Теормин. Раздел 1. Ответы на вопросы.

1. **Сформулируйте определение комплексного числа.**
   Комплексным числом называется элемент $z \in R \times R$: $z = (a, b) \in R$, снабженного операциями умножения и сложения индуцированными из R.
2. **Как сложить и перемножить два комплексных числа (в представлении чисел как (a, b) и (c, d))?**
   $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$
   $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
3. **Сформулируйте и запишите ассоциативность и коммутативность сложения комплексных чисел.**
   Ассоциативность сложения:
   $\forall (z_1, z_2, z_3 \in C)\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
   Коммутативность сложения:
   $\forall (z_1, z_2 \in C)\ z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
4. **Сформулируйте и запишите ассоциативность и коммутативность умножения комплексных чисел.**
   Ассоциативность умножения:
   $\forall (z_1, z_2, z_3 \in C)\ (z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$
   Коммутативность умножения:
   $\forall (z_1, z_2 \in C)\ z_1 * z_2 = z_2 * z_1$
5. **Какой элемент множества комплексных чисел называется нулевым и почему?**
   Нулевым элементом называется такой элемент o что:
   $(\forall z \in C)\ z + o = z$.
   В множестве C нулевым элементом является (0, 0), так как:
   $(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$
6. **Какой элемент является противоположным к (a, b) на множестве комплексных чисел относительно операции сложения и почему?**
   Противоположным элементом называется такой элемент
   (-z), что: $(\forall z)\ z + (-z) = 0$
   В множестве C противоположным элементом для $z = (a, b)$ является $(-z) = (-a, -b)$, так как:
   $(a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0)$
7. **Какой элемент множества комплексных чисел называется единицей? Что будет, если комплексное число умножить на единицу?**
   Единицей называется такой элемент e что:
   $(\forall z \in C)\ z * e = z$.
   В множестве C единицей является элемент (1, 0), так как:
   $(a, b) * (1, 0) = (a * 1 - b * 0, a * 0 + b * 1) = (a - 0, 0 + b) = (a, b)$
   При умножении комплексного числа z на единицу результатом будет само комплексное число z.

8. **Сформулируйте определение обратного элемента и запишите его для комплексного числа (в представлении числа как (a, b)).**
   Обратным элементом называется такой элемент z^{-1}, что:
   $(\forall z \in C)\ z * z^{-1} = 1$
   В множестве C обратным элементом для z = (a, b) является
   $z^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$
9. **Какая форма комплексного числа называется алгебраической?**
   Алгебраической формой числа z = (a, b) называется его представление в виде: z = a + bi, где i – мнимая единица, $i^2 = -1$.
10. **Какая форма комплексного числа называется тригонометрической?**
    Тригонометрической формой числа z = (a, b) называется его представление в виде: $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\rho = |z| = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arg z$
11. **Пусть z – комплексное число. Какое число z является комплексно-сопряженным к z?**
    Комплексно-сопряженным для комплексного числа z = a + bi называется такое $\bar{z}$, что $\bar{z}$ = a – bi.
12. **Как определяется модуль |z| комплексного числа z?**
    $|z| = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$
13. **Запишите формулу Муавра.**
    $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\boldsymbol{n}} = \rho^{\boldsymbol{n}}(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$
14. **Как определяется декартово произведение множеств? (декартово произведение множества на себя, нескольких множеств)**
    Декартовым произведением двух непустых множеств A и B называется множество C элементами которого являются все возможные упорядоченные пары элементов множеств A и B:
    $C = A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.
    Декартовым произведением множества A на себя называется такое множество A^2 элементами которого являются все возможные упорядоченные пары элементов из множества A:
    $A^2 = A \times A = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$
15. **Что называется внутренним законом композиции на множестве M?**
    Внутренним законом композиции (бинарной алгебраической операцией) на множестве M называется отображение $T: M \times M \mapsto M$.
16. **Какой закон композиции называется ассоциативным?**
    Закон композиции * на множестве M называется ассоциативным если:
    $(\forall x, y, z \in M)\ x * (y * z) = (x * y) * z$
17. **Какой закон композиции называется коммутативным?**
    Закон композиции * на множестве M называется коммутативным если:
    $(\forall x, y \in M)\ x * y = y * x$

18. **Сформулируйте определение нейтрального элемента e относительно закона композиции ∗, определенного на множестве M.**
Элемент $e \in M$ называется нейтральным элементом алгебраической системы <M, *> если:
$(\forall x \in M)\ x * e = e * x = x$
19. **Сформулируйте определение поглощающего элемента θ относительно закона композиции ∗, определенного на множестве M.**
Элемент $\theta \in M$ называется нейтральным элементом алгебраической системы <M, *> если:
$(\forall x \in M)\ x * \theta = \theta * x = \theta$
20. **Сформулируйте определение обратного элемента относительно операции.**
Элемент $y \in M$ называется обратным элементу $x \in M$ в алгебраической системе <M, *> с нейтральным элементом $e \in M$ если:
$x * y = y * x = e$
21. **Что называется алгебраической структурой?**
Алгебраической структурой <M, *> называется множество M с зафиксированным на нём оператором *.
22. **Что называется внешним законом композиции?**
Внешним законом композиции элементов множества Ω, называемых множеством операторов закона, и элементов множества M называется отображение множества $\Omega \times M$ в M.
23. **Перечислите аксиомы группы.**
Алгебраическая структура <G, *> называется группой если выполнены следующие требования (аксиомы группы):
1) Ассоциативность: $(\forall x, y, z \in G)\ x * (y * z) = (x * y) * z$;
2) Существование нейтрального элемента: $\exists\, e \in G$: $\forall x \in G\ x * e = x = e * x$;
3) обратный элемент: $\forall x \in G\ \exists\, x^{-1}$: $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$;
24. **Сформулируйте определение магмы.**
Алгебраическая структура <M, *> называется магмой если на ней определен внутренний закон композиции.
25. **Какая алгебраическая структура является полугруппой?**
Алгебраическая структура <M, *> называется полугруппой если * ассоциативна.
26. **Какая алгебраическая структура является моноидом?**
Алгебраическая структура <M, *> называется моноидом если * ассоциативна и в алгебраической системе существует нейтральный элемент.
27. **Сформулируйте определение левой (правой) дистрибутивности закона относительно закона ∗.**
Закон * называется дистрибутивным слева(справа) относительно закона + если: $(\forall x, y, z \in M)\ x * (y + z) = x * y + x * z\ ((y + z) * x = x * y + x * z)$
28. **Когда закон называется двояко дистрибутивным?**
Закон * называется двояко дистрибутивным относительно закона +, если он дистрибутивен и справа и слева.

29. **Сформулируйте определение кольца R.**
Кольцом R называется множество замкнутое относительно двух согласованно заданных на нем бинарных операций (обычно обозначаемых через + и $\cdot$), удовлетворяющих следующим требованиям:
1) $\langle R, +\rangle$ - абелева группа.
2) $\langle R, \cdot\rangle$ - коммутативный моноид
3) $\cdot$ двояко дистрибутивен относительно +

30. **Какое кольцо называется кольцом вычетов?**
Кольцом вычетов по модулю $m \in Z$ называется такое кольцо $\langle Z_m, +, *\rangle$ что: $Z_m = \{0, 1,\ldots,m\text{-}1\}$ – остатки от деления на m, а операции выполняются по модулю m.

31. **Как определяется многочлен от одной переменной с коэффициентами из кольца R?**
Многочленом от одной переменной с коэффициентами из кольца R называются выражения вида:
$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, x – переменная.

32. **В каком случае многочлен p(x) делится на многочлен q(x)?**
Многочлен p(x) делится на многочлен q(x) если существует такой многочлен g(x) что: $p(x) = g(x) * q(x)$

33. **Перечислите свойства делимости многочленов.**
$\forall\ p(x), g(x), q(x) \in R[x]$
1) $p(x) \vdots g(x)$ и $g(x) \vdots q(x) \Rightarrow p(x) \vdots q(x)$
2) $p(x) \vdots q(x)$ и $g(x) \vdots q(x) \Rightarrow (\forall\ a(x), b(x) \in R[x])\ (a(x)*p(x) + b(x)*g(x)) \vdots q(x)$

34. **Когда многочлены p(x) и q(x) являются ассоциированными?**
Два многочлена p(x) и g(x) называются ассоциированными если существует $d \in R$, $d \neq 0$ такое что: $p(x) = d * g(x)$

35. **Что называется степенью многочлена?**
Степенью deg(p) многочлена $p \in R[x]$ называется максимальный номер его ненулевого коэффициента.

36. **Чему равна степень нулевого многочлена θ(t)?**
Степень нулевого многочлена $\deg(\theta) = -\infty$.

37. **Перечислите свойства степени при делении многочленов.**
1) Если $f \vdots g$, $f \neq 0$, $g \neq 0 \Rightarrow \deg(f) \geq \deg(g)$
2) Если $f \vdots g$, $\deg(f) = \deg(g) \Rightarrow f \sim g$

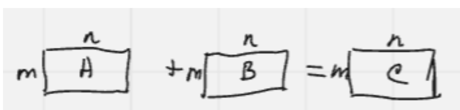
38. **Как связана степень остатка r(x) от деления полинома p(x) на полином со степенями этих полиномов?**
Степень остатка от деления полиномов меньше степени полинома делителя.

39. **Какое число называется корнем многочлена кратности n?**
Корнем многочлена $p(x) \in R[x]$ кратности m называется число $x_0 \in R$ такое, что: $p(x) \vdots (x - x_0)^m$, $p(x) \not\vdots (x - x_0)^{m+1}$

40. **Чему равен остаток от деления $p(x) \in R[x]$ на $(x - x_0)$? А если x_0 – корень $p(x)$?**
    Остаток от деления $p(x)$ на $(x - x_0)$ равен $p(x_0)$, если x_0 является корнем многочлена, то остаток от деления будет равен нулю.
41. **Какие элементы кольца называются делителями нуля?**
    Делителем нуля в кольце $\langle R, +, * \rangle$ называется всякий элемент $x \neq 0$ такой, что существует $y \in R$, $y \neq 0$: $x*y = 0$.
42. **Какое кольцо называется областью целостности?**
    Областью целостности называется коммутативное кольцо с 1, в котором отсутствуют делители нуля.
43. **Сформулируйте определение нильпотента.**
    Элемент $z \neq 0$ кольца $\langle R, +, * \rangle$ называется нильпотентом если существует $n \in N$ такое, что: $z^n = 0$.
44. **Какое кольцо является полем?**
    Полем называется ненулевое коммутативное кольцо с 1, в котором каждый ненулевой элемент обратим.
45. **Сформулируйте определение матрицы. Что называется коэффициентами матрицы?**
    Матрицей размера $m \times n$ с коэффициентами из поля К называется прямоугольная таблица вида:

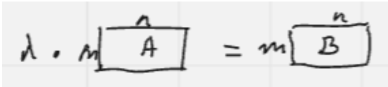
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

    a_{ij} – элементы (коэффициенты) матрицы, $a_{ij} \in K$
    i – номер строки $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$
    j – номер столбца $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$
46. **Какое множество обозначается как $Mat_K(m, n)$? Что в этой записи значат K, m, n?**
    $Mat_K(m, n)$ – множество матриц размером $m \times n$ с коэффициентами из К.
47. **Какие матрицы называются квадратными? Единичными?**
    Матрица, в которой количество строк равно количеству столбцов называется квадратной.
    Диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны 1, называется единичной.
    (Квадратная матрица называется диагональной если все ее элементы не стоящие на главной диагонали равны 0)
48. **Как определяется сложение матриц?**
    Если $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ и $C = \|c_{ij}\|$, тогда:
    $C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$



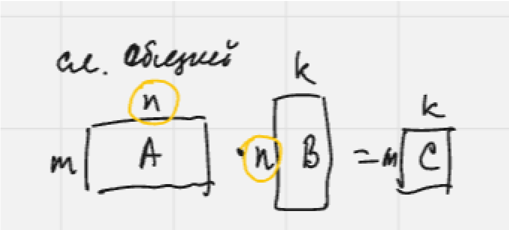
49. Как определяется умножение матрицы на число?

если $A = \|a_{ij}\|$, $\lambda \in K$ и $D = \|d_{ij}\|$, тогда
$D = \lambda \cdot A \Leftrightarrow d_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.



50. Как определяется умножение матриц? Какие матрицы можно перемножать?

пусть $A \in Mat_K(m, p)$, $B \in Mat_K(p, n)$ и $C \in Mat_K(m, n)$, тогда
$C = A \cdot B \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} + b_{kj}$



51. Какое результирующее число строк и столбцов будет при перемножении матриц $A_{n\times m}$ и $A_{m\times k}$?

$n\times k$

52. Умножение матриц коммутативно? Почему?

Умножение матриц не коммутативно, так как не для всех матриц справедливо равенство: $A \cdot B = B \cdot A$.

53. Как вводится операция транспонирования матриц?

пусть $A \in Mat_K(m, n)$,тогда $A^T \in Mat_K(n, m)$:
$A^T = \|\tilde{a}_{i,j}\|$: $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$

54. Перечислите свойства операции транспонирования.

1) Согласованность со сложением матриц: $\forall\ A, B \in Mat_K(m, n)$:
$(A + B)^T = A^T + B^T$
2) Согласованность с умножением матрицы на число:
$\forall A \in Mat_K(m, n), \forall \alpha \in K : (\alpha A)^T = \alpha A^T$
3) Согласованность с умножением матриц:
$\forall A, B \in Mat_K(m, n) : (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

55. Запишите, как найти определители матриц $A_{1\times 1}$ и $A_{2\times 2}$.

$|A_{1\times 1}| = a$

$$|A_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

56. Запишите алгоритм нахождения определителя матрицы $A_{3\times 3}$.

Найти определитель можно разложением по первой строке или при помощи метода треугольника:

$$|A_{3\times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

57. **Сформулируйте определение системы линейных алгебраических уравнений. Запишите в общем виде.**

Системой линейных уравнений называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

При этом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются неизвестными, $\{a_{ij}\}$ - коэффициентами системы и $b_1, b_2, \ldots, b_m$ - свободные члены.

58. **Что в СЛАУ называют свободными членами? А что – неизвестными?**

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются неизвестными, $\{a_{ij}\}$ - коэффициентами системы, а $b_1, b_2, \ldots, b_m$ - свободные члены.

59. **Как записать СЛАУ в матричном виде?**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

60. **Что значит решить СЛАУ?**

Решить систему линейных уравнений, значит найти все такие значения её неизвестных при которых, все уравнения системы окажутся верными равенствами.

61. **Что такое расширенная матрица в рамках решения СЛАУ?**

а матрица

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

(которая получается из матрицы A приписыванием столбца свободных членов) наз. расширенной матрицей системы

62. **Какие преобразования называются эквивалентными преобразованиями матрицы?**

Эквивалентными преобразованиями называются следующие 3 вида преобразований:

1) перестановка местами произвольных строк матрицы;
2) умножение произвольной строки матрицы на число $\lambda \neq 0$;
3) прибавление к произвольной строке матрицы другой строки;

63. **Для чего нужны методы Крамера и Гаусса?**

Для решения невырожденных систем линейных уравнений.

64. **В чем заключается метод Крамера?**
Метод Крамера заключается в вычислении определителя матрицы А и определителей, полученных из матрицы А подстановкой столбца b в эту матрицу.
СЛАУ имеет единственный набор решений, который можно найти по формулам: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, . . . , $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, где Δ_i - определитель матрицы полученный заменой столбца i на столбец свободных членов в матрице СЛАУ, Δ - определитель изначальной матрицы СЛАУ.
65. **При каком условии возможно нахождение решения СЛАУ методом Крамера?**
При условии, что $\Delta = \det(A) \neq 0$.
66. **В чем заключается метод Гаусса?**
Метод Гаусса заключается в том, чтобы элементарными преобразованиями привести расширенную матрицу системы к верхнетреугольному виду и затем, используя метод подстановки найти решение.
67. **В чем заключается метод обратной матрицы для решения СЛАУ?**
Метод обратной матрицы, заключается в домножении обоих частей матричного уравнения АХ = В на матрицу обратную А:
$A^{-1} * A * X = A^{-1} * B \Leftrightarrow E * X = A^{-1} * B \Leftrightarrow X = A^{-1} * B$
68. **Как найти обратную матрицу используя метод Гаусса?**
Элементарными преобразованиями строк, необходимо из матрицы А получить единичную матрицу Е, обратная матрица тогда возникнет из следующей конструкции: $[A|E] \sim [E|A^{-1}]$
69. **Как найти обратную матрицу используя метод союзной матрицы?**
$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$, где A^* - присоединенная матрица – матрица, составленная из алгебраических дополнений соответствующих элементов транспонированной матрицы А.
70. **Что называется алгебраическим дополнением элемента матрицы?**
Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется ее дополнительный минор, взятый со знаком, определяемым по формуле: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
(Дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} называется определитель, полученный вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.)