



INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK DER UNIVERSITÄT ZÜRICH

Mathematische Methoden der Physik I

HERBSTSEMESTER 2011

Prof. Philippe Jetzer

LaTeX: Marion Baumgartner und Rebekka Bieri
Korrekturen: Cédric Huwyler

Inhaltsverzeichnis

1	Fourierreihen	3
1.1	Definition der Fourierreihe	3
1.2	Orthogonalreihen	8
1.3	Die Féjerschen Mittel	13
1.4	Anwendung	18
2	Fouriertransformation	21
2.1	Definition und elementare Eigenschaften	21
2.2	Fouriertransformierte von Gauss'schen Funktionen	22
2.3	Weitere Beispiele ($n=1$)	23
2.4	Umkehrsatz für L^1 -Funktionen	24
2.5	Fouriertransformation von rotationsinvarianten Funktionen	25
2.6	Wellengleichung	30
2.7	Wärmeleitungsgleichung	34
3	Differentialgleichungen	37
3.1	Differentialgleichungen 1. Ordnung	37
3.1.1	Homogene lineare DGL	37
3.1.2	Inhomogene lineare DGL	38
3.1.3	Separierbare DGL	39
3.1.4	Riccati DGL	42
3.1.5	$y'' = f(x, y')$	43
3.1.6	$y'' = f(y, y')$	43
3.2	Exakte DGL	44
3.2.1	Integrierende Faktoren (oder Eulersche Multiplikatoren)	46
3.3	Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung und Differentialgleichungen höherer Ordnung	46
3.3.1	Lineares System von n Differentialgleichungen	48
3.3.2	Systeme mit konstanten Koeffizienten	52
3.3.3	Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	57
3.3.4	Inhomogenes System	59
4	Variationsrechnung	63
4.1	Eindimensionales Problem (Eulergleichung)	63

4.2	Spezialfälle	65
4.3	Natürliche Randbedingungen	66
4.4	Skizze einiger Erweiterungen der bisherigen Betrachtungen	68
4.4.1	Integrand F hängt auch von höheren Ableitungen ab	68
4.4.2	Mehreren unabhängige Variablen	68
4.4.3	Mehrere unbekannte Funktionen	69
4.5	Extrema unter Nebenbedingungen	72
4.5.1	Integralbedingung	72
4.5.2	Eine Bedingung in jedem Punkt, “holonom” oder Differentialbe- dingung	73
5	Lineare Operatoren, Eigenwertprobleme	75
5.1	Funktionenräume (Repetition)	75
5.2	Hermit’sche Operatoren	75
5.3	Eigenwerte und Eigenfunktionen eines Hermite’schen Operators	78
5.4	Extremalprinzipien und Charakterisierung der Eigenwerte	84
5.5	Einige Eigenwertprobleme der mathematischen Physik	86
5.5.1	Die schwingende Membran	86
5.5.2	Die Schrödingergleichung (zeitunabhängig)	92
5.5.3	Die Knickung eines Reaktors	92
5.6	Störungsrechnung	94
6	Kugelfunktionen	97
6.0.1	Laplace-Gleichung	97
6.0.2	Schrödingergleichung	98
7	Distributionane (verallgemeinerte Funktionen)	105
7.1	Motivation	105
7.2	Grundidee	105
7.3	Dirac’sche Distribution	106
7.3.1	Operationen auf Distributionen	107
7.3.2	Delta-Distribution dargestellt durch Orthogonalreihen	109
8	Elliptische Differentialgleichungen, die Green’sche Funktion	111
8.1	Fundamentallösungen für den Laplace-Operator	111
8.2	Fundamentallösung und Fouriertransformationen	116
8.3	Dirichletproblem, harmonische Funktionen	117
8.3.1	Green’sche Funktionen	118

8.4	Methode der Spiegelbildladung	121
8.5	Ein weiteres Beispiel der Green'schen Funktion: die belastete Saite	123
A	Literatur zur Vorlesung MMP II	125

Dieses Skript dient als Ergänzung zur Vorlesung “Mathematische Methoden der Physik (MMP) I” von Prof. Philippe Jetzer. Es ist keinesfalls als alleiniges Lehrmittel gedacht, sondern soll nur als roter Faden zur Vorlesung dienen. In dieser ersten vollständigen Version können sich noch einige Beanstandungen finden, wir möchten Sie daher bitten, allfällige Bemerkungen und Fehler an *chuwyl@physik.uzh.ch* zu melden.

Motivation

In den verschiedenen Vorlesungen der theoretischen Physik, aber auch der Experimentalphysik, werden jeweils eine Reihe von mathematischen Kenntnissen gebraucht, die zum Teil nicht in den üblichen Mathematikvorlesungen vorkommen.

Der Zweck dieser Vorlesung ist es, die nötigen Begriffe zu vermitteln. Zum Beispiel:

- Mechanik: Differentialgleichungen, Variationsrechnung (Lagrange- und Hamilton-Formalismus)
- Elektrodynamik: Lösung von partiellen Differentialgleichungen wie z.B. die Poisson- oder Wellengleichung mittels Green'scher Funktion und Distributionen (z.B. Delta-Distribution), komplexe Funktionentheorie,
- Quantenmechanik: Behandlung von Ort und Impuls als lineare Operatoren, Wechsel vom Orts- in den Impulsraum mittels Fouriertransformationen, Lösung der Schrödinger(differential)gleichung, Beschreibung der Atomorbitale mittels Symmetriegruppen und Kugelfunktionen,

Wir werden jeweils Beispiele behandeln, die als Brücken zur Physik dienen sollen. Wichtig ist vor allem, dass Sie die Methoden auch benützen können. Gewicht wird besonders auf die Anwendungen gelegt, weniger auf formale Beweise. Zentral dabei sind die Übungen; es ist von grösster Bedeutung dass Sie viel Zeit in die Lösung der Übungen investieren.

1 Fourierreihen

1.1 Definition der Fourierreihe

Definition 1.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ von der Form

$$f : x \rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (1.1)$$

$(a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{C})$ heisst **trigonometrisches Polynom**.

Bemerkung 1.1.

1. Jedes trigonometrische Polynom ist 2π -periodisch

2. Da $\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$, $\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$ und $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$, ist die Darstellbarkeit von f in der Form 1.1 äquivalent mit der Darstellbarkeit von f in der Form

$$f : x \rightarrow \sum_{n=-N}^N (c_n e^{inx}) \quad (1.2)$$

mit $c_0, c_1, c_{-1}, \dots, c_N, c_{-N} \in \mathbb{C}$.

Berechnung der Koeffizienten in den Darstellungen 1.2 und 1.1 aus den Werten der Funktion f :

Seien m und n ganze Zahlen. Dann ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } m = n, \\ \left[\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Aus 1.2 folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N (c_n e^{i(n-m)x}) dx \\ &= \sum_{n=-N}^N c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = 2\pi c_m \\ \Rightarrow c_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx \quad \text{mit } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \end{aligned} \quad (1.4)$$

Seien n und m natürliche Zahlen. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \begin{cases} \pi & \text{falls } m = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \begin{cases} \pi & \text{falls } m = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= 0.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Aus 1.1 folgt

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] dx \\
&= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx}_{2\pi} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx}_{=0} \right) = \pi a_0 \\
\Rightarrow a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.
\end{aligned}$$

Für $m = 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] \cos(mx) dx \\
&= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx}_{=0} + \sum_{n=1}^N \left[a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx}_{=\pi \delta_{mn}} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx}_{=0} \right] \\
&= \pi a_m \\
\Rightarrow a_m &= \frac{\pi}{1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx
\end{aligned}$$

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx \text{ mit } m = 0, 1, 2, \dots, N \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx \text{ mit } m = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1.6)$$

Frage 1. Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten eines trigonometrischen Polynoms f erfüllen, damit f reelle Werte annimmt?

Lösung 1.1. Aus 1.1 und 1.6 folgt: f reellwertig \iff alle a_n, b_n reell.

Behauptung 1.1. f reellwertig $\implies c_{-n} = \overline{c_n} \forall n$

Beweis.

$$\begin{aligned} f \text{ reellwertig} \implies c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x) e^{-inx} dx} \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx} = \overline{c_n} \forall n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{-n} = \overline{c_n} \forall n \implies f(x) &= \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \\ &= \underbrace{c_0}_{=\overline{c_0}} + \sum_{n=1}^N \left(c_n e^{inx} + \underbrace{c_{-n}}_{=\overline{c_n}} e^{-inx} \right) \\ &= \underbrace{c_0}_{\text{reel}} + \sum_{n=1}^N \underbrace{\left(c_n e^{inx} + \overline{c_n} e^{inx} \right)}_{\text{reel}} \in \mathbb{R} \forall x \end{aligned}$$

□

Definition 1.2. Eine trigonometrische Reihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (\text{komplexe Schreibweise}) \quad (1.7)$$

oder

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (\text{reelle Schreibweise}) \quad (1.8)$$

Definition 1.3. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine integrierbare, 2π -periodische Funktion. Dann heissen die Zahlen:

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (1.9)$$

mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (bei komplexer Schreibweise) resp.

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (n = 0, 1, \dots) \\ b_n &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.10)$$

(bei reeller Schreibweise) **Fourierkoeffizienten**, und die mit diesen Koeffizienten gebildete Reihe 1.9 (resp. 1.10) heisst **Fourierreihe** der Funktion f .

Symbol:

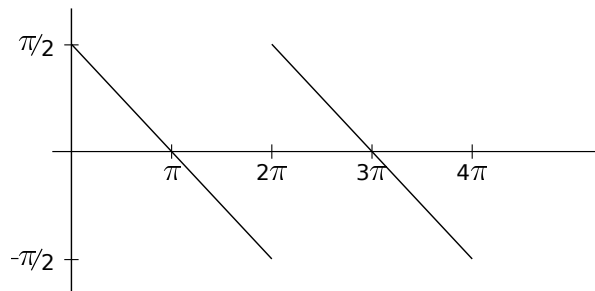
$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Das Zeichen “ \sim ” meint: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ ist die Fourierreihe der Funktion $\Leftrightarrow c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ (d.h. nur die Koeffizienten sind so berechnet, es ist noch nichts über die Konvergenz der Reihe bekannt und ob sie die Funktion überhaupt darstellt.)

Aufgabe 1.1. Bestimme die Fourierreihe der folgendermassen definierten Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2} & \text{falls } 0 < x < 2\pi, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

sonst ist $f(x)$ 2π -periodisch definiert.



Lösung 1.2. Lösung

- *Komplexe Schreibweise:*

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

Für $n = \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

(jedes bestimmte Integral einer 2π -periodischen Funktion über ein Intervall der Länge 2π besitzt denselben Wert; e^{inx} ist auch 2π -periodisch).

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) e^{-inx} dx = \frac{1}{2ni} \\ \Rightarrow f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{2ni} \quad (n \neq 0) \end{aligned}$$

- *Reelle Schreibweise:*

$$\begin{aligned} \frac{e^{inx}}{2ni} + \frac{e^{-inx}}{-2ni} &= \frac{\sin nx}{n} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \end{aligned}$$

Satz 1.1. Ist $f(x) = f(-x)$ **gerade**, so enthält die reelle Fourierdarstellung von f nur **Cosinusglieder** (inkl. Konstante a_0). Ist $f(x) = -f(-x)$ **ungerade**, so enthält die reelle Fourierdarstellung von f nur **Sinusglieder**.

Beweis. Sei z.B. f ungerade d.h. $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dann folgt für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{ungerade}} \underbrace{\cos nx}_{\text{gerade}}}_{\text{ungerade}} dx = 0, \text{ usw.}$$

□

Frage 2. Unter welchen Bedingungen darf man bei

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.12)$$

das Zeichen \sim durch $=$ ersetzen?

Wann konvergiert die Fourierreihe von f gegen f ? (siehe später).

Triviales Resultat: Jedenfalls dann, wenn f ein trigonometrisches Polynom ist.

Satz 1.2. Konvergiert eine trigonometrische Reihe gleichmässig, so ist sie die Fourierreihe ihrer Summenfunktion.

Beweis. Voraussetzung: Die trigonometrische Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ konvergiert gleichmässig auf \mathbb{R} . Sie besitzt dann eine stetige (2π -periodische) Summenfunktion $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$s(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Behauptung 1.2.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) e^{-imx} dx = c_m \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Beweis.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{i(n-m)x})}_{\text{ebenfalls gleichmässig konvergent}} dx$$

Eine mit einer beschränkten Funktion (e^{-imx}) multiplizierte Reihe bleibt gleichmässig konvergent. Bei gleichmässiger Konvergenz können ausserdem Integration und Summe vertauscht werden. Wir haben also

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} (e^{i(n-m)x}) dx}_{2\pi \delta_{nm}} = c_m \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

□

Blatter Analysis 2 s. 111:

Besitzt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ eine konvergente Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ aus konstanten Gliedern c_n mit

$$|f(x)| \leq c_n \quad \forall x \in A, \forall k \in \mathbb{N},$$

so ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ auf A **gleichmässig** konvergent. Dann dürfen zum Beispiel auch Summe und Integral vertauscht werden (s. 119).

1.2 Orthogonalreihen

Sei $[a, b] \in \mathbb{R}$ ein festes, endliches Intervall. Die auf $[a, b]$ definierten **stetigen** komplexwertigen (bzw. reellwertigen) Funktionen bilden einen komplexen (bzw. reellen) **linearen Raum (Vektorraum)**.

Definition der Summe von Vektoren (Funktionen):

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Definition des Produktes von Zahl und Vektor:

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

Im Vektorraum der stetigen Funktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ (bzw. $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$) führen wir das **Skalarprodukt (inneres Produkt)**

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

ein. Es gelten die Regeln

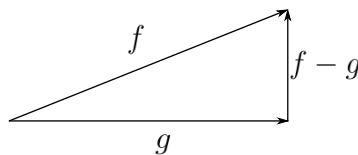
$$\begin{aligned}(\lambda f, g) &= \lambda(f, g), \\(f + g, h) &= (f, h) + (g, h), \\(g, f) &= \overline{(f, g)}, \\f \neq 0 &\Rightarrow (f, f) > 0,\end{aligned}$$

wobei f , g und h Funktionen im oben definierten Raum darstellen, λ eine reelle Zahl ist und $f \neq 0$ gleichbedeutend ist mit *f ist nicht die Konstante 0*. Damit wird der Vektorraum zu einem Prähilbertraum (zum Hilbertraum fehlt die sog. Vollständigkeit). Als Länge des Vektors f definieren wir:

$$\|f\| := \sqrt{(f, f)} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Unter dem **Abstand** der Vektoren f und g versteht man

$$\rho(f, g) := \|f - g\| = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$



Bezüglich dieser Abstandsfunktion ist unser Funktionenraum ein **metrischer Raum**.

Definition 1.4. Die Vektorfolge $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$ heisst **orthonormiert** falls

$$(\phi_j, \phi_k) = \delta_{jk} \quad (j, k \in \mathbb{N}).$$

Beispiel 1.1. Im Raum der stetigen Funktionen $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ bilden folgende Vektoren ein orthonormiertes System:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{2ix}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{-2ix}}{\sqrt{2\pi}}, \dots$$

Denn

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\overline{e^{imx}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \delta_{nm} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

Beispiel 1.2. Im Raum der stetigen Funktionen $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ oder $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ bilden folgende Vektoren ein orthonormiertes System

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

(Beweis mithilfe von Formel 1.5).

Beispiel 1.3. Die Polynome

$$P_0(x) := 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

heissen **Legendrepolynome**. Im Raum der stetigen Funktionen $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ (bzw. $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$) stehen diese Polynome aufeinander senkrecht, d.h. es ist

$$(P_j, P_k) = 0 \text{ falls } j \neq k. \quad (1.13)$$

Dividieren wir jeden Vektor durch seine Länge, $\frac{P_0(x)}{\|P_0(x)\|}, \frac{P_1(x)}{\|P_1(x)\|}, \dots$, so entsteht ein orthonormiertes System.

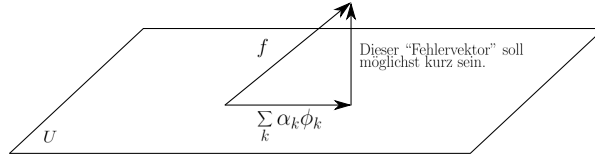
Aufgabe 1.2.

Gegeben sei ein orthonormiertes System ϕ_1, ϕ_2, \dots ; ein Vektor f und eine natürliche Zahl n . Gesucht ist nun diejenige Linearkombination $\alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots + \alpha_N \phi_N$, welche f im Sinne des oben definierten Abstandes möglichst nahe kommt.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \|f - \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n\| \text{ soll möglichst klein sein} \\ \Leftrightarrow \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n(x) \right|^2 dx \text{ soll möglichst klein sein} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Wie hat man $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ zu wählen?

Entsprechende Situation im Euklidischen Raum:



U : Unterraum, der durch die orthonormierten Vektoren ϕ_1, \dots, ϕ_N aufgespannt ist.

Lösung in diesem Fall α_k muss gleich der Projektion von f auf den Basisvektoren ϕ_k sein:

$$\alpha_k := (f, \phi_k) \quad (k = 1, \dots, n)$$

Lösung 1.3. Das gesuchte Minimum wird genau dann erreicht, wenn

$$\alpha_k = (f, \phi_k) \quad \text{mit } k = 1, \dots, N \quad (1.15)$$

Beweis. Für jede Wahl der Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ gilt:

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n\|^2 &= \int_a^b \left(f(x) - \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n(x) \right) \overline{\left(f(x) - \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n(x) \right)} dx \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N \overline{\alpha_n} (f, \phi_n) - \sum_{n=1}^N \alpha_n \overline{(f, \phi_n)} + \sum_{n=1}^N \alpha_n \overline{\alpha_n} \\ &= \sum_{n=1}^N \underbrace{|\alpha_n - (f, \phi_n)|^2}_* - \sum_{n=1}^N |(f, \phi_n)|^2 + \|f\|^2 \\ &= \underbrace{\|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |(f, \phi_n)|^2}_{\text{von der Wahl der } \alpha_n \text{ unabhängig}} + \underbrace{\sum_{n=1}^N |\alpha_n - (f, \phi_n)|^2}_{\text{minimal (und zwar = 0) genau dann wenn 1.15 erfüllt ist.}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$(*) = (\alpha_n - (f, \phi_n))(\overline{\alpha_n} - \overline{(f, \phi_n)}) = \alpha_n \overline{\alpha_n} - \overline{\alpha_n} (f, \phi_n) - \alpha_n \overline{(f, \phi_n)} + |(f, \phi_n)|^2$$

□

Definition 1.5. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) \phi_n$ heisst **Fourierreihe** der Funktion f bezüglich des orthonormierten Systems ϕ_1, ϕ_2, \dots

Bezeichnung:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \Leftrightarrow c_n = (f, \phi_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung 1.2. Die früher eingeführten (trigonometrischen) Fourierreihen sind Spezialfälle dieses allgemeinen Begriffs der Fourierreihe. Unter allen trigonometrischen Polynomen von Grad N

$$x \rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ist die N -te Partialsumme der Fourierreihe von f also dadurch ausgezeichnet, dass sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \right|^2 dx$$

zu einem Minimum macht.

Satz 1.3. (Besselsche Ungleichung)

Ist ϕ_1, ϕ_2, \dots ein orthonormiertes System und ist

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

so folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Insbesondere ist $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ (ohne Beweis).

Definition 1.6. Ein orthonormiertes System ϕ_1, ϕ_2, \dots heisst **vollständig**, falls sich jeder Vektor f durch eine (endliche) Linearkombination von ϕ_k 's im quadratischen Mittel genau approximieren lässt.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n (f, \phi_k) \phi_k \right\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |(f, \phi_k)|^2 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \phi_k)|^2 = \|f\|^2 \quad \forall f \end{aligned}$$

Bemerkung 1.3. Bei einem **vollständigen** orthonormierten System tritt in der Besselschen Ungleichung stets die Gleichung

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|^2$$

auf (**“Vollständigkeitsrelationen”**).

Bemerkung 1.4. Allgemein gilt die sog. **Parseval'sche Gleichung**:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \\ g(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} d_n \phi_n(x) \end{aligned} \right\} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{d_n} = (f, g)$$

(ohne Beweis.)

Bemerkung 1.5. Die bezüglich $[-\pi, \pi]$ orthonormierten Systeme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}}, \dots$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi}}, \dots$$

sind **vollständig** (Beweis später). Es gilt also z.B.

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= a_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^N \left(\sqrt{\pi} a_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\pi} b_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right) \\ &\Rightarrow |a_0| \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \|f\|^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx \end{aligned}$$

1.3 Die Féjerschen Mittel

Satz 1.4. Für jede Zahlenfolge a_1, a_2, \dots, a_n gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a \quad (1.17)$$

Die Umkehrung gilt nicht! (ohne Beweis)

Beispiel 1.4. Für " \Leftarrow "

$$\begin{cases} a_n = 1 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ a_n = 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

In diesem Fall ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{2}$. Aber $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existiert **nicht**.

Anwendung auf die Partialsummenfolge einer Reihe:

Satz 1.5. Für jede Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$$

wobei $s_n := a_1 + \dots + a_n$ und $\sigma_n := \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$

Sei f eine stetige, 2π -periodische Funktion. In Zusammenhang mit ihrer Fourierreihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) .$$

bezeichnen wir

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ \sigma_n &= \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_n(x)}{n+1} \end{aligned} \tag{1.18}$$

als sog. **Féjersches Mittel**.

Satz 1.6. Die Féjerschen Mittel einer stetigen, 2π -periodischen Funktion f konvergieren gleichmäßig gegen f :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = f(x) \tag{1.19}$$

Folgerungen aus Satz 1.6

Satz 1.7. Eine stetige, 2π -periodische Funktion ist durch ihre Fourierreihe eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien f und g stetige und 2π -periodische Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ g(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \end{aligned}$$

Dann besitzen f und g dieselben Féjerschen Mittel. Nach Satz 1.6 ist $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$. □

Satz 1.8. *Konvergiert die Fourierreihe einer stetigen, 2π -periodischen Funktion gleichmässig, so stellt sie f in allen Punkten dar. (ohne Beweis)*

Satz 1.9. *Eine stetige, 2π -periodische Funktion f kann durch trigonometrische Polynome mit beliebiger Genauigkeit gleichmässig approximiert werden. (ohne Beweis)*

Satz 1.10. *Das auf $[-\pi, +\pi]$ orthonormierte System*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}$$

ist vollständig.

Beweis. (von Satz 1.6)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und 2π -periodisch. Dann gilt für $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \iff c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-int} dt,$$

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \underbrace{\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} dt}_{=: D_n(x-t)}. \end{aligned}$$

□

Definition 1.7. *Der **Dirichlet Kern** ist definiert als:*

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})x\right)}{\sin(\frac{x}{2})}. \quad (1.20)$$

Verifikation von Formel 1.20

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = e^{-inx} \underbrace{\left(1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{2inx}\right)}_{=:s, \text{ geometrische Reihe}} \\
&= e^{-inx} \left[\frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \right] \\
&= \frac{e^{(n+1)ix} - e^{-nix}}{e^{ix} - 1} \times \frac{e^{-i\frac{x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)ix} - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)ix}}{2i} \\
&= \frac{\frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}} \\
&= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

Aus 1.20 folgt

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} \underbrace{f(x-u) D_n(u)}_{2\pi\text{-periodische Funktion von } u} du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x-u) D_n(u) du,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

wobei im ersten Schritt die Substitution $x-t=u$, $x-u=t$, $dt=-du$ verwendet wurde. Mit

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \dots + s_n(x)}{n+1} \tag{1.22}$$

folgt aus 1.21

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \underbrace{\frac{D_0(u) + D_1(u) + \dots + D_n(u)}{n+1}}_{=:K_n(u)} du. \tag{1.23}$$

Definition 1.8. Der **Féjersche Kern** ist definiert als:

$$K_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \dots + D_n(x)}{n+1} = \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{1.24}$$

Verifikation von 1.24

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{3x}{2}\right) + \dots + \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{(n+1) \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{3x}{2}} + \dots + e^{i\frac{(2n+1)x}{2}}\right)}{(n+1) \sin\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2(n+1) \sin^2\frac{x}{2}} \underbrace{\operatorname{Im}\left(i(1 - e^{i(n+1)x})\right)}_{1 - \cos((n+1)x)} \\
&= \frac{2 \sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{2(n+1) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Eigenschaften des Féjerschen Kerns

1. $K_n(x) \geq 0 \quad \forall x \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 2\pi \quad \forall n$. Dies folgt aus

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = 2\pi.$$

3. Zu jedem Paar (ϵ, δ) von positiven Zahlen gibt es einen Index $N(\epsilon, \delta)$ mit den Eigenschaften:

$$\left. \begin{array}{l} \delta \leq |x| \leq \pi \\ \nu > N \end{array} \right\} \Rightarrow |k_n(x)| < \epsilon.$$

Dabei ist

$$|k_n| \leq \frac{1}{(n+1) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Formel 1.25 folgt aus 1.24, denn:

$$\frac{1}{(n+1) \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} < \epsilon,$$

und

$$N+1 > \frac{1}{\epsilon \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}.$$

Beweis. Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = f(x)$ gleichmässig¹ für $x \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$. Da f gleichmässig stetig ist, gibt es ein $\delta(\epsilon) > 0$ mit der Eigenschaft, dass $|t| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x-t)| <$

¹gleichmässige Konvergenz: $\exists N(\epsilon) : n > N \Rightarrow |\sigma_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{\epsilon}{2}$. Es bezeichne weiter $M := \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Nach Punkt 3 gibt es einen Index $N(\epsilon, \delta)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\delta \leq |x| \leq \pi, \mu > n \Rightarrow |k_n(x)| < \frac{\epsilon}{4M}.$$

□

für $n > N$ und $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_n(x)| &\stackrel{\text{wegen 2. und 1.23}}{=} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) k_n(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) k_n(t) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) k_n(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)| k_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x) - f(x-t)|}_{< \frac{\epsilon}{2}} k_n(t) dt + \\ &\quad \underbrace{\phantom{\int_{-\delta}^{\delta}}}_{< \frac{\epsilon}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} \underbrace{|f(x) - f(x-t)|}_{\leq 2M} \underbrace{k_n(t)}_{< \frac{\epsilon}{4M}} dt + \\ &\quad \underbrace{\phantom{\int_{-\pi}^{-\delta}}}_{\frac{\epsilon}{4} \text{ mit } \int_{-\pi}^{-\delta} dt < \pi} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \underbrace{|f(x) - f(x-t)| k_n(t) dt}_{\text{analog } < \frac{\epsilon}{4}} < \epsilon \end{aligned}$$

d.h. also $|f(x) - \sigma_n(x)| < \epsilon \forall x \in \mathbb{R}$ für $n > N$ also $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = f(x)$ gleichmässig für $x \in \mathbb{R}$.

1.4 Anwendung

Wärmeleitung im geschlossenen Draht

Vorbereitung: Entwicklung von Funktionen beliebiger Periode

f besitze die Periode L , d.h. $f(x+L) = f(x) \forall x$. Wir definieren $g(t) := f\left(\frac{Lt}{2\pi}\right)$; g besitzt dann die Periode 2π da

$$g(t+2\pi) = f\left(\frac{L(t+2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Lt}{2\pi} + L\right) = f\left(\frac{Lt}{2\pi}\right) = g(t) \quad \forall t$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)),$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos(nt) dt$$

mit $n = 0, 1, \dots$ und

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin(nt) dt \quad (1.25)$$

mit $n = 1, 2, \dots$

Rücktransformation: $f(x) = g\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right) \quad (1.26)$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx$$

mit $n = 0, 1, \dots$

Analog gilt

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx$$

mit $n = 1, 2, \dots$

Gesucht: Temperaturverteilung $u(x, t)$ von einem nach aussen wärmeisolierten geschlossenen Draht.

Zu erfüllen sind:

1. **Physikalisches Gesetz:**

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_t = 0 \quad (1.27)$$

wobei $a = \text{const.} > 0$

2. **Anfangsbedingung**

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \forall x \quad (1.28)$$

3. **Periodizitätsbedingung**

$$u(x + L, t) = u(x, t) \quad \forall x \text{ mit } x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (1.29)$$

Bedingung 1.29 führt auf den **Lösungsansatz**

$$u(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(t) \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) + b_n(t) \sin \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) \right) \quad (1.30)$$

Wir setzen den Ansatz 1.30 in 1.27 ein:

$$\begin{aligned} -\frac{a'_0(t)}{2a(t)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{a'_n(t)}{a^2} - a_n(t) \frac{4\pi^2 n^2}{L^2} \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) \right. \\ \left. + \left(-\frac{b'_n(t)}{a^2} - b_n(t) \frac{4\pi^2 n^2}{L^2} \right) \cdot \sin \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Folgerungen aus 1.27: $a_0(t) = A_0 = \text{const.}$

$$\underbrace{\frac{a'_n(t)}{a(t)}}_{(\ln a_n)'} = -\frac{4\pi^2 n^2 a^2}{L^2}$$

Analog für b .

$$\Rightarrow \ln a_n = -\frac{4\pi^2 n^2 a^2}{L^2} \cdot t + \text{const.}$$

$$\begin{aligned} a_n(t) &= A_n e^{-\frac{4\pi^2 n^2 a^2}{L^2} \cdot t}, \quad A_n = \text{const. } n = 1, 2, \dots \\ b_n(t) &= B_n e^{-\frac{4\pi^2 n^2 a^2}{L^2} \cdot t}, \quad B_n = \text{const. } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Die Konstanten A_0, A_n, B_n sind so zu wählen, dass 1.28 erfüllt ist:

$$u(x, 0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) + B_n \sin \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) \right) = \phi(x) \quad (1.31)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) dx, & n = 0, 1, \dots \\ B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \sin \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) dx, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.32)$$

Lösung des Problems:

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{4\pi^2 n^2 a^2}{L^2} \cdot t} \left(A_n \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) + B_n \sin \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) \right),$$

wobei die A_n, B_n aus 1.32 zu entnehmen sind.

2 Fouriertransformation

2.1 Definition und elementare Eigenschaften

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die **Fouriertransformierte** von f ist die Funktion auf \mathbb{R}^n

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ikx} dx,$$

wobei $k \cdot x = \sum_{i=1}^n k_i x_i$ ($= \vec{k} \cdot \vec{x}$), $dx = dx^1, \dots, dx^n$)

für $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ ist die L^p -Norm definiert durch:

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

entsprechend $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f\|_1 := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \right) < \infty$$

Die **inverse Fouriertransformation** von f ist

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} f(k) e^{ikx} dk$$

Lemma 2.1. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann sind die Funktionen \hat{f} , \check{f} gleichmässig stetig, und für alle $x, k \in \mathbb{R}$ gilt $|\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1$, $|\check{f}(k)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \|f\|_1$ (ohne Beweis)

Elementare Eigenschaften

Seien $f, g \in L^1$; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $(D_\lambda f)(x) = f(\lambda x)$; $f_y(x) = f(x - y)$

1. $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$
2. $\widehat{(D_\lambda f)}(x) = |\lambda|^{-n} \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$
3. $\hat{f}_y(k) = \hat{f}(k) e^{-iky}$
4. $f \hat{g}, \hat{f} g \in L^1$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g} dx$
5. $\overline{\hat{f}}(k) = \widehat{\check{f}}(-k)$

2.2 Fouriertransformierte von Gauss'schen Funktionen

Wir wollen die Fouriertransformierten der Funktion $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, berechnen. Zuerst betrachten wir den Fall $n = 1$ und leiten unter dem Integralzeichen nach k ab.

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ikx} dx \\ \frac{d\hat{f}(k)}{dk} &= \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} i \left(\frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) e^{-ikx} dx \\ &\stackrel{\text{Part. Integr.}}{=} - \int_{-\infty}^{\infty} i e^{-\frac{x^2}{2}} (-ik) e^{-ikx} dx = -k \hat{f}(k) \\ \hat{f}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

Also erhalten wir $\hat{f}(k)$ als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $\hat{f}'(k) = -k \hat{f}(k)$ mit Anfangsbedingung $\hat{f}(0) = \sqrt{2\pi}$.

Lösung:

$$\hat{f}(k) = e^{-\frac{k^2}{2}} \hat{f}(0) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{k^2}{2}}.$$

Sei nun n beliebig. In diesem Fall kann das Integral auf den Fall $n=1$ zurückgeführt werden. Nämlich

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{2} - ikx} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n e^{-\frac{x_j^2}{2} - ik_j x_j} dx_j \\ &= \prod_{j=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_j^2}{2} - ik_j x_j} dx_j \right) = \prod_{j=1}^n \sqrt{2\pi} e^{-\frac{k_j^2}{2}} \\ &= (2\pi)^{n/2} e^{-\frac{|k|^2}{2}}.\end{aligned}$$

Mit der elementaren Eigenschaft 2 folgt auch für $\lambda > 0$

$$\left(e^{-\frac{\lambda |x|^2}{2}} \right)^\wedge = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|k|^2}{2\lambda}}.$$

Sei nun $A = A^T$ eine symmetrische, positive $n \times n$ Matrix, $f(x) = e^{-\frac{1}{2}(Ax, x)}$, wobei $(Ax, x) = (\vec{A}x) \cdot \vec{x} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j$. Dann ist $f \in L^1$ und

$$\hat{f}(k) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(\det A)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}k, k)}$$

Beweis. Es gibt eine orthogonale Matrix R so dass

$$R^T A R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \Lambda$$

Mit der Substitution $x = Ry$ bekommt man dann

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(Ax, x) - i(k, x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(ARy, Ry) - i(k, Ry)} \underbrace{\det R}_{=1} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(\Lambda y, y) - i(R^T k, y)} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 - i \sum_{j=1}^n (R^T k)_j y_j} dy \\ &= \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \lambda_j y_j^2 - i (R^T k)_j y_j} dy_j = \prod_{j=1}^n \left(\frac{2\pi}{\lambda_j} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} (R^T k)_j^2 / \lambda_j} \\ &= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\left(\prod_{j=1}^n \lambda_j \right)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (\Lambda^{-1} R^T k, R^T k)} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(\det A)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (A^{1/2} k, k)}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

denn $R\Lambda^{-1}R^T = R(R^T A R)^{-1}R^T = A^{-1}$. □

2.3 Weitere Beispiele (n=1)

Beispiel 2.1. *Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion für das Intervall $[-1, 1]$ (d.h. $\chi[-1, 1] = f(x) = 1$ für $-1 \leq x \leq 1$ und 0 sonst)*

$$\begin{aligned} \hat{\chi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi[-1, 1] e^{-ikx} dx = \int_{-1}^1 e^{-ikx} dx \\ &= \frac{e^{-ikx}}{-ik} \Big|_{-1}^1 = \frac{2 \sin k}{k} \notin L^1 \text{ (ganze Funktion)} \end{aligned}$$

Beispiel 2.2. *Fouriertransformierte von $e^{-m|x|}$*

$$\begin{aligned} (e^{-m|x|})^\wedge &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m|x| - ikx} dx = \int_0^{\infty} e^{-mx - ikx} dx + \int_{-\infty}^0 e^{mx - ikx} dx \\ &= \frac{1}{m + ik} + \frac{1}{m - ik} = \frac{2m}{m^2 + k^2} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ (holomorph in } |Im(k)| > m) \end{aligned}$$

Beispiel 2.3. *Sei $\phi_0(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Wir haben gesehen dass $\hat{\phi}_0(k) = (2\pi)^{1/2} \phi_0(k)$, d.h. ϕ_0 ist Eigenvektor des linearen Operators $F: f \rightarrow \hat{f}$.*

- Definiere

$$\phi_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(Hermite Funktionen).

- ϕ_n ist ein Polynom von Grad n multipliziert mit $e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$\phi_0 = e^{-\frac{1}{2}x^2}; \quad \phi_1 = 2xe^{-\frac{1}{2}x^2}; \quad \phi_2 = (4x^2 - 2)e^{-\frac{1}{2}x^2}; \dots$$

Behauptung 2.1.

$$\hat{\phi}_n(k) = (-i)^n (2\pi)^{1/2} \phi_n(k)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_m(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{\frac{1}{2}x^2} \left(\frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} \right) e^{-ikx} dx \\ &\stackrel{\text{m mal P.I.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-\frac{1}{2}x^2 - ikx} dx \\ &= e^{\frac{1}{2}k^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-\frac{1}{2}(x-ik)^2} dx \\ &= i^m e^{\frac{1}{2}k^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d^m}{dk^m} e^{\frac{1}{2}(x-ik)^2} dx \\ &= i^m e^{\frac{1}{2}k^2} \frac{d^m}{dk^m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + \frac{1}{2}x^2 - ikx - \frac{1}{2}k^2} dx \\ &= i^m e^{\frac{1}{2}k^2} \sqrt{2\pi} \frac{d^m}{dk^m} e^{-\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k^2} \\ &= i^m \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{2}k^2} \frac{d^m}{dk^m} e^{-k^2} = (-i)^m \sqrt{2\pi} \phi_m(k) \end{aligned}$$

□

2.4 Umkehrsatz für L^1 -Funktionen

Satz 2.1.

1. $f, \hat{f} \in L^1 \Rightarrow \hat{\hat{f}} = f$
2. $f, \check{f} \in L^1 \Rightarrow \check{\check{f}} = f$

(Ohne Beweis)

Bemerkung 2.1. 1. Die Gleichheit gilt in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Also bedeutet zum Beispiel

$$f, \hat{f} \in L^1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Für stetige Funktionen f , gilt das sogar für alle x .

2. Aus Beispiel 2.3 folgt die Identität:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m^2 + k^2} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{m} e^{m|x|}$$

(Rücktransformation mit $\frac{1}{2\pi}$)

3. Der Faktor $(2\pi)^n$ kann auf $\hat{\cdot}$, und $\check{\cdot}$ verteilt werden. Oft findet man die Konvention:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \dots, \quad \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \dots$$

2.5 Fouriertransformation von rotationsinvarianten Funktionen

Definition 2.1. Eine **rotationsinvariante Funktion** $g : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Funktion mit der Eigenschaft, dass

$$g(Rx) = g(x) \quad \forall R, \quad R \text{ orthogonale Matrix mit } R^T R = \mathbf{1}$$

Lemma 2.2. Eine Funktion g ist genau dann rotationsinvariant wenn sie die Form

$$g(x) = f(|x|), \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

hat.

Beweis. Ist g von dieser Form dann ist g rotationsinvariant, denn $|Rx| = |x|$. Umgekehrt sei g rotationsinvariant, dann gilt: $f(r) := g(r, 0, 0, \dots, 0)$. Da $\forall x \in \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Matrix R existiert mit $Rx = (|x|, 0, \dots, 0)$, folgt $g(x) = g(|x|, 0, 0, \dots, 0) = f(|x|)$. \square

Wir führen neue Koordinaten auf \mathbb{R}^n ein. Jedes $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ kann eindeutig als $x = ry$ geschrieben werden, wobei $r > 0$ und $|y| = 1$. Die $(n-1)$ -dimensionale Sphäre $|y| = 1$ besteht aus den zwei Halbsphären $y_1 \geq 0$ und $y_1 \leq 0$. Diese parametrisieren wir durch die Koordinaten y_2, \dots, y_n . Es ergibt sich die Parametrisierung von $\{x \in \mathbb{R}^n | x_1 \geq 0\}$ bzw. $\{x \in \mathbb{R}^n | x_1 \leq 0\}$ je nach Vorzeichen.

$$\begin{aligned} x_1 &= \pm \sqrt{1 - y_2^2 - \dots - y_n^2} \\ x_2 &= ry_2 \\ &\vdots \\ x_n &= ry_n \end{aligned}$$

Die Jacobi Determinante ist dann $(a = \sqrt{1 - y_2^2 - \dots - y_n^2})$

$$\begin{aligned}
\det \frac{\partial (x_1, \dots, x_n)}{\partial (r, y_2, \dots, y_n)} &= \det \begin{pmatrix} \pm a & \mp \frac{ry_2}{a} & \mp \frac{ry_3}{a} & \dots & \pm \frac{ry_n}{a} \\ y_2 & r & 0 & \dots & 0 \\ y_3 & 0 & r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & 0 & \dots & 0 & r \end{pmatrix} \\
&= ar^{n-1} + \frac{y_2^2}{a}r^{n-1} + \dots + \frac{y_n^2}{a}r^{n-1} \\
&= \frac{1}{a}r^{n-1}(a^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \\
&= \frac{1}{a}r^{n-1}
\end{aligned}$$

Woraus folgt

$$dx_1 \dots dx_n = r^{n-1} \frac{dr}{\sqrt{1 - y_2^2 - \dots - y_n^2}} dy_2 \dots dy_n = r^{n-1} dr d\Omega(y),$$

wobei $d\Omega(y)$ das Integrationsmass auf der Einheitssphäre ist.

Lemma 2.3. Die “Oberfläche” der $(n-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| = 1\}$ ist gegeben durch

$$|S^{n-1}| = \int_{S^{n-1}} d\Omega(y) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = \begin{cases} \frac{(2\pi)^k}{(k-1)!} & n = 2k \text{ gerade} \\ \frac{2^{2k+1}\pi^k k!}{(2k)!} & n = 2k+1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bemerkung 2.2. Γ ist die **Euler’sche Gammafunktion**, die definiert ist als

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt. \quad (2.2)$$

Mit den Eigenschaften:

1. für $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma(n+1) = n!$
2. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $s \neq 0, -1, -2, \dots$
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Beweis. (des Lemmas 2.3) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, folglich

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)} dx_1 \dots dx_n &= \pi^{n/2} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx_1 \dots dx_n \\
 &= \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr \int_{S^{n-1}} d\Gamma(y) \\
 &= |S^{n-1}| \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-s} s^{n/2-1} ds \\
 &= |S^{n-1}| \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \\
 \Rightarrow |S^{n-1}| &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}
 \end{aligned}$$

□

Beispiele:

$$\begin{aligned}
 |S^1| &= \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi \\
 |S^2| &= \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = \frac{2\pi^{3/2}}{1/2\Gamma(1/2)} = 4\pi \\
 |S^3| &= \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2
 \end{aligned}$$

Bemerkung 2.3.

- Sei $g \in L^1$ rotationsinvariant, dann ist \hat{g} ebenfalls rotationsinvariant, denn für jede orthogonale Matrix R gilt:

$$\hat{g}(Rk) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-iRkx} dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-iRkRx} dx = \hat{g}(k)$$

- Fouriertransformationen von rotationsinvarianten Funktionen können auf eindimensionale Integrale zurückgeführt werden
- Sei $g(x) = g(|x|)$ rotationsinvariant und integrierbar auf \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. In den Koordinaten r und y gilt:

$$\hat{g}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} g(|x|) e^{-ikx} dx = \int_0^\infty g(r) \left[\int_0^\infty e^{-iky r} d\Omega(y) \right] r^{n-1} dr,$$

aus $\hat{g}(k) = \hat{g}(|k|, 0, \dots, 0)$ folgt die Formel

$$\hat{g}(k) = \int_0^\infty g(r) G_n(|k| r) r^{n-1} dr,$$

wobei

$$G_n(\phi) = \int_{S^{n-1}} e^{-i\phi y_1} d\Omega(y) \text{ mit } \phi = |k| r.$$

Die Funktion G_n hängt somit nur noch von der Dimension n ab.

Definition 2.2. Sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$. Die **Besselfunktion** (erster Gattung) der Ordnung α ist die durch die Potenzreihe

$$J_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2j}$$

definierte Funktion der komplexen Variablen z .

Beispiel:

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$$

Satz 2.2. Sei $n \geq 2$ dann gilt:

- $G_n(\rho) = (2\pi)^{n/2} \rho^{1-n/2} J_{n/2-1}(\rho)$
- Für integrierbare rotationsinvariante Funktionen g gilt:

$$\hat{g}(k) = |k|^{1-n/2} \int_0^\infty g(r) J_{n/2-1}(|k| r) r^{n/2} dr \quad (2.3)$$

Bemerkung 2.4. (2.3) führt keinen Faktor $(2\pi)^{n/2}$ da

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} g(x) dx.$$

Beweis. Sei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial k_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial k_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial k_n^2}$ der Laplace Operator. $G_n(|k|)$ erfüllt die partiell Differentialgleichung

$$\Delta G_n(|k|) = \int_{|y|=1} (-y_1^2 - \dots - y_n^2) e^{-iky} d\Omega(y) = -G_n(|k|)$$

Durch lösen dieser Gleichung werden wir die G_n bestimmen.

$$\partial_i |k| = \frac{\partial}{\partial k_i} |k| = \partial_i \sqrt{k_1^2 + \dots + k_n^2} = \frac{k_i}{|k|}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta G_n &= \sum_{i=1}^n \partial_i \partial_i G_n = \sum_{i=1}^n \partial_i \left(\frac{k_i}{\rho} \frac{dG}{d\rho} \right) \quad (\rho = |k|) \\
 &= \frac{n}{\rho} \frac{dG_n}{d\rho} - \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\rho^2} \frac{k_i}{\rho} \frac{dG_n}{d\rho} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\rho} \frac{k_i}{\rho} \frac{d^2 G_n}{d\rho^2} \\
 &= \frac{d^2 G_n}{d\rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{dG_n}{d\rho} \quad (= -G_n(\rho))
 \end{aligned}$$

Zu lösen ist also die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 G_n}{d\rho^2}(\rho) + \frac{n-1}{\rho} \frac{dG_n}{d\rho}(\rho) + G_n(\rho) = 0$$

welche zwei lineare unabhängige (holomorphe) Lösungen in $(0, \infty)$ besitzt. Wir machen also den *Ansatz*

$$G_n(\rho) = \rho^\lambda \sum_{l=0}^{\infty} a_l \rho^l \quad a_0 \neq 0.$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 G_n'' &= \sum_{l=0}^{\infty} (l+\lambda)(l+\lambda-1) a_l \rho^{l+\lambda-2} \\
 \frac{1}{\rho} G_n' &= \sum_{l=0}^{\infty} (l+\lambda) a_l \rho^{l+\lambda-2} \\
 G_n &= \sum_{l=2}^{\infty} a_{l-2} \rho^{l+\lambda-2}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Nach einsetzen dieser Ausdrücke in die Differentialgleichung kann durch Koeffizientenvergleich folgende Beziehung zwischen den Koeffizienten gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
 (l+\lambda)(l+\lambda-1+n-1) a_l + a_{l-2} &= 0, \quad l \geq 2 \\
 (1+\lambda)(\lambda+n-1) a_1 &= 0, \quad l = 1 \\
 \lambda(\lambda+n-2) a_0 &= 0, \quad l = 0
 \end{aligned}$$

Aus $a_0 \neq 0$ folgt dann entweder $\lambda = 0$ oder $\lambda = 2 - n$ für $n \leq 2$. Die zweite Möglichkeit entspricht einem in 0 singulären Ansatz und wird deshalb ausgenommen. Sei also $\lambda = 0$. Wegen $n \leq 2$ folgt aus der zweiten Gleichung $a_1 = 0$. Somit verschwinden nach der ersten Gleichung alle a_j mit ungeradem j . Die geraden Koeffizienten können durch iteratives

Lösen der Rekursionsrelation gefunden werden:

$$\begin{aligned}
 a_{2l} &= -\frac{1}{2l(2l+n-2)}a_{2l-2} \\
 &= \frac{-1}{4l\left(l\frac{n}{2}-1\right)}a_{2(l-1)} \\
 &= \frac{(-1)^l}{4^l l(l-1)\dots 2l\left(l+\frac{n}{2}-1\right)\left(l+\frac{n}{2}-2\right)\dots\left(l+\frac{n}{2}-l\right)}a_0 \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2)} \\
 &= \frac{(-1)^l}{2^{2l} l! \Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) a_0.
 \end{aligned}$$

Der Koeffizient a_0 wird aus dem Wert von G_n im Ursprung bestimmt:

$$G_n(0) = \int_{S^{n-1}} d\Omega(y) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = a_0.$$

Es folgt, dass $\Gamma(n/2)a_0 = (2\pi)^{n/2}$ und somit

$$G_n(\rho) = (2\pi)^{n/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (\rho/2)^{2l}}{l! \Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)} = (2\pi)^{n/2} \frac{1}{\rho^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho).$$

□

Die Differentialgleichung für G_n kann als Differentialgleichung für J_α mit $\alpha = \frac{n}{2} - 1$ umgeschrieben werden und damit erhalten wir die **Bessel'sche Differentialgleichung**:

$$J_\alpha^n(x) = \frac{1}{x} J_\alpha'(x) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) J_\alpha(x) = 0$$

2.6 Wellengleichung

Definition 2.3. Die Wellengleichung ist

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

wobei $u = u(x, t)$ eine Funktion von $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ ist.

Diese Gleichung erfüllen zum Beispiel die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes im Vakuum.

Definition 2.4. Das Anfangswertproblem (Cauchyproblem) für die Wellengleichung ist definiert durch: Gegeben seien f, g Funktionen auf \mathbb{R}^n (genügend regulär). Gesucht ist $u(x, t) \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^n \times R_t)$ sodass

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) \end{cases}$$

Um eine Formel für die Lösung dieses Anfangswertproblems zu finden, benützen wir die Fouriertransformation in x :

$$\hat{u}(k, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{-ikx} dx$$

Somit erhalten wir eine Gleichung für \hat{u} aus der Wellengleichung (zunächst ohne Berücksichtigung der Konvergenz)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(k, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(x, t) e^{-ikx} dx \underbrace{=}_{P.I} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) \Delta e^{-ikx} dx$$

(Randterme verschwinden: $u \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t)$$

Dies ist eine DGL vom Typ

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} + \lambda u(t) = 0.$$

Die Lösung dieser (bei festem t) gewöhnlichen Differentialgleichung ist:

$$\hat{u}(k, t) = A(k) \cos(|k| ct) + B(k) \sin(|k| ct).$$

Die Anfangsbedingungen für \hat{u} sind $\hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k)$ und $\partial_t \hat{u}(k, 0) = \hat{g}(k)$. Also

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) \cos(|k| ct) + \frac{\hat{g}(k)}{|k| c} \sin(|k| ct).$$

Somit erhalten wir für die (formale) Lösung:

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \hat{f}(k) \cos(|k| ct) + \frac{\hat{g}(k)}{|k| c} \sin(|k| ct) \right\} e^{ikx} dk$$

Diese Lösung kann explizit beschrieben werden, so dass qualitative Eigenschaften ersichtlich werden.

Für n=3 benützen wir die Identität

$$\frac{\sin(|k| R)}{|k| R} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|x|=R} e^{ikx} d\Omega(x).$$

Beweis. Wir nehmen Kugelkoordinaten mit der z-Achse längs $|k|$:

$$\begin{aligned} \int_{|x|=R} e^{ikx} dx &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i|k|R \cos \theta} \underbrace{R^2 \sin \theta d\theta d\phi}_{dx} \\ &\stackrel{\cos \theta = z}{=} 2\pi R^2 \int_{-1}^1 e^{i|k|R z} dz \\ &= 2\pi R^2 \left(\frac{e^{i|k|R} - e^{-i|k|R}}{i|k|R} \right) \\ &= 4\pi R^2 \frac{\sin(|k| R)}{|k| R}. \end{aligned}$$

□

Mit $R = ct$ bekommen wir

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{g}(k)}{|k| c} \sin(|k| ct) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{4\pi (ct)^2} \cdot t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{|y|=ct} \hat{g}(k) e^{ikx+iky} dk d\Omega(y) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y|=ct} g(x+y) d\Omega(y). \end{aligned}$$

Und analog:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(k) \cos(|k| ct) e^{ikx} dk \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(k) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y|=ct} f(x+y) d\Omega(y) \right). \end{aligned}$$

Resultat: Lösung des Cauchy-Problems in $n = 3$ Dimensionen:

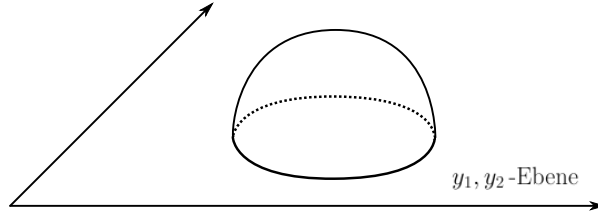
$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2 t} \int_{|y|=ct} f(x+y) d\Omega(y) \right) + \frac{1}{c^2 t} \int_{|y|=ct} g(x+y) d\Omega(y) \right] \quad (2.5)$$

Die Lösung des zweidimensionalen Problems kann nach Hadamard aus der Lösung des

dreidimensionalen Problems hergeleitet werden. Sind die Anfangsbedingungen f, g unabhängig von x_3 , so ist auch $u(x, t)$ wie (2.5) unabhängig von x_3 und ist Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u(x, t) = 0.$$

Die Formel (2.5) kann übernommen werden, wobei für f und g die Anfangsbedingungen des zweidimensionalen Problems eingegrenzt werden. Wir parametrisieren die obere (untere) Halbsphäre durch die Projektion (y_1, y_2) auf die Ebene: $y_3 = \pm \sqrt{c^2 t^2 - y_1^2 - y_2^2} = \sqrt{c^2 t^2 - |\tilde{y}|^2}$.



Dann ist

$$d\Omega(y) = \frac{ct \, dy_1 dy_2}{\sqrt{c^2 t^2 - |\tilde{y}|^2}}.$$

Bemerkung 2.5.

$$\int_{|y|=ct} d\Omega(y) = 4\pi(ct)^2,$$

was man erwarten würde.

Die Lösung ist somit ($n = 2$):

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{|\tilde{y}| \leq ct} f(x + y) \frac{dy_1 dy_2}{\sqrt{c^2 t^2 - |\tilde{y}|^2}} \right) + \int_{|\tilde{y}| \leq ct} g(x + y) \frac{dy_1 dy_2}{\sqrt{c^2 t^2 - |\tilde{y}|^2}} \right].$$

Der Faktor 2 (d.h. $\frac{2}{4\pi}$) kommt daher dass die beiden Halbsphären den selben Beitrag geben. In drei Dimensionen wird über eine Kugelfläche ($|y| = ct$) vom Radius ct integriert, in zwei Dimensionen hingegen über die ganze Kreisscheibe $|\tilde{y}| \leq ct$.

Beweis.

$$d\Omega(y) = \frac{ct dy_1 dy_2}{\sqrt{(ct)^2 - y_1^2 - y_2^2}}$$

Verifiziere: $\int_{|y| \leq ct} d\Omega(y) = 4\pi(ct)^2$ ($|y| = y_1^2 + y_2^2$) was man erwarten würde, da $\int d\Omega(y)$ gleich der Oberfläche von der Kugel mit Radius $ct = R$ sein sollte. D.h also $4\pi R^2 = 4\pi(ct)^2$.

$$\begin{aligned}
\int_{|y_1^2 + y_2^2| \leq ct} d\Omega(y) &= 2 \cdot 2 \int_0^{ct} dy_1 \int_{-\sqrt{(ct)^2 - y_1^2}}^{\sqrt{(ct)^2 - y_1^2}} \frac{ct dy_2}{\sqrt{(ct)^2 - y_1^2 + y_2^2}} \\
&= 4(ct) \int_0^{ct} dy_1 \underbrace{\int_{-\sqrt{(ct)^2 - y_1^2}}^{\sqrt{(ct)^2 - y_1^2}} \frac{dy_2}{\sqrt{\underbrace{(ct)^2 - y_1^2 + y_2^2}_{=a^2}}}}_{\left. \arcsin \frac{y_2}{|\sqrt{(ct)^2 - y_1^2}|} \right|_{-\sqrt{(ct)^2 - y_1^2}}^{\sqrt{(ct)^2 - y_1^2}}} \\
&= 4(ct) \int_0^{ct} dy_1 \left(\underbrace{\arcsin(1)}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arcsin(-1)}_{-\frac{\pi}{2}} \right) \\
&= 4\pi(ct) \underbrace{\int_0^{ct} dy_1}_{ct} = 4\pi(ct)^2
\end{aligned}$$

□

2.7 Wärmeleitungsgleichung

Das Anfangswertproblem lautet:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & (a = 1 \text{ gesetzt}) \\ u(x, 0) = f(x) & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Betrachte die Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \hat{u}(k, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{-ikx} dx \\ \hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

wird diese in der Differentialgleichung eingefügt, ergibt es eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t) \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k). \end{cases}$$

Dass heisst

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk \\
 \Rightarrow \partial_t u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk \\
 \Delta u(x, t) &= \Delta \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(k, t) \underbrace{\Delta e^{ikx}}_{-k^2 e^{ikx}} dk \\
 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\partial_t \hat{u}(k, t) + k^2 \hat{u}(k, t))}_{=0} e^{ikx} dk &= 0
 \end{aligned}$$

Lösung von $\partial_t \hat{u}(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t)$ mit $\hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k)$:

$$\hat{u}(k, t) = e^{-k^2 t} \hat{f}(k)$$

Die Rücktransformation liefert dann die **formale** Lösung

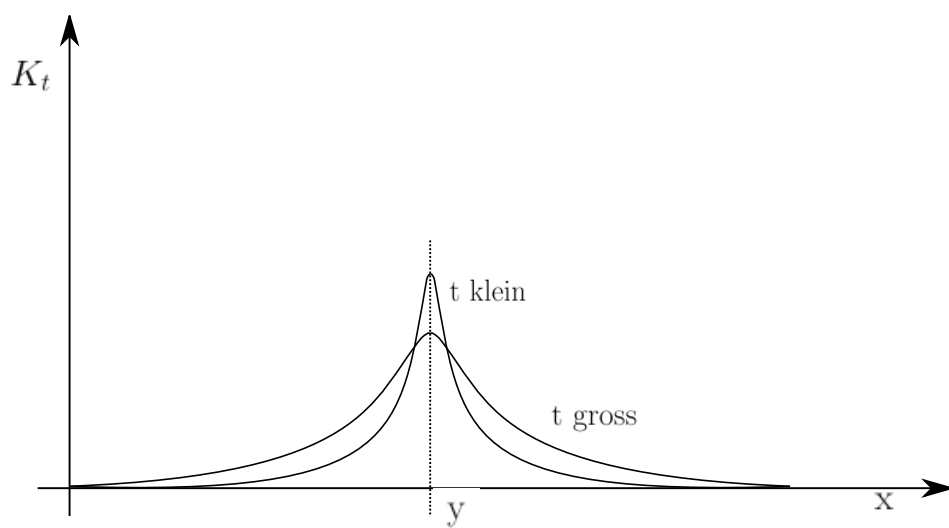
$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-k^2 t} \hat{f}(k) e^{ikx} dk \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-k^2 t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iky} dy \right) e^{ikx} dk \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} dy f(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-k^2 t} e^{ik(x-y)} dk \\
 &= \int_{\mathbb{R}} dy f(y) \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-k^2 t} e^{ik(x-y)} dk}_{=: K_t(x-y)} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} dy f(y) K_t(x-y)
 \end{aligned}$$

K_t ist der Wärmeleitungskern (benütze Formeln für die Fouriertransformation der Gauss'schen Funktion).

$$K_t(x) = \left(e^{-k^2 t} \right)^\vee (x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (2.6)$$

Eindimensional

$$K_t(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t a})} e^{-\frac{(x-y)^2}{4ta^2}} \quad (\text{falls } a = 1) \quad t > 0 \quad (2.7)$$



3 Differentialgleichungen

Gegeben sei die Gleichung

$$F(t, x, x') = 0,$$

wobei t die unabhängige Variable der Funktionen $x(t)$ und $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ darstelle. Gesucht ist nun eine Lösung $x(t)$ die $F(t, x, x') = 0$ erfüllt.

Beispiel 3.1. Fallgesetz: $\ddot{x} = -g$, mit Reibung: $\ddot{x} = -g - \lambda \dot{x}$

Definition 3.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen n -ter Ordnung: Ist eine Differentialgleichung durch die Gleichungen $F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$ (**implizite Form**) oder $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ (**explizite Form**) darstellbar, so nennen wir sie eine **Gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung**.

Definition 3.2. Die Funktion $\phi(t)$ ist Lösung der DGL auf dem Intervall I falls

$$\begin{aligned} F(t, \phi(t), \dots, \phi^{(n)}(t)) &= 0 \quad \forall t \in I, \text{ bzw.} \\ \phi^{(n)} &= f(t, \phi(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t)) \end{aligned}$$

3.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Eine Differentialgleichung 1.Ordnung ist gegeben durch die Gleichung

$$y' = f(x, y)$$

Es sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von $\phi'(x) = f(x, y) = f(x, \phi(x))$ $\forall x \in I$. Die DGL legt also durch die $\phi'(x)$ ein **Richtungsfeld** fest. Die Lösungskurve ist dann die **Integralkurve** dieses Richtungsfeldes. Folgende Aussagen treffen zu:

1. Durch jeden Punkt (x_0, y_0) in A geht genau eine Lösungskurve.
2. Die Gesamtheit der Lösungskurven bildet eine einparametrische Schar.
3. Es existieren unter Umständen "singuläre" Lösungen.

Definition 3.3. Die DGL $y' = f(x, y)$ ist durch **Quadraturen lösbar**, falls sich die allgemeine Lösungen aus den gegebenen Funktionen mit Hilfe von algebraischen Operationen, Bildung von Stammfunktionen, Ableitungen, usw. erhalten lässt.

3.1.1 Homogene lineare DGL

Eine Differentialgleichung kann als homogen bezeichnet werden, wenn die triviale Lösung $y = 0$ eine Lösung der DGL ist:

$$y' = a(x) \cdot y = f(x, y)$$

Ihre Lösung lässt sich schnell bestimmen:

$$\underbrace{\frac{y'}{y}}_{(\log y)'} = a(x); \quad a(x) = A'(x) \\ \Rightarrow \log y = A(X) + C \\ \Rightarrow y(x) = e^{A(x)+C} = \tilde{C} e^{A(x)}$$

$a(x)$ sei hier eine stetige Funktion auf $I \in \mathbb{R}$ und $A(x)$ die Stammfunktion von $a(x)$.

Anfangswertproblem Gesucht ist die Lösung durch (x_0, y_0) :

$$y_0 = \tilde{C} e^{A(x_0)} \Rightarrow \tilde{C} = \frac{y_0}{e^{A(x_0)}}$$

3.1.2 Inhomogene lineare DGL

Falls $y = 0$ nicht mehr eine Lösung der linearen DGL ist, handelt es sich um eine lineare DGL mit inhomogenem Term $b(x)$:

$$y' = a(x)y + b(x),$$

wobei $a(x)$ und $b(x)$ stetige Funktionen auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ darstellen. Man erhält Lösungen mittels der **Methode der Variation der Konstanten**: man macht einen Ansatz

$$y(x) = C(x)e^{A(x)} \tag{3.1}$$

(wobei $y(x) = Ce^{A(x)}$ die Homogene DGL löst, mit $A(x) = \int^x a(t)dt$ sowie $A'(x) = a(x)$)
Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{A(x)} + C(x)a(x)e^{A(x)} &= a(x)C(x)e^{A(x)} + b(x) \\ \Rightarrow C'(x)e^{A(x)} &= b(x) \\ C'(x) &= b(x)e^{-A(x)} \\ \Rightarrow C(x) &= \int^x b(t)e^{-A(t)}dt + C_0 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist nun

$$y(x) = e^{A(x)} \left[\int^x b(t)e^{-A(t)}dt + C_0 \right].$$

$y(x) = e^{A(x)} \left[\int^x b(t)e^{-A(t)}dt \right]$ kann als spezielle Lösung betrachtet werden, und $y =$

$C_0 e^{A(x)}$ als die Lösung der homogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung ist dann die Summe der speziellen und der homogenen Lösung.

Beispiel 3.2.

$$\begin{aligned}y' &= (\tan(x) \cdot y + \sin(2x)) \quad I :=] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\a(x) &= \tan(x) \quad A(x) = -\log(\cos(x)) \\b(x) &= \sin(2x) \\y_H(x) &= C e^{-\log(\cos(x))} = \frac{C}{\cos(x)}\end{aligned}$$

Der Ansatz für die spezielle Lösung ist also: $y = \frac{C(x)}{\cos(x)}$

$$y' = \frac{C'}{\cos x} + \frac{C \sin x}{\cos^2 x} \quad \text{einsetzen:}$$

$$\begin{aligned}\frac{C'}{\cos x} + \underbrace{\frac{C \sin x}{\cos^2 x}}_{= \frac{C \tan x}{\cos x}} &= \frac{C(x) \tan x}{\cos x} + \sin 2x \\ \Rightarrow C'(x) &= \cos(x) \sin(2x) = \sin(x) \cos^2(x) \\ \Rightarrow C(x) &= \frac{-2}{3} \cos^3(x) + C_0.\end{aligned}$$

Die Funktion $C(x)$ kann auch durch die direkte Berechnung

$$C(x) = \int^x \sin(2t) \underbrace{e^{\log(\cos(t))}}_{\cos(t)} dt = \int^x 2 \sin(t) \cos^2(t) dt$$

gefunden werden. Also ergibt sich :

$$y(x) = \frac{1}{\cos x} \left(\frac{-2}{3} \cos^3(x) + C_0 \right) = \underbrace{\frac{-2}{3} \cos^2(x)}_{\text{Spezielle Lösung}} + \underbrace{\frac{C_0}{\cos(x)}}_{\text{Homogene Lösung}} \quad C_0 \in \mathbb{R}$$

3.1.3 Separierbare DGL

Eine DGL der Form

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}$$

ist **separierbar**, wobei $p(x)$ und $q(y)$ stetige Funktionen darstellen und $q(y) \neq 0 \forall y \in I$ sei. Es sei weiter $P(x)$ die Stammfunktion von $p(x)$ und $Q(y)$ die Stammfunktion von $q(y)$.

Behauptung 3.1. $y = \phi(x)$ sei eine Lösung durch die Anfangsbedingung (x_0, y_0) (d.h. $\phi(x_0) = y_0$). Es gilt dann $Q(y) - Q(y_0) = P(x) - P(x_0)$ oder $\int_{y_0}^y q(v)dv = \int_{x_0}^x p(u)du$.

Betrachte die Hilfsfunktion $c(x) := Q(\phi(x)) - P(x)$:

$$\begin{aligned} c'(x) &= Q'(\phi(x))\phi'(x) - P'(x) = g(\phi(x))\phi'(x) - p(x) \\ &= q(\phi(x)) \left[\phi'(x) - \frac{p(x)}{q(\phi(x))} \right] = q(\phi(x)) \underbrace{\left[y' - \frac{p(x)}{q(y)} \right]}_{=0(DGL)} \end{aligned}$$

(da $\phi(x)$ Lösung der DGL ist)

$$\begin{aligned} \Rightarrow c'(x) &= 0 \Rightarrow c(x) = c(x_0) = \text{konst} \\ c(x) &= \underbrace{Q(\phi(x))}_{=y} - P(x) = c(x_0) = Q(y_0) - P(x_0) \\ \Rightarrow Q(y) - Q(y_0) &= P(x) - P(x_0) \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

das heisst also: $\frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{q(y)}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dyq(y) &= p(x)dx \\ \Rightarrow \int_{y_0}^{y=\phi(x)} q(y)dy &= \int_{x_0}^x p(x)dx \end{aligned}$$

Beispiel 3.3. $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2}$. Gesucht ist die Lösung durch $(0, 1/2)$ ($p(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $q(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$)

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} &= \int_0^x \frac{1}{1+x^2} \\ \arcsin y \Big|_{1/2}^y &= \arctan x \Big|_0^x \\ \arcsin y - \frac{\pi}{6} &= \arctan x \\ \arcsin y &= \arctan x + \frac{\pi}{6} \\ \Rightarrow y &= \sin\left(\arctan x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(\arctan x) \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(\arctan x) \frac{1}{2} \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}x + 1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Beispiel 3.4. $y' = f(y)$, d.h. $g(y) = \frac{1}{f(y)}$ und $p(x) = 1$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow \int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)} = \int_{x_0}^x dx = x - x_0.$$

Zum Beispiel $y' = y^2$:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{y_0}^y \frac{dy}{y^2}}_{= \left. -\frac{1}{y} \right|_{y_0}^y} &= x - x_0 \\ \Rightarrow \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y} &= x - x_0 \\ \Rightarrow y &= \frac{1}{x_0 + \frac{1}{y_0} - x} \quad (\text{Hyperbel}) \end{aligned}$$

Die Lösung ist singular für $x = c = x_0 + \frac{1}{y_0}$.

Beispiel 3.5. Wir möchten die DGL $y' = f(\frac{y}{x})$ lösen. Betrachte dazu die Substitution $v(x) = \frac{y(x)}{x}$, bzw. $y = v \cdot x$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= v' \cdot x + v = f(v) \\ v'(x) &= \frac{f(v) - v}{x} \end{aligned}$$

Diese DGL ist nun separierbar (vgl. Kapitel 3.1.3) mit $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(v) = \frac{1}{f-v}$. Also:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v) - v} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \ln(x) - \ln(x_0)$$

Es sei zum Beispiel:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2\frac{y}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2} \quad (x > 0); \quad v = \frac{y}{x} \quad f(v) = \frac{2v}{1 + v^2} \\ \int \frac{dv}{\frac{2v}{1+v^2} - v} &= \int \frac{1 + v^2}{v(1 - v^2)} dv = \ln(x/x_0) = \ln(cx) \quad (c = \frac{1}{x_0}) \\ \Rightarrow \int \frac{2v}{1 - v^2} + \frac{1}{v} dv &= \underbrace{\ln\left(\frac{1}{1 - v^2}\right)}_{-\ln(1-v^2)} + \ln(v) = \ln(cx) \end{aligned}$$

oder $\frac{v}{1-v^2} = cx$. Durch einsetzen von $v = \frac{y}{x}$ ergibt sich also

$$y = c(x^2 - y^2) \quad c(x^2 - y^2) - y = 0 \quad (\text{Hyperbel}).$$

3.1.4 Riccati DGL

Die nicht-lineare sogenannte **Riccati-Differentialgleichung** ist gegeben durch

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x). \quad (3.2)$$

Es nun sei $y = \phi(x)$ eine bekannte Lösung von (3.2).

Lösungsansatz: $y(x) = \phi_0(x) + \frac{1}{u(x)}$, wobei $u(x)$ eine unbekannte Funktion ist.

Da die DGL nicht linear ist (y^2), kann es mehrere Lösungen geben. Wir haben also:

$$y = \phi_0 + \frac{1}{u}; \quad y' = \phi_0' - \frac{u'}{u^2}$$

In 3.2 einsetzen ergibt:

$$\phi_0' - \frac{u'}{u^2} = f \cdot \left(\phi_0^2 + \frac{2\phi_0}{u} + \frac{1}{u^2}\right) + g \cdot \left(\phi_0 + \frac{1}{u}\right) + h$$

(da gilt dass $\phi_0' = f\phi_0^2 + g\phi_0 + h$)

$$\Rightarrow u' = (-2f\phi_0 - g)u - f \quad (3.3)$$

Gleichung 3.3 ist nun eine **lineare inhomogene** DGL und durch die uns bekannten Mittel lösbar.

Beispiel 3.6.

$$y' = y^2 + \frac{1}{x} \cdot y + \frac{1}{x^2}$$

Ansatz für die spezielle Lösung $y = \frac{a}{x}$

$$\frac{-a}{x^2} = \frac{a^2}{x^2} + \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a+1)^2 = 0$$

$a = -1$ ist eine Lösung, also gilt $\phi_0(x) = \frac{-1}{x}$. Daraus folgt $y = \frac{-1}{x} + \frac{1}{u}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u' &= (-2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{-1}{x}\right) - \frac{1}{x})u - 1 \\ u' &= \frac{1}{x}u - 1 \end{aligned}$$

Wir finden die homogene DGL $u' = \frac{1}{x} \cdot u$ mit der Lösung: $u = c \cdot x$.

Die spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist nun:

$$\begin{aligned}\text{Ansatz: } u &= c(x)x \\ c'x + c &= c - 1 \Rightarrow c' = \frac{-1}{x} \\ c(x) &= -\log|x| + \text{konst.} \\ \Rightarrow u(x) &= -x \cdot (\log|x| + \text{konst})\end{aligned}$$

3.1.5 $y'' = f(x, y')$

Da y hier nicht vorkommt, können wir mit der neuen Funktion $v(x) = y'(x)$ arbeiten: $v'(x) = y''(x)$ bzw. $v'(x) = f(x, v)$. Die Ordnung wurde also um eins erniedrigt und wir können die DGL mit den uns bereits bekannten Mitteln lösen. Die gesuchte Lösung für y ist dann

$$y(x) = \int^x v(\tilde{x}, c) d\tilde{x}$$

3.1.6 $y'' = f(y, y')$

Diese DGL hängt nicht direkt von x ab. Betrachte y als neue unabhängige Variable; dann ist neu die abhängige Variable $p(y) = y'$. Dadurch bekommen wir

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \underbrace{\frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}}_{\text{Kettenregel}} = \dot{p} \cdot p.$$

Die neue DGL $\dot{p} \cdot p = f(y, p)$ ist nun um eine Ordnung erniedrigt. ($\dot{p} = g(y, p) = \frac{f(y, p)}{p}$). Folglich erhält man $p = p(y, c)$, dass heisst also ist $\frac{dy}{dx} = p(y, c)$ separierbar.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{dy}{p(y, c)} &= dx \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{p(y, c)} &= \int dx\end{aligned}$$

Beispiel 3.7.

$$\begin{aligned}y'' &= -\frac{1}{y^2} & y' &= p(y) \\ \dot{p} \cdot p &= -\frac{1}{y^2} \rightarrow \underbrace{2\dot{p} \cdot p}_{p^2} = -\frac{2}{y^2} \\ \int d(p^2) &= \int -\frac{2}{y^2} dy \Rightarrow p^2 = \frac{2}{y} + C \\ \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{y} + C}} &= dx \quad \text{oder} \quad \left(\frac{y}{2 + Cy}\right)^{\frac{1}{2}} dy = dx \\ x + \text{konst} &= \sqrt{\frac{y}{2 + cy}} \left(\frac{\sqrt{cy}(2 + cy) - 2\sqrt{2 + cy} \sinh^{-1}(\sqrt{\frac{cy}{2}})}{c^{3/2}\sqrt{y}} \right).\end{aligned}$$

3.2 Exakte DGL

Sei

$$\gamma : t \rightarrow (x(t), y(t))$$

eine reguläre Kurve in der Ebene (x, y) .

Definition 3.4. γ ist die **Integralkurve** der DGL $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$:

$$P(x(t), y(t))\dot{x} + Q(x(t), y(t))\dot{y} = 0 \tag{3.4}$$

Bemerkung 3.1. (3.4) ist unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung.

Voraussetzung: $Q(x_0, y_0) \neq 0$.

Beweis. γ ist Integralkurve in U gegeben durch

$$\gamma : t \rightarrow (x(t), y(t))$$

von $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

$\Rightarrow \dot{x}(t) \neq 0 \forall t$ sonst wäre $\dot{y}(t) = 0$, da $Q \neq 0$. Dies ist jedoch nicht möglich in einer regulären Parameterdarstellung.

$\Rightarrow x$ kann also als Parameter gewählt werden:

$$\begin{aligned}
&\gamma : x \rightarrow (x, \phi(x)) \\
&P(x, \phi(x)) \cdot 1 + Q(x, \phi(x)) \cdot \phi'(x) = 0 \\
&\text{oder } \phi'(x) = -\frac{P(x, \phi(x))}{Q(x, \phi(x))} \\
&(Q(x, \phi(x)) \neq 0 \text{ da in Umgebung } U) \\
&\Rightarrow \gamma \text{ genügt der DGL } y' = -\frac{P(x, \phi(x))}{Q(x, \phi(x))}
\end{aligned}$$

Dies ist noch zu beweisen, der Beweis wird hier jedoch weggelassen. \square

Definition 3.5. Die DGL

$$Pdx + Qdy = 0$$

ist **exakt** falls $P_y = Q_x$ (bzw. $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$)

Sei $Pdx + Qdy = 0$ eine exakte DGL und f ein Potential von (P, Q) , d.h. $(f_x, f_y) = \text{grad}(f) = (P, Q)$. f ist die **Stammfunktion** des Problems.

Behauptung 3.2. Die Niveaulinien von f sind Integralkurven der DGL.

Niveaulinien sind gegeben durch die Menge der Punkte (x, y) mit $f(x, y) = \text{konst.}$

Beweis. Wähle eine Parameterdarstellung $\gamma : t \rightarrow (x(t), y(t))$:

$$\begin{aligned}
&f(x(t), y(t)) = \text{konst} \quad \forall t \\
&\Rightarrow \underbrace{f_x}_{P} \dot{x}(t) + \underbrace{f_y}_{Q} \dot{y}(t) = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \gamma$ ist Lösung der DGL $Pdx + Qdy = 0$. \square

Beispiel 3.8.

$$\underbrace{(e^y + ye^x)}_P dx + \underbrace{(e^x + xe^y)}_Q dy = 0$$

Diese DGL ist exakt, da $P_y = e^y + e^x = Q_x = e^x + e^y$. Gesucht ist nun $f(x, y)$ mit $\text{grad}f = (P, Q)$:

$$f_x = P = e^y + ye^x \rightarrow f(x, y) = \int (e^y + ye^x) dx = xe^y + ye^x + \phi(y)$$

Die Funktion $\phi(y)$ ist nur von y abhängig, so dass $\phi_x = 0$

$$\begin{aligned}
f_y &= xe^y + e^x + \phi'(y) = Q = e^x + xe^y \\
&\Rightarrow \phi'(y) = 0, \text{ also ist } \phi(y) = \text{konst}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x, y) = xe^y + ye^x + \text{konst}$ ist ein Potential. Die Kurven $xe^y + ye^x = \text{const}$ sind die Integralkurven der DGL.

Satz 3.1. über Stammfunktionen

Sind die Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ in dem einfach zusammenhängenden Gebiet D stetig differenzierbar, so existiert eine Stammfunktion $f(x, y)$ mit der Eigenschaft $f_x = P$ und $f_y = Q$ genau dann, wenn $P_y = Q_x$ ist (d.h. die DGL exakt ist). (Ohne Beweis)

3.2.1 Integrierende Faktoren (oder Eulersche Multiplikatoren)

Definition 3.6. $m(x, y) \neq 0$ ist ein integrierender Faktor von $Pdx + Qdy = 0$ falls die DGL

$$(m(x, y)P(x, y))dx + (m(x, y)Q(x, y))dy = 0$$

exakt ist, d.h. falls $(mP)_y = (mQ)_x$ gilt. ($Pdx + Qdy = 0$ ist nicht exakt, sonst trivial).

Beispiel 3.9. $ydx + 2xdy = 0$ ist nicht exakt:

$$P_y = \frac{d}{dy}y = 1; \quad Q_x = \frac{d}{dx}2x = 2$$

- für $x > 0$ kann man $m(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ wählen, dann ist

$$\frac{y}{\sqrt{x}}dx + 2\sqrt{x}dy = 0$$

exakt ($P_y = \frac{1}{\sqrt{x}}, Q_y = \frac{1}{\sqrt{x}}$). Stammfunktion: $f(x, y) = 2y\sqrt{x}$ für $x > 0$.

- Wir hätten auch $m(x, y) = y$ wählen können, denn

$$y^2dx + 2xydy = 0$$

ist auch exakt ($P_y = 2y, Q_x = 2y$). Die Stammfunktion ist nun $f(x, y) = xy^2$ und somit nicht eindeutig.

3.3 Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung und Differentialgleichungen höherer Ordnung

Es sei x eine unabhängige Variable und $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ seien die abhängigen Variablen. Weiter sei $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. So ist

$$f_i : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y_1, \dots, y_n) \rightarrow f_i(x, y_1, \dots, y_n)$$

eine stetige Funktion, wobei $i = 1, \dots, n$. \vec{f} ist ein System von n DGL für n unbekannte Funktionen

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y'_n = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Dieses System kann auch vektoriell geschrieben werden, so dass $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$. Zudem müssen noch die Anfangswerte angegeben werden, also $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ (d.h. $(x_0, y_1(x_0), \dots, y_n(x_0))$). In vektorieller Schreibweise sieht dies wie folgt aus

$$\begin{aligned} \vec{f}(x, \vec{y}) &= \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ \vdots \\ f_n(x, y) \end{pmatrix} & \vec{y}(x) &= \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \\ \vec{y}'(x) &= \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ \vdots \\ y'_n(x) \end{pmatrix} & \int_a^b \vec{y}(x) dx &= \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b y_n(x) dx \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die DGL n-ter Ordnung für eine reellwertige Funktion ist also

$$y^n = f(x, y, y', \dots, y^{n-1}). \quad (3.5)$$

Die Gleichung (3.5) lässt sich auf ein System von n DGLn erster Ordnung für n Funktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ transformieren, so dass

$$\begin{cases} y'_1 = & y_2 \\ y'_2 = & y_3 \\ \vdots & \\ y'_{n-1} = & y_n \\ y'_n = & f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (3.6)$$

Ist $y(x)$ eine Lösung von 3.5, so ist die Vektorfunktion

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) := (y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

eine Lösung von (3.6) ($y' = y'; y'' = y''; \dots; y'_n = (y^{(n-1)})' = y^{(n)} = f(x, y, \dots)$).

Umgekehrt ist $\vec{y}(x)$ eine differenzierbare Lösung von (3.6) und setzt man noch $y_1(x) =: y(x)$, so wird ersichtlich, dass $y(x)$ n-mal differenzierbar ist, dass $y_2(x) = y'(x), \dots, y'_n(x) = y^{(n)}(x)$ gilt und die Gleichung (3.5) erfüllt ist. Es ist also

$$y'_n = y^n = f(x, y_1, \dots, y^{(n-1)}).$$

Aus der obigen Diskussion folgt nun, dass die Gleichungen (3.5) und (3.6) äquivalent sind. In derselben Weise lassen sich auch Systeme von DGLn n -ter Ordnung zu Systemen erster Ordnung umformen, indem man die Ableitungen niedrigerer Ordnung als neue Funktionen einführt.

Beispiel 3.10. Die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes im dreidimensionalen Raum, in dem ein Kraftfeld $\vec{k}(t, \vec{x})$ vorliegt, lautet

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}} &= \vec{k}(t, \vec{x}) \\ \text{für } \vec{x} &= \vec{x}(t). \end{aligned}$$

Dieses System ist äquivalent mit dem folgenden System von sechs DGLn erster Ordnung für sechs gesuchte Funktionen x, y, z, u, v, w :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x, y, z); \quad \vec{k}(t, \vec{x}) = f(t, \vec{x}), g(t, \vec{x}), h(t, \vec{x}) \\ \begin{cases} \dot{x} = u & \dot{u} = f(t, x, y, z) \\ \dot{y} = v & \dot{v} = g(t, x, y, z) \\ \dot{z} = w & \dot{w} = h(t, x, y, z) \end{cases} \end{aligned}$$

Hier kommen noch Anfangsbedingungen hinzu (Anfangsposition und Anfangsgeschwindigkeit).

Formal kann man das System $\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y})$ auch als Integralgleichung umschreiben:

$$\vec{y} = \vec{\eta} + \int_{\xi}^x \vec{f}(t, \vec{y}(t)) dt$$

Oder auch in kurzer Form: $\vec{y} = T\vec{y}$; $(T\vec{z})(x) = \eta + \int_{\xi}^x \vec{f}(t, \vec{y}(t)) dt$, mit Iteration $\vec{y} \rightarrow T\vec{y}$. Somit ist \vec{y} die Lösung von $\vec{y} = T\vec{y}$, d.h. \vec{y} ist ein **Fixpunkt** von T .

3.3.1 Lineares System von n Differentialgleichungen

Definition 3.7. Unter einem **Linearem System von n Differentialgleichungen** versteht man das folgende System von Differentialgleichungen auf einem Intervall $I \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t) y_1 + a_{12}(t) y_2 + \cdots + a_{1n}(t) y_n + b_1(t) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(t) y_1 + a_{n2}(t) y_2 + \cdots + a_{nn}(t) y_n + b_n(t) \end{cases}$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\underline{y}' = A(t) \underline{y} + \underline{b}(t),$$

mit $A(t) = (a_{ij}(t))$ und $\underline{b}(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))$. Hier sind a_{ij} stetige Funktionen auf $I \in \mathbb{R}$.

Definition 3.8. Ein *homogenes lineares System* ist ein lineares System von n Differentialgleichungen mit $\underline{b} = \underline{0}$.

Für homogene lineare Systeme gilt:

1. Die Lösungen bilden einen Vektorraum von vektorwertigen Funktionen: $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $V :=$ Menge der Lösungen.

Beweis. $V =$ Vektorraum, denn für $\underline{\phi} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{\phi}'(x) = A(x)\underline{\phi}(x)$ gilt

$$(\lambda \underline{\phi})' = A(x)(\lambda \underline{\phi}).$$

Und für $\underline{\phi}, \underline{\psi} \in V$ gilt:

$$\underline{\phi}' + \underline{\psi}' = A(x)(\underline{\phi} + \underline{\psi})$$

und damit ist V ein Vektorraum \rightarrow Eine Linearkombination von Lösungen ist wieder eine Lösung \square

2. $\dim V = n$

Bemerkung 3.2. Seien $\underline{\phi}_1, \dots, \underline{\phi}_r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen und $\underline{\phi}_1, \dots, \underline{\phi}_r$ linear unabhängig. Dann gilt

$$\lambda_1 \underline{\phi}_1 + \dots + \lambda_r \underline{\phi}_r = \underline{0}$$

nur dann wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$.

Es gibt n linear unabhängige Lösungen $\underline{\phi}_1, \dots, \underline{\phi}_n$. Jedes solche System von n linear unabhängigen Lösungen wird **Hauptsystem** oder **Fundamentalsystem** von Lösungen genannt.

Ist $\underline{\phi}_1, \dots, \underline{\phi}_n$ ein Fundamentalsystem, so lässt sich jede Lösung $\underline{\phi}$ als Linearkombination $\underline{\phi} = c_1 \underline{\phi}_1 + \dots + c_n \underline{\phi}_n$ eindeutig darstellen.

Bemerkung 3.3. Es seien $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ linear unabhängige Anfangsvektoren (d.h. Anfangswerte), dann bilden die zugehörigen Lösungen $\underline{\phi}(x, \underline{y}_1), \dots, \underline{\phi}(x, \underline{y}_n)$ (d.h. $\underline{\phi}_i(x_0) = \underline{y}_i$) ein **Fundamentalsystem**.

Definition 3.9. Sei

$$\underline{\phi}_j(x) = \begin{pmatrix} \phi_{1j}(x) \\ \vdots \\ \phi_{nj}(x) \end{pmatrix}$$

und man definiere die folgende Matrixschreibweise:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(x) & \dots & \phi_{1n}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \underbrace{\phi_{n1}(x)}_{\underline{\phi}_1} & \dots & \underbrace{\phi_{nn}(x)}_{\underline{\phi}_n} \end{pmatrix}$$

Dann ist die **Wronski-Determinante** der Funktionen $\underline{\phi}_1, \dots, \underline{\phi}_n$ definiert durch

$$W(x) = \det Y(x) \quad (3.7)$$

Behauptung (ohne Beweis)

$\underline{\phi}_1, \dots, \underline{\phi}_n$ ist ein Fundamentalsystem $\iff W(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$. (kann also zum Beispiel für $x = x_0$, wo die Anfangswerte bekannt sind, berechnet werden und falls $W(x_0) \neq 0$) so gilt $W(x) = 0$ für alle x in I .

Betrachte die DGL n -ter Ordnung der Form

$$y^n = a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_{n-1}(x)y^{n-1}, \quad (3.8)$$

wobei ϕ Lösung der Gleichung 3.8 $\iff \underline{\phi} := (\phi, \phi', \dots, \phi^{n-1}) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist Lösung von

$$\begin{cases} y'_0 = y_1 \\ y'_1 = y_2 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = a_0(x)y_0 + a_1(x)y_1 + \dots + a_{n-1}(x)y_{n-1} \end{cases}$$

$$\underline{y}' = A(x)\underline{y} \quad \text{mit} \quad (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = (\phi, \phi', \dots, \phi^{n-1}), \quad (3.9)$$

wobei die Matrix $A(x)$ definiert ist durch

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dies gibt dann im allgemeinen n ϕ_i Lösungen (ϕ_i hat n Komponenten), die Wronski-Determinante ist:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Beispiel 3.11. 1. DGL:

$$y'' = \frac{2}{x^2}y - \frac{2}{x}y'$$

mit $I = \mathbb{R}^+$. Diese Gleichung nennt man auch **Euler'sche Differentialgleichung**.

Ansatz

$$\phi(x) = x^\alpha \quad (3.10)$$

$$\phi'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad (3.11)$$

$$\phi''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha-1) = 2 \cdot x^{\alpha-2} - 2 \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-2}$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha-1) = 2 - 2 \cdot \alpha \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \text{ oder } \alpha = -2$$

Die Wronski-Determinante:

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$= \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x^2} \\ 1 & -\frac{2}{x^3} \end{vmatrix} \quad (3.15)$$

$$= -\frac{3}{x^2} \neq 0 \quad \forall x \in I \quad (3.16)$$

$\Rightarrow \phi_1$ und ϕ_2 bilden ein Fundamentalsystem

\Rightarrow allgemeine Lösung:

$$\phi(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

2. DGL:

$$y'' - y = 0$$

Ansatz:

$$\phi(x) = e^{\lambda x} \quad (3.15)$$

$$\phi'(x) = \lambda e^{\lambda x} \quad (3.16)$$

$$\phi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0 \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 - 1) = 0 \quad da \quad e^{\lambda x} \neq 0 \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm 1 \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow \phi_1(x) = e^x \quad (3.19)$$

$$\phi_2(x) = e^{-x}$$

Und die Wronski-Determinante:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad (3.18)$$

$\Rightarrow \phi_1 \phi_2$ bilden ein Fundamentalsystem.

$$\phi = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

3.3.2 Systeme mit konstanten Koeffizienten

In einem System mit konstanten Koeffizienten ist $a_{ii} = \text{konst} \in \mathbb{R}$. Also besteht die Matrix A aus Konstanten. Lösungen erhält man aus dem Ansatz

$$\underline{y}(t) = \underline{c} \cdot e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{\lambda t} \\ c_2 \cdot e^{\lambda t} \\ \vdots \\ c_n \cdot e^{\lambda t} \end{pmatrix},$$

wobei die Konstanten c_i und λ komplex sein können. Die Gleichung lautet dann:

$$\begin{aligned} \underline{y}' &= A \underline{y} \\ \Rightarrow \underline{y}' &= \lambda \underline{c} e^{\lambda t} = A \underline{c} e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (3.18)$$

d.h. $y(t)$ ist genau dann eine Lösung der DGL falls

$$A\underline{c} = \lambda \underline{c}$$

gilt. Ein Vektor $\underline{c} \neq 0$ der diese Gleichung erfüllt ist ein **Eigenvektor** zum **Eigenwert** λ der Matrix A .

Man erhält die Eigenwerte aus der Gleichung

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

Ein Polynom n -ten Grades hat auch n Eigenwerte und n Eigenvektoren.

1. Besitzt A n linear unabhängige Eigenvektoren (d.h. wenn A n verschiedene Eigenwerte hat), so erhält man auf diese Weise ein Hauptsystem oder Fundamentalsystem. Die Eigenwerte können natürlich auch komplex sein.
2. ist $\lambda = \mu + i\nu$ ein komplexer Eigenwert und $\underline{c} = \underline{a} + i\underline{b}$ ein zugehöriger Eigenvektor der reellen Matrix A (wobei wir hier die Annahme gemacht haben, dass A eine reelle Matrix ist), so ergeben sich aus der komplexen Lösung $\underline{y} = \underline{c}e^{\lambda t}$ zwei reelle Lösungen:

$$\begin{aligned} \underline{z}(t)_1 &= \operatorname{Re} \underline{y} = e^{\mu} (\underline{a} \cos(\nu t) - \underline{b} \sin(\nu t)) \\ \underline{z}(t)_2 &= \operatorname{Im} \underline{y} = e^{\mu} (\underline{a} \sin(\nu t) + \underline{b} \cos(\nu t)) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - 2 y_2 \\ y_2' &= 2 y_1 - y_3 \\ y_3' &= 4 y_1 - 2 y_2 - y_3 \end{cases}$$

die Matrix A ist deshalb

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist weiter

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbf{1}) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 4 & -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= 0 \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ \lambda_3 &= 1\end{aligned}\tag{3.19}$$

Die Eigenvektoren berechnen sich aus

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} & -2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} & -1 \\ 4 & -2 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit $\underline{c}_1 = (x, y, z)^T$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\underline{c}_1 &= \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}, 2, 4 \right)^T \\ \underline{c}_2 &= \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}, 2, 4 \right)^T \\ \underline{c}_3 &= (1, 0, 2)^T\end{aligned}$$

Aus der Lösung $\underline{y} = \underline{c}_1 e^{(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2})t}$ ergeben sich folgende zwei reellen Lösungen (man beachtet hier nicht mehr die komplex-konjugierten):

$$\underline{z}_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \right]\tag{3.20}$$

$$\underline{z}_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \right]\tag{3.21}$$

$$\underline{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^t$$

Also bilden \underline{z}_1 , \underline{z}_2 und \underline{y}_3 ein reelles Fundamentalsystem.

Falls jedoch Eigenwerte mit Multiplizität auftreten, muss folgendes Ergebnis der Matrixtheorie benutzt werden: Es existiert eine nicht singuläre Matrix C sodass $B = C^{-1}AC$ (A reell oder komplex) die sogenannte **Jordansche Normalform** besitzt:

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$$

wobei der **Jordan-Kasten** J_i eine quadratische Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

ist. Der Jordan Kasten J_i hat dabei r_i Zeilen. Dabei ist $r_1 + \dots + r_k = n$ und

$$\det(A - \mathbf{1}\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}.$$

Das in einem Jordan-Kasten J mit r Zeilen und dem Diagonalelement λ entsprechende System ($\underline{x}' = J\underline{x}$) kann geschrieben werden als:

$$x'_1 = \lambda x_1 + x_2 \quad (3.22)$$

$$\vdots \quad (3.23)$$

$$x'_{r-1} = \lambda x_{r-1} + x_r \quad (3.24)$$

$$x'_r = \lambda x_r$$

Dieses System lässt sich leicht lösen, beginnend mit der letzten Gleichung. Ein mögliches Fundamentalsystem ist zum Beispiel

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} & \dots & \frac{1}{(r-1)!}t^{r-1}e^{\lambda t} \\ & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \frac{1}{(r-2)!}t^{r-2}e^{\lambda t} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix},$$

und dies für jeden einzelnen Kasten. So ergibt zum Beispiel das System

$$B = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} & 0 \\ & [\mu] \\ 0 & \begin{bmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

das Fundamentalsystem:

$$\underline{z}(t) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} & 0 \\ & [e^{\mu t}] \\ 0 & \begin{bmatrix} e^{\nu t} & te^{\nu t} \\ 0 & e^{\nu t} \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

Ist A reell, so erhält man für jede komplexe (und deren konjugierte) Lösung zwei reelle Lösungen $\underline{z}_1 = \operatorname{Re} \underline{y}$ und $\underline{z}_2 = \operatorname{Im} \underline{y}$, wie zuvor.

Beispiel

Hier ist $n = 2$ und $\underline{y} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Das System

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$$

ergibt die Matri

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren ergeben sich aus: $(A - \lambda \mathbf{1}) \underline{c} = 0$. Das heisst die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

hat nun eine linear unabhängige Lösung. Zum Beispiel: $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Was der Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

entspricht. Eine zweite linear unabhängige Lösung ergibt sich aus dem Ansatz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Hier gilt

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a - bt \\ d - c - dt \end{pmatrix} e^{-t} = A \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} e^{-t}$$

genau dann, wenn $A \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ und $A \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ d - c \end{pmatrix}$.

Die erste Gleichung hat die Lösung $b = 1$, $d = 2$ und damit hat die zweite die Lösung $a = 0$, $c = -1$. Die Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -1 + 2t \end{pmatrix} e^{-t}$$

ist linear unabhängig von der ersten Lösung.

3.3.3 Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine homogene Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = 0$$

kann in ein System von n -Differentialgleichungen umgewandelt werden. Dieses besitzt die Form $\underline{y}' = A\underline{y}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ & -\lambda & 1 & \dots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

Definition 3.10. Das *charakteristische Polynom* ist definiert durch

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}),$$

wobei es mit dem obigen System geschrieben werden kann als

$$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) = 0.$$

Satz 3.2. (ohne Beweis) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ Nullstellen (Eigenwerte) des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ mit den Vielfachheiten m_1, \dots, m_r , so dass $\sum_{i=1}^r m_i = n$. Dann ist die folgende Liste ein Fundamentalsystem von Lösungen (Insgesamt n Funktionen):

$$\begin{array}{ll} e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x} & (m_1 \text{ Funktionen}) \\ e^{\lambda_2 x}, x e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{m_2-1} e^{\lambda_2 x} & (m_2 \text{ Funktionen}) \\ \vdots & \vdots \\ e^{\lambda_r x}, x e^{\lambda_r x}, \dots, x^{m_r-1} e^{\lambda_r x} & (m_r \text{ Funktionen}) \end{array}$$

Falls komplexe Eigenwerte vorkommen, dann: (A reell, d.h. a_{ij} reell)

- $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ reelle Eigenwerte mit Vielfachheiten m_j ,
- $\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \dots, \mu_s = \alpha_s + i\beta_s$ komplexen Eigenwerte mit Vielfachheiten n_j .

Auch die komplex-konjugierten sind Lösungen:

$$\sum_{j=1}^r m_j + 2 \sum_{j=1}^s n_j = n$$

Die Liste der Fundamentallösungen (reelle Lösungen) ist demnach

$$\begin{array}{ll} e^{\lambda_j x}, \dots, x^{m_j-1} e^{\lambda_j x} & (1 \leq j \leq r) \\ e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), x e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), \dots, x^{n_j-1} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x) & (1 \leq j \leq s) \\ e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), x e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), \dots, x^{n_j-1} e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x) & (1 \leq j \leq s) \end{array}$$

Beispiel

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 2y^{(3)} - 4y'' + 8y' + 16y = 0$$

Daraus ergibt sich das charakterische Polynom:

$$\begin{aligned} -P(\lambda) &= \lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 16 \\ &= (\lambda + 2)^3 (\lambda^2 - 2\lambda + 2) \\ &= (\lambda + 2)^3 (\lambda - 1 + i)(\lambda - 1 - i) \end{aligned}$$

Ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen lautet:

$$e^{-2t}, t e^{-2t}, t^2 e^{-2t}, e^t \sin t, e^t \cos t$$

Beispiel

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Daraus ergibt sich das charakterische Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Es ist

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= e^x \quad \text{Lösung} \\ \text{Behauptung: } \phi_2(x) &= xe^x \text{ ist auch Lösung} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \phi_2' &= (1+x)e^x \\ \phi_2'' &= (2+x)e^x \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \phi_2'' - 2\phi_2' + \phi_2 &= [(2+x) - 2(1+x) + x]e^x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung schreibt sich deswegen also als

$$\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2.$$

3.3.4 Inhomogenes System

Ein inhomogenes System kann beschrieben werden durch

$$\underline{y}' = A(t)\underline{y} + \underline{b}(t)$$

mit der allgemeinen Lösung: $\underline{y}(t) = \underline{\bar{y}}(t) + \underline{x}(t)$ wobei \underline{x} die Lösung des homogenen Systems und $\underline{\bar{y}}(t)$ die partikuläre Lösung ist.

Die partikuläre Lösung kann durch Variation der Konstanten (analog zum eindimensionalen Fall) gefunden werden. Ist $Y(t)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung (d.h. zum Beispiel eine $n \times n$ Matrix), so erhält man alle Lösungen der homogenen Gleichung in der Form $\underline{y}(t) = Y(t)\underline{v}$, wobei \underline{v} alle konstanten Vektoren durchläuft. $\left(Y(t) = (\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n)\right)$. Die Konstanten werden nun variiert, d.h. durch Funktionen von t erzeugt:

$$\underline{z}(t) = Y(t) \underline{v}(t)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \underline{z}'(t) &= Y' \underline{v} + Y \underline{v}' \\ &= AY \underline{v} + Y \underline{v}' \\ &\underbrace{=}_{\text{Dies soll erfüllt sein}} AY \underline{v} + \underline{b} \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$Y(t) \underline{v}'(t) = \underline{b}$$

Da $Y(t)$ ein Fundamentalsystem ist, ist die Wronski Determinante ungleich Null. Somit existiert die inverse Matrix $Y^{-1}(t)$ und sie ist in I stetig. Damit können wir schreiben:

$$\underline{v}(t) = \underline{v}(\tau) + \int_{\tau}^t Y^{-1}(s) \underline{b}(s) ds$$

Folglich lautet die Lösung für $z(t)$:

$$z(t) = Y(t) \underline{v}(t) = Y(t) \underline{v}(\tau) + Y(t) \int_{\tau}^t Y^{-1}(s) \underline{b}(s) ds,$$

oder

$$\underline{y}(t) = Y(t) \underline{\eta} + \int_{\tau}^t Y(t) Y^{-1}(s) \underline{b}(s) ds,$$

mit $\underline{v}(\tau) = \underline{\eta}$ als Anfangswert des Systems.

Beispiel

$$\begin{cases} y_1' &= \frac{1}{t} y_1 - y_2 + t \\ y_2' &= \frac{1}{t^2} y_1 + \frac{2}{t} y_2 - t^2 \end{cases}$$

Daraus ergibt sich:

$$\underline{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix},$$

mit $t > 0$. Der Anfangswert wird gewählt als $\underline{y}(1) = \underline{0} = \underline{\eta}$.

1. Der homogene Anteil der Differentialgleichung

$$\begin{cases} y_1' &= \frac{1}{t} y_1 - y_2 \\ y_2' &= \frac{1}{t^2} y_1 + \frac{2}{t} y_2 \end{cases}$$

mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}$$

hat die Lösungen

$$\underline{y}_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$$

und

$$\underline{y}_2(t) = \begin{pmatrix} -t^2 \ln t \\ t + t \ln t \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$Y(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln t \\ -t & t + t \ln t \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem. Zum Beispiel ist für $t = 1$:

$$Y(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und es gilt $\det Y(1) = 1 \neq 0$

2. Ist $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann ist $B^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, falls natürlich $\det B = ad-bc \neq 0$. Somit bekommt man für $Y^{-1}(t)$:

$$Y^{-1}(t) = \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} t(1 + \ln t) & t^2 \ln t \\ t & t^2 \end{pmatrix}$$

Und man erhält:

$$Y^{-1}(t)\underline{b}(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} \ln t + 1 - t^2 \ln t \\ 1 - t^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_1^t Y^{-1}(s)\underline{b}(s)ds &= \begin{pmatrix} \int_1^t \frac{1}{s} (\ln s + 1 - s^2 \ln s) ds \\ \int_1^t \frac{1}{s} (1 - s^2) ds \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} t^2 - 1 + (4 - 2t^2 + 2 \ln t) \ln t \\ 4 \ln t - 2t^2 + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus berechnet man

$$\begin{aligned}\underline{y}(t) &= \underbrace{Y(t) \cdot \eta}_{=0} + Y(t) \int_1^t Y^{-1}(s) \underline{b}(s) ds \\ &= \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln t \\ -t & t + t \ln t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} t^2 - 1 + (4 - 2t^2 + 2 \ln t) \ln t \\ 4 \ln t - 2t^2 + 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} t^2 (t^2 - 1 + 2 \ln t - 2 \ln^2 t) \\ t (3 - 3t^2 + 2 \ln t + 2 \ln^2 t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4 Variationsrechnung

4.1 Eindimensionales Problem (Eulergleichung)

Problem

Gegeben sei $F(x, y, y')$ stetig und 2 mal stetig differenzierbar (C^2). Wir betrachten die Funktionen $y(x)$ die stetig auf einem Intervall $x_0 \leq x \leq x_1$ und in C^2 sind.

Randbedingung:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

Wir definieren dann das Funktional

$$\mathfrak{F}[y] := \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$
$$y(x) \rightarrow \text{Zahl } \mathfrak{F}[y] \in \mathbb{R},$$

das jede Funktion $y(x)$ einer reellen Zahl zuordnet.

Gesucht:

Die Funktion $y(x)$, für welche $\mathfrak{F}[y]$ ein **Minimum** (Extremum) ist.

Beispiel 4.1. Keine minimierende Funktion existiert für $\mathfrak{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} y^2(x) dx$ (d.h. $F(x, y, y') = y^2(x)$). Das Infimum befindet sich hier bei $\mathfrak{F}[y] = 0$, aber für jede zugelassene Funktion y ist $\mathfrak{F}[y] > 0$, da $y = 0$ nicht zugelassen ist (erfüllt die Randbedingung nicht).

Man betrachte eine **einparametrische Schar** von **zulässigen Funktionen** (der Klasse C^2): $y(x, \alpha)$. $\tilde{y} = y(x, 0)$ sei die optimale Funktion des Problems. D.h. $\forall y(x)$ zulässig $\mathfrak{F}[y] \geq \mathfrak{F}[\tilde{y}]$, also $\forall \alpha$ $\mathfrak{F}[y(x, \alpha)] \geq \mathfrak{F}[\tilde{y} = y(x, 0)]$. Der Ausdruck $\mathfrak{F}[y(x, \alpha)] = \mathfrak{F}[\alpha]$ soll also minimal sein für $\alpha = 0$.

Notwendige Bedingung für ein Minimum: $\left. \frac{d\mathfrak{F}[\alpha]}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$.

Diese Bedingung ist jedoch **nicht hinreichend**.

Notation: $\frac{d\mathfrak{F}}{d\alpha} = \delta\mathfrak{F}$; $y(x, \alpha) \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \delta y$

$$\mathfrak{F}[\alpha] := \mathfrak{F}[y(x, \alpha)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) dx$$

wobei $' := \frac{\partial}{\partial x}$ und $\delta := \frac{\partial}{\partial \alpha}$

Die **notwendige Bedingung** für die ein Minimum ist

$$\delta \mathfrak{F} = 0$$

$$0 = \delta \mathfrak{F} = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \delta y + \underbrace{F_{y'} \delta y'}_{(4.1)} \right] dx$$

$$\delta y' = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial x} \stackrel{\text{falls 2. Abl. stetig}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = (\delta y)'$$

$$\begin{aligned} F_{y'}(\delta y)' &= (F_{y'} \delta y)' - \left(\frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y \\ \text{Kettenregel: } &F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Hier gilt $\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'}$, wobei α fest bleibt (totale Ableitung nach x).

Lösung 4.1.

$$0 = \delta \mathfrak{F} = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] \delta y dx + [F_{y'} \delta y] \Big|_{x_0}^{x_1}$$

Diese Bedingung ist unabhängig von den Randbedingungen. Jedoch gilt:

$$\begin{cases} y(x_0, \alpha) = y_0 & \forall \alpha \\ y(x_1, \alpha) = y_1 & \forall \alpha \end{cases}$$

Also hängen y_0, y_1 nicht von α ab.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \delta y(x_0, \alpha) = 0 \\ \delta y(x_1, \alpha) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} = 0 \end{aligned}$$

Es bleibt

$$0 = \delta \mathfrak{F} = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] dx \delta y$$

Die Wahl der 1-parametrischen Schar ist $y(x, \alpha) = \tilde{y}(x) + \alpha \eta(x)$ wobei \tilde{y} die optimale Funktion ist und α ein reeller Parameter. Mit $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, $\eta \in C^2$ ist dann $\delta y = \eta(x)$:

$$0 = \delta \mathfrak{F} = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] \eta(x) dx \tag{4.2}$$

für **alle** $\eta(x) \in C^2$ mit $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$.

$$\Rightarrow \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] = 0.$$

Dies ist das **Fundamentallemma der Variationsrechnung**, d.h.

$$F_y - F_{y',x} - F_{y'y} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0$$

$$(F_{y'x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, \dots)$$

mit $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Falls $F_{y'y'} = 0$, ist es eine **Differentialgleichung 2. Ordnung** mit den Randbedingungen y_0, y_1 : d.h wir haben es mit einem **Randwertproblem** zu tun. ($F_{y'y'} \neq 0$ "Legendre Bedingung")

Beweis. Falls $[]$ an einer Stelle nicht verschwindet, gibt es eine ganze Umgebung, in der $[]$ nicht Null ist und einheitliches Vorzeichen hat ($[]$ ist stetig da F 2-mal stetig differenzierbar sein soll). η kann nun so gewählt werden, dass es im selben Bereich ebenfalls nicht Null wird, sonst aber überall verschwindet. Falls $[]$ nicht im ganzen Intervall Null wäre, könnte man $\eta(x)$ also so wählen, dass das Integral nicht verschwindet was der Voraussetzung widerspricht (muss für alle $\eta(x)$ verschwinden).

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 : \text{ Eulersche DGL}$$

□

4.2 Spezialfälle

1. $F_y = 0$, d.h $F(x, y')$.

Eulergleichung $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$, d.h $F_{y'} = \text{const}$: erstes Integral und somit DGL 1. Ordnung.

2. $F_x = 0$, d.h $F(y, y')$.

Dann ist $\frac{dF}{dx} = F_y y' + F_{y'} y''$ und wir bekommen

$$0 = \underbrace{\left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right]}_{=0} y' = \frac{dF}{dx} - \underbrace{F_{y'} y'' - y' \frac{d}{dx} F_{y'}}_{=-\frac{d}{dx} (y' F_{y'})}$$

$$= \frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) \Rightarrow \underbrace{F - y' F_{y'}}_{\text{DGL 1. Ordnung}} = \text{Konst.} = \text{"erstes Integral"}.$$

3. $F_x = F_y = 0$, d.h $F(y')$.

Eulergleichung: $0 = -\frac{d}{dx} F_{y'} = F_{y'y} y''$, also (falls $F_{y'y} \neq 0$) $y'' = 0$; folglich ist $y(x)$ eine lineare Funktion.

Beispiel 4.2. *Kürzester Weg zwischen $\underbrace{(x_0, y_0)}_{P_0}$ und $\underbrace{(x_1, y_1)}_{P_1}$.*

$$\mathfrak{F}[y] = \int_{P_0}^{P_1} ds = \int_{P_0}^{P_1} (dx^2 + dy^2)^{1/2} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Somit ist $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ mit Randbedingungen $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y(x_1)$ ($F_x = 0$, $F_y = 0$). Die Eulergleichung ist dann: $-\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$.

$$-\frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] = 0 \quad \text{d.h.} \quad \left[\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] = A = \text{Konst.}$$

$$\text{oder } (y')^2 = A^2(1 + (y')^2)$$

$$\Rightarrow (y')^2(1 - A^2) = A^2 \Rightarrow y' = \left(\frac{A^2}{1 - A^2} \right)^{1/2} = \text{konst.}$$

(d.h. also $y'' = 0$ wie zu erwarten war).

Somit ist $y(x) = \left(\frac{A^2}{1 - A^2} \right)^{1/2} x + B$, d.h. die Lösung ist eine **Gerade** (A, B werden durch die Randbedingungen bestimmt).

4.3 Natürliche Randbedingungen

Betrachten wir nun das Problem

$$\mathfrak{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \text{Minimum unter der Bedingung } y(x_0) = y_0,$$

dagegen gebe es keine Randbedingung für x_1 . Wir haben gesehen dass

$$0 = \delta \mathfrak{F} = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] \delta y dx + [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1}, \quad (4.3)$$

es gilt jetzt $\delta y(x_0) = 0$, $\delta y(x_1) = \text{beliebig}$.

Lösung 4.2. Weiterhin muss die gesuchte Funktion die Eulergleichung erfüllen, jedoch ergibt sich in x_1 die natürliche Randbedingungen $F_{y'}(x_1, y(x_1), y') = 0$, da somit (4.3) gilt.

$$\begin{aligned} 0 = \delta \mathfrak{F} &= 0 + (F_{y'} \delta y)(x_1) - \underbrace{(F_{y'} \delta y)(x_0)}_{=0 \text{ da } \delta y(x_0)=0} \\ &\Rightarrow F_{y'} \delta y(x_1) = 0 \quad \text{da aber jetzt } \delta y(x_1) \text{ beliebig} \\ &\Rightarrow F_{y'}(x_1) = F_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = 0. \end{aligned}$$

Die DGL (Eulergleichung) muss jetzt also mit den Randbedingungen $y(x_0) = y_0$ und $F_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = 0$ gelöst werden. Das Analoge gilt, falls x_0 und x_1 vertauscht oder

falls in x_0 auch keine Bedingung festgelegt ist; dann ist die Randbedingung $F_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)) = 0$. Die **“natürliche Randbedingungen”** treten also als Ersatz für die fehlenden Zwangsbedingungen auf.

Beispiel 4.3. Kürzester Abstand vom Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ zur Geraden $x = x_1$:

$\mathfrak{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$ Minimum unter der Bedingung $y(x_0) = y_0$, aber frei in x_1 .

Euler-DGL: $y'' = 0$ (d.h. $y(x) = ax + b$) $\Rightarrow y(x_0) = y_0$

Natürliche Randbedingung:

$$0 = F_{y'}|_{x=x_1} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x_1} \Rightarrow y'(x_1) = 0 \quad (4.4)$$

D.h. die Tangente zur Kurve $y(x)$ ist im x_1 senkrecht zur Geraden $x = x_1$.

Bemerkung 4.1. Betrachte die Funktion $G(x, y)$ (nicht von y' abhängig) und $\frac{dG}{dx}(x, y)$.

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} G(x, y) dx = G(x_1, y(x_1)) - G(x_0, y_0(x_0)),$$

Falls $F(x, y, y') \rightarrow F(x, y, y') + \frac{dG(x, y)}{dx}$, so ist die Eulergleichung identisch zur Gleichung in der nur F vorkommt, da

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{dG}{dx} \right)_y - \frac{d}{dx} \left(\frac{dG}{dx} \right)_{y'} \right] \equiv 0 \text{ und zwar identisch:} \\ & = (G_x + G_y y')_y - \frac{d}{dx} (G_x + G_y y')_{y'} = G_{xy} + G_{yy} y' - \frac{d}{dx} (0 + G_y) \\ & = G_{xy} + G_{yy} y' - G_{yx} - G_{yy} y' \equiv 0; \quad (G_{xy} = G_{yx}). \end{aligned}$$

Bei Variation mit festen Randbedingungen kommt es nicht auf $\frac{dG}{dx}$ an, bei natürlichen Randbedingungen jedoch schon:

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} (F + \frac{dG}{dx}) dx = \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{[F]}_{=0 \text{ Euler DGL}} dx \delta y + \underbrace{(F_{y'} + G_y)}_{=0} \delta y \Big|_{x_1} - \underbrace{(F_{y'} + G_y)}_{=0} \delta y \Big|_{x_0} \quad (4.5)$$

\Rightarrow abgeänderte natürliche Randbedingungen

4.4 Skizze einiger Erweiterungen der bisherigen Betrachtungen

4.4.1 Integrand F hängt auch von höheren Ableitungen ab

$$\mathfrak{J}[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

Dann sind die Randbedingungen

$$\begin{cases} y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0) \\ y(x_1), y'(x_1), \dots, y^{(n-1)}(x_1) \end{cases}$$

$$(F, y(x) \in C^{2n}(\rightarrow y(x, \alpha) \mathfrak{J}[y(\alpha)]) \rightarrow \frac{\partial \mathfrak{J}[\alpha]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0)$$

$$\delta \mathfrak{J} = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'' + \dots + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}) dx = 0$$

Es muss nun n -mal partiell integriert werden um die Form $0 = \int (\delta y) dy dx$ zu erreichen, dann kann das Lemma angewendet werden. Das Ergebnis ist die Eulersch'sche DGL

$$0 = [F]_y = F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \frac{d^3}{dx^3} F_{y'''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}$$

wobei $\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \dots + y^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(n)}}$.

mit Ordnung $2n$, und $2n$ Randbedingungen.

4.4.2 Mehreren unabhängige Variablen

z.B. $u(x, y)$

$$\mathfrak{J}(u) := \int \int_G F(x, y, u, u_x, u_y) \underbrace{dx dy}_{dA}$$

Randbedingungen: $u = f(s)$ gegeben längs ∂G (Randkurve), $u(x, y) \in C^2$. Führen wir also wiederum eine 1-parametrische Schar $u(x, y, \alpha)$ ein, mit

$\mathfrak{J}[u(x, y, \alpha)] = \mathfrak{J}[\alpha]$, notwendige Bedingung: $\delta \mathfrak{J}[\alpha] = 0$.

$$\delta \mathfrak{J} = \int \int_G [F_u \delta u + F_{u_x} \delta u_x + F_{u_y} \delta u_y] dA$$

Partielle Integration (und Sätze aus Vektoranalysis) \Rightarrow **Euler DGL**

$$0 = [F]_u := F_u - \frac{d}{dx}F_{u_x} - \frac{d}{dy}F_{u_y}$$

$$\text{wobei } \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yx} \frac{\partial}{\partial u_y}$$

(analog für $\frac{d}{dy}$) Also erhält man eine **Partielle DGL 2. Ordnung**.

Beispiel 4.4.

$$F = u_x^2 + u_y^2 = |\text{grad}(u)|^2$$

$$\mathfrak{J}[u] = \int \int_G (u_x^2 + u_y^2) dA$$

(Dirichlet'sches Integral von u über G)

Eulergleichung:

$$0 = 0 - \frac{d}{dx}(2u_x) - \frac{d}{dy}(2u_y)$$

$$= -2u_{xx} - 2u_{yy} = -2(u_{xx} + u_{yy})$$

$$\Rightarrow \Delta u = 0 \quad (\text{Laplacegleichung}).$$

4.4.3 Mehrere unbekannte Funktionen

Seien zum Beispiel 2 Funktionen $y(x), z(x)$ gesucht:

$$\mathfrak{J}[y(x), z(x)] := \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx,$$

Minimum unter der Bedingungen $y, z \in C^2$. Es seien die folgenden Randbedingungen gegeben:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0; & z(x_0) = z_0 \\ y(x_1) = y_1; & z(x_1) = z_1 \end{cases}$$

Prinzip der partiellen Variation:

$\{\tilde{y}(x), \tilde{z}(x)\}$ seien die optimalen Funktionen, zunächst sei $z(x)$ fest und man variere $y(x)$. $y(x, \alpha)$ ergibt somit

$$0 = [F]_y = F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \quad (\text{Euler-Gl.}) \quad (4.6)$$

wobei allerdings:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + z'' \frac{\partial}{\partial z'} \quad (4.7)$$

Nun sei $y(x)$ fest und man variere nur $z(x)$, dann gilt analog:

$$0 = [F]_z = F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \quad (\text{Euler-Gl.}), \quad (4.8)$$

wobei wiederum $\frac{d}{dx}$ wie oben zu verstehen ist. Folglich:

2 unbekannte Funktionen \Rightarrow 2 Euler'sche Gl.

n unbekannte Funktionen \Rightarrow n Euler'sche Gl.

Anwendung in der Mechanik:

Die Lagrange'schen Gleichungen der Mechanik sind die Euler'schen Gleichungen zum Hamilton'schen Prinzip.

- Mechanische Systeme in verallgemeinerten Koordinaten: q_1, q_2, \dots, q_n (unabhängige Variable ist die Zeit t : $\dot{} = \frac{d}{dt}$)
- kinetische Energie $T(q_i, \dot{q}_i)$ mit $1 \leq i \leq n$ (z.B. $\frac{1}{2}m\dot{q}_i^2$ oder Massenpunkt: $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$)
- Potentielle Energie $U(q_i, t)$, kann explizit von der Zeit abhängen. Die Lagrange-Funktion ist $L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = T - U$.

Gegeben seien $q_{i0} = q_i(t_0)$ und $q_{i1} = q_i(t_1)$. Die wirkliche Bewegung entspricht einem stationärem Wert des Wirkungs-Integrals:

$$\mathfrak{J}[q_1(t), \dots, q_n(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

Gesucht ist $q_1(t), \dots, q_n(t) \Rightarrow$ n- Euler DGL

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

mit obiger Randbedingungen entspricht dies den Lagrange'schen Differentialgleichungen der Mechanik.

Beispiel 4.5.

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z, t)$$

Euler-Lagrange Gleichungen:

$$m\ddot{x} = -U_x,$$

$$m\ddot{y} = -U_y,$$

$$m\ddot{z} = -U_z,$$

*diese stellen gerade die **Newton'schen Bewegungsgleichungen** dar.*

Anwendung in der geometrischen Optik

- Die Eikonalgleichungen der Gauss'schen Optik sind die Euler'schen Gleichungen zum Fermat'schen Prinzip.
- Wir betrachten den Brechungsindex $n(x, y, z)$, der die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Medium beschreibt.

Prinzip von Fermat: Der Lichtstrahl von P_0 nach P_1 macht $\int_{P_0}^{P_1} n(x, y, z) ds$ stationär, wobei die Länge des Bogens **nicht** vorgeschrieben ist. Die Bogengänge s eignet sich also nicht als Parameter. Wählen wir einen anderen Parameter t , welcher jedoch nicht mit der Zeit zu verwechseln ist:

$$\begin{aligned} p_0(x_0, y_0, z_0) \quad \text{mit} \quad x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad z_0 = z(t_0), \\ p_1(x_1, y_1, z_1) \quad \text{mit} \quad x_1 = x(t_1), \quad y_1 = y(t_1), \quad z_1 = z(t_1), \end{aligned}$$

Es seien nun $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ gegeben und $x(t), y(t), z(t)$ gesucht ($t_0 \leq t \leq t_1$). Die Bogenlänge ist gegeben durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] (dt)^2$$

somit gilt

$$\mathfrak{J}[x(t), y(t), z(t)] = \int_{t_0}^{t_1} n(x(t), y(t), z(t)) \cdot \underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} dt}_{=ds}.$$

Benützt man nun

$$\begin{aligned} F(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) &= n(x, y, z) \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= 0 \quad (y, z \text{ analog}) \\ \frac{\partial n}{\partial x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \frac{d}{dt} \left[n \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right] &= \\ \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \frac{d}{dt} \left[n \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \frac{dx}{dt} \right] &= 0 \end{aligned}$$

so erhält man (Es gilt jedoch dass $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = ds$ und somit gilt $\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = 0$)

$$\text{grad}(n) = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{x}}{ds} \right), \quad \text{die } (n = 3) \text{ - Euler-Gleichung.}$$

Wir bekommen also die Gleichungen

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) \\ n_y &= \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) \\ n_z &= \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) \end{aligned},$$

$$\left[n_x = \frac{\partial n}{\partial x}, n_y = \frac{\partial n}{\partial y}, n_z = \frac{\partial n}{\partial z} \Rightarrow \text{grad}(n) = \left(\frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y}, \frac{\partial n}{\partial z} \right) \right]$$

d.h. also $\text{grad}(n) = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{x}}{ds} \right)$, die **Eikonalgleichung der geometrischen Optik**.

Spezialfall

Sei $n = n(z)$ (nur von der z-Koordinate abhängig)

$$\Rightarrow n \sin(\alpha) = \text{konst.}$$

Noch spezieller: $n = n(z)$ hat nur zwei Werte, zum Beispiel für $z > 0 : n = n_1$ und für $z < 0 : n = n_2$. Dann erhalten wir das **Snellius'sche Brechungsgesetz**

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$$

4.5 Extrema unter Nebenbedingungen

4.5.1 Integralbedingung

$$\mathfrak{J}[y] := \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad \text{Minima unter der Bedingung}$$

$$y(x) \in C^2, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$$

und

$$K[y] := \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = C, \text{ fest gegebene Konstante}$$

Hier ist das Betrachten einer 1-parametrischen Schar nicht möglich, versuchen wir es also mit einer 2-parametrischen Schar $y(x, \alpha, \beta)$: $\mathfrak{J}[y] := \mathfrak{J}(\alpha, \beta)$, $\mathfrak{K}[y] := \mathfrak{K}(\alpha, \beta) = C$. Nun wird der Lagrangemultiplikator $\lambda = (\text{Zahl})$ eingeführt so dass $\mathfrak{J}(\alpha, \beta) - \lambda \mathfrak{K}(\alpha, \beta)$ stationär wird.

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(y) - \lambda K(y) &= \int_{x_0}^{x_1} [(F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y'))] dx \\ \delta \int_{x_0}^{x_1} [F - \lambda G] &= 0 \Rightarrow \text{Eulergleichung} \quad [F - \lambda G]_y = 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

d.h also

$$[F - \lambda G]_y - \frac{d}{dx} [F - \lambda G]_{y'} = 0$$

wobei λ konstant ist. ($y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$).

Für n Integralbedingungen können n Lagrange-Multiplikatoren $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ benutzt werden.

4.5.2 Eine Bedingung in jedem Punkt, "holonom" oder Differentialbedingung

Eine gesuchte Funktion:

$$y(x) : \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \text{ mit } y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \text{ und } G(x, y) = C \text{ gegebene Zahl.} \quad (4.10)$$

$\Rightarrow G$ nach y auflösen und dann in Integral einsetzen

\Rightarrow Das Problem ist somit keine Variationsaufgabe mehr.

Oder $G(x, y, y') = c \Rightarrow$ allgemeine Lösung $y = y(x, k)$ dann hängt es nur noch von k ab, \Rightarrow gewöhnliche minimierungs Aufgabe.

Mehrere gesuchte Funktionen:

Gesucht z.B $y(x)$, $z(x)$:

$$\mathfrak{J}[y, z] := \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z') dx$$

Extrema unter der Bedingung

$$G(x, y, y', z, z') := C \text{ in jedem Punkt } x.$$

Lagrange Multiplikation: Die erste Bedingung ergibt eine Zahl λ . Die Bedingung für jeden Punkt x hat zur folge dass $\lambda(x)$ eine Funktion ergibt. Also erhält man

$$\left. \begin{aligned} [F - \lambda(x)G]_y &= 0 \\ [F - \lambda(x)G]_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{zwei Eulergleichungen}$$

und $G(x, y, y', z, z') = C$ ergibt drei DGL für drei unbekannte Funktionen y , z , λ .

5 Lineare Operatoren, Eigenwertprobleme

5.1 Funktionenräume (Repetition)

Es seien $f(x)$ und $g(x)$ reell- oder komplexwertige Funktionen und α und β komplexe Zahlen.

- **Linearer Funktionenraum \mathbb{R}**

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \in \mathbb{R} \\ g(x) \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathbb{R}$$

- **Lineare Unabhängigkeit** eines Systems von Funktionen $f_1(x), \dots, f_n(x)$ falls

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

- **Dimension eines linearen Raumes:** Die höchste Zahl von linear unabhängigen Funktionen in \mathbb{R} .
- Wir postulieren in \mathbb{R} eine **Hermite'sche Metrik** wobei das **Skalarprodukt** $(f, g) \in \mathbb{C}$ ist, so dass
 1. **Linearität** $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 (f_1, g) + \alpha_2 (f_2, g)$
 2. **Hermitizität**
 $(g, f) = \overline{(f, g)} \Rightarrow (f, f) = \overline{(f, f)}$ ist also reell
 3. **Positiv definite Metrik** $(f, f) \geq 0$ und $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Bemerkung 5.1.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right\} \Rightarrow (f, \alpha g) = \overline{(\alpha g, f)} = \overline{\alpha \overline{(g, f)}} = \overline{\alpha} (f, g)$$

Definition 5.1. Norm einer Funktion: $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$

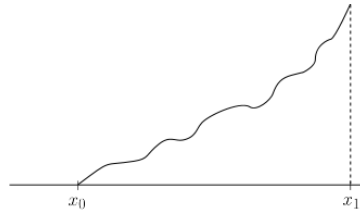
5.2 Hermit'sche Operatoren

Definition 5.2. Lineare Operatoren linearer Abbildungen von \mathbb{R} in sich oder in einen grösseren Raum. $\mathbb{R} :=$ "Definitionsbereich des Operators"

Beispiel 5.1. Es sei

$$\mathfrak{R} = \{ \text{Funktionen der Klasse } C^1 \text{ in } [x_0, x_1] \text{ mit } f(x_0) = 0 \},$$

wobei $\frac{d}{dx} : C^1 \rightarrow C^0$ der lineare Operator ist ($f \rightarrow \frac{d}{dx} f$).



Beispiel 5.2. Falls $\mathfrak{R} = \mathbb{R}^n$, $A: \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n$ - Der Operator A kann folgendermassen durch eine Matrix beschrieben werden:

Basisvektoren: $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

$$\vec{e}_k \xrightarrow{A} A\vec{e}_k, \quad a_{jk} = (A\vec{e}_k, \vec{e}_j)$$

Definition 5.3. eine **Hermite'scher Operator** A ist ein linearer Operator mit

$$(Af, g) = (f, Ag) \quad \forall f, g \in \mathbb{R}$$

Beispiel 5.3. Für $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Hermite'sch muss dann gelten:

$$a_{jk} = (A\vec{e}_k, \vec{e}_j) = (\vec{e}_k, A\vec{e}_j) = \overline{(A\vec{e}_j, \vec{e}_k)} = \overline{a_{kj}}.$$

$a_{jk} = \overline{a_{kj}}$ ist also die Bedingung damit die Matrix A hermitsch ist. (z.B. $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix}$ wobei a und d reell sind.)

Die Hermitizität eines Operators hängt also von der Metrik (d.h. dem Skalarprodukt) wesentlich ab!

Einfaches Kriterium für die Hermizität:

Satz 5.1. Voraussetzung: \mathfrak{R} ist komplex, d.h. $f \in \mathfrak{R} \Rightarrow i \cdot f \in \mathfrak{R}$

Behauptung 5.1. Ein Operator A ist Hermite'sch $\Leftrightarrow \forall f \in \mathbb{R} \quad (Af, f)$ reell
(notwendige und hinreichende Bedingung, ohne Beweis)

Beispiel von Hermite'schen Operatoren

Beispiel 5.4.

- Funktionenraum \mathfrak{R} : stetige Funktionen $f(x)$ in $[x_0, x_1]$
- Metrik: Skalarprodukte $(f, g) = \int_{x_0}^{x_1} \mu(x) f(x) \overline{g(x)} dx$ mit $\mu(x) > 0$ und reell
- Operator: $Af := \gamma(x)f$, $\gamma(x)$ reell und stetig, A ist Hermite'sch:

Beweis.

$$\begin{aligned} (Af, g) &= \int_{x_0}^{x_1} \mu(x) \gamma(x) f(x) \overline{g(x)} dx = \overline{\left(\int_{x_0}^{x_1} \mu \underbrace{\gamma \bar{f}}_{=(\gamma f)} g dx \right)} \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \mu(x) f(x) \left(\overline{\gamma(x) g(x)} \right) dx = (f, Ag) \end{aligned}$$

In der zweiten Gleichung wurde benutzt, dass μ und γ reell und $Ag = \gamma g$. \square

Beweis. nach Satz

$$(Af, f) = (\gamma f, f) = \int_{x_0}^{x_1} \mu \gamma \underbrace{f \bar{f}}_{|f|^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\mu \gamma |f|^2}_{\text{reell}} dx = \text{reell}$$

Dies gilt für alle f , somit ist A Hermite'sch. \square

Beispiel 5.5.

- *Funktionenraum* \mathfrak{R} : $f(x) \in C^2$ in $[x_0, x_1]$ mit

$$\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f'(x_1) = 0 \end{cases}$$

- *Metrik*: $(f, g) = \int_{x_0}^{x_1} \mu(x) f(x) \overline{g(x)} dx$ mit $\mu(x) > 0$ reell.
- *Operator*: $Af := -\frac{1}{\mu(x)} \frac{d}{dx} \left[\sigma(x) \frac{df}{dx} \right]$ (Sturm-Liouville Operator, $\mu(x), \sigma(x)$ gegeben)
 $\sigma(x) \in [x_0, x_1]$ reell und C^1

Behauptung 5.2. A ist Hermite'sch.

Beweis.

$$\begin{aligned} (Af, f) &= \int_{x_0}^{x_1} \mu(x) \left(\frac{-1}{\mu(x)} \right) \left(\frac{d}{dx} \left[\sigma(x) \frac{df}{dx} \right] \right) \bar{f}(x) dx \\ &= \underbrace{\bar{P}.I - \left[\sigma(x) \frac{df}{dx} \right] \bar{f} \Big|_{x_0}^{x_1}}_{=0 \text{ (wegen RB)}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} \sigma(x) \underbrace{f'(x) \bar{f}'(x)}_{|f'|^2} dx}_{\text{reell}} \end{aligned}$$

\square

Definition 5.4. Der Operator A heisst **positiv definit**, wenn $\forall f \in \mathfrak{R} (Af, f) \geq 0$ und $(Af, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

5.3 Eigenwerte und Eigenfunktionen eines Hermite'schen Operators

A sei ein Hermite'scher Operator

Definition 5.5. λ ist ein Eigenwert von A wenn $\exists u \in \Re u \neq 0 : Au = \lambda u$

Definition 5.6. u heisst **Eigenfunktion** von A zum Eigenwert λ .

Satz 5.2. Alle Eigenfunktionen zu einem bestimmten Eigenwert λ bilden einen linearen Raum R_λ (Eigenraum von λ)

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} Au = \lambda u \\ Av = \lambda v \end{array} \right\} A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av = \lambda(\alpha u + \beta v)$$

□

Definition 5.7. Die Dimension von R_λ , $\dim R_\lambda$, heisst die "**Multiplizität**" des Eigenwertes λ ($\dim R_\lambda \geq 1$). Wenn $\dim R_\lambda = 1$ ist, heisst λ **einfacher** Eigenwert. Ist $\dim R_\lambda > 1$, heisst λ **entarteter** Eigenwert

Satz 5.3. Alle Eigenwerte eines Hermite'schen Operators sind reell.

Beweis.

$$\underbrace{(Au, u)}_{\text{reell}} = \lambda \underbrace{(u, u)}_{\text{reell} > 0} \quad (u \neq 0)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{(Au, u)}{(u, u)} \text{ ist auch reell}$$

□

Definition 5.8.

$$\lambda = \frac{(Au, u)}{(u, u)} \text{ heisst } \mathbf{Rayleigh \ Quotient} \ (R[u])$$

Satz 5.4. Seien λ und μ zwei **voneinander verschiedene** Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenräume R_λ und R_μ stehen dann orthogonal zueinander (gilt nur für Hermit'sche Operatoren). $\lambda \neq \mu \Rightarrow R_\lambda \perp R_\mu$ bzgl. der Metrik, in welcher A Hermithe'sch ist!

Beweis. $u \in R_\lambda$ und $v \in R_\mu$ mit $\mu \neq \lambda$

$$\begin{aligned}
 (Au, v) &= \lambda(u, v) \\
 (Au, v) &= (u, Av) \\
 &= \bar{\mu}(u, v) = \mu(u, v) \\
 &\Rightarrow \lambda(u, v) = \mu(u, v) \\
 \text{oder } \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}(u, v) &= 0 \Rightarrow (u, v) = 0 \\
 &\Rightarrow u \perp v.
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.2. Es folgt auch $(Au, v) = \lambda(u, v) = 0$

Bemerkung 5.3. Sei A ein positiv definiter Hermite'scher Operator. D.h. $(Af, f) \geq 0 \ \forall f$ und $(Af, f) > 0$ wenn $f \neq 0$. Dann sind alle Eigenwerte $\lambda > 0$.

Beweis.

$$Au = \lambda u; \quad \lambda = \frac{(Au, u)}{(u, u)} > 0 \text{ da } u \neq 0.$$

□

Beispiel 5.6. Die Schwingende Saite

(unendlich viele Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots < \infty$)

Die Bewegungsgleichung der schwingenden Saite lautet

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \quad x \in [0, L], \ t \geq 0, \\
 u(t, 0) &= u(t, L) = 0,
 \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
 u(0, x) &= v(x), \\
 \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} &= w(x).
 \end{aligned}$$

Wir benutzen die Methode der Separation der Variablen: d.h. $u(t, x) = f(t)g(x)$ (Ansatz)

1. Lösungen der Form $u(t, x) = f(t)g(x)$

$$\frac{1}{c^2} \ddot{f}(t)g(x) = f(t)g''(x)$$

Also hängt $\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{f}}{f} = \frac{g''}{g}$ nicht von t und nicht von x ab, und kann folglich nur eine

Konstante λ sein. Somit erhalten wir das Eigenwertproblem

$$\frac{d^2}{dx^2}g(x) = -\lambda g(x) \quad x \in [0, L]$$

mit $g(0) = g(L) = 0$ (wegen $u(t, 0) = u(t, L) = 0$).

Betrachte:

- $R : g(x) \in C^2$ in $[0, L]$, $g(0) = g(L) = 0$
- Metrik: $(g, s) = \int_0^L g(x)s(x)dx$
- Operator: $Ag = -g''$ Hermite'sch, $(Ag, s) = (g, As)$ (durch partielle Integration)

$$Ag = \lambda g \quad (-g'' = \lambda g)$$

$$g'' + \lambda g = 0 \quad (\text{Schwingende Saite})$$

$$g_n = \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \cdot C \quad (\text{erfüllt } g_n(0) = g_n(L) = 0)$$

$$\text{mit } \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (n = 0 \text{ nicht Eigenwert da } g_0 = 0 \rightarrow \text{keine Eigenfunktion})$$

Die g_n spannen den ganzen \mathfrak{R} auf (\rightarrow Fourier-Reihen), d.h. die g_n bilden ein vollständiges Funktionensystem in \mathfrak{R} .

- Die Gleichung für f ist

$$\ddot{f} = -\lambda_n c^2 f.$$

Sie besitzt die allgemeine Lösung $f(t) = a \cos \omega_n t + b \sin \omega_n t$, mit $\omega_n = \sqrt{c^2 \lambda_n}$.

Die allgemeinste Lösung der Form $f(t)g(x)$ ist also

$$(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right), \quad \text{mit } \frac{\omega_n}{c} = \sqrt{\lambda_n},$$

wobei $\omega_n = \frac{\pi n c}{L} \quad n = 1, 2, \dots$ (**Eigenfrequenzen**).

2. Da die Gleichung linear ist, ist auch jede Superposition eine Lösung:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)$$

Die Koeffizienten a_n, b_n werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)) = v(x)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \omega_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)) = w(x)$$

Aus der Theorie der Fourierreihen wissen wir jedoch, dass (für hinreichend reguläre $v(x)$, $w(x)$) gilt:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L v(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L w(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx$$

Die Gesamtheit der Eigenwerte eines Hermite'schen Operators heisst **Spektrum**. Für das Spektrum kann folgendes zutreffen:

1. Es gibt **keine** Eigenwerte.
2. Es gibt **endlich viele** Eigenwerte.
3. Es gibt eine abzählbare Menge von Eigenwerten, die entweder keinen Häufungspunkt haben (z.B. Schwingende Saite), oder die einen Häufungspunkt haben (z.B. Wasserstoffatom).
4. Es gibt Eigenintervalle (nicht abzählbare Mengen von Eigenwerten), welche ein kontinuierliches Spektrum bilden.

Sei nun R_λ der durch den Eigenwert λ aufgespannten Eigenraum. Eine wichtige Frage ist: Spannen die zu allen Eigenwerten λ eines Operators gehörigen Eigenräume R_λ den ganzen Raum auf?

Definition 5.9. Der Operator A heisst **beschränkt**, falls

$$\sup_{f \in \mathfrak{R}} \frac{\|Af\|}{\|f\|} < \infty.$$

Betrachte den Operator A und den Identitätsoperator I , d.h. $If = f$. Bilde einen neuen Operator $(A - \lambda I)$:

$$\exists u \neq 0 \text{ so dass } (A - \lambda I)u = 0,$$

d.h. $Au = \lambda u$, mit u Eigenfunktion zum Eigenwert λ . So ist der **Operator** $(A - \lambda I)$ **singulär**, d.h. $(A - \lambda I)\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}$ (z.B. wird u auf 0 abgebildet). Entsprechend ist der "Umkehroperator" $(A - \lambda I)^{-1}$ **nicht** auf ganz \mathfrak{R} definiert. $(A - \lambda I)^{-1}$ nennt man die **Resolvente**. Die Eigenwerte λ_i bilden das **Punktspektrum** von A .

Definition 5.10. Das **kontinuierliche Spektrum** eines Hermit'schen Operators A ist die Menge der Zahlen λ , für welche die Resolvente $(A - \lambda I)^{-1}$ nicht beschränkt ist, d.h.

$$\sup_{f \in \mathfrak{R}} \frac{\|(A - \lambda I)^{-1}f\|}{\|f\|} = \infty.$$

Wenn das Spektrum ein “reines Punktspektrum” ist, dann erzeugen alle Eigenfunktionen den ganzen Funktionenraum \mathfrak{R} , (Beispiel: schwingende Saite). (Ohne Beweis)

Bemerkung 5.4. *Es kann vorkommen, dass eine Zahl λ sowohl dem Punktspektrum als auch dem kontinuierlichen Spektrum angehört.*

1. Fall eines reinen Punktspektrums:

$$Au_i = \lambda_i u_i; \quad u_i \text{ Eigenfunktion und } \lambda \text{ Eigenwert mit } \|u_i\| = 1,$$

$$\text{d. h. } \forall \epsilon > 0, \quad \forall f \in \mathfrak{R} \text{ so dass } f_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \text{ und } \|f - f_n\| < \epsilon, \text{ also } f_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i; \quad \alpha_i = (f, u_i)$$

2. Wenn λ ein Eigenwert ist, dann $\exists u \in \mathfrak{R} : Au = \lambda u$ oder $(A - \lambda I)u = 0$

3. Wenn λ im kontinuierlichen Spektrum liegt, dann gilt $\forall \epsilon > 0$:

$$\exists R^\infty \subset \mathfrak{R} \text{ so dass } \forall u \in R^\infty \quad \frac{\|(A - \lambda I)u\|}{\|u\|} < \epsilon.$$

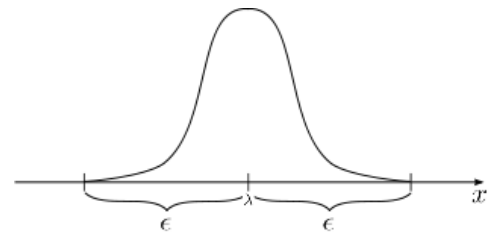
$$\text{Sei } v = Au - \lambda u = (A - \lambda I)u, \quad u = (A - \lambda I)^{-1}v$$

$$\text{d. h. } \frac{\|v\|}{\|(A - \lambda I)^{-1}v\|} < \epsilon \Rightarrow \frac{\|(A - \lambda I)^{-1}v\|}{\|v\|} > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\text{da aber } \epsilon > 0 \text{ beliebig} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} \rightarrow \infty, \text{ also } \sup_{f \in \mathfrak{R}} \frac{\|(A - \lambda I)^{-1}f\|}{\|f\|} \rightarrow \infty \text{ nicht beschränkt.}$$

Beispiel 5.7. *Beispiel eines rein kontinuierlichen Spektrums:*

- $\mathfrak{R} : \{f(x) \in C^0 \text{ in } [0, 1]\}$
- Metrik: $(f, g) = \int_0^1 f \bar{g} dx$
- Operator: $Af(x) = xf(x)$ (hat **keine** Eigenwerte)
- Sei $0 < \lambda < 1$



$\forall \epsilon > 0 \exists u \in \mathfrak{R}$ wobei $u(x) = 0$ für $|x - \lambda| \geq \epsilon$, u sei reell:

$$\begin{aligned} \|Au - \lambda u\|^2 &= \|xu - \lambda u\|^2 = \int_0^1 (x - \lambda)u \overline{(x - \lambda)u} dx \\ &= \int_0^1 (x - \lambda)^2 u^2 dx = \int_{\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} \underbrace{(x - \lambda)^2}_{\leq \epsilon^2} u^2 \leq \epsilon^2 \|u\|^2 \\ &\Rightarrow \frac{\|Au - \lambda u\|}{\|u\|} \leq \epsilon \end{aligned}$$

Das kontinuierliche Spektrum besteht aus allen Zahlen zwischen 0 und 1.

Projektionsoperatoren (Orthoprojektoren)

Definition 5.11. Ein (linearer) Operator heisst **Projektor**, wenn zwei lineare Unterräume \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_b existieren mit $\mathfrak{R}_a, \mathfrak{R}_b \subset \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_a \perp \mathfrak{R}_b$ und $\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_b = \mathfrak{R}$. Es gilt also: $\forall f \in \mathfrak{R} f = f_a + f_b$ mit $f_a \in \mathfrak{R}_a$ und $f_b \in \mathfrak{R}_b$ so dass $\forall f \in \mathfrak{R} Pf = f_a$.

Eigenschaften

1. Ein Projektor ist ein Hermite'scher Operator

Beweis.

- Linearität ist klar
- $f = f_a + f_b$, $g = g_a + g_b$

$$\begin{aligned} (Pf, g) &= (f_a, g_a + g_b) = (f_a, g_a) + \underbrace{(f_a, g_b)}_{=0} = (f_a, g_a) \\ &= (f_a, Pg) = (f, Pg) \end{aligned}$$

□

2. Ist P ein Projektor so gilt $P^2 = P$

Beweis.

$$P^2 f = P(Pf) = P(f_a) = f_a = Pf \quad \forall f \in \mathfrak{R}$$

□

Satz 5.5. Die Eigenschaften 1 und 2 zusammen charakterisieren die Projektoren. D.h.

$$P : \text{Projektor} \Leftrightarrow \begin{cases} P \text{ Hermite'sch} \\ P^2 = P \end{cases}$$

(\Rightarrow wurde bereits bewiesen. Der Beweis für \Leftarrow kann als Übung gezeigt werden.)

Eigenwerte eines Projektors:

Es sei $Pf = \lambda f$ mit

$$f = f_a + f_b, \quad Pf = f_a = \lambda(f_a + f_b)$$

1. $f_b = 0$: $f_a = \lambda f_a \Rightarrow \lambda = 1$. Der Eigenraum ist somit gegeben durch $\mathfrak{R}_a = \mathfrak{R}_1$.
2. $f_b \neq 0, f_a = 0$: $Pf = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ oder $Pf_b = f_b \Rightarrow \lambda = 1$. Somit ist der Eigenraum gegeben durch $\mathfrak{R}_{\lambda=0} = \mathfrak{R}_b$.

5.4 Extremalprinzipien und Charakterisierung der Eigenwerte

Annahme:

- A Hermite'scher Operator
- Spektrum beginnt mit Punktspektrum

$$\begin{aligned} &\text{Eigenwerte: } \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \\ R[f] &= \frac{(Af, f)}{(f, f)} \quad \text{Rayleigh-Quotient} \end{aligned}$$

Rayleigh'sches Prinzip:

$$\lambda_1 = \min_{f \in \mathfrak{R}} R[f]$$

Allgemeiner betrachtet sind die Eigenwerte von A die stationären Werte des Rayleigh-Quotienten.

$$\delta \left\{ \frac{(Af, f)}{(f, f)} \right\} = 0 \quad (\text{Variationsrechnung}),$$

d.h. $\delta(Af, f) = 0$, mit Nebenbedingung $(f, f) = 1$. Wir führen also den Lagrangemultiplikator λ ein:

$$\delta \{(Af, f) - \lambda(f, f)\} = 0,$$

aber das gilt gerade dann, wenn $Af - \lambda f = 0$ erfüllt ist. Die Werte λ für welche dies erfüllt ist, sind also gerade die Eigenwerte (und zugehörige Eigenfunktionen). Somit haben wir also dass

$$R[f] \geq \lambda_1 \quad (= \text{ wenn } f \text{ Eigenfunktion zu } \lambda_1 \text{ ist}).$$

Falls das Spektrum ein reines Punktspektrum oder eine Mischung aus einem Punktspektrum für die tiefsten Eigenwerte mit anschliessendem kontinuierlichen Spektrum ist (zB. Wasserstoffatom), so können die höheren diskreten Eigenwerte folgendermassen berechnet werden:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \\ \min_{f \in \mathfrak{R}, f \perp u_1} R[f] = \lambda_2,$$

wobei u_1 die Eigenfunktion zu λ_1 ist. Die allgemeinere Berechnung lautet wie folgt:

$$\min_{\substack{f \in \mathfrak{R}, \\ f \perp u_1, u_2, \dots, u_{n-1}}} R[f] = \lambda_n$$

Hierfür müssen u_1, u_2, \dots, u_{n-1} bekannt sein.

Konstruktion einer oberen Schranke für λ_n :

Wähle f_1, \dots, f_n , so dass sie in \mathfrak{R} linear unabhängig sind, d. h. $(f_i, f_j) = \delta_{ij}$:

$$L_n = L(f_1, \dots, f_n) \\ f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n \in L_n \\ R[f] = \frac{(Af, f)}{(f, f)} = \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \alpha_i \overline{\alpha_j}}{\sum_{i,j=1}^n b_{ij} \alpha_i \overline{\alpha_j}}$$

Es gilt dass

$$\begin{cases} a_{ij} = (Af_i, f_j) \rightarrow \text{Matrix } \tilde{A} \\ b_{ij} = (f_i, f_j) \rightarrow \text{Matrix } \tilde{B} \end{cases}$$

Die obere Schranke für λ_n ergibt sich aus $\max_{f \in L_n} R[f]$.

$$\Rightarrow \max_{f \in L_n} R[f] = \tilde{\lambda}_n \geq \lambda_n \\ \rightarrow \max \left(\frac{\vec{\alpha} \tilde{A} \vec{\alpha}}{\vec{\alpha} \tilde{B} \vec{\alpha}} \right) \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Das heisst also, dass $\det(\tilde{A} - \tilde{\lambda} \tilde{B}) = 0$. Daraus können die stationären Werte von $\frac{\vec{\alpha} \tilde{A} \vec{\alpha}}{\vec{\alpha} \tilde{B} \vec{\alpha}}$ gefunden werden. Diese sind $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_n$. Es gilt $\lambda_n \leq \tilde{\lambda}_n$, wobei leicht gezeigt werden kann, dass sogar gilt: $\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_2 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \tilde{\lambda}_n$.

Monotoniesätze

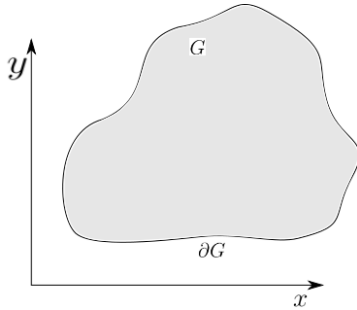
Satz 5.6. Sei \mathfrak{R} unverändert. Verändert man den Rayleigh-Quotienten $R[f]$, so dass $\forall f \in \mathfrak{R} \tilde{R}[f] \geq R[f]$ grösser wird, dann werden alle Eigenwerte **grösser**, d.h. $\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_2 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \tilde{\lambda}_n$.

Satz 5.7. Sei nun $R[f]$ unverändert. Verändert man die Klasse \mathfrak{R} der zugelassenen Funktionen, so werden **alle** Eigenwerte grösser

5.5 Einige Eigenwertprobleme der mathematischen Physik

5.5.1 Die schwingende Membran

Wir betrachten eine elastische Membran, welche am Rande gestützt sei. Wir bezeichnen dann mit $v(x, y, t)$ die vertikale Abweichung aus der Gleichgewichtslage der Membran im Punkt (x, y) zur Zeit t (d.h. $v(x, y, t) = z(t)$).



- Oberfläche der Membran:

$$A_M = \iint_G \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2} \, dx \, dy$$

- Annahme: $|v_x| \ll 1, |v_y| \ll 1$ (kleine Auslenkung), so dass das Problem linear wird (somit gilt Superposition).
- Taylor-Entwicklung im ersten Term:

$$\begin{aligned} & \int \int_G \left(1 + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) + \dots\right) dx \, dy \\ & := A + \frac{1}{2} \int \int_G (\text{grad}(v))^2 \, dx \, dy, \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei A der Flächeninhalt einer Ebene $\int \int_G dx \, dy$ ist. Wir definieren dann

$$\mathfrak{D}(v) := \int \int_G (\text{grad}(v))^2 \, dx \, dy.$$

\mathfrak{D} ist das **Dirichlet-Integral** (siehe 4.4.2). Die Zunahme der Oberfläche ist also $\frac{1}{2}\mathfrak{D}(v)$.

- Der potentiellen Energie entspricht

$$U = \iint_G \mu(x, v) (\text{grad}(v))^2 dx dy, \quad (5.2)$$

wobei μ die Spannung ist und durch eine Konstante ausgedrückt werden kann.

- Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \iint_G \rho v_t^2 dx dy$$

$\rho(x, y)$ ist die spezifische Masse pro Fläche, d.h. $M_{tot} = \iint_G \rho dx dy$ (ρ hängt **nicht** von t ab.)

Bemerkung 5.5. *Gäbe es noch eine äussere Kraft mit Druck $f(x, y, t)$, dann hätte man in U noch einen Zusatzterm der Form*

$$\iint_G f(x, y, t) v dx dy.$$

Die Lagrange-Funktion lautet $\mathfrak{L} = T - U \rightarrow \int dt \mathfrak{L} \rightarrow \delta \left(\int dt \mathfrak{L} \right) = 0$. Man benutzt nun das Hamilton'schen Prinzip, d.h. find v so dass $\delta \int dt \mathfrak{L} = 0$. Daraus erhalten wir die **Euler-Lagrange-Gleichung**

$$\mu \Delta v - \rho v_{tt} = f.$$

Im Folgenden sei $f = 0$ und $\mu = 1$. Sind ρ und μ konstant, dann gilt $\frac{\rho}{\mu^2} \sim \frac{1}{c^2}$, mit der Schallgeschwindigkeit c .

$$\Rightarrow \Delta v - \rho v_{tt} = 0 \quad \text{auf } G$$

Wir betrachten nun die **eingespannte Membran**, also $v = 0$ auf ∂G als Randbedingung (d.h. $v(x, y, t) = 0$ für $x, y \in \partial G$). Es könnte auch die freie Membran betrachtet werden, dann müssten wir $\frac{\partial v}{\partial u}$ auf ∂G fixieren.

Man benutzt hierzu der Ansatz der Separation der Variablen:

$$\begin{aligned} v(x, y, t) &= u(x, y) \cdot g(t) \\ \Rightarrow \frac{\Delta u}{\rho u} &= \frac{\ddot{g}}{g} = \text{konstant} = -\lambda \\ \ddot{g} + \lambda g &= 0 \rightarrow g \sim e^{i\omega t} \quad \text{oder } A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \text{Wobei } \lambda^2 = \omega^2 \end{aligned}$$

Für den räumlichen Anteil gilt:

$$\Delta u + \lambda \rho u = 0 \quad u(x, y)|_{\partial G} = 0$$

Bemerkung 5.6.

- *Hermitescher Operator:* $A = -\frac{1}{\rho}\Delta$
- *Metrik:* $(f, g) = \int_G \rho f g \, dx \, dy$ (\rightarrow Orthogonalitätsbedingung) mit $f, g = 0$ auf ∂G (für reelle Funktionen ist die Auslenkung reell). Dann gilt (Af, f) reell oder $(Af, g) = (f, Ag)$.

Rayleigh-Quotient

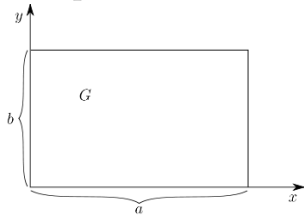
$$\begin{aligned}
 R[f] &= \frac{(Af, f)}{(f, f)} \\
 R[f] &= \frac{\iint_G (-\Delta f) \cdot f \, dx \, dy}{\iint_G \rho f^2 \, dx \, dy} \\
 &= \frac{\iint_G (\text{grad}(f))^2 \, dx \, dy}{\iint_G \rho f^2 \, dx \, dy} \\
 &= \frac{\mathfrak{D}(f)}{\iint_G \rho f^2 \, dx \, dy} = \frac{\text{potentielle Energie}}{\text{kinetische Energie}}
 \end{aligned}$$

Das neue Variationsproblem ist nun $R[u]$ stationär zu finden, wobei wir das Eigenwertproblem $\Delta u + \lambda \rho u = 0$ haben

$$\Rightarrow R[u] = \lambda$$

Setze $\rho(x, y) = \text{konst} = 1$ (homogene Membran).

Beispiel 5.8. Rechteckige Membran



$$\begin{aligned}
 \Delta u(x, y) + \lambda u(x, y) &= 0 \quad \text{in } G \\
 u(x, y) &= 0 \quad \text{in } \partial G
 \end{aligned}$$

Separationsansatz: $u(x, y) = X(x)Y(y)$

$$\begin{aligned}
 X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda X(x)Y(y) &= 0 \\
 \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda &= 0 \\
 \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}} + \underbrace{\frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{\text{hängt nur von } y \text{ ab}} + \lambda &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu = \text{konst} \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \mu - \lambda = -\nu,
 \end{aligned}$$

wobei $\lambda = \nu + \mu = \omega^2$ eine physikalische Bedeutung hat.

$$X'' + \mu X = 0 \quad \text{mit } X(0) = X(a) = 0 \quad (5.3)$$

$$Y'' + \nu Y = 0 \quad \text{mit } Y(0) = Y(b) = 0 \quad (5.4)$$

Gleichungen (5.3) und (5.4) sind die Gleichungen der schwingenden Saite. Für (5.3) haben wir

$$\mu_m = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \quad \text{mit } X_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \quad \text{bis auf Konstanten; } m = 1, 2, \dots$$

Für (5.4) gilt dann:

$$\nu_n = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \quad \text{mit } Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad \text{bis auf Konstanten; } n = 1, 2, \dots$$

Die Eigenwert sind somit

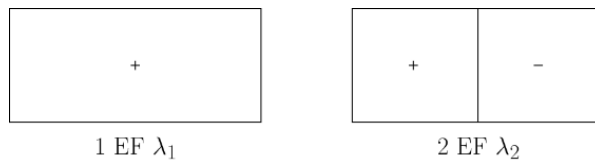
$$\lambda_{m,n} = \mu_m + \nu_n = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Die Eigenfunktion ist bis auf Normierung wie folgt gegeben:

$$u_{m,n} = X_m(x)Y_n(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

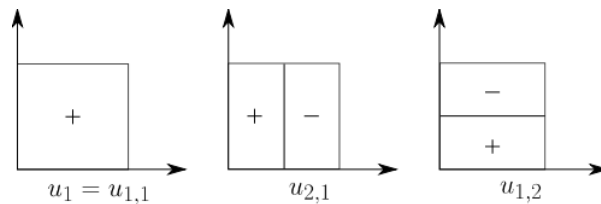
Für den ersten Eigenwert erhalten wir nun

$$\lambda_1 = \lambda_{1,1} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$



Im Fall $a = b$ haben wir eine quadratische Membran. Sei nun $a = b = \pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_{m,n} = m^2 + n^2 \\ u_{m,n} = \sin(mx) \sin(ny) \end{cases}$$



Also sind die Eigenwerte gegeben durch

$$\begin{aligned}\lambda_1 = \lambda_{1,1} = 2 &\Rightarrow \dim(\mathfrak{R}_{\lambda=2}) = 1 \\ \lambda_{2,1} = \lambda_{1,2} = 5 = \lambda_2 = \lambda_3 &\Rightarrow \dim(\mathfrak{R}_{\lambda=5}) = 2 \quad (\text{Entartung}) \\ &\text{u.s.w.}\end{aligned}$$

Falls $v(x, y, 0) = f(x, y)$ und $v_t(x, y, 0) = q(x, y)$ gegeben sind, mit $f, q = 0$ auf ∂G , so gilt

$$v(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)),$$

wobei $\omega_n^2 = \lambda_n$.

$$\Rightarrow v(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c(mn) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) (a_{m,n} \cos(\omega_n t) + b_{m,n} \sin(\omega_n t))$$

Falls $u_{n,m}$ ein vollständiges System ist mit $\int u_{n,m} u_{n',m'} = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}$ ($c(n, m)$ ist so gewählt das es auf 1 normiert ist), dann gilt

$$\begin{aligned}a_{n,m} &= \iint_G f(x, y) u_{n,m}(x, y) dx dy, \\ b_{n,m} &= \iint_G q(x, y) u_{n,m}(x, y) dx dy.\end{aligned}\tag{5.5}$$

(Analog wie bei den Fourierreihen).

Beispiel 5.9. Kreisförmige Membran; Besselfunktionen

Betrachte eine Kreisscheibe mit Radius R . Das Problem wird nun nach Polarkoordinaten transformiert ($u(r, \phi)$ anstelle $u(x, y)$):

$$\begin{aligned}\Delta u + \lambda u &= 0 \quad \text{in } G \\ u &= 0 \quad \text{in } \partial G\end{aligned}$$

Für Polarkoordinaten gilt also:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) u(r, \phi) + \lambda u(r, \phi) &= 0 \\ \text{mit } u(R, \phi) &= 0\end{aligned}$$

Man benutzt wieder den Separationsansatz: $u(r, \phi) = U(r)V(\phi)$, wobei $u(r, \phi)$ in ϕ 2π -periodisch sein muss (d.h. $u(r, \phi + 2\pi) = u(r, \phi)$). Somit muss auch $V(\phi + 2\pi) = V(\phi)$ erfüllt sein. Also haben wir dass $V(\phi) \sim a \cos m\phi + b \sin m\phi$ oder $\sim e^{im\phi}$ wobei m

ganzzahlig ist.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (-m^2) \right) U(r) V(\phi) + \lambda U(r) V(\phi) = 0$$

Es folgt die Gleichung für $U(r)$:

$$U''(r) + \frac{1}{r} U'(r) + \left(\lambda - \frac{m^2}{r^2} \right) U(r) = 0 \quad \text{mit } U(R) = 0$$

Setze $U(r) = \mathfrak{J}(\sqrt{\lambda}r)$ ein, dann erfüllt \mathfrak{J} die Bessel DGL

$$\mathfrak{J}''(x) + \frac{1}{x} \mathfrak{J}'(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) \mathfrak{J}(x) = 0.$$

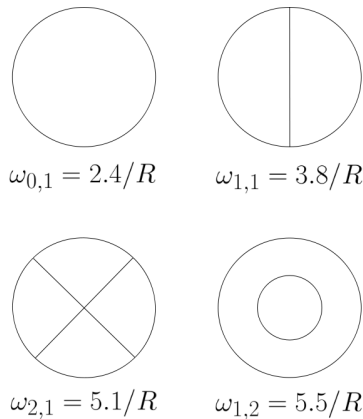
Diese Gleichung hat zwei linear unabhängige Lösungen. Wir suchen jedoch eine Lösung, die regulär für $x = 0$ (bzw. $v = 0$) ist. Ein Potenzreihenansatz ergibt die Besselfunktion \mathfrak{J}_m als reguläre Lösung:

$$\mathfrak{J}_m(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^m \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+m)!} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^{2l}$$

Die reellen Lösungen, die auch die Randbedingungen erfüllen, sind dann von der Form

$$\begin{aligned} u(r, \phi) &= \mathfrak{J}_m(\underbrace{\omega}_{\omega^2=\lambda} r) (a \cos(m\phi) + b \sin(m\phi)) \\ &= \mathfrak{J}_m(\omega r) a \cos(m(\phi - \phi_0)), \end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{J}(\omega R) = 0$ sein muss. Also sind die möglichen Schwingungsfrequenzen von der Form $\omega = \frac{x_i}{R}$, wobei x_i die positiven Nullstellen der Besselfunktion \mathfrak{J}_m sind. \mathfrak{J}_m hat unendlich viele positive Nullstellen $x_{m,1} < x_{m,2} < \dots$. Die kleinsten Nullstellen, die den tiefsten Schwingungsfrequenzen entsprechen, sind ungefähr:



$$x_{0,1} = 2.4; \quad x_{1,1} = 3.8 \quad x_{2,1} = 5.1 \quad x_{0,2} = 5.5 \quad x_{1,2} = 7.0.$$

Entsprechende Eigenschwingungen sind $u_{m,n} = \mathfrak{J}_m(x_{n,m} \frac{r}{R})$. Die **tieftste** Eigenfunktion hat immer einheitliche Vorzeichen!

5.5.2 Die Schrödingergleichung (zeitunabhängig)

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung ist gegeben als:

$$\Delta\phi + \frac{2m}{\hbar} (E - V(x, y, z)) \phi = 0$$

E ist der Energie-Eigenwert und $V(x, y, z)$ ist das Potential. Weiter gilt für die Randbedingungen: $\phi(\infty) = 0$ auf $G = \mathbb{R}^3$.

Setzen wir $\frac{2m}{\hbar^2} E = \lambda$, $\frac{2m}{\hbar^2} V(x, y, z) = \omega(x, y, z)$ und $\phi := u$

$$\Rightarrow \Delta u + (\lambda - \omega(x, y, z)) u = 0$$

Dies ist die Euler DGL des folgenden Rayleigh-Prinzips, mit dem Rayleigh-Quotienten

$$R[u] = \frac{\mathfrak{D}(u) + \iiint \omega(x, y, z) |u|^2 d^3x}{\iiint |u|^2 d^3x}.$$

d^3x ist das Volumenelement und $\mathfrak{D}(u) = \iiint |\text{grad}(u)|^2 d^3x$. Wir definieren nun den **Operator** A als

$$A = -\Delta + \omega(x, y, z) \quad \text{dann } Ak = \lambda u$$

$$\begin{aligned} \text{Metrik: } (f, g) &= \iiint f \bar{g} d^3x \\ (f, f) &= \iiint |f|^2 d^3x \end{aligned}$$

5.5.3 Die Knickung eines Reaktors

Es sei $U(x, y, z, t)$ die Anzahl Teilchen pro cm^3 . Für die Diffusion gilt dasselbe wie bei der Wärmeleitung $U_t = a^2 \Delta U$. Wir betrachten nun der Fall einer Kettenreaktion im Reaktor:

$$U_t = a^2 \Delta U + \beta U, \quad \beta > 0$$

Zur Zeit t gibt es $U d^3x$ Teilchen im Volumen d^3x und im Zeitintervall dt werden $\beta(U d^3x) dt$ Teilchen erzeugt. Dies ergibt folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} U(t + dt) - U(t) &= a^2 \Delta U dt + \beta U dt \\ \rightarrow U_t &= a^2 \Delta U + \beta U \end{aligned}$$

Für die Randbedingungen gilt z.B. $U = 0$ auf ∂G . Man benutzt nun wiederum der Ansatz der **Separation der Variablen**

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z, t) &= u(x, y, z)f(t) \\
 u(x, y, z)\dot{f}(t) &= a^2(\Delta u)f(t) + \beta uf \\
 \Rightarrow \underbrace{\frac{\dot{f}}{f} - \beta}_{\text{hängt nur von } t \text{ ab}} &= \underbrace{a^2 \frac{\Delta u}{u}}_{\text{hängt nur von } x, y, z \text{ ab}} = \text{konstant} = -a^2\lambda
 \end{aligned}$$

1. Raumproblem:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{mit } u = 0 \quad \text{auf } \partial G \quad (\text{wie dreidimensionale Membran})$$

Der Operator gegeben als $A = -\Delta$. Die Metrik ist definiert durch $(f, g) = \iiint_G f \bar{g} d^3x$. Für die Eigenwerte gilt $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Der Rayleigh-Quotient ist dann

$$R[u] = \frac{\iiint (\text{grad}(u))^2 d^3x}{\iiint_G |u|^2 d^3x}. \quad (5.6)$$

Die Eigenfunktionen sind u_1, u_2, \dots

2. Zeitproblem

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{f}_n(t)}{f_n(t)} - \beta &= -a^2\lambda_n \\
 \frac{\dot{f}_n(t)}{f_n(t)} &= -a^2\lambda_n + \beta \\
 f_n(t) &= C e^{(\beta - a^2\lambda_n)t}
 \end{aligned}$$

Bemerkung 5.7. In der Methode der Separation der Variablen (Separationsansatz) werden die Eigenwerte immer durch das Raumproblem bestimmt!

$$\Rightarrow U_n = u_n f_n \quad (5.7)$$

$$U(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(\beta - a^2\lambda_n)t} u_n(x, y, z) \quad (5.8)$$

c_n ist gegeben durch $U(x, y, z, t=0) = g(x, y, z) \rightarrow$ Fouriertransformation

Für dieses Problem gilt $\beta > 0$ und $\lambda_n > 0$, dies ist wesentlich für die Konvergenz $(\beta - a^2\lambda_n) < 0$. Hätte man diese Beschränkung nicht, so würde e^x divergieren. Es gilt somit dass $\frac{\beta}{a^2} < \lambda_1$, da $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Dies gilt für alle Eigenwerte.

- $\frac{\beta}{a^2} < \lambda_1 \Rightarrow U(x, y, z, t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$

- $\frac{\beta}{a^2} > \lambda_1 \Rightarrow U(x, y, z, t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$
- $\frac{\beta}{a^2} = \lambda_1$ Entspricht dem **kritischen Fall**

Da gilt, dass $\dim[\lambda_n] = \frac{1}{cm^2}$, spricht man von **kritischen Dimensionen**.

Beispiel 5.10. Falls G eine Kugel mit Radius R ist, so ist

$$u_1 = \frac{\sin\left(\frac{\pi r}{R}\right)}{r} \quad \lambda_1 = \frac{\pi^2}{R^2} \quad (u_1(R) = 0 \text{ Randbedingung})$$

$$R_{\text{kritisch}} = \frac{\pi a}{\sqrt{\beta}}$$

Beispiel 5.11. Wir betrachten nun das Beispiel eines sphärischen Reaktors aus Beryllium und Uran-235, mit einem atomaren Verhältnis 10^4 zu 1 bei Raumtemperatur. Man erhält $\lambda_1 = 3.8 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2}$ (d.h. aus Diffusion, Wirkungsquerschnitt, etc.). Daraus ergibt sich $R = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1}}$ womit das Volumen nun $\frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi^4}{3\lambda_1^{3/2}} \cong \frac{130}{\lambda_1^{3/2}} \text{ cm}^3 = 5.5 \cdot 10^5 \text{ cm}^3 \sim \frac{1}{2} \text{ m}^3$ ist, oder $R \cong 51 \text{ cm}$.

Bemerkung 5.8. zum Rayleigh-Quotient:

$$R[u] = \frac{\mathfrak{D}(f) + \iint_G \omega |f|^2 d^3x}{\iint_G |f|^2 d^3x} \geq \lambda_1$$

- Die Funktion welche $R[f]$ minimiert, ist die erste Eigenfunktion.
- Wenn eine Funktion den Rayleigh-Quotient minimiert, dann hat sie ein konstantes Argument; sie kann also reell und grösser als Null (in G) angenommen werden.
- $\mathfrak{D}(|f|) \leq \mathfrak{D}(f)$ und $\mathfrak{D}(|f|) = \mathfrak{D}(f)$ wenn das Argument f konstant ist (ohne Beweis). Also ist $R(|f|) \leq R(f)$. Folglich hat die Minimalfunktion ein konstantes Argument.
- Man kann zeigen, dass eine Eigenfunktion u welche überall positiv (oder negativ) und reell ist, die erste Eigenfunktion ist und die $R[f]$ minimiert. Also gilt

$$R[u] = \text{minimal} \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ Eigenfunktion} \\ u \text{ ist reell und } > 0 \text{ (oder das Argument ist konstant)} \end{cases}$$

5.6 Störungsrechnung

Betrachten wir den Fall von mehrfachen Eigenwerten, in \mathfrak{R} , mit $Au = \lambda^{(0)}u$, wobei A der **ungestörte (Hermite'sche) Operator** ist.

Voraussetzung: Wir kennen alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von A .

$$\lambda^{(0)} \text{ mit Eigenraum: } R_{\lambda^{(0)}}; \quad \dim R_{\lambda^{(0)}} > 1.$$

Sei B ein weiterer Hermite'scher Operator. Dann können wir ein neues Problem mit einem **gestörten Operator** $A + \epsilon B$ formulieren. ϵ sei klein und reell.

$$\Rightarrow (A + \epsilon B)\tilde{u} = \lambda^{(\epsilon)}\tilde{u}$$

Gesucht ist nun die Näherung für die $\lambda^{(\epsilon)}$ und die zugehörigen Eigenfunktionen.

Physikalische Beispiele sind

- Zeeman-Effekt (schwaches Magnetfeld)
- Stark-Effekt (schwaches elektrisches Feld)
- Feinstrukturen (Korrekturen bei Spin und Relativität)

Wesentlich: im Allgemeinen werden entartete Eigenwerte durch die Störungen in mehrere Niveaus aufgespalten. Sei $\lambda^{(0)}$ ein Eigenwert von A mit der Vielfachheit n ($n = \dim R_{\lambda^{(0)}}$). Wähle:

$$R_{\lambda^{(0)}}^\mu = L(f_1, \dots, f_n)$$

Hier sei f_i orthonormiert und Eigenfunktion von A zum Eigenvektor $\lambda^{(0)}$, d.h. also $Af_i = \lambda^{(0)}f_i$.

Induzierte Matrix in $R_{\lambda^{(0)}}^\mu$:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= ((A + \epsilon B)f_i, f_j) = \underbrace{(Af_i, f_j)}_{\lambda^{(0)}\delta_{ij}} + \epsilon(Bf_i, f_j) \\ &= \lambda^{(0)}\delta_{ij} + \epsilon \underbrace{(Bf_i, f_j)}_{b_{ij}} \end{aligned}$$

Diagonalisiere die Matrix a_{ij} , d.h. da $a_{ij} = \lambda^{(0)}\mathbb{1}_{ij} + \epsilon b_{ij}$, wird auch die Matrix b_{ij} diagonalisiert $\rightarrow b_i\delta_{ij}$ und somit

$$\lambda_i^{(\epsilon)} = \lambda^{(0)} + \epsilon b_i\delta_{ij}. \quad (5.9)$$

Also gibt es n Eigenwerte, welche die obere Schranke nur für den tiefsten Eigenwert angeben, ansonsten benützt man Näherungswerte. Man erhält dann auch die Eigenfunktionen als Linearkombinationen von $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij}f_i = \phi_j$, welche die Matrix b_{ij} diagonalisieren. α_i sei so gewählt, dass $(\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}$. Für $\epsilon \rightarrow 0$ geht $\lambda_i^{(\epsilon)} \rightarrow \lambda^0$, die Eigenfunktion sei gegeben, jedoch nicht notwendigerweise nach f_i (jedoch ist die Basis in $R_{\lambda^{(0)}}^m$ frei wählbar, also nicht eindeutig).

Ein Spezialfall eines einfachen Eigenwertes $\lambda^{(0)}$ von A (d.h. $u = 1$) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Au &= \lambda^{(0)}u \quad \text{Störung } \epsilon B \\ \lambda_1^{(\epsilon)} &\leq \frac{((A + \epsilon B)u, u)}{(u, u)} = \lambda^{(0)} + \epsilon(Bu, u) \\ &\quad ((u, u) = 1 \quad \text{Normiert}) \end{aligned}$$

\Rightarrow obere Schranke für A_1^ϵ .

6 Kugelfunktionen

Betrachte die Kugelkoordinaten:

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi \\ z = r \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Trennung der Variablen in Kugelkoordinaten im Raum (**Produktansatz**):

$$u(r, \theta, \phi) = f(r)Y(\theta, \phi)$$

6.0.1 Laplace-Gleichung

Wir suchen im Folgenden Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ mittels dem obigen Produktansatz:

$$\begin{aligned} 0 = \Delta u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}}_{= \frac{1}{r^2} \underbrace{\Lambda(u)}_{=\Delta_{S^2}} \text{ (Sphärischer Teil)}} \\ &= Y(\theta, \phi) \frac{1}{r^2} (r^2 f')' + \frac{f(r)}{r^2} \Lambda(Y) = 0 \\ \Lambda &:= \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

Δ ist ein linearer Differentialoperator und somit erhalten wir

$$\frac{(r^2 f')'}{f} = \frac{-\Lambda(Y)}{Y} = \text{Konstante} = \mu.$$

Die **Radiale Gleichung** lautet nun

$$(r^2 f')' - \mu f = 0 + \text{Randbedingung},$$

und die **Sphärische Gleichung**

$$\Lambda(Y(\theta, \phi)) + \mu Y(\theta, \phi) = 0,$$

mit den Bedingungen:

$$\begin{cases} \text{Periodizität in } \phi : Y(\theta, \phi + 2\pi) = Y(\theta, \phi) \\ \text{Regularität in } \theta = 0 \text{ und } \theta = \pi. \end{cases}$$

Spärisches Eigenwert-Problem: für welche μ existiert eine Lösung ungleich Null? Die Eigenfunktionen heissen **Kugelfunktionen**.

6.0.2 Schrödingergleichung

Wir betrachten die Schrödingergleichung gegeben als

$$\Delta u + (\lambda - \omega)u = 0. \quad (6.1)$$

Falls $\omega = \omega(r)$, also unabhängig von θ, ϕ (z.B. das Coulombpotential), dann ergibt eine Trennung der Variablen $u(r, \theta, \phi) = f(r)Y(\theta, \phi)$:

$$\frac{(r^2 f')'}{f} + r^2(\lambda - \omega(r)) = \frac{-\Lambda[Y(\theta, \phi)]}{Y(\theta, \phi)} = \mu = \text{konstant} \quad (6.2)$$

Die radiale Gleichung ist $(r^2 f')' + r^2(\lambda - \omega(r))f - \mu f = 0$ mit Randbedingungen. λ ist ein physikalischer Eigenwert: das Energie-Niveau. μ ist ein Separationseigenwert. Die sphärische Gleichung ist wie oben, woraus folgt, dass das sphärische Problem genau dasselbe ist.

Um Lösungen des Eigenwertproblems $\Lambda(Y(\theta, \phi)) + \mu Y(\theta, \phi)$ zu finden, separieren wir nochmals die Variablen nach Eigenfunktionen der Form $Y(\theta, \phi) = P(\cos\theta)V(\phi)$. Es ist zweckmässig die Variable $x = \cos\theta \in [-1, 1]$ einzuführen. Da $\frac{\partial}{\partial\theta} = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x}$ gilt, lässt sich das Eigenwertproblem wie folgt umschreiben:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P(x) \right] V(\phi) + \frac{1}{1-x^2} P(x) \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2} = -\mu P(x) V(\phi)$$

Wird diese Gleichung mit $\frac{(1-x^2)}{PV}$ multipliziert, sind die Variablen separierbar. Man setze

$$\frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2} \cdot \frac{1}{V(\phi)} = -m^2 \quad (m \text{ konstant}),$$

dann erfüllt V die Gleichung $V'' + m^2 V = 0$ ($' = \frac{\partial}{\partial\phi}$) und P die **Legendre-Differentialgleichung**

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P(x) \right] + \left(\mu - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P(x) = 0.$$

Die Lösung der Differentialgleichung für V sind Linearkombinationen von $V(\phi) = e^{\pm im\phi}$ für $m \neq 0$ und $V(\phi) = 1$ für $m = 0$ (oder auch $V(\phi) = \phi$). Da $Y(\theta, \phi)$ stetig auf S^2 sein sollte, muss m eine ganze Zahl sein und die Lösung $V(\phi) = \phi$ ist somit ausgeschlossen (Periodizitätsbedingung $V(\phi + 2\pi) = V(\phi)$). Für $m = 0$ hängen die Lösungen nicht von ϕ ab d.h. $Y(\theta, \phi) = P(\cos\theta)$ und erfüllt die DGL

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P(x) \right] + \mu P(x) = 0.$$

Betrachte nun den Differentialoperator $L := \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} \right]$. L ist ein Hermite'scher

Operator mit $(u, v) = \int_{-1}^1 u \bar{v} dx$:

$$\begin{aligned}
 (Lu, v) &= \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{du}{dx} \right] \bar{v} dx \\
 &= - \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{du}{dx} \frac{d\bar{v}}{dx} dx + \underbrace{(1-x^2) \frac{du}{dx} \bar{v} \Big|_{-1}^1}_{=0} \\
 &= \int_{-1}^1 u \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\bar{v}}{dx} \right] dx - \underbrace{u(1-x^2) \frac{d\bar{v}}{dx} \Big|_{-1}^1}_{=0} \\
 &= (u, Lv)
 \end{aligned}$$

Die Randbedingungen verschwinden jeweils; (Regularität in $\theta = 0, \pi; x = \pm 1$) Da L Hermite'sch ist, folgt dass die Eigenwerte μ reell sind. Die **Legendre-Polynome** P_l sind Eigenvektoren von L zu den Eigenwerten $\mu_l = l(l+1)$ $l = 0, 1, \dots$

1. Radiale Gleichung

$$\begin{aligned}
 (r^2 f')' - \mu f &= 0 \\
 \text{Ansatz: } f &\propto r^\alpha \\
 \Rightarrow \alpha(\alpha+1)r^\alpha - \mu r^\alpha &= 0 \\
 \Rightarrow \forall r \text{ also } \alpha(\alpha+1) &= \mu
 \end{aligned}$$

Bemerkung 6.1. Falls weitere Terme (z.B Schrödingergleichung) vorkommen:

$$r^2(\lambda - \underbrace{\omega(v)}_{\frac{e^2}{r}})f \rightarrow \lambda r^{\alpha+2} - e^2 r^{\alpha+1} \quad (6.3)$$

Das ändert nichts, da obiges für jede Ordnung gelten muss.

Die Regularität für $V \rightarrow 0$ erfordert $\alpha \geq 0$.

2. Für $\alpha = l$, d.h $\mu = l(l+1)$ $l = 0, 1, \dots$:

Falls μ auch anderer Werte annähme, würden alle Lösungen der Legendre-DGL an mindestens einem der singulären Punkte $x = \pm 1$ divergieren. Das ist aber wegen der Regularitätsbedingung ausgeschlossen, folglich ist $l = 0, 1, \dots$

1 und 2 erklären also, weshalb $\mu = l(l+1)$ mit $l = 0, 1, \dots$. Mit diesen Werten erfüllen sie die **Legendre-Differentialgleichung**

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} \right] P_l(x) + l(l+1)P_l(x) = 0$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \quad l = 0, 1, \dots$$

P_l ist ein Polynom l -ten Grades.

$$P_l(1) = 1 \quad \forall l$$

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{(2l+1)} \delta_{ll'}$$

Die orthonormierten Polynome $\sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x)$ bilden also eine Basis von $L^2([-1, 1])$ und

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \dots$$

Wir ersetzen nun $x = \cos \theta$. Die Metrik sei gegeben durch

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} f(\cos \theta) \overline{g(\cos \theta)} \sin \theta d\theta.$$

Im allgemeinen ist $f(x) = f(\cos \theta) \equiv f(\theta)$, wobei $0 \leq \theta \leq \pi$ und es gilt dass

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(\cos \theta) \sqrt{\frac{2l+1}{2}},$$

$$a_l = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} f(\theta) P_l(\theta) \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sin \theta d\theta.$$

Die **assozierten Legendre-Funktionen** sind durch die Rodrigues-Formel gegeben:

$$P_{l,m}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

$$= \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

Sie sind für $m = 0, 1, \dots, l$ definiert (für $m > l$ verschwindet dieser Ausdruck). Die assoziierten Legendre-Funktionen $P_{l,m}$ erfüllen die Legendre-DGL

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_{l,m} \right] + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right) P_{l,m} = 0 \quad (6.4)$$

Beweis. Differenziert man obige DGL m -mal,

$$\frac{d^m}{dx^m} \left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_l(x) - 2x \frac{d}{dx} P_l(x) + l(l+1) P_l(x) = 0 \right],$$

so sieht man, dass das Polynom

$$R_{l,m}(x) = \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

vom Grad $l-m$ die Differentialgleichung

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} R_{l,m}(x) - 2(m+1)x \frac{d}{dx} R_{l,m}(x) + (l(l+1) - m(m+1)) R_{l,m}(x) = 0$$

erfüllt. Daraus folgt nach einer einfachen Rechnung, dass

$$P_{l,m}(x) = (1-x^2)^{m/2} R_{l,m}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

die Legendre-DGL (6.4) erfüllt. □

Für alle $m = 0, 1, 2, \dots; m \leq l, l' \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\int_{-1}^1 P_{l,m}(x) P_{l',m}(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{(2l+1)} \delta_{l,l'}$$

(Ohne Beweis). Die Funktionen $P_{l,m}(\cos \theta) e^{\pm im\phi}$ mit $l = 0, 1, \dots; m = 0, 1, 2, \dots$ seien also Eigenfunktionen von Δ zum Eigenwert $l(l+1)$. Wir normieren sie so, dass sie bezüglich des Skalarproduktes

$$(f, g) = \int_{S^2} f \bar{g} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) \overline{g(\theta, \phi)} \sin \theta d\theta d\phi$$

orthonormiert sind. Wir setzen für $m = 0, \dots, l$

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{l,m}(\cos \theta) e^{im\phi},$$

wobei $P_{l,m}(x)$ die assoziierte Legendre-Funktionen sind. Der Faktor $(-1)^m$ ist Konvention. Die Eigenfunktionen mit dem negativen Vorzeichen im Exponenten werden bis auf die Normierung als $Y_{l,-m}$ mit $m = 1, \dots, l$ definiert:

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{l,m}(\cos \theta) e^{-im\phi}$$

Mit dieser Konvention gilt $\overline{Y_{l,m}(\theta, \phi)} = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta, \phi)$ für alle $m \in \{-l, \dots, 0, \dots, l\}$.

Die Orthogonalitätsrelation ist

$$\int_{S^2} Y_{l,m}(\theta, \phi) \overline{Y_{l',m'}(\theta, \phi)} \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}. \quad (6.5)$$

Die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}$, mit $l = 0, 1, \dots$ und $m = -l, -l+1, \dots, l$ bilden eine orthonormierte Basis des Hilbertraums $L^2(S^2)$, bestehend aus Eigenvektoren (Eigenfunktionen) von Δ .

Beispiel 6.1.

$$\begin{aligned} Y_{0,0} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ Y_{1,-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x - iy}{r} \\ Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} \\ Y_{1,1} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x + iy}{r} \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass $r^l Y_{l,m}(\theta, \phi)$, $m = -l, \dots, l$ eine Basis des Vektorraums der Polynome ist:

$$u(x, y, z) = \sum_{a+b+c=l} \mu_{a,b,c} x^a y^b z^c,$$

mit komplexen Koeffizienten $\mu_{a,b,c}$, die die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllen. Solche Polynome heissen **homogene, harmonische Polynome vom Grad l** .

Die radiale Gleichung der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ mit $u = f(r)Y(\theta, \phi)$ ist

$$(r^2 f')' - l(l+1)f = 0.$$

Der Ansatz $f \sim r^\alpha$ ergibt

$$\alpha(\alpha+1)r^\alpha - l(l+1)r^\alpha = 0$$

und muss für alle r erfüllt sein, folglich ist

$$\alpha(\alpha+1) = l(l+1), \quad (6.6)$$

d.h. $\alpha = l$ oder $\alpha = -l-1$.

- falls regulär für $r \rightarrow 0$: r^l
- falls "regulär" für $r \rightarrow \infty$: r^{-l-1} ($\rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$)

Auch $r^{-l-1}Y_{l,m}(\theta, \phi)$ sind harmonische Funktionen. D.h. also für r in der "Nähe" des Nullpunktes:

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{l,m} r^l Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

Dagegen gilt für r in der Umgebung von ∞ :

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \tilde{c}_{l,m} r^{-l-1} Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

Die Koeffizienten sind durch die Randbedingungen festgelegt. Setzt man $r = R$ ein und verwendet, dass die Kugelfunktionen eine orthonormierte Basis bilden, so erhält man (in dem z.B. $u(R, \theta, \phi) = f(\theta, \phi)$) als Randbedingung festgelegt ist):

$$c_{l,m} = R^{-l} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \overline{Y_{l,m}(\theta, \phi)} \sin \theta d\theta d\phi$$

$$(\phi : 0 \rightarrow 2\pi, \theta : 0 \rightarrow \pi)$$

$$\text{Analog } \tilde{c}_{l,m} = R^{l+1} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \overline{Y_{l,m}(\theta, \phi)} \sin \theta d\theta d\phi$$

Anwendung: Elektrostatik im Inneren einer leeren Kugel

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{für } |x| \leq R \\ u(x) &= f(x) \quad \text{für } |x| = R \\ u(R, \theta, \phi) &= f(\theta, \phi) \quad \text{für } r \leq R. \end{aligned}$$

Die Lösung ist dann

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{l,m} r^l Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

wobei $c_{l,m} = R^{-l} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \overline{Y_{l,m}(\theta, \phi)} \sin \theta d\theta d\phi.$

(Analog für das Äussere der Kugel mit $u(R, \theta, \phi) = f(\theta, \phi)$ für $r = R$)

Betrachte die elektrische Ladung (Einheitsladung) im Punkt $x = 0, y = 0, z = 1$. Das Coulomb-Potential in A ist dann $\frac{1}{r'}$, wobei $r' = \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}$ also ist $u(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}}$ (u erfüllt $\Delta u = 0$ Poissonsgleichung).

Da das Potential nicht von ϕ abhängt, gilt

$$u(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}}.$$

Andererseits ist eine allgemeine Lösung von $\Delta u = 0$, wobei u nicht von ϕ abhängt:

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l P_l(\cos \theta) + B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)] \quad (6.7)$$

(wobei Faktoren wie 2π , $2l+1$ in A_l, B_l berücksichtigt sind). Es wird zwischen zwei Fällen unterschieden:

1. $r < 1$:

Setzte $\theta = 0$ dann ist $u(r, 0) = \frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \dots$. Andererseits ist $P_l(1) = 1$. Folglich wird durch Vergleich mit (6.7) ersichtlich, dass $A_l = 1 \forall l$ und $B_l = 0$:

$$u(r, 0) = \frac{1}{1-r} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l$$

$$\Rightarrow \text{somit ist } u(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(\cos \theta)$$

2. $r > 1$:

Man gehe analog vor:

$$\theta = 0; \quad u(r, \theta) = \frac{1}{r-1} = \frac{1}{r(1-\frac{1}{r})} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots\right)$$

Der Vergleich mit (6.7) ergibt, dass $A_l = 0, B_l = 1$, somit ist

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

Bemerkung 6.2. $\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}}$ heisst auch die **erzeugende Funktion** der Legendre-Polynome.

7 Distributionane (verallgemeinerte Funktionen)

7.1 Motivation

Das elektrostatische Potential u , das von einer Ladung ρ erzeugt wird, ist Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta u(x) = -4\pi\rho(x) \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (7.1)$$

Die totale Ladung ist $Q = \int d^3x \rho(x)$. Eine Punktladung e im Ursprung wird nach Dirac mit einer "Funktion" $\rho = e\delta(x)$ beschrieben, wobei $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^3} \delta(x) d^3x = 1$. Eine Lösung von (7.1) ist dann das Coulombpotential

$$u(x) = \frac{e}{|x|}.$$

Tatsächlich ist $\Delta \frac{e}{|x|} = 0$ für $x \neq 0$. Für alle $R(=|x|) > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \frac{e}{|x|} d^3x &= \int_{|x| \leq R} \operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \left(\frac{e}{|x|} \right) \right) d^3x \\ &= \int_{|x|=R} \operatorname{grad} \left(\frac{e}{|x|} \right) \cdot \vec{n} d\Omega(x) \\ &= - \int_{|x|=R} \sum_{i=1}^3 \frac{e \cdot x_i}{|x|^3} \cdot \frac{x_i}{|x|} d\Omega \\ &= - \frac{e}{R^2} \int_{|x|=R} d\Omega(x) \\ &= - \frac{e}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi e. \end{aligned}$$

wobei $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|x|}$ der nach aussen weisende Normalvektor der Länge 1 ist.

7.2 Grundidee

"Testfunktionen": F heisst **Testfunktion** wenn

1. $F(x)$ reell und für alle reellen x definiert;
2. $F(x)$ ist ∞ -oft differenzierbar $\forall x$;
3. $\forall n > 0 \quad F(x), F'(x), F''(x), \dots = O(|x|^{-n})$ mit $x \rightarrow \pm\infty$

Beispiel 7.1. Die Gauss'sche Fehlerfunktion $f(x) = e^{-x^2}$ ist eine Testfunktion.

Beispiel 7.2. *Die Funktion*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ist **keine** Testfunktion, da die Abklingbedingung nicht erfüllt ist.

Definition 7.1. Eine **Distribution** ist ein **lineares, stetiges Funktional**, welches für alle Testfunktionen definiert ist. Ist $F(x)$ eine Testfunktion, so ist $\langle T, F(x) \rangle$ eine reelle Zahl. T stellt dabei die Distribution dar.

$$\langle T, \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) \rangle = \alpha_1 \langle T, F_1(x) \rangle + \alpha_2 \langle T, F_2(x) \rangle \quad \text{Linearität}$$

7.3 Dirac'sche Distribution

Das Dirac'sche Mass oder die Dirac'sche Distribution ist keine Funktion im üblichen Sinn: δ oder $\delta(x)$. Sie ist definiert durch:

$$\langle \delta(x), F(x) \rangle = F(0),$$

wobei $F(x)$ eine Testfunktion ist. Man schreibt auch oft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) F(x) dx = F(0).$$

Insbesondere gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,$$

d.h. $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$. Die δ -Distribution kann angenähert werden durch Folgen von Funktionen:

$$\begin{aligned} \delta_n(x) &= \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2n} \\ n, & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0, & x > \frac{1}{2n} \end{cases} \\ \delta_n(x) &= \frac{n}{\pi} \exp(-n^2 \cdot x^2) \\ \delta_n(x) &= \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + 4^2 x^2} \\ \delta_n(x) &= \frac{\sin nx}{\pi x} = \frac{n}{\pi} \int_{-n}^n e^{ixt} dt \end{aligned}$$

Für den Limes der Folge δ_n , erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Man hat jedoch für $n = 0, 1, \dots$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1$$

Es gelten auch folgende Grenzwerte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx = f(0)$$

Also kann man auch die $\delta(x)$ auffassen als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx = f(0).$$

(kein Riemann-Integral)

7.3.1 Operationen auf Distributionen

Summe von zwei Distributionen:

Seien T_1, T_2 Distributionen und $F(x)$ eine Testfunktion

$$\langle T_1 + T_2, F(x) \rangle = \langle T_1, F(x) \rangle + \langle T_2, F(x) \rangle$$

Multiplikation einer Distribution mit einer Funktion $f(x)$:

$F(x)$: Testfunktion $\Rightarrow f(x)F(x)$ Testfunktion

$$\langle f(x)T, F(x) \rangle = \langle T, f(x)F(x) \rangle$$

Beispiel 7.3. Dirac δ : $f(x)\delta(x)$ (statt nur $\delta(x)$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) \cdot g(x) dx = f(0) \cdot g(0).$$

Achtung:

Das Produkt zweier Distributionen hat im Allgemeinen keinen Sinn: $T_1 \cdot T_2$ ist nicht definiert.

Translation einer Distribution:

$$\langle T(x-b), F(x) \rangle = \langle T(x), F(x+b) \rangle$$

zum Beispiel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-b)F(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta x F(x+b)dx = F(b)$$

wobei die Substitution der Variablen $y = x - b$, $dy = dx$ benutzt wurde.

Variablentransformation:

z.B. $\delta(ax)$ oder $\delta(g(x))$

1.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) F(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) F\left(\frac{y}{a}\right) \frac{dy}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) F\left(\frac{y}{a}\right) dy = \frac{1}{a} F(0) \end{aligned}$$

also gilt: $\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x)$

2.

$$\delta(g(x)) = \sum_{a, g(a)=0, g'(a) \neq 0} \frac{\delta(x-a)}{|g'(a)|} \quad (\text{da: } \delta(0) \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \delta(g(x)) dx &= \sum_a \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} F(x) \underbrace{\delta((x-a)g'(a))}_{\text{Taylorentwicklung}} dx \\ y &= (x-a)g'(a), \quad dy = g'(a) dx \quad dx = \frac{1}{|g'(a)|} dy \\ \Rightarrow \sum_a \frac{1}{|g'(a)|} \int \underbrace{F\left(\frac{y}{g'(a)} + a\right)}_{=F(a)} dy &= \sum_a \frac{F(a)}{|g'(a)|} \end{aligned}$$

d.h. also $\delta(g(x)) = \sum_{a, g(a)=0, g'(a) \neq 0} \frac{\delta(x-a)}{|g'(a)|}$.

Ableitung einer Distribution:

T sei eine Distribution und T' ihre Ableitung. Die Ableitung ist folgendermassen definiert:

Definition 7.2.

$$\begin{aligned} \langle T', F(x) \rangle &= - \langle T, F'(x) \rangle \\ \int_{-\infty}^{\infty} T'(x) F(x) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} T(x) F'(x) dx \\ (T'' &\rightarrow \langle T, F'' \rangle \text{ usw.}) \end{aligned}$$

Also gilt für $\delta'(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) F(x) dx = - \int_{-\inf}^{\infty} \delta(x) F'(x) dx = -F'(0)$$

Analog gilt $\delta''(x) \rightarrow F''(0)$; $\delta'''(x) \rightarrow -F'''(0)$; ...

Beispiel 7.4.

$H(x)$: Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist weder differenzierbar, noch ist sie stetig. $H(x)$ ist auch eine Distribution

$$\langle H, F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)F(x)dx = \int_0^{\infty} F(x)dx \quad \exists \text{ für alle Testfunktionen.}$$

Klassisch existiert $H'(x)$ nicht in $x = 0$. Als Distribution aufgefasst gilt

$$\langle H', F(x) \rangle = - \langle H, F'(x) \rangle \quad (7.2)$$

$$= - \int_0^{\infty} F(x)dx = -F(x)|_0^{\infty} \quad (7.3)$$

$$= F(0) \quad (\text{da } f(\infty) = 0) \quad (7.4)$$

Also ist $H'(x) = \delta(x)$. Die Ableitung einer Distribution ist also wieder eine Distribution.

Fouriertransformation der δ -Distribution:

$$\hat{\delta}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)e^{-ikx}dx = 1$$

$$\text{mit } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ und } \delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2) \dots \delta(x_n)$$

inverse Fouriertransformation:

$$\begin{aligned} \check{f}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(k)e^{-ikx}dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} 1e^{-ikx}dk = \delta(x) \end{aligned}$$

$$\text{d.h. also auch: } \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx}dx = (2\pi)^n \delta(k)$$

$$\text{Rücktransformation } \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^n \delta(k)e^{ikx}dk = 1$$

7.3.2 Delta-Distribution dargestellt durch Orthogonalreihen

Betrachte die orthonormierte Funktion $\phi_n(x)$ mit

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) dx &= \delta_{mn} \\ \delta(x-t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) \\ \text{da } a_m(t) &= \int_a^b \delta(x-t) \phi_m(x) dx = \phi_m(t)\end{aligned}$$

Es folgt “formal”

$$\delta(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t) \phi_n(x) = \delta(t-x),$$

diese Reihe ist sicher nicht konvergent. Betrachte z.B

$$\begin{aligned}F(t) &= \sum_p a_p \phi_p(t) \\ \int_a^b F(t) \delta(x-t) dt &= F(x) \\ \text{oder } \int_a^b \sum_p a_p \phi_p(t) \sum_n \phi_n(t) \phi_n(x) dt & \\ &= \int_a^b \sum_p a_p \sum_n \phi_n(x) \phi_p(t) \phi_n(t) dt \\ &= \sum_p a_p \sum_n \phi_n(x) \delta_{np} & (\text{da } \int_a^b \phi_p(t) \phi_n(t) dt = \delta_{np}) \\ &= \sum_n a_n \phi_n(x) = F(x)\end{aligned}$$

Delta-Funktion in sphärischen Koordinaten:

(Ohne Beweis) Es gilt: $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, $r = |\vec{r}|$

$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{1}{r^2} \delta(r_1 - r_2) \delta(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \delta(\phi_1 - \phi_2) \quad (7.5)$$

$$= \frac{1}{r^2} \delta(r_1 - r_2) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\theta_1, \phi_1) \overline{Y_{l,m}(\theta_2, \phi_2)} \quad (7.6)$$

(Siehe Arfken p.s 516)

8 Elliptische Differentialgleichungen, die Green'sche Funktion

Klassifikation der linearen, partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung: (Gleichungen mit konstanten Koeffizienten in x und t)

$$au_{tt} + 2bu_{xt} + cu_{xx} + gu_x + hu_t + ku = f(x, t)$$

$ac - b^2 > 0$	DGL von elliptischen Typus
$ac - b^2 = 0$	DGL von parabolischen Typus
$ac - b^2 < 0$	DGL von hyperbolischen Typus

Bei variablen Koeffizienten $a(x, t), b(x, t), \dots$, ist es möglich, dass die DGL auf einem Gebiet (im (x, t) Raum) elliptisch ist, auf einem anderen hyperbolisch oder parabolisch.

Die **Normalform** der obigen Differentialgleichungen ist gegeben durch ($a \neq 0$ und $c \neq 0$):

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{tt} + ku = f(x, t) \text{ elliptisch} \\ &\left\{ \begin{array}{l} u_{xx} - u_{tt} + ku = f(x, t) \\ \text{oder } u_{tx} + ku = \tilde{f}(x, t) \end{array} \right\} \text{ hyperbolisch} \end{aligned}$$

- Wenn $a = 0$ oder $c = 0$, so folgt $ac - b^2 \leq 0$; also ist die DGL vom hyperbolischen oder parabolischen Typus.
- Gilt $b = 0$ und $a = 0$, so ist die DGL $u_{xx} + hu_t + ku = f(x, t)$ parabolisch.

Beispiel 8.1.

- *hyperbolischer Typus: $u_{xx} - u_{tt} = 0$ - Wellengleichung*
- *elliptischer Typus: $\Delta u = 0$ - Laplace-Gleichung (Elektrostatik)*
- *parabolischer Typus: $u_t - u_{xx} = 0$ - Wärmeleitung oder Diffusionsgleichung.*

8.1 Fundamentallösungen für den Laplace-Operator

Wir betrachten die Poissongleichung mit der Dimension $n \geq 2$:

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{8.1}$$

Die Funktion $f(x)$ ist vorgegeben, und es wird eine Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gesucht, mit $u(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$. Dies ist ein inhomogenes Problem, das homogene ist $\Delta u = 0$.

Definition 8.1. Eine **Fundamentallösung** für einen Differentialoperator

$$L = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha$$

mit konstanten Koeffizienten a_α ist eine Distribution E , die die Gleichung $LE = \delta$ erfüllt.

In unserem Fall gilt $\Delta E = \delta$. Ist E eine Fundamentallösung für Δ , so ist

$$u = E * f$$

eine Lösung von (8.1). “*” ist eine Faltung, d.h.: $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)f(y)dy$ mit $(x, y \in \mathbb{R}^n)$. Also ist

$$\Delta_x u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Delta_x E(x-y)}_{\delta(x-y)} f(y) dy \quad (8.2)$$

$$= \int \delta(x-y) f(y) dy \quad (8.3)$$

$$= f(x) \quad (8.4)$$

Wir suchen nun eine Lösung von $\Delta E = \delta$. Als Ansatz wählen wir $E(x) = \Phi(|x|)$, wobei Φ für $r \neq 0$ ($r = |x|$) eine C^2 -Funktion von $r = |x|$ ist. Für $r \neq 0$ erwarten wir, dass $\Delta \Phi = 0$, also

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi(r) + \frac{u-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Phi = 0.$$

Eine Lösung ist

$$\Phi(x) = \begin{cases} c_n r^{-n+2} & n > 2 \\ c_2 \ln r & n = 2 \end{cases} \quad (8.5)$$

Die Konstanten c_n sind noch zu bestimmen. Dazu brauchen wir noch die **Green'sche Identität**.

Lemma 8.1. Sei D ein beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^n mit glattem Rand ∂D und nach aussen weisenden Einheitsvektoren $n(x)$, $x \in \partial D$. Für alle $u, v \in C^2(D \cup \partial D)$ gilt dann

$$\int_D (\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v) dx = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial v} v - u \frac{\partial v}{\partial u} \right) d\Omega(x),$$

wobei $\frac{\partial}{\partial u} = \sum_{i=1}^n n_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ die Ableitung in normaler Richtung bezeichnet, und $d\Omega(x)$ das Oberflächenmass auf ∂D ist.

Beweis. Nach dem Gauss'schen Divergenzatz gilt:

$$\int_D \Delta u \, dx = \int_{\partial D} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial u}}_{=\nabla u \cdot n} \, d\Omega$$

Damit haben wir, dass

$$\begin{aligned} & \int_D (\Delta uv - u \Delta v) \, dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_D \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \, dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\partial D} n_i(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \, d\Omega. \end{aligned}$$

□

Betrachte die Testfunktion $\phi(x)$ auf $\mathbb{R}^n = D$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(|x|) \Delta \phi \, dx & \stackrel{\text{Green'sche Identität}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Delta \Phi}_{=\delta} \phi \, dx + \int_{\partial D} \left(\Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \, d\Omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta \phi \, dx = \phi(0), \end{aligned}$$

wobei gilt, dass $\partial D = \partial \mathbb{R}^n$; aber für $|x| \rightarrow \infty$ verschwindet die Funktion Φ und die Testfunktion ϕ wie auch deren Ableitungen. Folglich ist das Oberflächenintegral Null. Andererseits kann man $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(|x|) \Delta \phi \, dx$ auch folgendermassen schreiben:

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\epsilon < |x| < R} \Phi(|x|) \Delta \phi \, dx \quad (8.6)$$

Das Gebiet D sei wie folgt gegeben:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \epsilon < |x| < R\}, u_i = \pm \frac{x_i}{|x|} \quad (8.7)$$

Betrachte nun $\Delta \Phi = 0$, auf D definiert. Wir wenden wiederum die Green'sche Identität auf (8.6) an. Der erste Term verschwindet, da $\Delta \phi = 0$ ist auf D . Somit haben wir für die Gleichung (8.6):

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\epsilon < |x| < R} \Phi(|x|) \Delta \phi \, dx$$

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\partial D} \left(\Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) d\Omega(x).$$

Der Limes für $R \rightarrow \infty$ kann ausgeführt werden (wie oben). Da $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ und ϕ für $|x| \rightarrow 0$ (und ϕ ist Testfunktion) schneller als jedes Polynom gegen Null streben, bekommen wir einen Beitrag von der Komponente $\{|x| = R\}$ von ∂D . Also ist (8.6) nun

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\epsilon < |x| < R} \Phi(|x|) \Delta \phi \, dx$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|x|=\epsilon} \Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Omega - \int_{|x|=\epsilon} \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Omega \right). \quad (8.8)$$

Bemerkung 8.1. Die Oberfläche der $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre vom Radius ϵ ist gegeben durch

$$\int_{|x|=\epsilon} d\Omega = \epsilon^{n-1} S^{n-1}.$$

Für den ersten Term aus (8.8) gilt durch Abschätzung

$$\left| \int_{|x|=\epsilon} \Phi(x) \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Omega \right| = \left| \Phi(\epsilon) \int_{|x|=\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Omega \right| \leq |\Phi(\epsilon)| \|\phi\|_{0,1} \cdot \text{konst} \cdot \epsilon^{n-1}$$

$$\|\phi\|_{0,1} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_i \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \cdot \underbrace{\frac{x_i}{|x|}}_{\rightarrow 1}$$

$$\psi(\epsilon) = c_n \epsilon^{-u+2} \text{ oder } c_2 \ln \epsilon$$

$$\text{Also} = \begin{cases} \text{konst} \|\phi\|_{0,1} \cdot c_1 \cdot \epsilon & \text{für } n > 2 \\ \text{konst} \|\phi\|_{0,1} \cdot c_2 \cdot \epsilon \ln \epsilon & \text{für } n = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \rightarrow 0$$

Der erste Term liefert also keinen Beitrag. Für den zweiten Term gilt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi(|x|)}{\partial n} &= \underbrace{-}_{\text{nach innen gerichtet}} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|} \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(|x|)}^{\Phi' \frac{\partial |x|}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial |x|} \frac{x_i}{|x|}} = -\Phi'(|x|) \underbrace{\sum_i \frac{x_i^2}{|x|^2}}_{=1} \\
 \Rightarrow -\Phi'(|x|) &= \begin{cases} -c_1(2-n)|x|^{-n+1} & n > 2 \\ -c_2 \frac{1}{|x|} & n = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{|x|=\epsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \phi \, d\Omega(x) \right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi'(\epsilon) \underbrace{\int_{|x|=\epsilon} \phi \, d\Omega(x)}_{\phi(\epsilon) = \phi(0) + \epsilon \dot{\phi}(0) + \dots \text{ Taylor}} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi'(\epsilon) \int_{|x|=\epsilon} (\phi(0) + \mathcal{O}(\epsilon)) \, d\Omega \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi'(\epsilon) |S^{n-1}| \epsilon^{n-1} (\phi(0) + \mathcal{O}(\epsilon)) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{cases} c_n(2-n)S^{n-1}\phi(0) + \mathcal{O}(\epsilon) \\ c_2 S^1 \phi(0) + \mathcal{O}(\epsilon) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} c_n(2-n)S^{n-1}\phi(0) & n < 2 \\ c_2 S^1 \phi(0) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Andererseits sollte das Integral den Wert $\phi(0)$ liefern, d.h also

$$c_n(2-n)S^{n-1} = 1 \quad \text{resp.} \quad c_2 S^1 = 1 \quad (8.9)$$

Mit $S^{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ erhält man demzufolge für die Fundamentallösung des n -dimensionalen Laplace-Operators (sie erfüllt die Gleichung $\Delta E = \delta$):

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{n/2(2-n)}} |x|^{-n+2} & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x| & n = 2 \end{cases}$$

Beispiel 8.2.

$$\begin{aligned} n = 3: E(x) &= -\frac{1}{4\pi|x|} \quad (\text{“Elektrische Ladung”}) \\ n = 4: E(x) &= -\frac{1}{4\pi^2|x|^2}. \end{aligned}$$

8.2 Fundamentallösung und Fouriertransformationen

Sei $L = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha$ ein Differentialoperator der Ordnung N mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Da die konstante Funktion 1 (als Distribution aufgefasst) die Fouriertransformation der Dirac- δ -Distribution ist, können wir die Gleichung $LE = \delta$ für Fundamentallösungen als eine algebraische Gleichung für die Fouriertransformierte \hat{E} umschreiben:

$$P(k)\hat{E}(k) = 1 \quad (8.10)$$

wobei $P(k) = \sum_\alpha a_\alpha (ik)^\alpha$ ein Polynom in k_1, \dots, k_n ist. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} \int e^{-ikx} \Delta E dx &\stackrel{\substack{\text{P.I.} \\ \text{Randterme verschwinden}}}{=} \int E \Delta e^{-ikx} dx \\ -k^2 \int E e^{-ikx} dx &= -k^2 \hat{E} = \int \delta e^{-ikx} dx = 1 \\ &\Rightarrow -k^2 \hat{E} = 1 \end{aligned}$$

im Fourierraum. Die Gleichung (8.10) muss im Sinne der Distributionen verstanden werden. Hat $P(k)$ keine reelle Nullstelle, so definiert $\frac{1}{P(k)}$ eine Distribution und wir haben eine Lösung

$$\hat{E}(k) = \frac{1}{P(k)} \quad \text{oder} \quad E = \left(\frac{1}{P(k)} \right)^v.$$

(Allgemeiner definiert diese Formel eine Fundamentallösung wenn $\frac{1}{P(k)}$ nur integrierbare Singularitäten hat).

Beispiel 8.3. Sei $n = 1$ und $L = -\frac{d^2}{dx^2} + \mu^2$, $\mu > 0$. Dann ist $P(k) = k^2 + \mu^2$, und $E = \left(\frac{1}{k^2 + \mu^2} \right)$

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k^2 + \mu^2} e^{ikx} dk = \frac{1}{s\mu} e^{-\mu|x|} \quad (8.11)$$

Beispiel 8.4. Coulombpotential

Sei $n = 3$ und $L = -\Delta$, dann ist $P(k) = |k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. Die Singularität von $\frac{1}{P(k)} = |k|^{-2}$ bei $k = 0$ ist integrierbar in 3 (oder mehr) Dimensionen. Allerdings ist $\frac{1}{|k|^2}$

nicht genügend rasch abfallend für $k \rightarrow \infty$, so dass das Integral (Rücktransformation) konvergiert. Die inverse Fouriertransformation muss also als Distribution ausgerechnet werden. Mit dem Trick des Konvergenz-erzeugenden Faktors kann aber die Rechnung auf Fouriertransformationen von Funktionen zurückgeführt werden; d.h.

$$E = \frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|k|^2} e^{-\epsilon|k|} e^{ikx} \underbrace{dk}_{\sim k^2 dk d\Omega}.$$

Falls also $\epsilon = 0$, so konvergiert E nicht. Solange $\epsilon > 0$ ist, kann die Reihenfolge der Integration vertauscht werden, und wir bekommen

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|k|^2} e^{-\epsilon|k|+ikx} dk \quad (8.12)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{|k|^2} e^{-\epsilon k + ik|x|\cos\theta} \cdot k^2 dk \sin\theta d\theta d\phi \quad (8.13)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot (2\pi) \int_0^\infty e^{-\epsilon k} \frac{2 \sin(k|x|)}{k|x|} dk \quad (8.14)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \cdot \int_0^\infty e^{-\epsilon k} \frac{\sin(k|x|)}{k|x|} dk \quad (8.15)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2|x|} \cdot \int_0^\infty e^{-\epsilon \frac{k}{|x|}} \frac{\sin(k)}{k} dk \quad (8.16)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2|x|} \left(\frac{\pi}{2} - \underbrace{\arctan \frac{\epsilon}{|x|}}_{\rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \rightarrow 0} \right) \quad (8.17)$$

$$= \frac{1}{4\pi|x|}. \quad (8.18)$$

Wir bekommen also das vorhergehende Resultat.

8.3 Dirichletproblem, harmonische Funktionen

Die Laplace-Gleichung für die Funktion $u \in C^2(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ lautet:

$$\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in D.$$

Die Lösungen einer solchen Laplace-Gleichung heissen **harmonische Funktionen**. Sei D ein beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^n mit glattem Rand ∂D . Ein typisches Randwertproblem ist dann das **Dirichletproblem**

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0, \quad x \in D \\ u(x) &= \tilde{f}(x), \quad x \in \partial D,\end{aligned}\tag{8.19}$$

sowie das **Neumannproblem**

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0, \quad x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} &= \tilde{g}(x), \quad x \in \partial D\end{aligned}\tag{8.20}$$

($\frac{\partial}{\partial n}$ ist die Normalenableitung).

Die Funktionen \tilde{f} und \tilde{g} sind vorgegebene Randbedingungen. Gesucht wird ein $u \in C^2(D)$, welches (8.19) oder (8.20) erfüllt (es kann auch eine Mischung von (8.19) und (8.20) erfüllen). In der Elektrostatik erfüllt das elektrostatische Potential in einem neutralen Medium die Laplace-Gleichung. Die Randbedingung (8.19) treten auf, wenn der Wert des Potentials am Rand vorgeschrieben ist. Falls hingegen die Ladungsdichte auf der Oberfläche gegeben ist, handelt es sich um das Randwertproblem (8.20). Wir beweisen zuerst einen Eindeutigkeitssatz:

Satz 8.1. *Seien u_1, u_2 zwei Lösungen von (8.19). Dann ist $u_1 = u_2$. Seien u_1, u_2 zwei Lösungen von (8.20). Dann ist $u_1 = u_2 + \text{konst}$*

Beweis. Sei $u = u_1 - u_2$. Dann ist $\Delta u = 0$ und $u = 0$ (bzw. $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0$) für $x \in \partial D$. Nach dem Gauss'schen Divergenzatz gilt:

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_D \sum_i (u_{x_i})^2 dx = \int_D \left[\sum_i (u u_{x_i})_{x_i} - u \Delta u \right] dx \\ &= \int_{\partial D} \sum_i u(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} d\Omega(x) = 0 \quad (\text{Randbedingung für } u)\end{aligned}$$

(Bei der zweiten Gleichung wurde die Green'sche Identität verwendet.)

Daraus folgt also $u_{x_i} = 0 \rightarrow u = \text{konst}$. Für (8.19) gilt jedoch, dass $u = 0$, für (8.20) bekommen wir $u = \text{konst} \Rightarrow u_1 = u_2 + \text{konst}$. \square

8.3.1 Green'sche Funktionen

Wir haben gesehen, dass die Fundamentallösung von $\Delta E = \delta$ gegeben ist durch

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n(2-n)} |x|^{2-n} & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x| & n = 2 \end{cases}$$

wobei $\omega_n = |\delta^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$. Es gilt nun

$$\int E(x-y)\Delta u(y)dy = u(x),$$

$$\Delta_x u(x) = \int \underbrace{\Delta_x E(x-y)}_{=\delta(x-y)} \Delta_y u(y)dy = \Delta_x u(x),$$

falls $D = \mathbb{R}^n$. Wir betrachten jetzt aber ein Gebiet $D \neq \mathbb{R}^n$, d.h also

$$\int_D E(x-y)\Delta u(y)dy$$

(Vorherige Notation: $E \rightarrow \Phi(|x|)$ u.s.w.) mit $u \in C^2(D \cup \partial D)$. Wir hatten den Randterm für $R \rightarrow \infty$ nicht berücksichtigen müssen, da er verschwindet, falls wir jedoch annehmen, dass D beschränkt ist, so ergibt der Randterm auf ∂D einen Beitrag. Ansonsten ist die Rechnung exakt die gleiche. Also für $u \in C^2(D \cup \partial D)$ beliebig (woraus folgt dass $\Delta u = 0$ nicht sein muss) ist nun

$$\int_D E(x-y)\Delta u(y)dy = u(x) + \int_{\partial D} \left[E(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} u(y) \right] d\Omega(y).$$

Für $D = \mathbb{R}^n$ verschwindet der Randterm.

$$\Rightarrow u(x) = \int_D E(x-y)\Delta u(y)dy - \int_{\partial D} \left[E(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} u(y) \right] d\Omega(y).$$

Definition 8.2. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand. Die stetige Funktion $G(x, y)$ auf $\{(x, y) \in \overline{D} \times D \mid x \neq y\}$ (wobei $\overline{D} = D \cup \partial D$ ist) heisst **Green'sche Funktion** des Gebietes D , falls

1. $G(x, y) = E(x-y) + v(x, y)$, mit $v \in C^2(\overline{D} \times D)$ und $\Delta_x v = 0$
2. $G(x, y) = 0 \quad x \in \partial D, y \in D$

Insbesondere ist für $x = y$: $\Delta_x G(x, y) = 0$.

Bemerkung 8.2. Die Green'sche Funktion liefert eine Lösung des inhomogenen Problems

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D,$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial D,$$

mit vorgegebenem f und kompaktem Träger in D . Es gilt nämlich für

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_D G(x, y) f(y) dy \\ \Delta_x u(x) &= \Delta_x \int E(x - y) f(y) dy + \int \underbrace{\Delta_x v(x, y) f(y)}_{=0} dy \\ &= f(x) + 0 \end{aligned}$$

Weiterhin bekommt man aus $G(x, y) = 0$, $x \in \partial D$, $u(x) = 0$, $x \in \partial D$ (aus $u(x) = \int_D G(x, y) f(y) dy$).

Bemerkung 8.3. Die Green'sche Funktion ist eindeutig. Die Differenz zweier Green'schen Funktionen auf D ist nämlich, als Funktion des ersten Arguments x , eine Lösung des Dirichlet Problems (8.19) mit der Randbedingung 0. Also ist die Differenz nach Satz 8.1 identisch Null. ($\Delta u = 0$ und $u = 0$ auf $\partial D \Rightarrow u = 0$, Lösung und Eindeutigkeit).

Gesucht: Die Lösung von $\Delta u(x) = f(x)$, $x \in D$ mit $u(x) = g(x)$, $x \in \partial D$. $G(x, y)$ sei nun die Green'sche Funktion, so dass $\Delta G = \delta$, $G = E + v(x, y)$ mit $\Delta v = 0$. Es gilt also

$$u(x) = \int_D E(x - y) \underbrace{\Delta u(y)}_{=f} dy + \int_{\partial D} \left(-E \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial E}{\partial n} u(y) \right) d\Omega(y). \quad (8.21)$$

Andererseits ergibt die Benutzung der Green'schen Identität

$$\begin{aligned} \int_D \left[\underbrace{(\Delta u) v}_{=f} - u \underbrace{\Delta v}_{=0} \right] dy &= \int_{\partial D} \left[v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right] d\Omega(y) \\ \Rightarrow \int_D f v dy &= \int_{\partial D} \left[v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right] d\Omega(y) \end{aligned} \quad (8.22)$$

oder

$$0 = \int_D f v dy - \int_{\partial D} \left[v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right] d\Omega(y).$$

Addiert man diesen Ausdruck zur rechten Seite von (8.21), so erhält man die allgemeine, gesucht Lösung:

$$u(x) = \int_D (y) G(x, y) dy + \int_{\partial D} g(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial u_y} d\Omega(y). \quad (8.23)$$

Spezialfälle:

1. $f = 0$ \Rightarrow Problem der Art (8.1):

$$\Rightarrow u = \int_{\partial D} g(y) \frac{\partial G}{\partial u_y} d\Omega(y)$$

2. $g = 0$ (d.h. $u = 0$ auf dem Rand)

$$\Rightarrow u = \int_D f(y)G(x, y)dy$$

Insbesondere ist für $D = \mathfrak{R}^n$ $u \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$, es gibt also keine Randterme. Weiter gilt $G(x, y) = E(x - y)$, d.h. $v(x, y) = 0$ ($\Delta v(x, y) = 0$ mit $v \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty \Rightarrow v = 0$ aus Eindeutigkeit).

8.4 Methode der Spiegelbildladung

Die Green'sche Funktion der Kugel wird durch die Methode der "Spiegelbildladung" konstruiert. Sei

$$D = B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}.$$

Ausserdem sei für $y \in D$:

$$y^* = \frac{R^2}{|y|^2}y.$$

Gesucht ist $G(x, y) = E(x - y) + v(x, y)$ mit $\Delta_x v(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$ für $x \in \partial D$ (Kugeloberfläche) und $y \in D = B_R(0)$.

Wir müssen also die Funktion $v(x, y)$ bestimmen. Betrachte folgendes Beispiel der Elektrostatik:

Beispiel 8.5. *Die Ladung (+1) wird in y gesetzt. Wo muss eine zweite Ladung (−1) gesetzt werden, damit das Potential auf dem Rand verschwindet?*

Die Abbildung $y \rightarrow y^*$ heisst Spiegelung auf die Sphäre vom Radius R . Man kann folgende Eigenschaften verifizieren:

$$1. \quad y^{**} = y \text{ (Rückspiegelung),}$$

$$2. \quad |y^*| = \frac{R^2}{|y|},$$

$$3. \quad |y| \cdot |x - y^*| = |x| \cdot |y - x|.$$

Beweis. von 3

$$\begin{aligned}
 |y| \cdot |x - y^*| &= |x| \cdot |y - x^*| \\
 |y| \cdot \left| x - \frac{R^2}{|y|} \underbrace{\frac{y}{|y|}}_{\vec{u}_y} \right| &= |x| \cdot \left| y - \frac{R^2}{|x|} \underbrace{\frac{x}{|x|}}_{\vec{u}_x} \right| \Rightarrow \left| \underbrace{x|y|}_{=n_x|x||y|} - R^2 n_y \right| = \left| \underbrace{y|x|}_{=n_y|y||x|} - R^2 n_x \right| \\
 \underbrace{|n_x \underbrace{|x||y|}_{=b} - \underbrace{R^2}_{=c} n_y|}_{a} &= \underbrace{|n_y \underbrace{|x||y|}_{=b} - \underbrace{R^2}_{=c} n_x|}_{a'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^2 &= \underbrace{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}_{\substack{\text{Invariant unter Permutation von} \\ b \leftrightarrow c \ (\alpha = \alpha')}} \\
 a'^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\
 &\Rightarrow a^2 = a'^2
 \end{aligned}$$

Also ist 3 bewiesen. □

Für $n \geq 3$ gilt nun:

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= E(x - y) - \left(\frac{|y|}{R} \right)^{2-n} E(x - y^*) \\
 &= \frac{1}{\omega_n(2-n)} \left(|x - y|^{2-n} - \left(\frac{|y|}{R} \right)^{2-n} |x - y^*|^{2-n} \right),
 \end{aligned}$$

wobei G die gesuchte Green'sche Funktion ist; denn $\Delta_x E(x - y^*) = 0$ für alle $x \in D$, da y^* **nicht** in D ist. $G(x, y) = 0$ für alle $x \in \partial D$. D.h. also $\forall y \in D$ gilt für $|x| = R$:

$$\begin{aligned}
 &|x - y|^{2-n} - \left(\frac{|y|}{R} \right)^{2-n} |x - y^*|^{2-n} \\
 &= |x - y|^{2-n} - \frac{1}{(R)^{2-n}} \underbrace{(|y||x - y^*|)^{2-n}}_{\text{mit } 3 \rightarrow |x| \cdot |y - x|} \\
 &= |x - y|^{2-n} - \frac{1}{(R)^{2-n}} (|x||y - x^*|) \\
 &\left(\text{benutze nun } |x| = R, \ x = |R|n_x, \ x^* = \frac{R^2}{|x|^2}x, \ x = \frac{R^2}{R^2}x = |x| \right) \\
 &= |x - y|^{2-n} - |y - x|^{2-n} = 0 \text{ für } |x| = R.
 \end{aligned}$$

Für $n = 2$ ist die Green'sche Funktion:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= E(x - y) - E(x - y^*) - \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|y|}{R} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\ln |x - y| - \ln \left(|x - y^*| \cdot \frac{|y|}{R} \right) \right]. \end{aligned}$$

Aus der Eigenschaft 3 folgt $G(x, y) = G(y, x)$. Der in (8.23) auftretende Kern (d.h. $\frac{\partial G}{\partial u_y}$) ist dann

$$H(x, y) = \frac{\partial}{\partial u_y} G(x, y) = \frac{1}{\omega_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \quad (n \leq 2).$$

8.5 Ein weiteres Beispiel der Green'schen Funktion: die belastete Saite

Es sei $f(x)$ die Belastung pro Länge auf eine Saite im Punkt x ($\frac{\text{Kraft}}{m}$ mit Einheit $\frac{N}{m}$). Die Gesamtbelastung ist dann gegeben durch das Integral $\int_0^l f(x) dx$.

Differentialgleichung: $u'' = -f(x)$

Randbedingung: $u(0) = U(l) = 0$

Das Problem ist **linear** und es durch **Superposition** gelöst werden, wenn für den Spezialfall, dass die ganze Last in einem Punkt $x = \xi$ konzentriert ist, die Lösung bekannt ist (Stossprinzip).

$$\begin{cases} -u'' = \delta_\xi = \delta(x - \xi) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u'' = 0$ für $x \neq \xi \Rightarrow$ Die Lösungen sind Geraden

$$\begin{aligned} - \int_{-\epsilon+\xi}^{\epsilon+\xi} u'' dx &= 1 \Rightarrow -u \Big|_{-\epsilon+\xi}^{\epsilon+\xi} = 1 = \frac{h}{\xi} + \frac{h}{l-\xi} \\ \Rightarrow h &= \frac{\xi(L-\xi)}{L} \end{aligned}$$

Also: $0 \leq x \leq \xi : \quad u(x) = \frac{h}{\xi}x$

$\xi \leq x \leq l : \quad u(x) = \frac{h(l-x)}{(l-\xi)}$

$\Rightarrow h = \xi \frac{L-\xi}{L} \quad (\text{Stetigkeit}),$

$$u(x) = \begin{cases} \frac{L-\xi}{L}x & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{\xi}{L}(L-x) & \xi \leq x \leq l \end{cases}$$

und $u(0) = u(L) = 0$. Dieses $u(x)$ ist die Greensch'sche Funktion $g(x, \xi)$.

Bemerkung 8.4. 1. $g(x, \xi) = g(\xi, x)$

2. $g(x, \xi) \geq 0$

Die Lösung des ursprünglichen Problems ist nun durch **Superposition** gegeben:

$$u(x) = \int_{\xi=0}^L f(\xi)g(x, \xi)d\xi$$

Beweis.

$$-u'' = \int_0^L f(\xi) \underbrace{\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right) g(x, \xi)}_{=\delta(x-\xi)} d\xi = f(x)$$

□

Die Methode der Green'sche Funktion ist also eine "allgemeine" Methode, solange das Problem linear ist und Superposition gilt.

A Literatur zur Vorlesung MMP II

- G.B. Arfken and H.j. Weber, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, Inc. 1995
- E. Stiefel, Methoden der Mathematisch Physik I und II, Verlag der Fachvereine an der ETHZ 1973
- H. Cartan, Elementare Theorien der Analytischen Funktionen einer oder mehreren Komplexen Veränderlichen, BI Hochschultaschenbücher Band 112, 1966
- S. Lang, Complex Analysis, Springer Verlag 1993
- L. V. Ahlfors, Complex Analysis 2nd ed. 1966
- J. F. Cornwell, Group Theory in Physics, Academic Press 1984
- H. Weyl, The Classical Groups, their Invariants and Representations, Princeton University Press, 1961