Национальный Исследовательский Ядерный Университет «МИФИ»

Курсовая работа
по Общей физике (Электричество и магнетизм)

Выполнили: Костенко Ю. А.,
Зеленев В. С.

Москва - 2024

Содержание

1 Постановка задач

1.1 Задача 1

Исследовать электродинамику с монополями. Рассмотреть движение диона в однородном электрическом поле E; в однородном магнитном поле B; в скрещивающихся однородных электрическом и магнитном полях E и B, причем считать, что $E \perp B$.

1.2 Задача 2

Исследовать модель Изинга для ферромагнетиков. Рассчитать вектор намагниченности, получить петлю гистерезиса (если возможно).

1.3 Задача 3

Изучить движение заряженной частицы в равновесной электронейтральной плазме. Все необходимые параметры плазмы и частицы даны.

2 Задача 1

2.1 Электродинамика с монополями

Как известно, классические уравнения Максвелла несимметричны относительно обмена электрических и магнитных полей. Это, во многомо, связано с отсутствием магнитных зарядов. Однако существуют различные теории, которые предполагают их существование и позволяют исследовать так называемую электродинамику с монополями, чему и будет посвящен этот раздел.

Сперва следует договориться об обозначениях. Работать будем в системе СГС. К обозначениям будем добавлять индексы e или μ, в зависимости от того, с чем связан соответствующий объект (конкретная связь обычно будет понятна из контекста).

Начнем с получения новых уравнений Максвелла, а также преобразований обмена полей. Выпишем, для начала, классические уравнения Максвелла, с учетом соглашений об обозначениях:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho_e \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Очевидно, что для получения симметричных уравнений, во второе из них необходимо добавить член, связанный с плотностью магнитных зарядов ρ_μ, а в третье — с током магнитных зарядов $\vec{j}_\mu$. После их добавления получается следующая система уравнений:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho_e \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 4\pi\rho_\mu \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_\mu - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

При этом минус в третьем уравнении необходим из-за вида искомой симметрии. Полученная система уравнений оказывается симметрична относительно следующего преобразования:

$$\vec{E} \to \vec{B}$$
$$\vec{B} \to -\vec{E}$$
$$\rho_e \to \rho_\mu$$
$$\rho_\mu \to -\rho_e$$
$$\vec{j}_e \to \vec{j}_\mu$$
$$\vec{j}_\mu \to -\vec{j}_e$$

Опираясь на эти преобразования и на известные формулы классической электродинамики, можно получить следующие выражения:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_e = 0 \to \frac{\partial \rho_\mu}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_\mu = 0$$

$$\varphi_e = \frac{q_e}{r} \to \varphi_\mu = \frac{q_\mu}{r}$$
$$\vec{E} = \frac{q_e}{r^3}\vec{r} \to \vec{B} = \frac{q_\mu}{r^3}\vec{r}$$
$$\vec{B} = \frac{q_e}{c}\frac{\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \to \vec{E} = -\frac{q_\mu}{c}\frac{\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$
$$\vec{F}_e = q_e(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}) \to \vec{F}_\mu = q_\mu(\vec{B} - \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E})$$

2.2 Движение диона в различных полях

Как следствие **симметризации** уравнений Максвелла, осуществлённой в предыдущем разделе задачи путём определения некоторой модели "**монополя**" (частицы, являющейся независимым **источником** центрально-симметричного **магнитного поля**), имеет место рассмотрение модели "**диона**" (частицы m, обладающей не только собственным **электрическим** q_e, но и собственным **магнитным** зарядом q_μ).

Дион можно поочерёдно поместить в однородное **электрическое**, однородное **магнитное** поле, а также в поле, представляющее **суперпозицию** оных полей, **скрещенных** под **прямым** углом в пространстве, и рассмотреть особенности его динамики.

Рассмотрим **общее уравнение динамики диона** (в системе СГСЭ):

$$m\dot{\vec{v}} = q_e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\cdot\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]\right) + q_\mu\left(\vec{B} - \frac{1}{c}\cdot\left[\vec{v}\times\vec{E}\right]\right), \text{ где:}$$

$\vec{v} = \{v_x,\, v_y,\, v_z\}$ – вектор скорости частицы;

$\vec{E} = \{E_x,\, E_y,\, E_z\}$ – вектор электрической напряжённости;

$\vec{B} = \{B_x,\, B_y,\, B_z\}$ – вектор магнитной индукции.

Рассмотрим движение диона только в однородном электрическом поле ($\vec{B} = \vec{0}$), задающемся в пространстве вектором электрической напряжённости вида $\vec{E} = \{E_x,\, 0,\, 0\}$.

Запишем уравнение динамики для данного случая:

$$m\dot{\vec{v}} = E_x\Big(q_e - q_\mu\left(v_z\vec{e}_y - v_y\vec{e}_z\right)\Big)$$

Рассмотрим следующую систему линейных дифференциальных уравнений II-го порядка относительно времени t:

$$(*)\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{q_e E_x}{m} \\[2ex] \ddot{y} = -\dfrac{q_\mu E_x}{mc}\cdot\dot{z} \\[2ex] \ddot{z} = \dfrac{q_\mu E_x}{mc}\cdot\dot{y} \end{cases}$$

Произведём переобозначение вышеописанных групп констант:

$$\beta_1 = \frac{q_e E_x}{m}, \quad \omega_E = \frac{q_\mu E_x}{mc}$$

Перепишем систему уравнений $(*)$ следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \beta_1 & (1) \\ \ddot{y} = -\omega_E \cdot \dot{z} & (2) \\ \ddot{z} = \omega_E \cdot \dot{y} & (3) \end{cases}$$

Найдём решение уравнения (1), дважды его проинтегрировав:

$$x = \frac{\beta_1 t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad \{C_1, C_2\} = const \qquad (4)$$

Далее, найдём решения уравнений (2) и (3).

При выражении из уравнения (2) $\dot{z}$ и подстановке его в уравнение (3), получим следующего вида линейное дифференциальное уравнение III-го порядка относительно t:

$$\dddot{y} + \omega_E^2 \cdot \dot{y} = 0 \qquad (5)$$

Произведём следующую замену $\dot{y} = \xi$ и перепишем уравнение (5) в следующем виде:

$$\ddot{\xi} + \omega_E^2 \cdot \xi = 0 \qquad (6)$$

Получили дифференциальное уравнение вида $\Big\{F(\xi, \ddot{\xi}) = 0\Big\}$ с возможностью понижения порядка.

Воспользуемся данной возможностью — произведём следующие замены:

$$\dot{\xi} = p(\xi), \quad \ddot{\xi} = p(\xi) \cdot p'(\xi)$$

В таком случае, уравнение (6) можно переписать следующим образом:

$$p' + \frac{\omega_E^2 \cdot \xi}{p} = 0$$

Решим полученное уравнение методом разделения переменных — найдём функцию $p(\xi) = \dot{\xi}$:

$$\frac{dp}{d\xi} = -\frac{\omega_E^2 \cdot \xi}{p}$$

$$pdp = -\omega_E^2 \cdot \xi d\xi$$

$$p = \pm\sqrt{\widehat{C}_1 - \omega_E^2\xi^2}, \quad \widehat{C}_1 = const$$

Таким образом, получили функцию $\dot{\xi} = \pm\sqrt{\widehat{C}_1 - \omega_E^2\xi^2}$, $\widehat{C}_1 = const$.

Продолжим решение уравнения — найдём аналогичным способом функции $\xi(t) = \dot{y}$ и $y(t)$ соответственно:

$$\dot{\xi} = \pm\sqrt{\widehat{C}_1 - \omega_E^2\xi^2}$$

$$\pm\frac{d\xi}{\sqrt{\widehat{C}_1 - \omega_E^2\xi^2}} = dt$$

$$\pm\arcsin\left(\frac{\omega_E}{\sqrt{\widehat{C}_1}}\xi\right) = \omega_E t + \widehat{C}_2, \quad \widehat{C}_2 = const$$

$$\frac{\omega_E}{\sqrt{\widehat{C}_1}}\xi = \pm\sin\left(\omega_E t + \widehat{C}_2\right)$$

$$\xi = \pm\frac{\sqrt{\widehat{C}_1}}{\omega_E}\sin\left(\omega_E t + \widehat{C}_2\right)$$

$$\dot{y} = \pm\frac{\sqrt{\widehat{C}_1}}{\omega_E}\sin\left(\omega_E t + \widehat{C}_2\right)$$

$$dy = \pm\frac{\sqrt{\widehat{C}_1}}{\omega_E}\sin{(\omega_E t + \widehat{C}_2)}dt$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{\widehat{C}_1}}{\omega_E^2}\cos{(\omega_E t + \widehat{C}_2)} + \widehat{C}_3, \quad \widehat{C}_3 = const$$

В результате получили итоговое решение дифференциального уравнения (5):

$$y = \pm\frac{\sqrt{\widehat{C}_1}}{\omega_E^2}\cos{(\omega_E t + \widehat{C}_2)} + \widehat{C}_3, \quad \{\widehat{C}_1,\, \widehat{C}_2,\, \widehat{C}_3\} = const$$

Подставим получившееся уравнение $y = y(t)$ в уравнение (3) и найдём уравнение $z = z(t)$:

3 Задача 2

4 Задача 3