Национальный Исследовательский Ядерный Университет «МИФИ»

Курсовая работа
по Общей физике (Электричество и магнетизм)

Выполнили: Костенко Ю. А.,
Зеленев В. С.

Москва - 2024

Содержание

1 Постановка задач

1.1 Задача 1

Исследовать электродинамику с монополями. Рассмотреть движение диона в однородном электрическом поле E; в однородном магнитном поле B; в скрещивающихся однородных электрическом и магнитном полях E и B, причем считать, что $E \perp B$.

1.2 Задача 2

Исследовать модель Изинга для ферромагнетиков. Рассчитать вектор намагниченности, получить петлю гистерезиса (если возможно).

1.3 Задача 3

Изучить движение заряженной частицы в равновесной электронейтральной плазме. Все необходимые параметры плазмы и частицы даны.

2 Задача 1

2.1 Электродинамика с монополями

Как известно, классические уравнения Максвелла несимметричны относительно обмена электрических и магнитных полей. Это, во многомо, связано с отсутствием магнитных зарядов. Однако существуют различные теории, которые предполагают их существование и позволяют исследовать так называемую электродинамику с монополями, чему и будет посвящен этот раздел.

Сперва следует договориться об обозначениях. Работать будем в системе СГС. К обозначениям будем добавлять индексы e или μ, в зависимости от того, с чем связан соответствующий объект (конкретная связь обычно будет понятна из контекста).

Начнем с получения новых уравнений Максвелла, а также преобразований обмена полей. Выпишем, для начала, классические уравнения Максвелла, с учетом соглашений об обозначениях:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho_e \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Очевидно, что для получения симметричных уравнений, во второе из них необходимо добавить член, связанный с плотностью магнитных зарядов ρ_μ, а в третье — с током магнитных зарядов $\vec{j}_\mu$. После их добавления получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho_e \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 4\pi\rho_\mu \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_\mu - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

При этом минус в третьем уравнении необходим из-за вида искомой симметрии. Полученная система уравнений оказывается симметрична относительно следующего преобразования:

$$\vec{E} \to \vec{B}$$
$$\vec{B} \to -\vec{E}$$
$$\rho_e \to \rho_\mu$$
$$\rho_\mu \to -\rho_e$$
$$\vec{j}_e \to \vec{j}_\mu$$
$$\vec{j}_\mu \to -\vec{j}_e$$

Опираясь на эти преобразования и на известные формулы классической электродинамики, можно получить следующие выражения:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_e = 0 \to \frac{\partial \rho_\mu}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_\mu = 0$$

$$\varphi_e = \frac{q_e}{r} \to \varphi_\mu = \frac{q_\mu}{r}$$
$$\vec{E} = \frac{q_e}{r^3}\vec{r} \to \vec{B} = \frac{q_\mu}{r^3}\vec{r}$$
$$\vec{B} = \frac{q_e}{c}\frac{\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \to \vec{E} = -\frac{q_\mu}{c}\frac{\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$
$$\vec{F}_e = q_e(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}) \to \vec{F}_\mu = q_\mu(\vec{B} - \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E})$$

2.2 Движение диона в различных полях

Как следствие **симметризации** уравнений Максвелла, осуществлённой в предыдущем разделе задачи путём определения некоторой модели "**монополя**" (частицы, являющейся независимым **источником** центрально-симметричного **магнитного поля**), имеет место рассмотрение модели "**диона**" (частицы m, обладающей не только собственным **электрическим** q_e, но и собственным **магнитным** зарядом q_μ).

Дион можно поочерёдно поместить в однородное **электрическое**, однородное **магнитное** поле, а также в поле, представляющее **суперпозицию** оных полей, **скрещенных** под **прямым** углом в пространстве, и рассмотреть особенности его динамики.

Рассмотрим **общее уравнение динамики диона** (в системе СГСЭ):

$$m\dot{\vec{v}} = q_e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\cdot\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]\right) + q_\mu\left(\vec{B} - \frac{1}{c}\cdot\left[\vec{v}\times\vec{E}\right]\right), \text{ где:}$$

$\vec{v} = \{v_x,\, v_y,\, v_z\}$ – вектор скорости частицы;

$\vec{E} = \{E_x,\, E_y,\, E_z\}$ – вектор электрической напряжённости;

$\vec{B} = \{B_x,\, B_y,\, B_z\}$ – вектор магнитной индукции.

Рассмотрим движение диона только в однородном электрическом поле ($\vec{B} = \vec{0}$), задающемся в пространстве вектором электрической напряжённости вида $\vec{E} = \{E_x,\, 0,\, 0\}$.

Запишем уравнение динамики для данного случая:

$$m\dot{\vec{v}} = E_x\Big(q_e - q_\mu\left(v_z\vec{e}_y - v_y\vec{e}_z\right)\Big)$$

Рассмотрим следующую систему линейных дифференциальных уравнений II-го порядка относительно времени t:

$$(*)\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{q_e E_x}{m} \\[2ex] \ddot{y} = -\dfrac{q_\mu E_x}{mc}\cdot\dot{z} \\[2ex] \ddot{z} = \dfrac{q_\mu E_x}{mc}\cdot\dot{y} \end{cases}$$

Произведём переобозначение вышеописанных групп констант:

$$\beta_1 = \frac{q_e E_x}{m}, \quad \omega_E = \frac{q_\mu E_x}{mc}$$

Перепишем систему уравнений (∗) следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \beta_1 & (1) \\ \\ \ddot{y} = -\omega_E \cdot \dot{z} & (2) \\ \\ \ddot{z} = \omega_E \cdot \dot{y} & (3) \end{cases}$$

Найдём решение уравнения (1), дважды его проинтегрировав:

$$x = \frac{\beta_1 t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad \{C_1, C_2\} = const \qquad (4)$$

Далее, найдём решения уравнений (2) и (3).

При выражении из уравнения (2) $\dot{z}$ и подстановке его в уравнение (3), получим следующего вида линейное дифференциальное уравнение III-го порядка относительно t:

$$\dddot{y} + \omega_E^2 \cdot \dot{y} = 0 \qquad (5)$$

Произведём следующую замену $\dot{y} = \xi$ и перепишем уравнение (5) в следующем виде:

$$\ddot{\xi} + \omega_E^2 \cdot \xi = 0 \qquad (6)$$

Получили дифференциальное уравнение вида $\left\{F(\xi, \ddot{\xi}) = 0\right\}$ с возможностью понижения порядка.

Воспользуемся данной возможностью — произведём следующие замены:

$$\dot{\xi} = p(\xi), \quad \ddot{\xi} = p(\xi) \cdot p'(\xi)$$

В таком случае, уравнение (6) можно переписать следующим образом:

$$p' + \frac{\omega_E^2 \cdot \xi}{p} = 0$$

Решим полученное уравнение методом разделения переменных — найдём функцию $p(\xi) = \dot{\xi}$:

$$\frac{dp}{d\xi} = -\frac{\omega_E^2 \cdot \xi}{p}$$

$$pdp = -\omega_E^2 \cdot \xi d\xi$$

$$p = \pm\sqrt{\widehat{C}_1 - \omega_E^2\xi^2}, \quad \widehat{C}_1 = const$$

Таким образом, получили функцию $\dot{\xi} = \pm\sqrt{\widehat{C}_1 - \omega_E^2\xi^2},\ \widehat{C}_1 = const.$

Продолжим решение уравнения — найдём аналогичным способом функции $\xi(t) = \dot{y}$ и $y(t)$ соответственно:

$$\dot{\xi} = \pm\sqrt{\widehat{C}_1 - \omega_E^2\xi^2}$$

$$\pm\frac{d\xi}{\sqrt{\widehat{C}_1 - \omega_E^2\xi^2}} = dt$$

$$\pm\arcsin\left(\frac{\omega_E}{\sqrt{\widehat{C}_1}}\xi\right) = \omega_E t + \widehat{C}_2, \quad \widehat{C}_2 = const$$

$$\frac{\omega_E}{\sqrt{\widehat{C}_1}}\xi = \pm\sin\left(\omega_E t + \widehat{C}_2\right)$$

$$\xi = \pm\frac{\sqrt{\widehat{C}_1}}{\omega_E}\sin\left(\omega_E t + \widehat{C}_2\right)$$

$$\dot{y} = \pm\frac{\sqrt{\widehat{C}_1}}{\omega_E}\sin\left(\omega_E t + \widehat{C}_2\right)$$

$$dy = \pm\frac{\sqrt{\widehat{C}_1}}{\omega_E}\sin{(\omega_E t + \widehat{C}_2)}dt$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{\widehat{C}_1}}{\omega_E^2}\cos{(\omega_E t + \widehat{C}_2)} + \widehat{C}_3, \quad \widehat{C}_3 = const$$

В результате получили итоговое решение дифференциального уравнения (5):

$$y = \pm\frac{\sqrt{\widehat{C}_1}}{\omega_E^2}\cos{(\omega_E t + \widehat{C}_2)} + \widehat{C}_3, \quad \{\widehat{C}_1,\, \widehat{C}_2,\, \widehat{C}_3\} = const$$

Подставим получившееся уравнение $y = y(t)$ в уравнение (3) и найдём уравнение $z = z(t)$:

3 Задача 2

3.1 Аналитическое решение

Одномерная модель: В рамках одномерной модели Изинга рассматривается цепочка из N одинаковых магнитных моментов, которые могут быть ориентированы либо "вверх либо "вниз". Считается, что взаимодействуют только соседние магнитные моменты, причем энергия их взаимодействия равна $-J$, если они направлены в одну сторону, и J, если в разные, где $J = const > 0$ — квантовомеханическая энергия обменного взаимодействия. Также предполагается, что цепочка помещена в магнитное поле $\vec{B}$, и накладываются циклические граничные условия в виде взаимодействия первого и последнего атомов цепочки.

Формализуем всё перечисленное. Будем считать, что магнитные моменты заданы как $\mu_i = \mu_{(1)} s_i \vec{e}_z$, где $\mu_{(1)}$— модуль магнитного момента, $s_i \in \{-1, 1\}$ — так называемый спин, и $\vec{B} = B\vec{e}_z$. В таком случае полная энергия цепочки записывается как

$$E = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1} - J s_1 s_N - \mu_{(1)} B \sum_{i=1}^{N} s_i$$

В данной формуле первая сумма отвечает за энергию взаимодействия основной части цепочки, вторая сумма отвечает за энергию взаимодействия диполей и магнитного поля (которое предполагается классическим) и оставшееся слагаемое связано с циклическим граничным условием.

Теперь будем искать статистическую сумму Z, через которую выразятся все интересующие нас величины, такие как теплоемкость и намагниченность. Как известно из экспериментов, в случае ферромагнетиков эти величины должны претерпевать скачок при некоторой температуре, называемой температурой Кюри T_c. Итак, статистическая сумма по конфигурациям цепочки $\{s\}$ запишется как

$$Z = \sum_{\{s\}} e^{-\frac{E}{k_B T}} = \sum_{\{s\}} \exp\left(\frac{J}{k_B T} \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1} + \frac{J}{k_B T} s_1 s_N + \frac{\mu_{(1)} B}{k_B T} \sum_{i=1}^{N} s_i \right)$$

Для удобства введём $\alpha = \frac{J}{k_B T}$ и $\beta = \frac{\mu_{(1)} B}{k_B T}$, после чего перепишем статистическую сумму в следующем виде:

$$Z = \sum_{\{s\}} e^{\alpha s_1 s_2 + \frac{\beta}{2}(s_1 + s_2)} e^{\alpha s_2 s_3 + \frac{\beta}{2}(s_2 + s_3)} \dots e^{\alpha s_N s_1 + \frac{\beta}{2}(s_N + s_1)} = \sum_{\{s\}} t_{s_1 s_2} t_{s_2 s_3} \dots t_{s_N s_1}$$

Где $t_{s_i s_j} = e^{\alpha s_i s_j + \frac{\beta}{2}(s_i + s_j)}$. Оказывается, что из $t_{s_i s_j}$ можно сформировать так называемую трансфер-матрицу

$$T = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,-1} \\ T_{-1,1} & T_{-1,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha+\beta} & e^{-\alpha} \\ e^{-\alpha} & e^{\alpha-\beta} \end{pmatrix}$$

При этом будем обозначать элементы T^k как $t^{(k)}_{1,1}$, $t^{(k)}_{1,-1}$, $t^{(k)}_{-1,1}$ и $t^{(k)}_{-1,-1}$.Тогда окажется, что

$$Z = \sum_{\{s\}} t_{s_1 s_2} t_{s_2 s_3} \dots t_{s_N s_1} = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} t_{s_1 s_2} t_{s_2 s_3} \dots t_{s_N s_1} =$$
$$= \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \dots \sum_{s_{N-1}=\pm 1} t_{s_1 s_2} t_{s_2 s_3} \dots t_{s_{N-2} s_{N-1}} \sum_{s_N=\pm 1} t_{s_{N-1} s_N} t_{s_N s_1}$$

Исходя из формул перемножения матриц получаем, что

$$\sum_{s_N=\pm 1} t_{s_{N-1} s_N} t_{s_N s_1} = t^{(2)}_{s_{N-1} s_1}$$

Повторяя подобные перестановки сумм и преобразования произведений получим, что

$$Z = \sum_{s_1=\pm 1} t^{(N)}_{s_1 s_1} = Tr\ T^N$$

В нашем случае, матрица T очевидно является симметричной и обладает вещественными элементами, что позволяет привести её к диагональному виду

$$T' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Причем из-за инвариантности следа матрицы окажется, что

$$Z = Tr\ T^N = Tr\ T'^N = \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

Если процедуру диагонализации провести так, чтобы $\lambda_1 > \lambda_2$ (собственные значения обязательно будут вещественными из-за определения матрицы), то в предельном случае $N \to \infty$ получим

$$Z = \lambda_1^N$$

Для нашего определения матрцы T имеем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda(e^{\alpha+\beta} + e^{\alpha-\beta}) + e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} = 0$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda_\pm = e^\alpha \cosh(\beta) \pm \sqrt{e^{2\alpha} \sinh^2(\beta) + e^{-2\alpha}}$$

И тогда $\lambda_1 = e^\alpha \cosh(\beta) + \sqrt{e^{2\alpha} \sinh^2(\beta) + e^{-2\alpha}}$

Двумерная и трехмерная модели: Точное аналитическое решение модели Изинга вполне возможно, однако его получение и анализ крайне трудны с точки зрения математики, так что здесь мы ограничимся кратким изложением основных этапов его получения и одним важным в дальнейшем результатом. Полное изложение можно прочитать, например, в §151 [1].

В рамках двумерной модели рассматривается плоская квадратная решетка из N узлов при отсутствии магнтиного поля. Аналогично одномерному случаю, записывается полная энергия системы диполей, после чего записывается статистическая сумма. Полученная экспонента раскладывается по степеням $\theta = \frac{J}{k_B T}$, в результате чего статистическая сумма представляется в виде полинома по степеням $x = \tanh(\theta)$ и по степеням спинов. После этого каждому одночлену ставится в соответствие некоторый цикл на решетке (который может иметь самопересечения и быть многосвязным). Каждый цикл представляется в виде совокупности нескольких замкнутых петель, по которым проводится суммирование. Оно, в свою очередь, сводится к уже решенной задаче о случайных блужданиях точки по решетке. После длительных математическх преобразований находится статистическая сумма в виде двойного произведения и термодинамический потенциал в виде интеграла, не берущегося в элементарных функциях.

Наиболее интересным для нас результатом является формула для температуры Кюри для двумерной решетки. В рамках данной модели получается, что $T_c = \frac{2J}{k_B \ln(1+\sqrt{2})}$.

В свою очередь, аналитическое решение трехмерной модели на данный момент отсутствует, и непонятно, насколько реально его получение.

3.2 Компьютерное моделирование:

Одномерная и трехмерная модели: Компьютерное моделирование одномерной модели не проводилось в связи с тем, что возможно её точное аналитическое решение, из которого следует, что одномерная модель теряет часть важных свойств ферромагнетика.

В свою очередь, моделирование трехмерной задачи не проводилось в связи с тем, что имеющееся оборудование и реализации алгоритма не позволяют проводить моделирование достаточно больших систем с достаточной скоростью. Однако это принципиально возможно при наличии более мощных компьютеров и лучшей оптимизации соответствующих алгоритмов.

Двумерная модель:

Получение исходных данных для моделирования:

4 Задача 3

Список литературы

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Статистическая физика. Часть 1* — М., Наука, 1976.

[2] Blundell S. *Magnetism in Condensed Matter* — Oxford University Press, 2001.