = \gamma \omega (\cos \alpha - \beta), \quad (2.41)$$

$$\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \alpha). \quad (2.42)$$

消去 ω' 可得:

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha - \beta}{1 - \beta \cos \alpha}. \quad (2.43)$$

可见, 站在观测者参照系, 如果光源远离观测者而去, 那么 $\alpha' > \alpha$; 反之则 $\alpha' < \alpha$. 我们感兴趣的是光源朝着观测者高速运动的情形, 在这种情况下, (2.43)应该写成

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha + \beta}{1 + \beta \cos \alpha}. \quad (2.44)$$

假定光源有一定的大小，则其边缘处发出的光子只有超前 ($|\alpha| < \pi/2$) 才能被观测者看到。然而观测者发现光子与 x 轴的夹角变小了，从而整个光源相对于观测者的张角变小了，最大的张角是 $|\alpha| = \arccos \beta$ 。当光源运动速度接近光速时，这个角度会非常小，从而单位立体角内的光强非常强。这就是头灯效应 (headlight effect)（也叫做集束效应）。在静止参考系中各向同性发射光子的源在高速运动时看起来就像辐射都在一个窄窄的锥里。当 Lorentz 因子很大时，这个锥就相当窄，于是 $\alpha' \approx \sin \alpha' = \sqrt{1 - \beta^2} = 1/\gamma$ 。这个 beaming 效应在高加速度带电粒子形成的同步辐射 (synchrotron radiation) 中非常明显。以上讨论了光

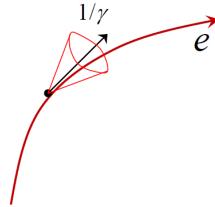


Figure 2.6: 同步辐射

子数密度的增强效应。下面看看光子的能量会不会变。

相对论多普勒效应

物理图像与头灯效应完全一样，只不过在式 2.41 和 2.42 中做的手脚不同。从 2.42 得到 $\omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos \alpha)$ 。可观测的角度是在观测者参考系里测量的，所以改用 α' 表示：

$$\omega' = \frac{\omega}{\gamma} \frac{1}{1 + \beta \cos \alpha'}. \quad (2.45)$$

β 为正表示光源远离观测者。对于特殊情况 $\alpha' = \pi/2$ ，接收到的频率仍然比发出的本征频率低，仍然是红移， $\omega' = \omega/\gamma$ 。这是横向多普勒效应。特别地，当 $\alpha' = 0$ 时，得到一个常见的结论：

$$\omega' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \omega. \quad (2.46)$$

从而相对论多普勒红移的公式是

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \quad (2.47)$$

考察刚才头灯效应的情形。可以证明，光源参考系中的一个角度微元 $d\alpha$ 与观测者参考系的角度微元 $d\alpha'$ 的关系是

$$|d\alpha'| = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} |d\alpha|, \quad (2.48)$$

从而接收到的光子密度是发出光子密度的 $(1 + \beta)/(1 - \beta)$ 倍。而朝我们来的光子发生了蓝移，能量也变成了原来的 $\sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$ ，而且单位时间接收到的光子数也变成了原来

的 $\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$ （这个跟频率的关系是一样的），综合这几个因素，观测到的源亮度（能流密度）是原来的：

$$S' = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^2 S.$$

光源朝我们运动时，观测到的光子会特别刺眼。

康普顿效应

康普顿效应 (Compton scattering) 在天体物理过程中也起着非常重要的作用。同样，这也是一个相对论效应。康普顿散射一般是指高能光子入射在静止的电子上，被电子散射到其他方向，同样电子也获得了一部分动量和能量，从而光子能量变低。由于各处都有康普顿效应的推导，下面只给出结论：

$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{\hbar\omega}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \right)^{-1}. \quad (2.49)$$

其中一个很重要的量叫做电子的康普顿波长：

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = \frac{2\pi}{\alpha_e} r_e. \quad (2.50)$$

$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2}$ 是电子的经典半径，而 α_e 是电磁相互作用的耦合常数，也叫做精细结构常数，大致是 $1/137$ 。电子的康普顿波长大概是 0.024\AA 。

康普顿效应使得光子变软，但是逆康普顿效应可以让光子变硬。逆康普顿效应是指，低能光子打在高能电子上，散射的结果就是光子能量变高，电子损失能量。Sunyaev-Zel'dovich 效应就是指，星系团中热气体与CMB光子发生了逆康普顿效应散射，使CMB光子变硬。SZ效应是探测星系团位置的好办法。

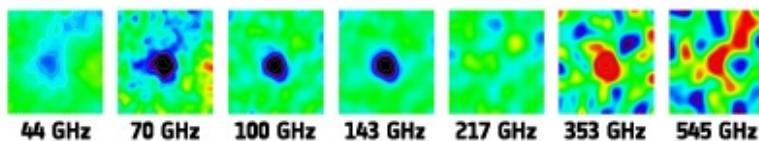
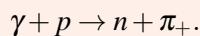


Figure 2.7: SZ效应检测Abell 2319星系团

Exercise 2.5 GZK效应描述源自远处的宇宙射线应有能量的理论上限值，以Greisen、Zatsepin、Kuzmin三人的名字命名。假设观测到的高能宇宙线都是以极高速度运动的质子。由粒子物理我们知道，在质子静止参考系中，当使用能量高达 10^6 eV 的高能光子轰击质子时会发生如下反应：



试想一个高能质子在宇宙中飞行，在它的参考系中CMB光子可以变得非常硬，以至于发生这样的反应，从而损耗质子的能量，直到上述反应根本无法发生为止。因此理论

上講，高能宇宙線能量有個上限，請推導出這個上限。目前我們已經觀測到了一些極高能宇宙線粒子，與上述推導不符，從而被稱為GZK悖論。

Exercise 2.6 寫出中子衰變的核反應方程式。

Exercise 2.7 視超光速效應。在觀測活動星系核噴流的過程中，經過幾年數據的積累，我們算出噴流的橫向速度超過了光速。狹義相對論最重要的結論之一就是，訊號傳播的速度不可能超光速。這個觀測結果是否對狹義相對論提出了嚴重的挑戰？

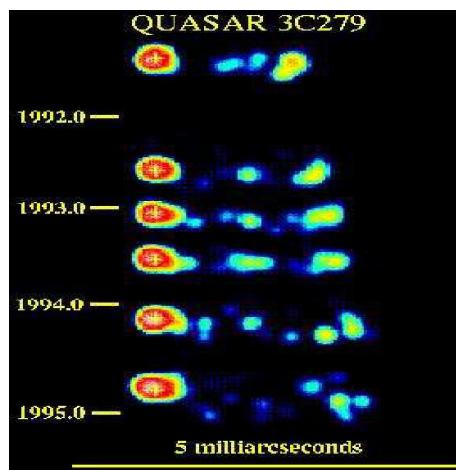


Figure 2.8: 类星体3C279的喷流

2.3.3 狹義相對論力學

相對論最妇孺皆知的結論恐怕就是這個公式了：

Theorem 2.3.1 — 質能方程.

$$E = mc^2. \quad (2.51)$$

相對論力學中，動質量與靜質量的關係是

$$m = \gamma m_0. \quad (2.52)$$

從而能量寫為

$$E = \gamma m_0 c^2. \quad (2.53)$$

牛頓第二定律寫成了

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \vec{v}). \quad (2.54)$$

高中物理競賽中常見的“能動量三角形”：

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (2.55)$$

在狭义相对论中，很重要的一点是：如果在某个参考系中某反应因违反狭义相对论而无法发生，那么无论换什么参考系，这个反应都不能发生。反应的发生与否是物理，不随参考系而变。

Exercise 2.8 [IOAA2014 T3] During studies concerning cosmic radiation, a neutral unstable particle - the π_0 meson was identified. The rest-mass of meson π_0 is much larger than the rest-mass of the electron. The studies reveal that during its flight, the meson π_0 disintegrates into 2 photons. In a particular case, one of the created photons has the maximum possible energy E_{max} and, consequently, the other one has the minimum possible energy E_{min} .

Find an expression for the initial velocity of the meson π_0 , as a function of E_{max} and E_{min} . ■

Exercise 2.9 [IOAA2015 T12] A proton with a kinetic energy of 1 GeV propagates out from the surface of the Sun towards the Earth. Neglecting the magnetic field of the Sun, calculate the travel time of the proton as seen from the Earth. ■

Exercise 2.10 真空中的电子能否发生这个反应？

$$e^- \rightarrow e^- + \gamma. \quad (2.56)$$

2.4 光的干涉与衍射

俗话说“天机不可泄露”。然而天体物理就依赖于遥远天体泄露的“天机”——光子。了解一些波动光学是很有必要的。但由于一般处理衍射问题都要用到Kirchhoff衍射积分，这超出了本集训的范围，因此下面只是罗列一下经过衍射积分计算后得到的结论，旨在让大家对衍射和干涉有个直观的物理感觉。

菲涅尔衍射

衍射 (diffraction) 的意思是光波经过某障碍物继续传播。菲涅尔衍射又称近场衍射，只光源离障碍物的距离“比较近”。光路图和现象如图2.9所示，有趣的是，圆屏的菲涅尔衍射会出现泊松 (Poisson) 亮斑。

单缝的夫琅和费衍射

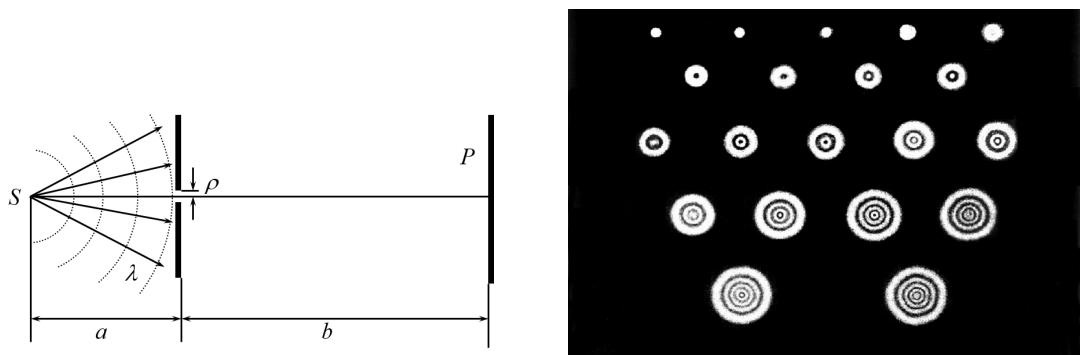
夫琅和费衍射是远场衍射，意思是光源放在了无穷远的位置，这大致上与我们天文观测吻合。

单缝夫琅和费衍射的光强分布是

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad (2.57)$$

其中定义了一个 $\alpha = \frac{a\pi}{\lambda} \sin \theta$. 中心光强

$$I(0) = \left(\frac{S}{F\lambda} \right)^2 I_0. \quad (2.58)$$



(a) 圆孔菲涅尔衍射的光路图

(b) 衍射结果

Figure 2.9: 菲涅尔衍射和“泊松亮斑”

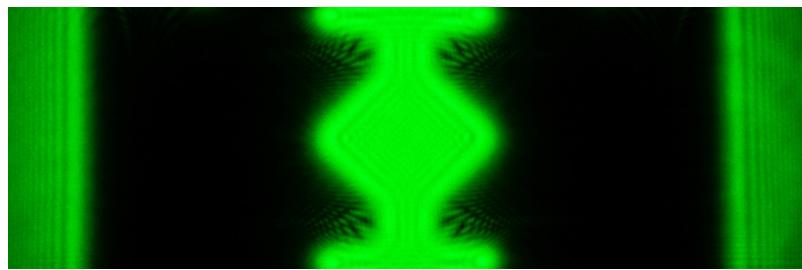


Figure 2.10: 半无限大屏（刀片）的菲涅尔衍射

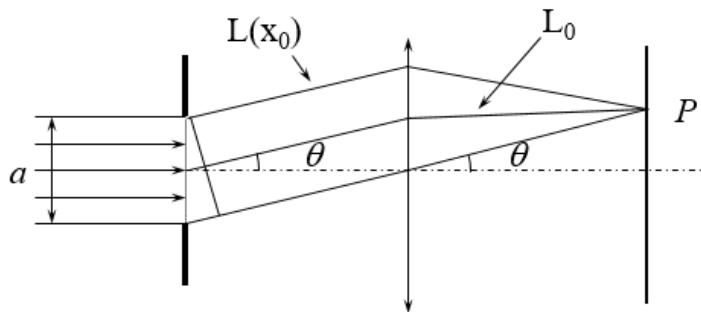
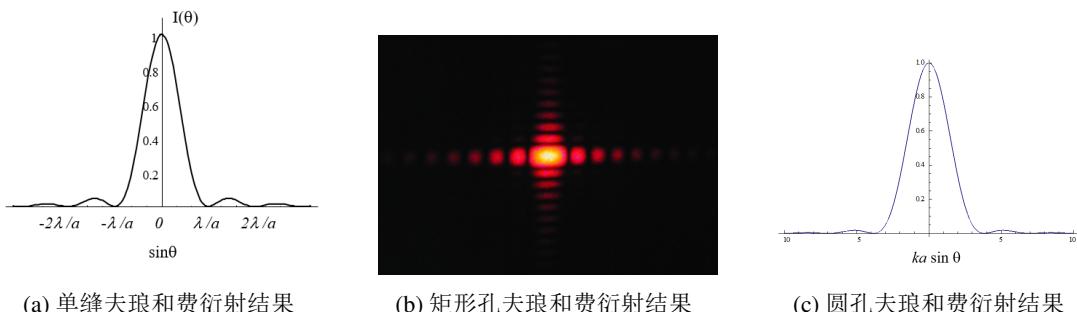


Figure 2.11: 夫琅和费衍射光路图



(a) 单缝夫琅和费衍射结果

(b) 矩形孔夫琅和费衍射结果

(c) 圆孔夫琅和费衍射结果

Figure 2.12: 夫琅和费衍射结果

可以看出，单缝衍射的半角宽度为

$$\Delta\theta = \arcsin \frac{\lambda}{a} \approx \frac{\lambda}{a}. \quad (2.59)$$

矩形孔衍射与单缝衍射相似：

$$I(\theta) = I(0,0) \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad (2.60)$$

也定义了 $\alpha = \frac{a\pi}{\lambda} \sin \theta_1$, $\beta = \frac{b\pi}{\lambda} \sin \theta_2$.

在天文观测中，我们更关心圆孔的夫琅和费衍射。

$$I(\theta) = \left(\frac{S}{F\lambda} \right)^2 I_0 \left(\frac{2J_1(y)}{y} \right)^2, \quad (2.61)$$

其中的 $J_1(y)$ 是 1 阶 Bessel 函数, $y = ka \sin \theta$.

第一级暗纹出现的位置是 $y = 1.22\pi$, 从而零级两斑的角宽度为

$$\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{a}. \quad (2.62)$$

双孔干涉

杨氏双孔干涉实验大家都很熟悉了。

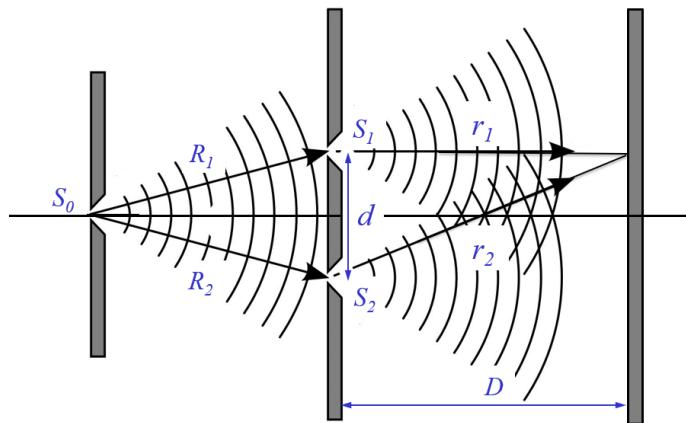
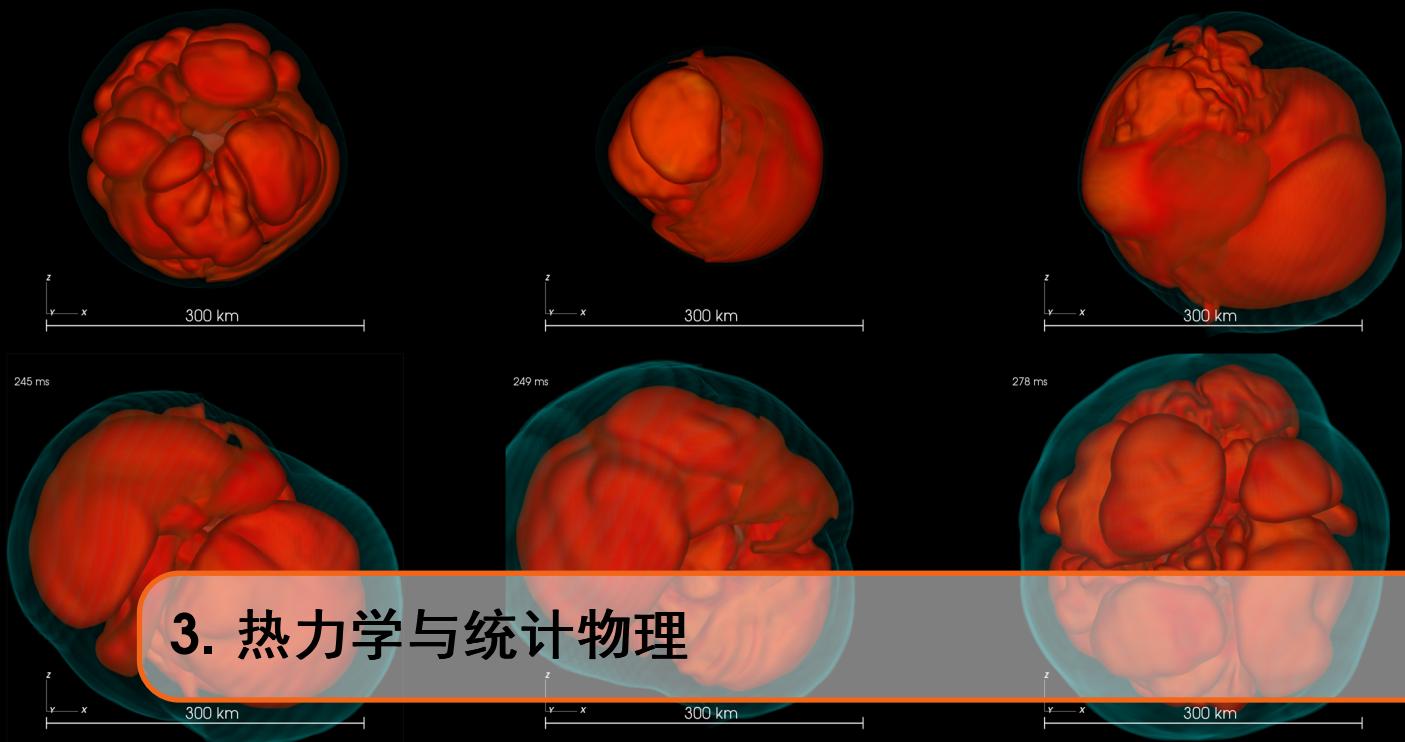


Figure 2.13: 杨氏干涉实验光路

条纹间距:

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d}. \quad (2.63)$$



3. 热力学与统计物理

这部分尽量不涉及平衡态统计力学课程中的知识，只在热学层面讨论。一本绝佳的参考书是刘玉鑫老师写的博雅系列《热学》（北京大学出版社）。这本书内容非常全面且深入，值得好好学习。

3.1 热力学系统简介

在天体物理中，我们常接触到热力学系统。下面对一些基本概念加以介绍。

3.1.1 热力学系统分类

热力学系统按照能量和物质的流动情况，分为：开放系统、绝热系统、封闭系统、孤立系统。

相 (phase)

相是有一定边界包围的、具有确定均一的物理化学性质的系统。如：气相、液相、固相……

3.1.2 描述热力学系统

状态参量

描述热力学系统常用一些状态参量，大致分为：

1. 几何参量：体积 V ；
2. 力学参量：压强 p ；
3. 电磁参量：磁场 \vec{H} 、电场 \vec{E} 、极化强度 \vec{P} 、磁化强度 \vec{M} ；
4. 热力学参量：温度 T 。

平衡态

如果外界对系统不加干扰，热力学系统演化够长时间后宏观性质不发生变化的状态时平衡态。平衡态不等于稳定态。我们以后能简单研究的系统绝大多数都是平衡态系统（无论是global平衡还是local平衡）。

如果系统的弛豫时间 (relaxation time) 远远小于外界给扰动的时标，那么可以认为在扰动过程中系统是处处热平衡的。

温度

Theorem 3.1.1 — 热力学第零定律. 如果两个系统分别与第三个系统热平衡，那么这两个系统也处于热平衡状态。

处于热平衡状态的两个系统具有相同的温度。温度是形容系统中粒子无规则运动程度的一个量。

状态方程

状态方程 (Equation of State, EoS) 是个很重要的概念。处于平衡态的热力学系统的状态参量之间满足一定的关系，这些关系就叫状态方程。如 $f(p, V, T) = 0$ 是一个EoS的一般形式，从而 p, V, T 三个量只有两个是独立的。由独立的状态参量可以define的物理量叫状态函数/态函数 (state function). 比如可以写成 $p = p(T, V)$, $U = U(p, V)$ 等。熵、焓、内能、吉布斯自由能、亥姆霍兹自由能等都是态函数。也可参见5.1.3节。

响应函数

戴岩老师在讲测光系统时也讲到了仪器的响应函数 $\Phi(\lambda)$ 。响应函数是实验上可测量的量之一，由响应函数可以推出EoS。要注意，EoS是描述物性非常重要的东西，在计算热力学系统的时候，缺少EoS的话啥也算不出来。常见的几个响应函数是：

1. 体膨胀系数 α :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p . \quad (3.1)$$

2. 等体压强系数 β :

$$\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V . \quad (3.2)$$

3. 等温压缩系数 κ_T :

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T . \quad (3.3)$$

这三个响应函数是有关系的：

$$p\beta\kappa_T = \alpha. \quad (3.4)$$

而且还能推出

$$\frac{dp}{p} = \beta dT - \frac{1}{pV\kappa_T} dV. \quad (3.5)$$

理想气体状态方程

大家都知道这个方程，叫做理想气体状态方程。问题是，什么是理想气体？

$$pV = Nk_B T. \quad (3.6)$$

3.2 统计物理

3.2.1 色散关系

色散关系 (dispersion relation) 也是物理学中非常重要的内容，会出现在各种地方。波在介质中传播时，因为不同波长折射率不同，从而会发生色散，因此我们把 $\omega = \omega(k)$ 叫做色散关系。在这里我们不去介绍这块内容了 (感兴趣者看Jackson经典电动力学)。这里的色散关系是指粒子能量 E 与动量 p 的关系。

一般来讲，粒子的色散关系是

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}. \quad (3.7)$$

对于非极端相对论的粒子， $E = \frac{1}{2}mv^2$ ；对于光子和极端相对论粒子， $E = pc$.

3.2.2 理想气体的压强

下面推导一下无相互作用的粒子（真的没有相互作用吗？）的压强的动力学表示。

$$p = \frac{1}{3}n\vec{P} \cdot \vec{v}. \quad (3.8)$$

对于non-relativistic的气体， $\vec{P} = m\vec{v}$ ，于是

$$p_{NR} = \frac{1}{3}nm\vec{v}^2 = \frac{2}{3}n\bar{\epsilon}_k. \quad (3.9)$$

对于光子，

$$p_{ER} = \frac{1}{3}n\epsilon_k. \quad (3.10)$$

这种 $p = p(\epsilon)$ 也可以叫做色散关系。

Exercise 3.1 把上面这些东西跟理想气体方程联系起来，能得到什么东西？ ■

3.2.3 经典气体的统计

所谓经典气体，就是不考虑气体粒子之间的量子效应。经典气体的统计是由麦克斯韦-玻尔兹曼统计来描述。系统严格的推导方法由系综理论给出。简单起见，下面直接给出Maxwell分布的结果，并介绍一些结论。

Theorem 3.2.1 — 三维Maxwell分布.

$$f_M(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) = f(v_x)f(v_y)f(v_z). \quad (3.11)$$

三维Maxwell分布是在速度空间内的分布。因此一维的Maxwell分布是

$$f_M(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T} \right). \quad (3.12)$$

Exercise 3.2 证明一个常用的公式: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$.

Exercise 3.3 验证Maxwell分布是归一化的, 即 $\int_{-\infty}^{\infty} f_M(v_x) dv_x = 1$.

物理直觉告诉我们, 速度的分布不应该与速度的方向有关, 只应该与速度的大小 v^2 有关。从而, 我们更关心的是速率的一个分布函数。实际上算起来也很简单:

$$F_M(v) = 4\pi v^2 f_M(v). \quad (3.13)$$

这个函数就是我们熟悉的长相: Maxwell速度分布律。

有了粒子速度的分布, 我们就可以计算粒子一些动力学量的平均值了。一般的, 给定一个概率密度函数, 一个量的平均值的定义是:

$$\bar{A} = \frac{\int P(x) A(x) dx}{\int P(x) dx}. \quad (3.14)$$

分母是为了将概率密度函数归一化。我们的Maxwell分布已经归一化过了, 于是有

$$\bar{A} = \int_{-\infty}^{\infty} F_M(v) A(v) dv. \quad (3.15)$$

几个速率

1. 最概然速率: $v_P = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$.
2. 平均速率: $\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$.
3. 方均根 (rms) 速率: $\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$.

Exercise 3.4 怎么做这两个积分: $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx$? $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$?

Exercise 3.5 [IOAA2016 T2] Gas particles in a planetary atmosphere have a wide distribution of speeds. If the r.m.s. (root mean square) thermal speed of particles of a particular gas exceeds 1/6 of the escape speed, then most of that gas will escape from the planet. What is the minimum atomic weight (relative atomic mass), A_{min} , of an ideal monatomic gas so that it remains in the atmosphere of Titan?

Given, mass of Titan $M_T = 1.23 \times 10^{23}$ kg, radius of Titan $R_T = 2575$ km, surface temperature of Titan $T_T = 93.7$ K.

泻流

一堆气体装在一个盒子里，盒子壁上开了个小洞，粒子可以流出来。问流出来的流量 Γ 是多少？

$$dN = \text{number density of molecules with } v_x \times \text{volume} = n f_M(v_x) dv_x v_x dt dS,$$

$$d\Gamma = n f_M(v_x) v_x dv_x,$$

$$\Gamma = \int_0^\infty n f_M(v_x) v_x dv_x = \frac{1}{4} n \bar{v}.$$

Exercise 3.6 [IOAA2014 T4] An astronaut, with mass M gets out of the space ship for a repairing mission. He has to repair a satellite at rest relative to the space ship, at about $d = 90\text{m}$ away from it. After he finishes his job, he realizes that the systems designed to assure his come-back to shuttle are broken. He also observes that he has air only for 3 minutes. He also notices that he possessed a sealed cylindrical can (base section $S = 30\text{ cm}^2$) firmly attached to his/her glove, with of ice inside. The can is not completely filled with ice.

Determine if the astronaut is able to return safely to the shuttle, before his air reserve is empty, if he manages to open the can in correct direction. Briefly explain your calculations. Note that he cannot throw away anything of its equipment, or touch the satellite.

You may use the following data: $T = 272\text{K}$ is the temperature of the ice in the can, $p = 550\text{ Pa}$ is the pressure of the saturated water vapors at the temperature $T = 272\text{ K}$; $R = 8300\text{ J/(kmol K)}$ is the universal gas constant; $\mu = 18\text{ kg/kmol}$ is the molar mass of the water. ■

Boltzmann分布

Boltzmann分布描述的是气体在一个势场中的密度分布。下面考虑一个非常经典的模型——等温大气模型。

$$dp = -\rho g dz; \quad (3.16)$$

$$dp = k_B T dn; \quad (3.17)$$

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right). \quad (3.18)$$

Exercise 3.7 将重力场下的Boltzmann分布归一化。 ■

Theorem 3.2.2 — Boltzmann分布. 一般的，粒子在外场 $U(z)$ 下的分布遵循Boltzmann分布：

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{U(z)}{k_B T}\right). \quad (3.19)$$

从而我们可以把Maxwell速度分布和Boltzmann位形分布联合起来，表示粒子按照速度和位置的分布，称为Maxwell-Boltzmann分布：

$$f_{MB}(\vec{v}, z) = C_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\epsilon_k(\vec{v}) + \epsilon_p(z)}{k_B T} \right). \quad (3.20)$$

Exercise 3.8 [IOAA2014 D3.A] 科学家发射了一艘太空船来研究两颗太阳系外行星 P_1 和 P_2 的大气层（1百分之百的 CO_2 ）。大气层处于稳定的流体静力学平衡。每当太空船靠近行星时，就会沿垂直方向（行星的半径方向）向对应的行星发射一个无线电探测器。当无线电探测器达到均匀速度时，它就开始测量并传回大气层的压强数据。图3.1左给出了行星 P_1 上探测器测到的大气压（以任意单位）随探测器的下降时间的变化曲线。当探测器着陆到 P_1 表面后，测得行星的温度为 $T_0 = 700$ K，重力加速度为 $g_0 = 10$ m/s²。假定无线电探测器在匀速下降阶段中，该行星的重力加速度为常数。

1. 计算无线电探测器开始匀速下降并传输数据时，它离地面的高度 h_0 。
2. 计算行星 P_1 在海拔 $h = 39.6$ km处的温度。已知普适气体常数为 $R = 8.3$ J/mol K， CO_2 的摩尔质量为 $\mu = 44$ g/mol。
3. 图3.1右边给出了行星 P_2 上探测器测到的大气压（以任意单位）随探测器的下降时间的变化曲线。当探测器着陆到 P_2 表面后，测得行星的温度为 $T_0 = 750$ K，重力加速度为 $g_0 = 8$ m/s²。请画出行星 P_2 上 CO_2 大气层中 $p = p(h)$ 和 $T = T(h)$ 的图像。 ■

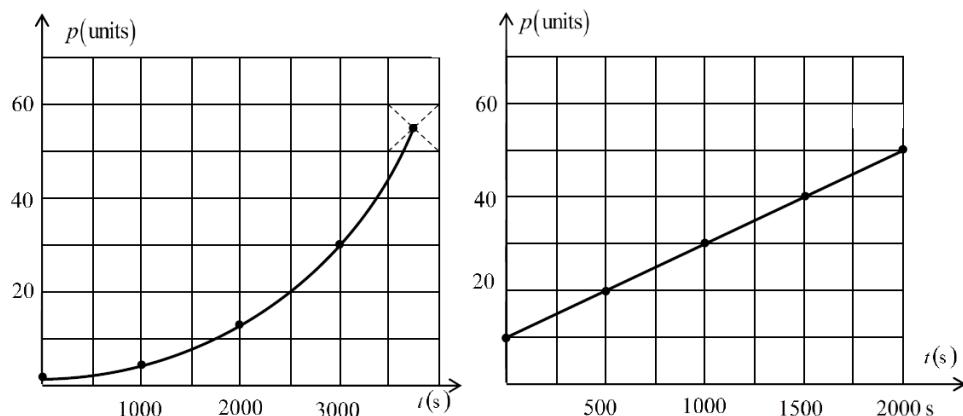


Figure 3.1: 大气压题图

Exercise 3.9 推导恒星大气流体静力学方程：

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}. \quad (3.21)$$

3.2.4 碰撞与散射

气体分子通过相互碰撞才能达到热平衡状态。碰撞能力的大小常用一个碰撞截面 σ

(cross section) 来表示。如果两个分子的有效直径分别为 d_1, d_2 , 则它们之间的碰撞截面

$$\sigma = \pi \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2. \quad (3.22)$$

分子的平均碰撞频率

$$\Gamma = n\sigma\bar{u}, \quad (3.23)$$

平均自由程

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n\sigma}. \quad (3.24)$$

注意这里的 \bar{u} 是相对速度的平均值。一般来说, 质量为 m_1, m_2 的两个分子的相对速度 \bar{u} 的速度分布是:

$$f_M(\vec{u}) = \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\mu u^2}{2k_B T} \right), \quad (3.25)$$

其中

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.26)$$

是约化质量 (reduced mass). 对这个感兴趣的同学我们可以一起讨论一下如何推导 (陈继胜 and 石猛, 2009)。

从而 $\bar{u} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi\mu}}$. 对于同种分子, 有 $\bar{u} = \sqrt{2\bar{v}}$.

Exercise 3.10 LIGO是一个巨大的迈克耳孙干涉仪。为了达到级高精度的灵敏度, 必须要消除干涉腔中Rayleigh散射的影响, 因此LIGO的干涉腔中需要抽成极高真空。实际上, 干涉腔中的空气压强已被降低为 $p = 1 \mu\text{pa}$. LIGO每个臂的长度是 $L = 4\text{km}$, 请估计这个真空度是不是足够好。 ■

Exercise 3.11 [IOAA2015 T14] Suppose we live in a static and infinitely large universe where the average density of stars is $n = 10^9 \text{ Mpc}^{-3}$ and the average stellar radius is equal to the solar radius. Assume that standard Euclidean geometry holds true in this universe. How far, on average, could you see in any direction before your line of sight strikes a star? Please write your answer in Mpc. ■

3.2.5 关于黑体辐射

我们考虑一个盒子, 盒子里装着一堆理想光子气。光子符合Bose-Einstein分布, 根据统计力学计算, 当光子气达到热平衡后, 盒子内光子气的能量密度分布为

$$u(v)dv = \frac{8\pi h v^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hv}{k_B T}} - 1} dv. \quad (3.27)$$

从而单位立体角的能量密度为 $u(v)/4\pi$ 。腔壁不断发射和吸收电磁波，经过一段时间之后，空腔内的电磁辐射将与墙壁达到平衡，电磁辐射与墙壁具有共同的温度。闭合空腔中的辐射可以看成相互间无相互作用的理想光子气体。这个系统里光子数是不守恒的，但是密闭腔中的能量守恒。

我们好奇一盒光子气的能量密度与黑体辐射有什么关系。我们给这个盒子壁上开一个小洞 dA ，辐射可以看做是从这个小洞中泻流出的光子。注意此处泻流的流量可能不是 $\Gamma = \frac{1}{4}n\bar{v}$ ，因为这个泻流公式是用Maxwell分布推出的。我们知道在球坐标中，立体角

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi. \quad (3.28)$$

则在 θ, ϕ 方向的一个小立体角 $d\Omega$ 内包含的能量是

$$\frac{1}{4\pi} u(\omega) c \cos\theta dt dA d\Omega dv, \quad (3.29)$$

因此我们发现，如果定义一个量为

$$\frac{dE(\theta, v)}{\cos\theta dt dA d\Omega dv}$$

则这个量只与盒子里的光子能量密度有关。这是辐射的intrinsic的性质，我们很喜欢。于是定义这个量为辐射强度

$$B(v) = \frac{2hv^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hv}{k_B T}} - 1}. \quad (3.30)$$

如果我们对 $dE(\theta, v)$ 对于立体角积分，我们可以得到一个跟方向无关的辐射流：

$$r_B(v) = \frac{dE(v)}{dt dA dv} = B(v) \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi, \quad (3.31)$$

$$r_B(v) = \frac{2\pi hv^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hv}{k_B T}} - 1}. \quad (3.32)$$

这个玩意的物理意义是单位表面积单位时间单位频率发出的能量。

Exercise 3.12 请问 $r_B(v)$ 与 $r_B(\lambda)$ 是什么关系？ ■

Exercise 3.13 [IOAA2014 T6] From the radiation emitted by a star, two radiations with wavelength values in a narrow range $\Delta\lambda \ll \lambda$ are studied, i.e. the wavelength have values between λ and $\lambda + \Delta\lambda$. According to Planck's relationship (for an absolute blackbody), the following relation defines, the energy emitted by star in unit time, through a unit area of its surface, per unit wavelength interval:

$$r_B(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}. \quad (3.33)$$

The spectral intensities of the radiation with wavelengths λ_1 and respectively λ_2 , both within the range $\Delta\lambda$ measured on Earth are $I_1(\lambda_1)$ and $I_2(\lambda_2)$ respectively.

Find out the relation between wavelength λ_1 and λ_2 , if $I_1(\lambda_1) = 2I_2(\lambda_2)$ when $hc \ll k_B T$. ■

3.3 热力学

刚才我们讲了半天，实际上讲的是统计物理的东西。下面要介绍热力学的体系。热力学通过几大定律以及响应函数等实验结论，就可以很好地描述一个热力学系统。但这里因为篇幅所限不能详细介绍，大家可以参考林宗涵先生的《热力学与统计物理》（北京大学出版社）。

Theorem 3.3.1 — 热力学第一定律.

$$dU = dW + dQ + \mu dN. \quad (3.34)$$

内能 U 是一个态函数，而且是一个广延量。注意，焦耳做实验证明了理想气体的内能与其体积无关。如果只有体积功，那么 $dW = -pdV$ 。学了熵之后可以有 $dQ = TdS$ 。最后一项是粒子流入导致的。

3.3.1 热容量

给一个物体加热，物体的温度就会升高。升高的效率用热容量来表示。我们常见的热容量有等容热容和等压热容，分别定义为：

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V; \quad (3.35)$$

$$C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p. \quad (3.36)$$

在定义另一个态函数，焓 (Enthalpy) $H = U + pV$ 之后，我们有

$$C_V = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_V; \quad (3.37)$$

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p. \quad (3.38)$$

对于理想气体，这两个热容有关系：

$$C_p - C_V = nR. \quad (3.39)$$

3.3.2 理想气体的绝热过程

绝热过程，顾名思义，就是这个体系没有热量输入和输出。因此热力学第一定律写为

$$C_V dT = -pdV,$$

根据理想气体方程有

$$pdV + Vdp = nRdT,$$

从而有

$$\gamma p dV + V dp = 0,$$

$$pV^\gamma = \text{Const.}$$

其中定义了一个常数 $\gamma = C_p/C_V$ 叫做绝热指数 (Poisson比)。绝热指数可以通过实验测出。

Exercise 3.14 [IOAA2015 TL3] Suppose a static spherical star consists of N neutral particles with radius R (see Figure 3.2), with $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, satisfying the following EoS:

$$pV = Nk \frac{T_R - T_0}{\ln(T_R/T_0)}. \quad (3.40)$$

where p and V are the pressure inside the star and the volume of the star respectively, k is the Boltzmann constant. T_R and T_0 are the temperatures at the surface $r = R$ and the temperature at the center $r = 0$ respectively. Assume that $T_R \leq T_0$.

1. Simplify the stellar equation of state (3.40) if $\Delta T = T_R - T_0 \cong 0$ (this is called ideal star). (Hint: Use the approximation $\ln(1+x) \cong x$ for small x)

Suppose the star undergoes a quasi-static process, in which it may slightly contract or expand, such that the above stellar equation of state (3.40) still holds. The star satisfies first law of thermodynamics

$$Q = \Delta Mc^2 + W, \quad (3.41)$$

where Q , M , and W are heat, mass of the star, and work respectively, while c is the light speed in the vacuum and $\Delta M = M_{final} - M_{initial}$. In the following we assume T_0 to be constant, while $T_R = T$ varies.

2. Find the heat capacity of the star at constant volume C_V in term of M and at constant pressure C_p expressed in C_V and T . (Hint: Use the approximation $(1+x)^n \cong 1+nx$ for small x)

Assuming that C_V is constant and the gas undergoes the isobaric process so the star produces the heat and radiates it outside to the space.

3. Find the heat produced by the isobaric process if the initial temperature and the final temperature are T_i and T_f , respectively.

For the next parts, assume the star is the Sun.

4. If the sunlight is monochromatic with frequency $f = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$, estimate the number of photons radiated by the Sun per second.

5. Calculate the heat capacity C_V of the Sun assuming its surface temperature varies from 5500 K to 6000 K in one second.

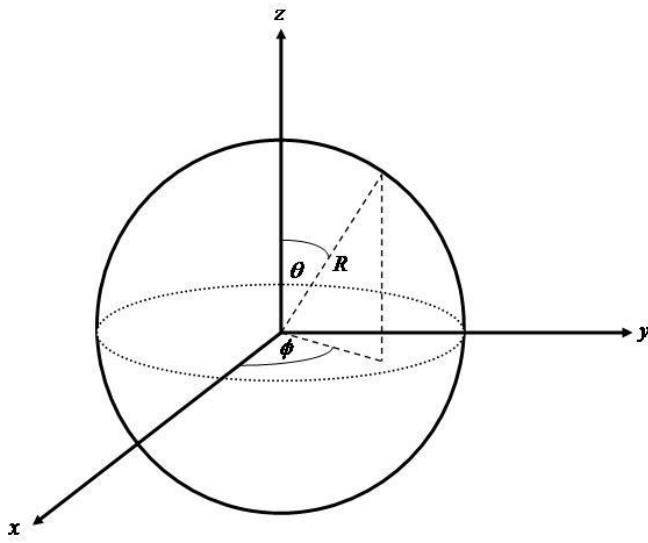


Figure 3.2: 恒星的热容

3.3.3 理想气体的声速

什么是声速呢？声音是纵波，也就是压力波。在一个弹性介质中，信号以压力波的形式传播。我们好奇这种压力波传播的速度如何。弹性介质力学一般可以用流体力学方程来描述。我们先写几个：

Theorem 3.3.2 — 流体力学方程. 连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.42)$$

受力方程：

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla p. \quad (3.43)$$

对于非常弱的扰动的情况，我们可以线性化上述PDEs。考虑对空气做一个小扰动，扰动在空气中传播。则有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot (\vec{v}),$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p.$$

我们搞一个描述小扰动项的参数

$$u = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0},$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

两边对 t 求偏导得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p = 0.$$

最后

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 u = 0. \quad (3.44)$$

其中

$$c_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}. \quad (3.45)$$

Exercise 3.15 证明引力塌缩效应时标为 $\frac{1}{\sqrt{G\rho}}$. ■

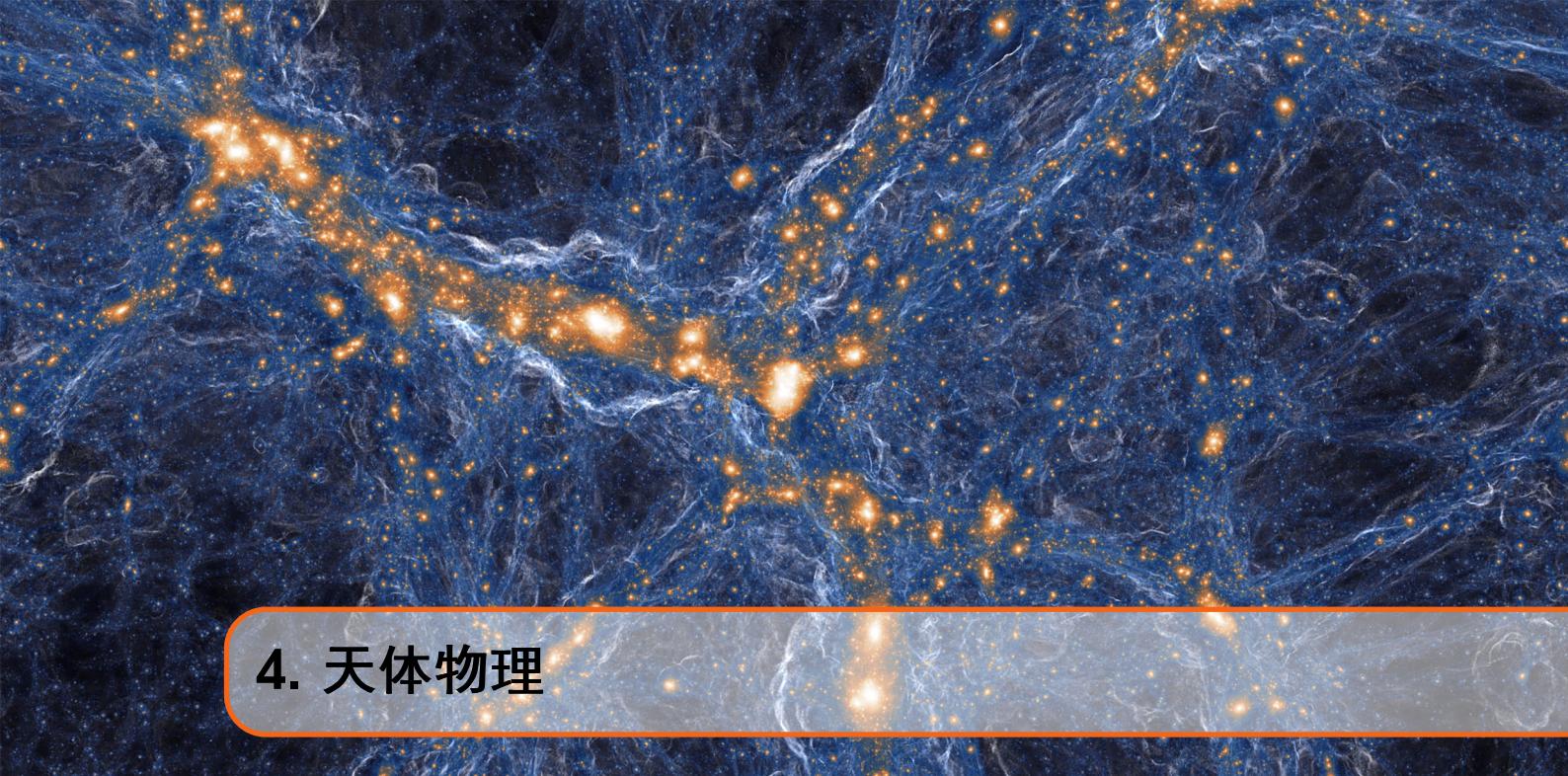
第二部分：天体物理和宇宙学

4 天体物理 45

- 4.1 天体力学
- 4.2 引力透镜

5 宇宙学 53

- 5.1 相对论宇宙学基础
- 5.2 宇宙的演化
- 5.3 宇宙学中的距离
- 5.4 超新星宇宙学
- 5.5 大爆炸宇宙学



4. 天体物理

4.1 天体力学

Exercise 4.1 在二体系统合并过程中会发出引力波。现在我们考虑一个二体系统绕其质心做圆轨道运动，相距为 a ，轨道周期为 T ，两星质量分别为 m_1, m_2 . 引力波向外辐射能量的功率为

$$L_{gw} = -\frac{32}{5c^5} G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2) a^{-5}. \quad (4.1)$$

人们通过引力波直接可测量一个量，叫做啁啾质量 (**chirp mass**)，定义为

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}. \quad (4.2)$$

试证明：

$$\mathcal{M} = \left[-\frac{5}{192\pi} \frac{dT}{dt} \right]^{3/5} \frac{c^3 T}{2\pi G}. \quad (4.3)$$

■

4.2 引力透镜

狭义相对论告诉我们所有的惯性参考系都是等价的，真空中的光速在任何惯性系中都是常数。那么非惯性系又是怎样的呢？我们先来考虑一个力学系统：在一个封闭的与外界隔离电梯中一片真空，穿着宇航服的我们稳稳地站在电梯的地上，甚至还能踢个球。那么，我们有没有办法知道电梯是静止在一个引力场中，还是在空旷的宇宙中加速呢？爱因斯坦认为答案是否定的，他认为非惯性系和引力是等价的，这就是广义相对论的基本

原理。力学系统中尚是如此，那么加入电磁学后我们也不应该区分出引力场和非惯性系。

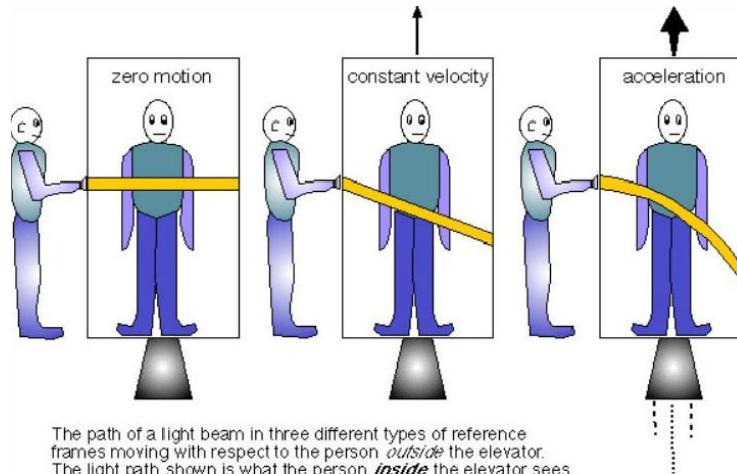


Figure 4.1: “电梯”思想实验，图来自[StackExchange](#)

还是在电梯中，假设一束光从外面射进来（图4.1, sorry for the ugly figure），外面的光源相对地面静止而电梯可以有速度和加速度，假设光只在二者位置重合的瞬间（或是说光源对准孔的一瞬间）射入。如图5.1左，在电梯相对地面静止时电梯内的观测者应看到光垂直射出，而在有速度无加速度的电梯中看到光有向下的速度而仍然直线传播（图4.1中）。在图4.1右中，当电梯有向上的加速度时，光向下的速度会逐渐增大，为了保持光速不变只能向下“转向”。这是假设电梯有加速度的结果，那么光在等效的引力场下应该表现出同样的性质，即光会向引力源偏折。在宇宙空间中，天体的引力场是普遍而不可忽略的。



Figure 4.2: 电影《星际穿越》中那个著名的黑洞卡冈图雅。黑洞上下两边的光环其实都是背后的吸积盘，但是从背后发射的光由于黑洞过强的引力而偏向我们，看起来就像在上下两边一样。这个黑洞是在Kip Thorne的帮助下由计算机模拟而成。Kip Thorne在2017年由于对引力波探测的卓越贡献而获诺贝尔奖。

Definition 4.2.1 — 引力透镜效应. 光源在发出的光在经过引力源时便会汇聚，使得远处的观察者看到的光源产生畸变，这就是引力透镜效应。

在同事的百般请求下，爱因斯坦于1936年在*Science*上发表论文预言了自己认为并不能被观测到的非常trivial的引力透镜现象。严格的推导需要用到广义相对论，为了方便记忆这里用牛顿力学给出一种 极其不严谨甚至错误 的推导。假设真空中有一个质量为 M 的质点，一个光子沿着和它相距 b 的直线从无穷远靠近再射向无穷远。整个过程中光子速度恒为 c ，这样就可以算出整个过程中光子由于引力获得的冲量，从而可以得到光子在垂直运动轨迹方向的速度。由于这个速度相对光速很小，我们直接把它当作垂直方向的速度，而总速度不变，这样就可以算出光子运动偏转的角度

$$\hat{\alpha}_{\text{Newton}} = \frac{2GM}{bc^2}. \quad (4.4)$$

这是一个错误的结果，严格按照广义相对论计算的结果是这个值的两倍

$$\hat{\alpha} = 2\hat{\alpha}_{\text{Newton}} = \frac{4GM}{bc^2}. \quad (4.5)$$

为了说明引力透镜的情形，简化的光路图见图4.3。其中 O 是观测者， D 是引力源（透镜）， S 是光源，各个长度及角度已经标在图中。注意其中的 $\vec{\alpha}$ 的帽子。图中有显然的几

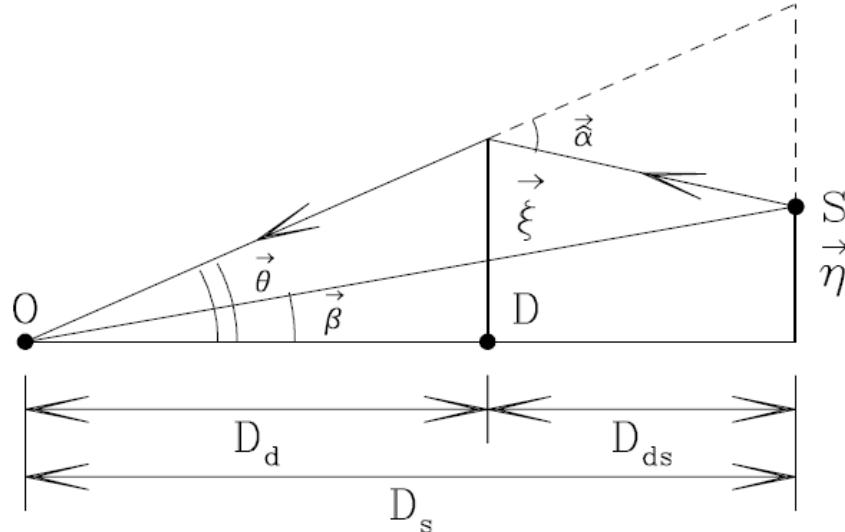


Figure 4.3: 引力透镜效应示意图(Mao, 2008)

何关系：

$$\vec{\eta} + \vec{\alpha} \cdot D_{ds} = \vec{\xi} \cdot \frac{D_s}{D_d}, \quad (4.6)$$

上式两端同除\$D_s\$，得到角度之间的关系

$$\vec{\beta} + \vec{\alpha} = \vec{\theta}, \quad (4.7)$$

其中

$$\vec{\alpha} = \vec{\hat{\alpha}} \cdot \frac{D_{ds}}{D_s}. \quad (4.8)$$

这里由于对称性可以去掉角度符号上的箭头。代入 $\hat{\alpha}$ 的具体表达式(5.2)，将 α 变形为

$$\alpha = \frac{D_{ds}}{D_s} \hat{\alpha} = \frac{D_{ds}}{D_s} \frac{4GM}{bc^2} \equiv \frac{\theta_E^2}{\theta}. \quad (4.9)$$

这里我们定义了

Definition 4.2.2 — 爱因斯坦角 Einstein radius.

$$\theta_E = \frac{r_E}{D_d} \approx 0.55 \text{ mas} \sqrt{\frac{1 - D_d/D_s}{D_d/D_s}} \left(\frac{D_s}{8 \text{ kpc}} \right)^{-0.5} \left(\frac{M}{0.3 M_\odot} \right)^{0.5} \quad (4.10)$$

于是角度关系(4.7)变为

$$\beta + \frac{\theta_E^2}{\theta} = \theta. \quad (4.11)$$

再简化记号： $r_s \equiv \beta/\theta_E, r \equiv \theta/\theta_E$ ，上式变为

$$r_s + \frac{1}{r} = r. \quad (4.12)$$

解得

$$r_\pm = \frac{r_s \pm \sqrt{r_s^2 + 4}}{2}. \quad (4.13)$$

这并不是说光源就只成一个像，这只是在讨论的三个点组成的平面上的两个像，真正的像应该是一个畸变的光源。但我们仍然可以通过这两个像研究畸变后的像的大小：它们的数量级在 $r_s < 1$ 时一定是一致的。这两个像的角距离

$$\Delta\theta = \theta_E(r_+ - r_-) = \theta_E \sqrt{4 + r_s^2}. \quad (4.14)$$

显然， $\Delta\theta$ 和引力源的质量 M 密切相关。越大的 M 意味着更大的 $\Delta\theta$ 。天体的质量横跨数十个数量级，因此引力透镜效应的强弱差距也非常大。从强弱考虑我们将引力透镜分为三类：能够产生两个或多个像或环或弧结构的是强引力透镜，一般在光源和观测者的连线通过星系核心的时候产生；不能看到多个像或者其它明显结构，但是由于增亮了背景天体（见下文）而导致观测到的天体增多的是弱引力透镜，一般由宇宙物质的密度场的扰动产生；最后是微引力透镜：对于引力源为恒星级天体甚至行星的情形，这个值太小了，一般远小于地面的观测能力，我们很难看到具体的像的结构。但是实际天体是有面积的而非一个质点，像也是有宽度的，像的面积比天体的面积大。而且引力透镜效应不会改变单位面积的亮度，因此虽然我们看不到具体的像，但是我们可以观测到光源天体突然变亮。接下来我们重点讨论微引力透镜中的这个效应。

考虑光源的一段小圆弧 $dr_s \times r_s \Delta\phi$ ，如图4.5所示。经引力透镜放大后，产生的像



Figure 4.4: 一颗爆炸的超新星的四个影像。图片来源：NASA/ESA

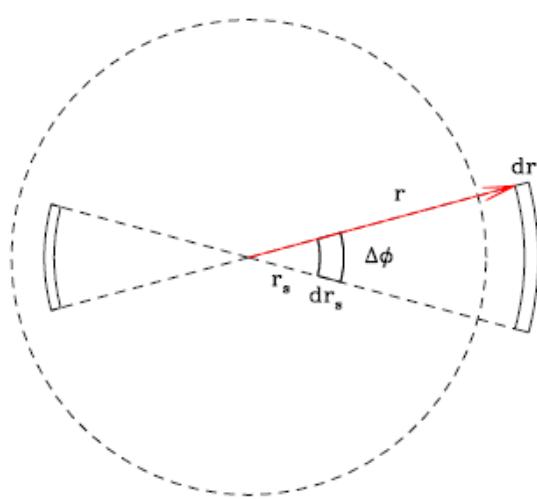


Figure 4.5: 引力透镜中的亮度变化示意(Mao, 2008)

为 $dr \times r\Delta\phi$ 。于是可以算出放大率

$$\mu = \frac{dr \times r\Delta\phi}{dr_s \times r_s\Delta\phi} = \frac{r}{r_s} \frac{dr}{dr_s}; \quad (4.15)$$

由于有两个像，总的放大率为

$$\mu = |\mu_+| + |\mu_-| = \left| \frac{\left(r_s + \sqrt{r_s^2 + 4}\right)^2}{4r_s \sqrt{r_s^2 + 4}} \right| + \left| -\frac{\left(r_s - \sqrt{r_s^2 + 4}\right)^2}{4r_s \sqrt{r_s^2 + 4}} \right| = \frac{r_s^2 + 2}{r_s \sqrt{r_s^2 + 4}}. \quad (4.16)$$

当光源和透镜在天球上很远时， $r_s \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow 1$, 并没有放大。但是二者很近时， r_s 很小， μ 按 $1/r_s$ 的行为增大。

微引力透镜效应在光源和引力源有相对运动并穿过时被探测到。我们来看看这时会发生什么。这里为了方便假设透镜不动，光源从左向右运动（图4.6左）。这里假设匀速运动，自然有

$$\mu(t) = \frac{r_s^2(t) + 2}{r_s(t) \sqrt{r_s^2(t) + 4}}, \quad r_s(t) = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{t - t_0}{t_E}\right)^2}. \quad (4.17)$$

根据这个式子我们就可以画出微引力透镜中标准的亮度变化曲线（图4.6右）。要是在观测中发现了类似的光变曲线，这可能是一颗未知的恒星；若是大曲线里面还有一个小曲线（图4.7），这很有可能是你发现了一颗未知的系外行星！这时候你就可以先按捺一下激动的心情，拟合曲线来看看这次事件到底是怎么回事了。

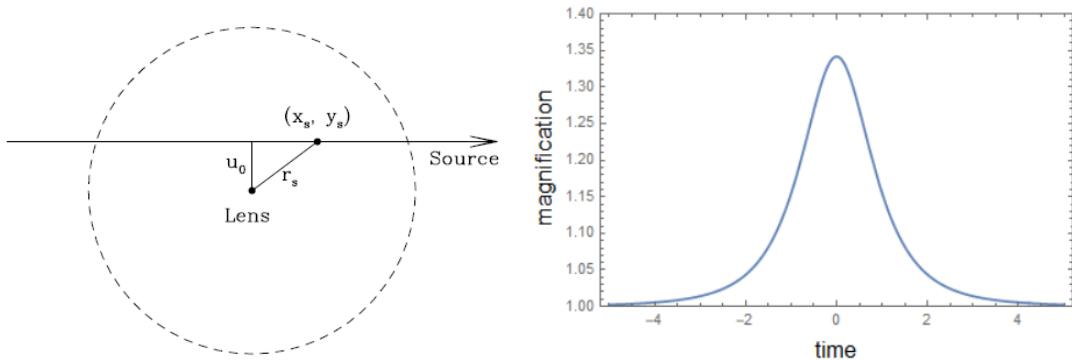


Figure 4.6: 左图是光源相对透镜的运动的示意图(不用想了，还是来自Mao, 2008)，右图是比较典型的光变曲线（来自bing搜索）。

Exercise 4.2 [IOAA2016 T10] 爱因斯坦的广义相对论预言了大质量天体会引起光线弯曲。如图4.8所示，为了简化计算，我们假设光线弯曲是在光线传播过程中的某一个点完成的。弯曲造成的角度变化 θ_b 可以表示为 $\theta_b = 2R_{sch}/r$ ，其中 R_{sch} 表示引起透镜效应的天体（透镜体）的Schwarzchild半径。我们把入射光线距离透镜体中心所在的主光轴(x-axis)的距离称为impact factor，用 r 表示。

因此一个大质量天体的作用就像一个透镜。来自透镜体无限远处并有着相同的impact factor r 的光线在经过透镜体之后将被汇聚于主光轴上的一点，这个点距离透镜体中心

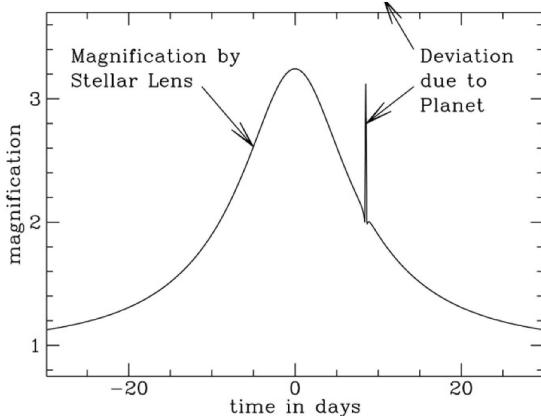


Figure 4.7: 行星产生的微引力透镜（来自bing搜索）。

的距离为 f_r 。而 f_r 为 r 的函数，当 r 等于天体半径时， f_r 最小。由于引力透镜的作用，一个位于焦点上的观测者得到的图像会被大幅增强。这种情况下大质量天体会被当作一个引力透镜望远镜，对遥远的信号实现放大效果。

1. 考虑我们的太阳作为引力透镜望远镜的可能性。请计算太阳作为引力透镜体能够聚焦光线的最短距离，即太阳中心到焦点的最短距离 f_{min} （以天文单位AU为单位）。
2. 现将一个半径为 a 的小圆形探测器固定在主光轴上的一点，这个点到日心的距离为 f_{min} ，探测器的接收面与主光轴垂直。只有环绕在太阳周围，宽度为 h ($h \ll R_\odot$) 的圆环范围内的光线才能被弯曲并被这个探测器接收到。请画出这个物理情景图并标明各已知量。请计算出圆环外径处所对应的光线聚焦的焦距表达式，并给出小角近似下接收器半径的表达式。探测器的放大系数的定义是：由于引力透镜效应而射入该探测器的光线的强度与没有太阳时该探测器所接收到的光线强度之比。请以 R_\odot 和 a 为参量表达探测器的放大系数 A_m 。
3. 考虑一种球形质量分布的情况，例如星系团中的暗物质，光线能够穿透这一部分的质量团块，同时也会发生引力弯曲。为方便计算，假设影响因子为 r 的引力弯曲，只需要考虑半径在 r 以内的质量 $M(r)$ 的引力影响。在什么样的质量分布 $M(r)$ 下，它所对应的引力透镜效果才会与一个理想的光学凸透镜相同？ ■

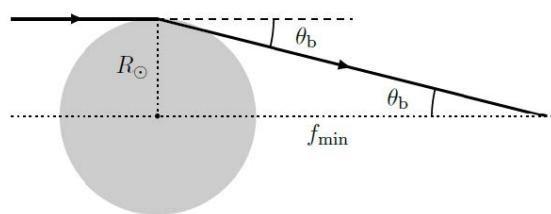
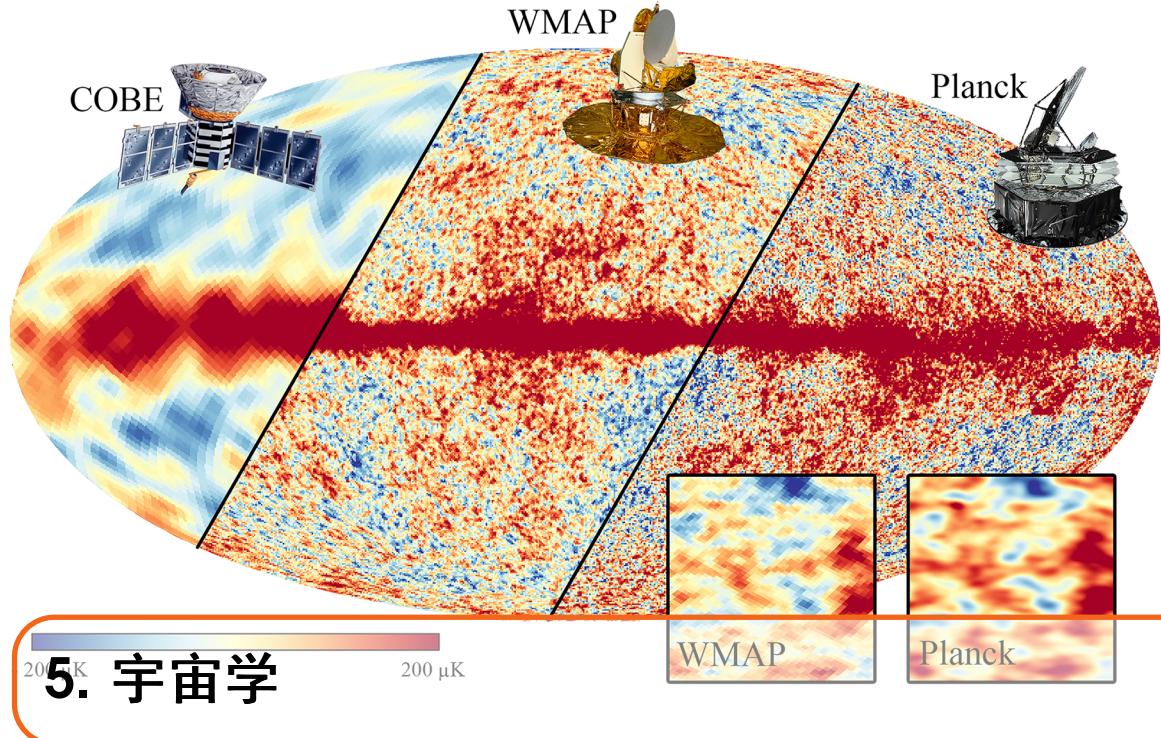


Figure 4.8: 引力透镜题图



5.1 相对论宇宙学基础

随着哈勃发现宇宙加速膨胀，宇宙学 (cosmology) 诞生了。到目前为止，广义相对论在各个场合仍然精确地运行着，在宇宙学中也不例外。下面就介绍一下广义相对论框架下的宇宙学。参考书目：Carroll, 1997; Peacock, 1999; Ryden, 2003.

5.1.1 宇宙学原理

Theorem 5.1.1 — Cosmological Principle. Our Universe is homogeneous and isotropic.

Exercise 5.1 下面哪个图是homogeneous，哪个图是isotropic? ■

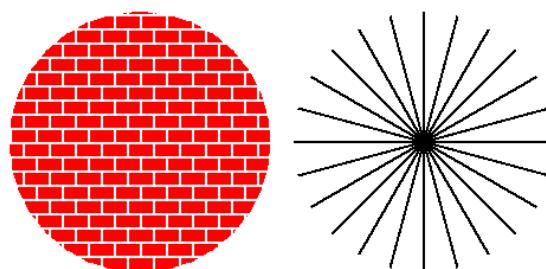


Figure 5.1: Which one is homogeneous? Which one is isotropic?

5.1.2 度规和Einstein场方程

有了宇宙学原理CP，我们还需要一个描述时空的工具，那就是度规(metric)。没有物

质的Minkovski时空的度规是

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

满足宇宙学原理的最简单形式的度规叫做**Robertson-Walker度规**。RW度规是我们建立宇宙学的基石（从而CP更是基石了）。RW Metric comes from the Cosmological Principle (CP) which requires that the metric must have the form as

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[d\omega^2 + (S_k(\omega)d\Omega^2)^2 \right], \quad (5.1)$$

where $S_k(\omega)$ is a function depends on the curvature of the universe:

$$S_k(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}\omega) & k < 0; \\ \omega & k = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}\omega) & k > 0; \end{cases} \quad (5.2)$$

为了方便，今天的尺度因子(**scale factor**) $a(t)$ 规定为1.

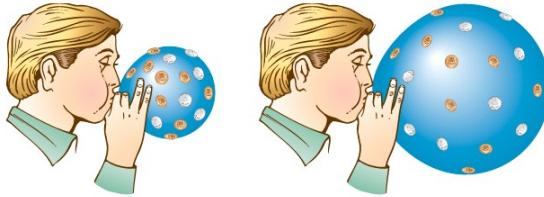


Figure 5.2: Balloon Analogy of Expanding Universe

实际上, $S_k(\omega)$ 就是下面这个ODE的解

$$2f'(x)f(x) = f(2x).$$

在大多数文献中, RW度规并不像我上面写的这样, 而是

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left(\frac{d\omega^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (5.3)$$

其实这两者是等价的, 只需要做一个替换: 将 r 用新变量 ω 替换, 它们之间满足

$$d\omega = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}.$$

解出这个常微分方程ODE, 我们发现 r 与 ω 之间的关系实际上就是(5.2)所描述的:

$$r(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}\omega) & k < 0; \\ \omega & k = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}\omega) & k > 0; \end{cases} \quad (5.4)$$

把这个关系代入(5.3), 它很自然地回到了我一开始写的那个形式。

注意, 如果做如下的变量替换:

$$\begin{aligned} k &\rightarrow \frac{k}{|k|}, \\ \omega &\rightarrow \sqrt{|k|}\omega, \\ r &\rightarrow \sqrt{|k|}r, \\ a &\rightarrow \frac{a}{\sqrt{|k|}} \end{aligned}$$

那么(5.1)是不变的(Carroll, 1997)。所以, 形容曲率的真正有用的量是 $k/|k|$. 因此曲率只有三种情况: $k = -1, 0, 1$, 分别对应open, flat and closed Universe. 在以后的讨论中, 我们都用 ω 形式的RW度规。我们回过头再看看RW度规, 其中 $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ 是角度微元, $d\chi^2 = d\omega^2 + (S_k(\omega)d\Omega)^2$ 这一项通常被称为共动坐标项。

得到了满足宇宙学原理的度规之后, 我们可以由度规算出Riemann张量, 从而得到Einstein张量。如果给定物质分布, 则Einstein场方程(5.5)两端都已知, 可以求解宇宙。这是描述宇宙动力学的方程¹。

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

其中的Einstein张量是

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

The curvature in $S_k(\omega)$ only reveals the curvature of spatial part, not the total scalar curvature which is determined by the distribution of matter. One can change the curvature of spatial part by substitutions.

5.1.3 宇宙的动力学

对宇宙中的物质组分进行一定的假设之后, 我们就得到了能动量张量。Einstein场方程在宇宙学中可以化简为两个简单的常微分方程 (可见, 宇宙学原理起了多么大的用处), 我们称之为Friedmann Equation和Acceleration Equation。

Definition 5.1.1 — Friedmann Equation.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (5.6)$$

Definition 5.1.2 — Acceleration Equation.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (5.7)$$

Note that curvature k has been canceled out in acceleration equation.

在Friedmann Equation中, 曲率 k 的确具有 $[L^{-2}]$ 的量纲。

¹徐仁新: 无论是宇宙学, 还是致密天体, 都逃不出Einstein场方程的手掌心。

Exercise 5.2 闲着也是闲着^a, 不如玩个数学游戏。对Friedmann Equation求导, 再代入Acceleration Equation, 就能得到一个有趣的方程, 称之为**Fluid Equation**:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p/c^2) = 0. \quad (5.8)$$

^a此为北大物理学院教授马中水的名言。

宇宙中的不同物质组分有不同的性质。就像热力学中所作的那样, 物质的性质只有通过实验才能得到。因此仅仅由上面两个式子是没办法解出拥有复杂组分的宇宙的。描述物质性质的方程我们通常称之为**物态方程 (Equation of State, EoS)**. 物态方程在物理学研究的方方面面都起着至关重要的作用。目前人们还尚未知晓致密天体确切的物态方程。在宇宙的宏观层面, 物态方程相对来说就比较简单了。宇宙中的物态主要分为: dust, radiation, dark energy². 它们的物态方程各不相同。简单来讲 (物理学家总是从简单的开始), 我们可以形式上假设某种物质的物态方程为

Definition 5.1.3 — Equation of State.

$$p = w\rho c^2. \quad (5.9)$$

当然, 并不是所有的物质都能写成这个形式。幸运的是, 刚才提到的三种组分对应的 w 如下: Dust: $w = 0$; radiation: $w = \frac{1}{3}$; Λ : $w = -1$.

我们现在认真研究一下Friedmann方程。根据它可以定义**临界密度 (Critical density)**:

Definition 5.1.4 — Critical density.

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (5.10)$$

接下来我们定义各组分的密度参数 (density parameters)。密度参量是无量纲的。一个物理系统的特性常用无量

$$\Omega_m = \frac{8\pi G \rho_m}{3H^2}, \quad (5.11)$$

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{a^2 H^2}, \quad (5.12)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}. \quad (5.13)$$

注意, 宇宙学常数的密度 ρ_Λ 是这样定义的:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}.$$

²以下讨论中, 我们暂且认为dark energy全部都是宇宙学常数, 而且matter都是cold matter, 那么这个宇宙学模型称之为 Λ CDM cosmology.

Exercise 5.3 根据以上关于density parameters的定义, 请从Friedmann方程(5.6)出发推出一个显而易见的式子: $\Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1$. 我们常常把 $\Omega_m + \Omega_{\Lambda 0}$ 记为 Ω_{tot} 。 ■

Exercise 5.4 将宇宙学常数密度 ρ_Λ 的定义和 Acceleration Equation 以及 EoS 联系起来, 证明宇宙学常数的 $w = -1$. ■

Density parameters的定义使得我们说话十分方便。那么可以把之前得到的 (5.13)中的曲率 k 改写为 Ω_k , 然后得到:

$$S_k(\omega) = \begin{cases} \frac{D_H}{\sqrt{\Omega_k}} \sinh(\sqrt{\Omega_k} \frac{\omega}{D_H}) & k < 0; \\ \omega & k = 0; \\ \frac{D_H}{\sqrt{-\Omega_k}} \sin(\sqrt{-\Omega_k} \frac{\omega}{D_H}) & k > 0; \end{cases} \quad (5.14)$$

搞笑的是 k 和 Ω_k 符号相反。

Exercise 5.5 [IOAA2016 T3] Cosmological models indicate that radiation energy density, ρ_r , in the Universe is proportional to $(1+z)^4$, and the matter energy density, ρ_m , is proportional to $(1+z)^3$, where z is the redshift. The dimensionless density parameter, Ω , is given as $\Omega = \rho/\rho_c$, where ρ_c is the critical energy density of the Universe. In the present Universe, the density parameters corresponding to radiation and matter, are $\Omega_{r0} = 10^{-4}$ and $\Omega_{m0} = 0.3$, respectively.

1. Calculate the redshift, z_e , at which radiation and matter energy densities were equal.
2. Assuming that the radiation from the early Universe has a blackbody spectrum with a temperature of 2.732 K, estimate the temperature, T_e , of the radiation at redshift z_e .
3. Estimate the typical photon energy, E_ν (in eV), of the radiation as emitted at redshift z_e .

■

5.2 宇宙的演化

观测宇宙学博大精深, 下面只介绍一些基本概念和皮毛, 最后举一个超新星宇宙学的例子。感兴趣的同学可以在以后的科研中慢慢学习。参考书目除了5.1节提供的之外还有: Serjeant, 2010.

5.2.1 Hubble距离和时间

在介绍观测宇宙学之前, 为了说话方便, 我们定义一些黑话, 这样可以防止外行听懂我们在说什么。宇宙学尺度上的时间和距离都是“天文数字”, 如何把它们写的小一点呢?

宇宙学中的一个基本参数就是**Hubble常数 (Hubble parameter)**。我们之前已经有了尺度因子的定义, 这里就很方便定义Hubble parameter了:

Definition 5.2.1 — Hubble parameter.

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (5.15)$$

这里千万注意，所谓的哈勃常数 (*Hubble constant*) 真的不是常数，因此用 Hubble parameter 更为恰当。

哈勃常数可以通过各种方法进行测量。目前大家普遍采用的一个测量值是

$$H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}.$$

R 在宇宙学中，下标 0 表示某参量“现在”的值。

哈勃常数的问题并没有完。根据 CMB 测量得到的哈勃常数比其他方法测出的都要偏小一些。2018 年 7 月 17 日 Planck 卫星团队公布的最新数据 (Planck Collaboration et al., 2018) 仍然与其他方法测量得到的哈勃常数有 3.6σ 的偏差 (见图 5.3)。这给宇宙学提出了一个严峻的挑战。到底是宇宙学框架有问题，还是测量有问题呢？为了说话方便，我们常用一个约化

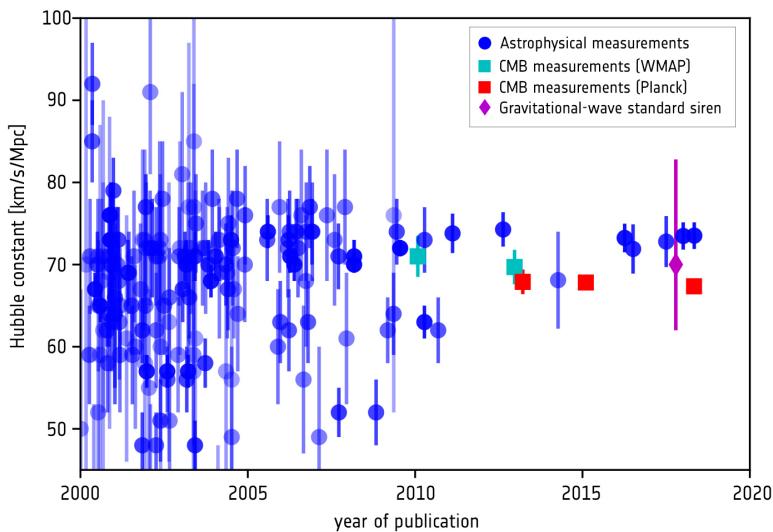


Figure 5.3: Planck 卫星对 H_0 的测量与其他方法之间存在偏差

的哈勃常数 h :

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}.$$

观察哈勃常数的量纲，很容易造出一些量。

Definition 5.2.2 — 哈勃时间 Hubble time. 哈勃时间 t_H 是哈勃常数 H_0 的倒数：

$$t_H = \frac{1}{H_0} = 9.78 \times 10^9 h^{-1} \text{ yr}. \quad (5.16)$$

Definition 5.2.3 — 哈勃距离 Hubble distance. 哈勃距离 D_H 是哈勃时间 t_H 乘以光速 c :

$$D_H = \frac{c}{H_0} = 3000 h^{-1} \text{ Mpc}. \quad (5.17)$$

当前宇宙的年龄差不多就是一个哈勃时间，那么我们能看到的宇宙差不多也就是3000 Mpc了。

5.2.2 红移和Time Dilation

红移 (redshift³) 是观测上最容易得到的量了。在宇宙学中，我们讨论的红移不是多普勒效应引起的，而是宇宙学效应，从而称之为宇宙学红移 (Cosmological redshift)。光子走测地线，因此时空间隔总是0. 假设一个遥远星系向我们发了一个光子，这个光子沿我们实现方向传播。在RW度规中取 $ds = 0$ ，对于径向运动的光子，则有

$$\frac{cdt}{a(t)} = d\omega.$$

对上式积分，下限是光子发出的时刻 t_e ，上限是我们接收到光子的时刻 t_0 :

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = -\frac{1}{c} \int_{\omega_e}^0 d\omega.$$

隔了一阵子 Δt_e ，第二个光子发出，同样有

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = -\frac{1}{c} \int_{\omega_e}^0 d\omega.$$

从而有

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{dt}{a(t)}.$$

根据积分中值定理，当 Δ 很小的时候，自然有

$$\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t_e}{a(t_e)},$$

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1+z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}.$$

Definition 5.2.4 — 宇宙学红移. 如果令现在的scale factor $a(t_0) = 1$ ，则得到宇宙学红移的常见形式:

$$a(z) = \frac{1}{1+z}. \quad (5.18)$$

这里面还有一个效应叫做time dilation。根据上面的推导，我们发现接收到的时间微元 Δt_0 比发射光子时候的时间微元 Δt_e 大了 $1+z$ 倍。这就是time dilation。当年Paczynski和Lamb等人争论伽马射线暴距离 (Lamb, 1995) 的时候就用到了这个机制来判断距离。

³Redshift也是iOS平台上的一个好用的星图软件，里面提供了很多信息。

Exercise 5.6 [TRUE / FALSE] A photon is moving in free space. As the Universe expands, its momentum decreases. ■

Exercise 5.7 [IOAA2017 T4] A radio telescope is equipped with a receiver which can observe in a frequency range from 1.32 to 1.52 GHz. Its detection limit is 0.5 mJy per beam for a 1-minute integration time. In a galaxy survey, the luminosity of the HI spectral line of a typical target galaxy is 10^{28} W with a linewidth of 1 MHz. For a large beam, the HI emitting region from a far-away galaxy can be approximated as a point source. The HI spin-flip spectral line has a rest-frame frequency of 1.42 GHz.

What is the highest redshift, z , of a typical HI galaxy that can be detected by a survey carried out with this radio telescope, using 1-minute integration time? You may assume in your calculation that the redshift is small and the non-relativistic approximation can be used. Note that $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$. ■

Let λ_{obs} , λ_e , λ_{cos} be the wavelength we observe, the wavelength when emitted and the wavelength without proper motion. Thus

$$1+z = \frac{\lambda_{cos}}{\lambda_e}$$

is the redshift due to cosmological effect, and

$$1+z_{pro} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{cos}}$$

is the redshift due to proper motion of galaxy.

The total redshift we observe is

$$1+z_{obs} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_e} = (1+z_{pro})(1+z).$$

Assume the velocity of proper motion is much less than c , thus $z_{pro} = v_{pro}/c$. Hence

$$\sigma_{z_{obs}} = (1+z) \frac{\sigma_{v_{pro}}}{c}.$$

Exercise 5.8 [IOAA2017 T9] 坎农等学者利用甚大基线阵对一个盘状星暴星系IRAS 0833+6517中的HI气体进行了观测。这个星系到地球的距离大约为80.2 Mpc, 星系倾角约23度。根据HI气体的速度分布图, 他们发现IRAS 0833+6517正在自旋, 其中HI气体的视向速度是 5850 km s^{-1} , 气体距离星系中心 7.8 kpc (如下图5.4左所示)。通过观测星际吸收线相对于背景恒星的连续谱的蓝移, 可以追踪IRAS 0833+6517外流气体的运动情况 (如下图5.4右所示)。假设这个星系是引力稳定的, 且所有恒星都沿圆轨道运动。

1. 计算HI气体相对于星系IRAS 0833+6517中心的转动速度 v_{rot} .
2. 一个粒子处于距星系中心 7.8 kpc 的外流气体中, 求它的逃逸速度 v_{esc} .

3. 根据下右图中C II $\lambda 1335$ 吸收线的速度的位移（它已经进行过退行速度修正了），请判断外流气体是否从星系中逃出。 ■

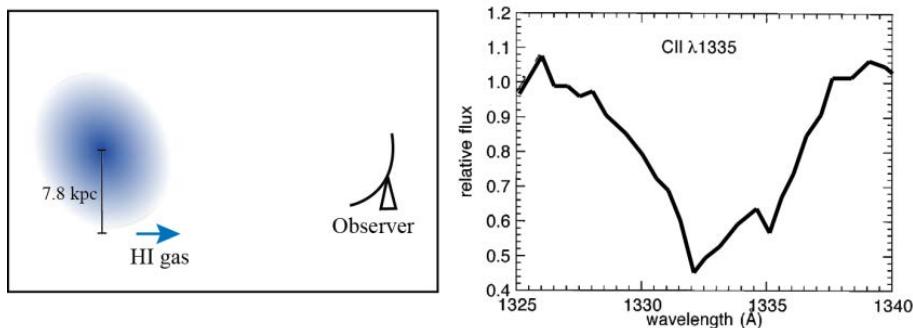


Figure 5.4: 星系物质外流题图

5.2.3 宇宙的演化

既然哈勃常数都不是常数了，我们好奇它怎么随时间（红移）演化。Friedmann方程正好就描述了Hubble parameter的演化行为。Dust的密度演化我们是清楚的：

$$\rho_m(z) = \rho_{m0}(1+z)^3.$$

Radiation密度的演化我们是清楚的：

$$\rho_r(z) = \rho_{r0}(1+z)^4.$$

宇宙学常数作为真空能，其能量密度不随时间演化。从而我们就很容易根据Friedmann方程写出哈勃常数 $H(t)$ 的演化行为：

$$\begin{aligned} E(z) &= \sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda0}}, \\ H(z) &= H_0 E(z). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Exercise 5.9 式(5.19)是我们以后讨论一切问题的出发点。请证明式(5.19). ■

古时候（1998年以前）人们期待着宇宙膨胀一会儿就会收缩⁴，因此人们定义了减速因子 (deceleration factor)：

Definition 5.2.5 — 减速因子 Deceleration Factor.

$$q = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \tag{5.20}$$

描述宇宙动力学的两个方程里与加速度有关的是Acceleration Equation (5.7)，结合它和EoS，可以得到

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_i (1 + 3w_i) \Omega_{i0} - \Omega_{\Lambda0}. \tag{5.21}$$

⁴为什么？

求和号是对于除了宇宙学常数 Λ 之外的各个物质组分求和。如果只考虑物质+ Λ 的宇宙，则有一个简单形式

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda0}.$$

Exercise 5.10 对于物质+ Λ 的宇宙，如何判断这个宇宙是加速还是减速膨胀？ ■

Exercise 5.11 证明对于低红移的星系 ($z \ll 1$), $E(z)$ 可以展开成

$$E(z) = 1 + 2z \left(\frac{1}{2}\Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda0} + 1 \right) = 1 + 2z(q_0 + 1). \quad (5.22)$$

你能想到一个办法测量减速因子吗？ ■

■ **Example 5.1 — 宇宙的年龄.** 给定一组宇宙学参数 $\{h, \Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda0}\}$, 现在宇宙的年龄是多少?

根据Hubble parameter的定义, $H(z) = \frac{da}{dt}/a(t) = \frac{1}{a(z)} \frac{da}{dz} \frac{dz}{dt} = -a(z) \frac{dz}{dt}$. 因此

$$H_0 E(z) = -a(z) \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dt}{H_0 E(z)(1+z)} = dz.$$

当前宇宙的年龄就从红移无穷积到红移0:

$$t_0 = t_H \int_0^\infty \frac{dz}{E(z)(1+z)}.$$

■

5.2.4 宇宙学模型

宇宙学模型由一组宇宙学参数 $\{h, \Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda0}\}$ 所确定（实际上涉及到large scale structure的话还有其他的参数）。下面看几个最简单的模型，旨在让大家有个印象。

Dust dominate:

$$a(t) = (t/t_0)^{2/3},$$

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}$$

Radiation dominate:

$$a = (t/t_0)^{1/2}.$$

辐射主导的宇宙比物质主导的宇宙膨胀地慢。

Einstein-de Sitter Cosmology: 在EdS宇宙中，曲率 $k = 0$ ，因此

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \Omega_{m0} a^{-1} + H_0^2 \Omega_{\Lambda0} a^2.$$

令人惊喜的是，在这个宇宙学模型下，宇宙尺度因子演化的解析解可以求出来。

令 $u = \frac{2\Omega_{\Lambda0}}{\Omega_{m0}} a^3$ ，则有

$$\dot{u}^2 = 9H_0^2 \Omega_{\Lambda0} (2u + u^2) = 3\Lambda(2u + u^2).$$

再令 $v = u + 1$ 以及 $\cosh w = v$:

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{2u + u^2}} = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}} = \omega.$$

从而

$$a^3 = \frac{\Omega_{m0}}{2\Omega_{\Lambda0}} [\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) - 1]. \quad (5.23)$$

如果 $\Lambda < 0$ ，那么宇宙就会变成一个三角函数，先膨胀后坍缩，其尺度因子最大为 $a_{max} = \sqrt[3]{-\Omega_{m0}/\Omega_{\Lambda0}}$.

Cosmological Constant dominant:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\Lambda/3},$$

$$a(t) = \exp\left(\sqrt{\Lambda/3} t\right).$$

宇宙学常数主导的宇宙是一个e指数膨胀。

5.3 宇宙学中的距离

本节参考了Hogg, 1999并给出了该文献中公式的推导与理解。

5.3.1 Radial Comoving Distance

Imagine a photon emitted from a remote galaxy was traveling through the Universe, and reach your eye at this moment. The angular displacement $d\Omega = 0$. The spacetime displacement for photon is always zero (the path of photon is null), which means $ds = 0$. From RW Metric (5.1), we find that

$$cdt = a(t)d\omega,$$

time t here is cosmic time.

$$\begin{aligned} \omega &= \int_{t_{emit}}^{t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} \\ &= \int_0^z \frac{cdz}{H(z)} \\ &= D_H \int_0^z \frac{dz}{E(z)}. \end{aligned}$$

For a given set of cosmological parameters $\{h, \Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0}\}$, we can calculate the radial comoving distance at redshift z following

$$\omega(z) = D_H \int_0^z \frac{dz}{E(z)}. \quad (5.24)$$

For small z , using (5.22), we have

$$\omega \simeq D_H \left[z - (q_0 + 1) \frac{z^2}{2} \right].$$

The radial comoving distance ω is a **fundamental concept** in cosmology.

5.3.2 Transverse Comoving Distance

In radial comoving distance, we only focus on the situation that $d\Omega = 0$, i.e. pure radial distance. In this section, we want to know what distance can describe the situation that $d\omega = 0$, i.e. transverse displacement.

Define transverse comoving distance D_M as follows:

$$dl = D_M d\Omega,$$

where dl is the comoving separation between two points with same radial comoving distance ω (they are on the same comoving sphere).

In spatial comoving part $dl^2 = d\omega^2 + (S_k(\omega)d\Omega)^2$, let $d\omega = 0$, we can find immediately that:

$$D_M = S_k(\omega). \quad (5.25)$$

The definition of $S_k(\omega)$ can be found in Equation (5.14).

We should note the difference between radial comoving distance and transverse comoving distance. When calculating the comoving separation between two points with $d\omega = 0$, $d\Omega \neq 0$, we should use transverse comoving distance rather than radial one. The surface area element of this metric is

$$dA = S_k(\omega)^2 d\Omega. \quad (5.26)$$

The volume element of this metric is

$$dV = S_k(\omega)^2 d\Omega d\omega. \quad (5.27)$$

Now everything is ready to define comoving volume. The *comoving volume* V_C is the volume measure in which number densities of non-evolving objects locked into Hubble flow are constant with redshift. Plug $\frac{d\omega}{dz} = \frac{c}{E(z)}$ into (5.27), we get

$$dV_C = \frac{c S_k(z)^2}{E(z)} d\Omega dz.$$

The relation between redshift and radial comoving distance can be found in Equation (5.24). Thus

$$V_C(z) = \int_0^z 4\pi \frac{c S_k(z)^2}{E(z)} dz \quad (5.28)$$

The total comoving volume can be calculated by limiting $z \rightarrow \infty$. Different cosmology model have different results, some have a finite comoving volume, some diverges.

5.3.3 Angular Diameter Distance

If we have observed a galaxy at z with angular size $\delta\theta$, what is the physical size δl of this galaxy? We want to define a so-called *angular diameter distance*, which satisfies $\delta l = D_A \delta\theta$. We go back again to RW Metric, and wonder what we can obtain from it.

For the two end points of the diameter of the galaxy, $d\omega = 0$, the spatial (physical) separation between two points is $a(t)S_k(\omega)\delta\theta = \delta l$. Hence the angular diameter distance is

$$D_A = a(t)S_k(\omega) = \frac{D_M(z)}{1+z}, \quad (5.29)$$

Straightforward, isn't it?⁵

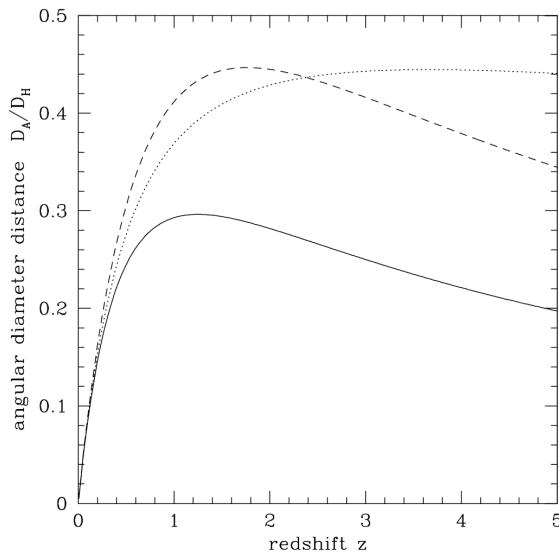


Figure 5.5: Dependence of angular diameter distance on redshift z . D_A reaches its peak at $z = 1 \sim 2$. The smallest angular size of a galaxy is given by $\theta_{min} = L/D_{A,min}$. For higher redshifts, angular size of a galaxy will be larger than that in $z = 1 \sim 2$. Credit: Hogg, 1999.

Fig. 5.5 (Hogg, 1999) shows the dependence of angular diameter distance on redshift z . D_A reaches its peak at $z = 1 \sim 2$. The smallest angular size of a galaxy is given by $\theta_{min} = L/D_{A,min}$. For higher redshifts, angular size of a galaxy will be larger than that in $z = 1 \sim 2$. For instance, in a dust dominant Einstein-de Sitter Universe, for a typical cluster, $L = 1$ Mpc. Thus $\theta_{min} = 4h$ arcmin, where h is reduced Hubble parameter.

In gravitational lensing, we may wonder what's the angular diameter distance when the observer is at z_1 and the object is at $z_2 > z_1$. To solve this question, we need to understand the true meaning of scale factor $a(z)$. All the physics laws are built and calculated on the earth, so in some sense, the earth is the center of our RW metric (the scale factor is normalized by the scale factor on earth). The scale factor at z_2 is $a(z_2) = \frac{1}{1+z_2}$, so the physical distance between two points at z_2 is $\delta\chi a(z_2)$, where $\delta\chi$ is comoving separation. No matter where the observer is, the physical distance between two points at z_2 should not change with the observer.

⁵田光善：这是直截了当的。

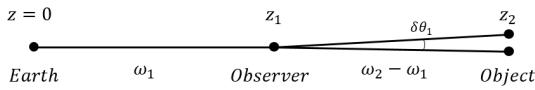


Figure 5.6: The geometry of angular diameter distance in lensing problem

For observer at z_1 , the angular diameter distance is also defined as $\delta l = D_A \delta\theta$. δl is the physical distance between two points at z_2 , must be the same as observed from earth. Assume the angular size of the object which is observed at z_1 is $\delta\theta_1$, then

$$\delta l = a(z_2) \delta\theta_1 S_k(\omega_2 - \omega_1). \quad (5.30)$$

The reason we use $a(z_2)$ is that all physical distance at z_2 should be modulated by scale factor $a(z_2)$, no matter where the observer is. $S_k(\omega_2 - \omega_1)$ comes from the fact that the radial comoving distance between observer and object is $\omega_2 - \omega_1$. Plug these stuff into RW metric with $d\omega = 0$, the spatial separation goes to (5.30).

Hence the angular diameter distance between z_1 and z_2 is

$$D_A(z_1, z_2) = a(z_2) S_k(\omega_2 - \omega_1). \quad (5.31)$$

Different curvature have different expression. If the curvature is negative, we can do the following calculation:

$$\begin{aligned} S_k(\omega_2 - \omega_1) &= \frac{D_H}{\sqrt{\Omega_k}} \sinh \left(\frac{\sqrt{\Omega_k}}{D_H} (\omega_2 - \omega_1) \right) \\ &= \frac{D_H}{\sqrt{\Omega_k}} \left[\sinh \left(\frac{\sqrt{\Omega_k}}{D_H} \omega_2 \right) \cosh \left(\frac{\sqrt{\Omega_k}}{D_H} \omega_1 \right) - \sinh \left(\frac{\sqrt{\Omega_k}}{D_H} \omega_1 \right) \cosh \left(\frac{\sqrt{\Omega_k}}{D_H} \omega_2 \right) \right] \\ &= D_{M2} \sqrt{1 + \Omega_k \frac{D_{M1}^2}{D_H^2}} - D_{M1} \sqrt{1 + \Omega_k \frac{D_{M2}^2}{D_H^2}}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Thus the angular diameter distance between z_1 and z_2 in negative curved Universe is:

$$D_A(z_1, z_2) = \frac{1}{1+z_2} \left[D_{M2} \sqrt{1 + \Omega_k \frac{D_{M1}^2}{D_H^2}} - D_{M1} \sqrt{1 + \Omega_k \frac{D_{M2}^2}{D_H^2}} \right]. \quad (5.33)$$

For positive curved Universe, the above formula is also correct. But Hogg said it's wrong for $k > 0$ (Hogg, 1999, Page 6).

We can find that angular-diameter distance is mostly depend on Ω_{k0} , rather than other cosmological parameters. If we can find a standard yardstick, we can measure Ω_{k0} precisely. One method is Alcock-Paczynski test (AP test), and another one is **CMB**. Note that the size of galaxies are not yardsticks. Galaxies in higher redshift are more compact.

5.3.4 Luminosity Distance

This distance puzzled me for a long time. If we can measure the bolometric flux F of a galaxy, and we also know its intrinsic bolometric luminosity L , then we directly define a so-called *luminosity distance*:

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}. \quad (5.34)$$

First, we investigate what is the luminosity. Let L be the intrinsic luminosity, i.e. the luminosity which is observed at near the galaxy. Luminosity is the power of radiation, $L = \frac{\Delta E}{\Delta t}$. (Those physical quantities without subscript "obs" are all intrinsic quantities.)

The radiation can be decomposed into photons. Look at a photon whose wavelength when emitted is λ , whose energy when emitted is E . The energy we observed is

$$E_{obs} = \frac{hc}{(1+z)\lambda} = \frac{1}{1+z}E.$$

Emitting this photon cost the time $\Delta t = \frac{\lambda}{c}$, while $\Delta t_{obs} = (1+z)\frac{\lambda}{c} = (1+z)\Delta t$. Hence the observed radiation power of this photon is

$$\frac{E_{obs}}{\Delta t_{obs}} = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{E}{\Delta t},$$

which doesn't depend on wavelength, but only depend on the redshift. So we combine all photons, for the total luminosity, we also have

$$\frac{\Delta E_{obs}}{\Delta t_{obs}} = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

The radiation flux we observed is

$$F = \frac{\Delta E_{obs}}{\Delta t_{obs} A},$$

A is the surface area. Physical transverse distance between galaxy and us is $a(t)D_M$. We don't do observation some Gyrs ago, but now. So $a(t) = a(\text{now}) = 1$. Thus $A = 4\pi D_M^2$.

$$\begin{aligned} F &= \frac{\Delta E_{obs}}{\Delta t_{obs} 4\pi D_M^2} \\ &= \frac{\Delta E}{\Delta t 4\pi [(1+z)D_M]^2}. \end{aligned}$$

Obviously,

$$D_L(z) = (1+z)D_M(z). \quad (5.35)$$

Combine (5.29) and (5.35), we have

$$D_L(z) = (1+z)^2 D_A(z). \quad (5.36)$$

For remote object, luminosity distance is much larger than angular diameter distance.

5.3.5 视界

所谓视界，英文是horizon。大家大概应该能理解horizon是个什么意思。宇宙学中的horizon分为两种：event horizon (事件视界) 和 particle horizon。

Particle Horizon

一个很自然的问题是，我们现在到底能看多远？如果不考虑望远镜因素的话，按理说我们一直能看到大爆炸（忽略1100与无穷的区别）。那么考虑一个光子从大爆炸时刻发出，我们现在接收到，则光子走过的radial **comoving distance**为

$$\omega_P = D_H \int_0^\infty \frac{dz}{E(z)}.$$

这玩意不一定对所有的模型都收敛。如果带入现在concordance cosmology $\{h, \Omega_{m0}, \Omega_{k0}, \Omega_{\Lambda0}, \Omega_{r0}\} = \{0.7, 0.27, 0, 0.73, 4.2 \times 10^{-5} h^{-2}\}$ 进行计算的话：

$$\omega_P = 14491.8 \text{ Mpc.}$$

也就是说，可观测的宇宙也就这么大。在particle horizon之内的两点，截止目前存在建立因果联系的可能性。注意这里算的horizon是**comoving distance**。

CMB光子在红移 $z_{rec} = 1090$ 时发出。一个有意思的问题是，当年CMB光子脱耦的时候，多大区域可以有因果关联。我们算一下红移1090时候的particle horizon：

$$\omega_{rec} = D_H \int_{z_{rec}}^\infty \frac{dz}{E(z)}.$$

在concordance cosmology下， $\omega_{rec} = 283.61 \text{ Mpc}$. 我们好奇这么大的区域在天空上的投影是多大呢？想起来之前提到的angular diameter distance，CMB脱耦时particle horizon在天空中的投影张角为

$$\theta = \frac{\omega_H(z_{rec}) / (1 + z_{rec})}{d_A(z_{rec})},$$

其中 d_A 是the angular diameter distance,

$$d_A(z) = S_k(\omega) / (1 + z).$$

在concordance cosmology下，这个张角大概是两度左右。

我们揉揉眼睛之后发现，如果CMB只在2度大小的范围内保持均匀，那是可以说得过去的，因为CMB脱耦时只有2度范围的宇宙是可以有因果关联的，从而才可能有达到热平衡的可能。但是观测发现，CMB在 $\Delta T/T = 10^{-5}$ 的尺度上才表现出各向异性，这难道是巧合吗？这就是所谓的**视界疑难**。

Event Horizon

Particle horizon描述的是截至目前位置是否能够发生因果关联。我们好奇，在人类灭亡之前，我们能否收到某个星系的信号，那就要考虑这个星系在不在我们的event horizon之内了。简言之，particle horizon的光子是 $z = \infty$ 发出的，而event horizon的光子是现在 $z = 0$ 发出的，考虑的是时间趋于无穷时这个光子能不能到达我们地球。

考虑一个光子现在从一个遥远的星系径向发出，那么无穷远时刻之后这个光子一共走过的comoving distance是：

$$\omega = \int_{t_0}^{\infty} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{a_0}^{\infty} \frac{cda}{a^2 H(a)}. \quad (5.37)$$

由Friedmann Equation:

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda0}}.$$

将上式代入(5.37):

$$\omega = D_H \int_1^{\infty} \frac{da}{a^2 \sqrt{\Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda0}}}.$$

对concordance cosmology,

$$\omega = 1.12339 D_H = 4814.5 \text{ Mpc}.$$

以上计算是用scale factor表示的，我们还能用红移表示：

$$\omega = D_H \int_0^{z_H} \frac{dz}{E(z)},$$

两种 ω 是等价的，从而

$$D_H \int_0^{z_H} \frac{dz}{E(z)} = 1.12339 D_H.$$

此式给出当前event horizon处的红移为

$$z_H = 1.68738.$$

设想一个外星文明位于6000 Mpc之外，今天晚上他们向地球发送了一首歌，那么在我们的有生之年根本不可能收到这首歌。

5.3.6 Distance modulus

距离模数的概念大家肯定都熟悉了。在宇宙学中，一般用Mpc来表示距离，于是就有：

$$\mu = m - M = 5 \log \left(\frac{D_L}{\text{Mpc}} \right) + 25. \quad (5.38)$$

现在 $D_L(z)$ 我们也知道了：

$$D_L(z) = (1+z)D_M(z) = (1+z)S_k(\omega),$$

其中 $S_k(\omega)$ 见(5.2).

给一个红移 z ，要算出对应的距离模数 μ ，必须要知道宇宙学参数。反之，如果有一大堆 $\{z, \mu\}$ 的数据，那么宇宙学参数就可以被确定下来。



Figure 5.7: 2011年诺贝尔物理学奖

5.4 超新星宇宙学

在超新星的研究中人们发现，type Ia超新星可以作为标准烛光。也就是说，可以通过观测来确定超新星所在位置的红移，以及超新星的视星等、绝对星等，也就是确定 $\{z, \mu\}$ 。如果能观测一大堆这样的超新星，按照之前我们的想法，就可以确定宇宙学参数了。将 $\{z, \mu\}$ 画在一张图上，这张图叫做 **Hubble Diagram** (见图5.8)。

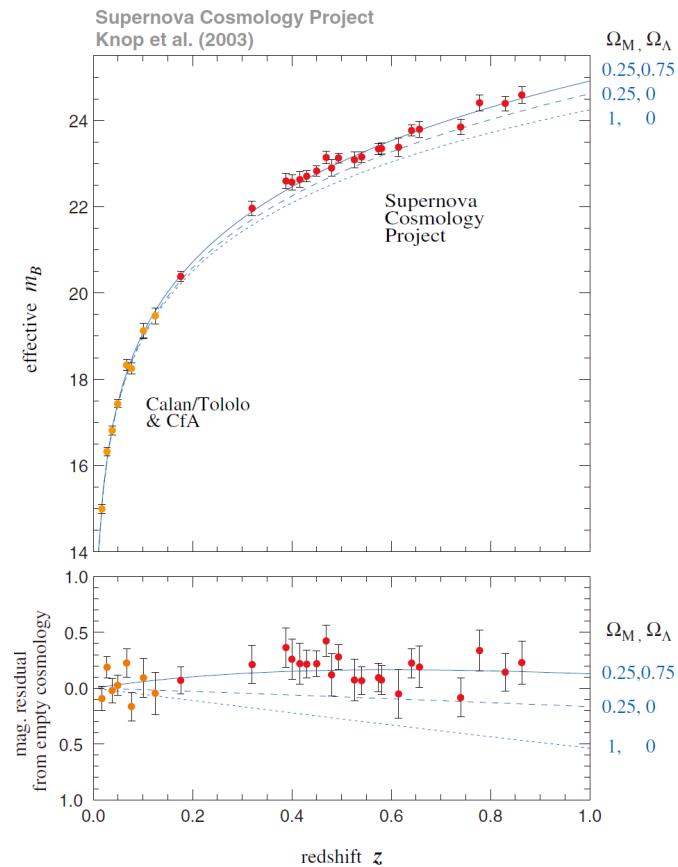


Figure 5.8: Hubble Diagram (Knop et al., 2003)

按照这样的想法，两个小组在上世纪90年代同时开展了这项研究，于1998年左右分别证实了宇宙是加速膨胀的 (Perlmutter et al., 1998, 1999; Riess et al., 1998)。这颠覆了人们

之前对于宇宙的理解，也坐实了暗能量的地位。感兴趣的同学可以读这篇刊载在Physics Today上的科普文章：Perlmutter, 2003. 最后这项工作被授予了2011年的诺贝尔物理学奖。

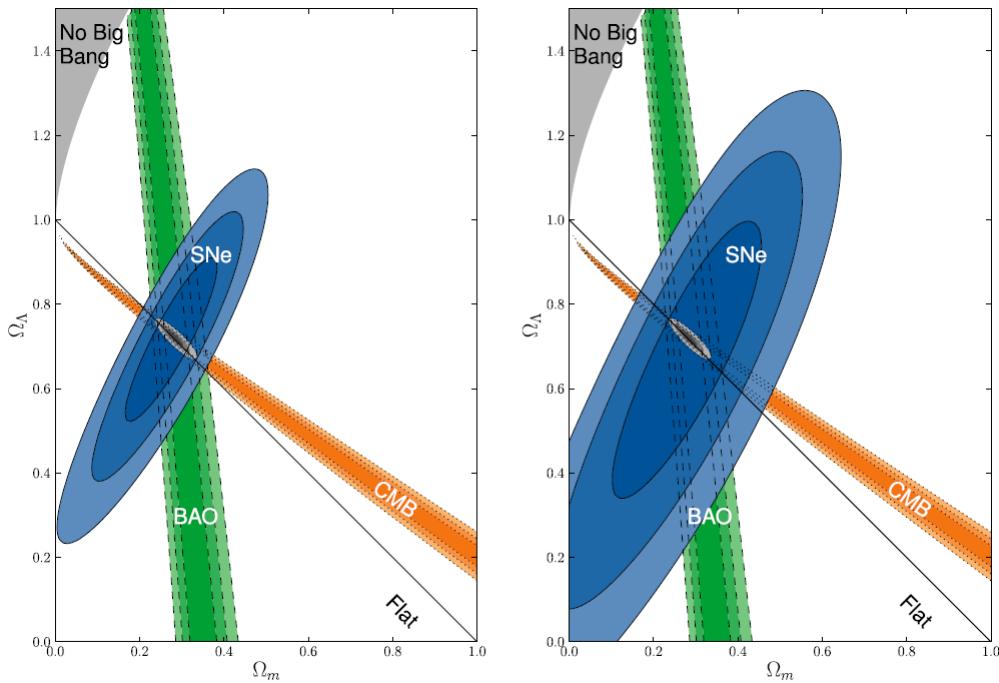


Figure 5.9: $\Omega_{m0} \sim \Omega_{\Lambda0}$ with CMB, BAO, and SCP Union2.1 SN Constraints. Left: without SN systematics; Right: including SN systematics. Credit: [Supernova Cosmology Project](#).

5.5 大爆炸宇宙学

- 大爆炸
- 普朗克时间 10^{-43} s 之后，引力脱耦
- 10^{-36} s 时，强力与电弱作用脱耦
- 10^{-10} s 时，电弱脱耦
- 10^{-5} s 时，强子化与 QCD 相变，导致质子和中子比值为 7:1.
- 1s 时 (1MeV)，中微子脱耦。中微子参与的是弱作用
- $z = 1100$ 时，光子脱耦
- $z = 15$ 时，第一代恒星形成
- 截止到 $z = 6$ ，宇宙基本被电离

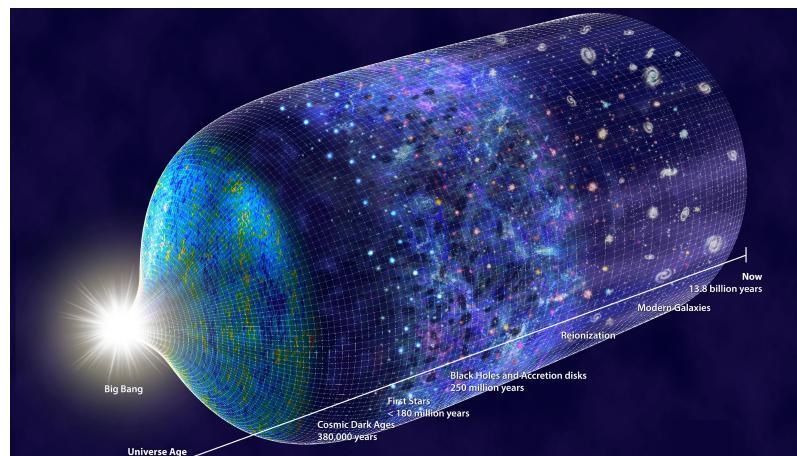
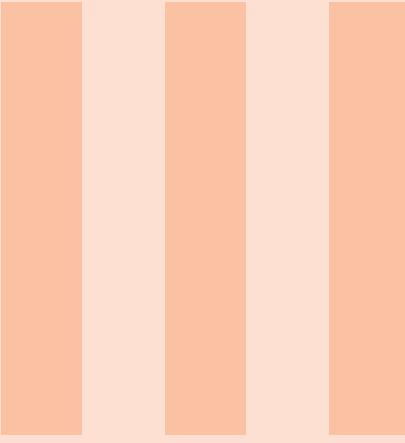


Figure 5.10: 宇宙演化历史

宇宙学模拟：Illustris, Illustris-TNG, Millennium, EAGLES...



Miscellany

6	答题须知	75
6.1	关于观测考试的建议 (by 夏一飞)	
7	IOAA评分标准	79
8	补充材料	81
	Bibliography	83
	Articles	
	Books	



6. 答题须知

6.1 关于观测考试的建议 (by 夏一飞)

6.1.1 写在前面

泻嘉轩药。我参加过两次整数届国际奥赛：第 20 届 IAO 和第 10 届 IOAA，在前者获得了银牌暨最佳观测奖，在后者也获得了银牌暨最佳观测奖，人送外号 bō。虽然我告别奥赛已经有一段时间了，但关于国际奥赛的观测考试，还略记得一点，我有必要告诉你们一点，人生供大家参考吧。

早在初一的时候，每次阅览课，我都会把阅览室里所有的《天文爱好者》都搜刮到我自己面前。我记得其中有一期的封面是“世纪绝唱——金星凌日”。只可惜，当时的我还不明白“世纪绝唱”的含义……还有一期的最后几页刊登了“第 xx 届 APAO 试题”，里边全是我看不懂的艰深题目。甚至有一道题，给出了上百颗有大有小的黑点，然后要求在其中标出谷神星！这简直不是人可以完成的任务。

天文爱好者一般都是观测爱好者，我也不例外。在我的天文启蒙书——《夜观星空》中，有一句话我印象特别深刻，大概是这么说的：“一个熟练的天文爱好者往往会记住数百颗恒星的相对位置，在他们眼中，星空就像是一个漂亮的挂毯。”那时的我对这句话感到难以置信。从初二那年冬天至今，我一共进行了不下 200 次比较正式的观测，作了数万字的观测记录。多年后我再回首，发现作者说得其实没错，满天的恒星早已印在了我的脑海里，我甚至可以人脑渲染星空缓缓的周日运动，如同一个精致的天象仪。

在我看来，IAO 和 APAO，以及大多数 IOAA 的观测考试，考察的恰恰就是一个天文观测爱好者的基本素养。

大家能入选集训队，也算是身经百战了，相信大多数人也都有丰富的观测经验。因此，只要你对星空的认识不止停留在白底黑字的星图上，对于观测考试就不必太担心；即

便担心，短时间内观测水平也难有质的飞跃。再者，理论和实测才是占分值最多、区分度最大的部分，大家大可不必针对观测考试作太多准备，发挥出应有的水平即可。

但是话说回来，有些基础的东西，还是要牢牢掌握；有些 tricky 的技巧，也不妨临时抱一抱佛脚。

6.1.2 观测考试的基本题型

目视观测/天象厅观测

1. 指认或辨识

- 恒星、行星
- 明亮深空天体
- 天赤道、黄道、银道
- 北天极

2. 估算角距离：将你的手臂伸直，小指覆盖的天区约对应 1° ，中间三根手指并拢约对应 5° ，一拳约对应 10° ，一拃约对应 25° 。

3. 星等估算：星等的估算一般要用到“夹逼原理”。除非是一个疯狂的出题者，一般来说比待估算亮度的恒星更亮和更暗的恒星的星等都应该是已知的，因此你只要关心相对的亮度即可。

当然，如果让你把昴星团里的 7 颗亮星的亮度排个序，这也需要相当的观测经验和……运气。

4. 天象厅中的其他脑洞题型：天象厅无疑是最适合出题者开脑洞的地方了。在这里，一切皆有可能。

纸上观测

1. 给出局部或全天的星图，一般没有连线，要求：

- 画出星座或标出星座位置
- 标出缺失的恒星位置
- 标出月球、行星的位置
- 标出明亮深空天体的位置
- 画出天赤道、黄道、银道、天极

2. 给出深空天体的图像，进行辨识：给你个野鸭星团的图像，你能看出来这是 M11 吗？至少，别把它当成球状星团了。

3. 上下中天时间及高度角，时角，恒星时，时差的简单计算：大家都懂的吧。

望远镜观测

1. 望远镜的熟练操作：熟练操作望远镜是非常重要的，没有这一点你什么也做不了，因为后面的题目往往基于你找到了给定的目标。幸运的是，忘记摘镜头盖似乎并不是一个会被扣分的行为，它只是会浪费你的时间。

2. 搜寻常见深空天体：什么叫常见呢？除了室女座众多的暗弱星系、蛇夫座附近一堆小球团，剩下的大多数梅西耶天体都应该是你应该记住的——这并不难，尤其在你

真正用望远镜找过几次之后。想想 M33,M81,M101,M20,M...，当然，别忘了英仙座双星团。一种取巧的方式是只记住考试期间上半夜能看到的那些天体。不过这也有风险，谁知道出题者会不会让你对准天象厅里的深空天体呢？

3. 视场、放大倍率、漂移速率的简单计算：除一下就是了，很简单的。有时你会得到一个秒表，这样你就可以利用一个天体从视场中央漂移到边缘的耗时来估算视场大小了。当然，你也可以估算出月球的视直径。想想该怎么做吧。
4. 星桥法：星桥法绝对是经常用到的方法，但一般不会被单独考察。比如，当你找 M31 而不得时，为什么不从仙女座 β 出发，经由仙女座 μ 到达 M31 旁的 ν 星呢？

6.1.3 考前可以抱佛脚的

- 考试地点的经纬度
- 考试期间恒星时与平太阳时的时差
- 考试期间太阳、月球、各大行星、著名小行星、亮彗星的位置
- 考试期间的月相
- 考试期间考试地点日落后两小时、午夜、黎明的全天星图
- 大多数星座的英文缩写
- 大多数梅西耶天体的位置
- 全天 21 大亮星的名字、星等

6.1.4 考试时的注意事项

1. 处变不惊。

你永远不知道出卷者会开什么样的脑洞。当你熟记了考试地点的星空，考官有可能会在天象厅里把你带去里约热内卢、南极甚至是火星。但记住，万变不离其宗，面对陌生的场景，记得冷静地使用你多年的观测经验，很多困难都能化解。

举个例子，把你带到南半球，在苍蝇座里多藏了一颗超新星，你能把它找出来吗？

2. 抓紧时间。

除了纸上观测考试，考试时间总是紧张的，尤其是望远镜操作考试。别磨蹭，这样你哪怕失误了一下也不会慌，还有机会再来一次。

3. 学学“枪法”。

提供的望远镜几乎总是不附带寻星镜的，因此你应该把打靶时的经验带到观测考场上。即便目标因为天气原因而在肉眼看来完全不可见，你也应该有能力通过旁边的亮星定位出它的精确位置并一击命中它。

最后，祝大家在奥赛中吃好玩好，顺便取得好成绩

夏一飞

北京大学物理学院天文学系

2018年7月25日

1. 答题时尽量写英文。在读题时若中文把握不准或者感觉翻译不通顺，请务必看英文原题。
2. 建议记住考试地点的经纬度（出国前就做做工作），以及注意夏令时、地方时、时区之间的关系，以免考试时紧张出错。
3. 建议将观测考试当天的恒星时、太阳升落、月亮升落的时间记下来，可能会有助于考试。在观测地点，要熟悉方位，提前认清天极和天球上的各个圈，以免考试时紧张出错。
4. 理论和实测考试中，不同题目难度不同。试卷题目设置顺序并不一定按照从易到难，所以在考试时遇到不会的题目先跳过，不用纠结于答题顺序。
5. 观测考试时，记得先摘掉镜头盖，再进行后续操作。



7. IOAA评分标准

国际天文与天体物理竞赛(IOAA)评分标准：

1	没有详细计算但给出了正确答案	扣50%分数
2	计算中有小错误：正负号、代换等问题	扣20%分数
3	最终结果没有单位	扣10%分数
4	有效数字不对	扣10%分数
5	物理概念错误（无论答案正确与否）	扣100%分数
6	从之前步骤传递下来的小错误	不扣分
7	从之前步骤传递下来的大错误	扣20%分数



8. 补充材料

点击文字会自动跳转到网页。

1. [ArXiv](#)
2. Digital Library for Physics and Astronomy: [The SAO/NASA Astrophysics Data System](#)
3. 卢昌海的博客: [卢昌海的个人主页](#)
4. 光头怪博士的微博: [光头怪博士](#)
5. Planck卫星的主页: [PLANCK SCIENCE TEAM HOME](#)
6. 人造卫星观测指南: [Heavens-Above非官方使用指南](#)
7. 有关金星的知识: [金星——天堂还是地狱?](#)
8. 有关水星的知识: [谜一样的舞者——水星](#)
9. 有关太阳的知识: “[天空中最亮的星](#)”(上), “[天空中最亮的星](#)”(下)
10. 有关天文摄影: [天文摄影和极轴的校对](#); 推荐书目:《星野摄影》第二版, 作者王为豪。
11. 有关太阳8字与时差的知识: [走不准的时钟和歪七扭8的太阳之舞](#)

Prism of Life

Colorless

Colorful

Astronomy

Bibliography

Articles

- Carroll, S. M. (1997). “Lecture Notes on General Relativity”. In: *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints*. eprint: [gr-qc/9712019](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019) (cit. on pp. 53, 55).
- Hogg, D. W. (1999). “Distance measures in cosmology”. In: *ArXiv Astrophysics e-prints*. eprint: [astro-ph/9905116](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9905116) (cit. on pp. 63, 65, 66).
- Knop, R. A. et al. (2003). “New Constraints on Ω_M , Ω , and w from an Independent Set of 11 High-Redshift Supernovae Observed with the Hubble Space Telescope”. In: *ApJ* 598, pp. 102–137. DOI: [10.1086/378560](https://doi.org/10.1086/378560). eprint: [astro-ph/0309368](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0309368) (cit. on p. 70).
- Lamb, D. Q. (1995). “The Distance Scale to Gamma-Ray Bursts”. In: *PASP* 107, p. 1152. DOI: [10.1086/133673](https://doi.org/10.1086/133673) (cit. on p. 59).
- Mao, S. (2008). “Introduction to Gravitational Microlensing”. In: *ArXiv e-prints*. arXiv: [0811.0441](https://arxiv.org/abs/0811.0441) (cit. on pp. 47, 49, 50).
- Perlmutter, S. (2003). “Supernovae, Dark Energy, and the Accelerating Universe”. In: *Physics Today* 56.4, pp. 53–60. DOI: [10.1063/1.1580050](https://doi.org/10.1063/1.1580050). eprint: <https://doi.org/10.1063/1.1580050>. URL: <https://doi.org/10.1063/1.1580050> (cit. on p. 71).
- Perlmutter, S. et al. (1998). “Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe”. In: *Nature* 391, p. 51. DOI: [10.1038/34124](https://doi.org/10.1038/34124). eprint: [astro-ph/9712212](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9712212) (cit. on p. 70).
- Perlmutter, S. et al. (1999). “Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae”. In: *ApJ* 517, pp. 565–586. DOI: [10.1086/307221](https://doi.org/10.1086/307221). eprint: [astro-ph/9812133](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9812133) (cit. on p. 70).
- Planck Collaboration et al. (2018). “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters”. In: *ArXiv e-prints*. arXiv: [1807.06209](https://arxiv.org/abs/1807.06209) (cit. on p. 58).

- Riess, A. G. et al. (1998). “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant”. In: *AJ* 116, pp. 1009–1038. DOI: [10.1086/300499](https://doi.org/10.1086/300499). eprint: [astro-ph/9805201](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9805201) (cit. on p. 70).
- The IceCube Collaboration et al. (2018). “Multimessenger observations of a flaring blazar coincident with high-energy neutrino IceCube-170922A”. In: *Science* 361.6398. ISSN: 0036-8075. DOI: [10.1126/science.aat1378](https://doi.org/10.1126/science.aat1378). URL: <http://science.sciencemag.org/content/361/6398/eaat1378>.
- 陈继胜 and 石猛 (2009). “两体运动学问题及麦克斯韦速度联合分布率分析”. In: 高等继续教育学报 6, pp. 5–7 (cit. on p. 37).

Books

- Peacock, J. A. (1999). *Cosmological Physics*, p. 704 (cit. on p. 53).
- Ryden, B. (2003). *Introduction to cosmology* (cit. on p. 53).
- Serjeant, S. (2010). *Observational Cosmology* (cit. on p. 57).