Теормин. Раздел 2. Ответы на вопросы.

1. **Продолжите равенства $(\lambda + \mu)a = \ldots$ и $\lambda(a + b) = \ldots$, где $\lambda, \mu \in F$ — элементы из поля, $a, b \in L$ — элементы линейного пространства.**

2. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ для любых $a, b \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;

3. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in L$;

2. **Используя аксиомы линейного пространства и следствия из него, покажите, что $(-\lambda)a = \lambda \cdot (-a)$ и $\lambda(a - b) = (-\lambda)(b - a)$, где $\lambda \in F$ — элемент из поля, а $a, b \in L$ — элементы линейного пространства.**

$(-\lambda)a = \lambda \cdot (-a)$ – верно по следствию из аксиом линейного пространства
$\lambda(a - b) = (-\lambda)(b - a)$ – из предыдущего утверждения $\lambda(a - b) =$
$=(-\lambda)(-(a - b)) = (-\lambda)(b - a)$

3. **Какие линейные пространства называются вещественными? Комплексными?**

NtB. Элементы пространства L называются ***векторами***, поля $\mathbb{F}$ — ***скалярами*** или ***числами***. Векторные пространства над полем $\mathbb{R}$ называются ***вещественными***, над $\mathbb{C}$ — ***комплексными***.

4. **Какое пространство называется арифметическим (координатным) над полем F?**

(б) Множество $\mathbb{F}^n$ столбцов высоты n с элементами из $\mathbb{F}$ относительно операций поэлементного сложения и умножения на числа — ***арифметическое*** или ***координатное*** пространство;

5. **Почему вещественные многочлены R[x] фиксированной степени n с естественными операциями сложения и умножения на скаляр не являются линейным пространством? Какая аксиома линейного пространства нарушается?**

Потому что, $R^n[x]$ не является абелевой группой по сложению, так как $x^n + (-x^n) = 0$ – не принадлежит множеству $R^n[x]$. Не выполняется аксиома о том, что множество L называемое линейным пространством является абелевой группой по сложению.

6. **Сформулируйте определение линейной комбинации векторов.**

Опр. 2.1. Выражение вида $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ $(\lambda_i \in \mathbb{F})$ называется ***линейной комбинацией*** векторов $a_1, \ldots, a_n \in L$. Скаляры λ_i называются ***коэффициентами*** линейной комбинации. Говорят, что вектор $b \in L$ ***линейно выражается*** через векторы $a_1, \ldots, a_n$, если он равен некоторой их линейной комбинации.

7. **Сформулируйте определение линейной оболочки. Как обозначается линейная оболочка векторов из множества S?**

Опр. 2.2. ***Линейной оболочкой*** подмножества $S \subseteq L$ называется множество всех векторов из L, представимых в виде конечных линейных комбинаций элементов из S. Она обозначается $\langle S \rangle$. Говорят, что пространство L ***порождается*** множеством S, если $\langle S \rangle = L$

8. **В каком случае пространство L порождается множеством векторов S?**

Пространство L порождается множеством векторов S, если L это линейная оболочка S.

9. **Какая линейная комбинация векторов называется тривиальной? Нетривиальной?**

Опр. 2.3. Линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ векторов $a_1, \ldots, a_n \in L$, где $\lambda_i \in \mathbb{F}$ называется ***тривиальной***, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, и ***нетривиальной*** в противном случае.

10. **В каком случае векторы называются линейно зависимыми? Независимыми?**

Опр. 2.4. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in L$ называются ***линейно зависимыми***, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, и ***линейно независимыми*** в противном случае.

11. **Дайте определение понятия системы векторов? Чем система отличается от множества?**

Система векторов — это непустая упорядоченная совокупность векторов.

NtB. Понятие ***системы векторов*** отличается от понятия множества векторов следующим:

1. Векторы системы занумерованы (если не менять сами векторы, но поменять лишь их нумерацию, получим уже другую систему);
2. Среди них могут быть равные.

Может быть ***пустая система***, состоящая из пустого множества векторов.

12. **В каком случае система векторов называется линейно зависимой?**

Опр. 2.4. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in L$ называются ***линейно зависимыми***, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, и ***линейно независимыми*** в противном случае.

13. **Может ли система, состоящая из одного вектора, быть линейно зависимой? Почему?**

    Да может, к примеру система, состоящая только из нулевого вектора. Т.к. по следствию из аксиом линейного пространства при умножении любого скаляра на нулевой вектор мы получим нулевой вектор.

14. **Сформулируйте определение базиса линейного пространства.**

    Опр. 3.1. Система векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq L$ называется ***базисом*** векторного пространства L, если каждый вектор $a \in L$ единственным образом выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Коэффициенты этого выражения называются ***координатами*** вектора a в данном базисе.

15. **Может ли в линейно независимой системе векторов быть линейно зависимая подсистема? Почему?**

    Если система векторов линейно независима, то любая её подсистема тоже линейно независима, так как если бы было верно обратное, то мы могли бы принять $\lambda_i = 0$ для всех векторов системы кроме линейно зависимых и получить, что вся система линейно зависима, т.к существует некоторая $\lambda_n \neq 0$.

16. **Укажите возможный базис пространства F^n.**

    Векторы $(a_1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, a_2, 0, 0, \ldots, 0)$ и т.д. до $(0, 0, 0, \ldots, a_n)$, где $a_i \neq 0$.

17. **Приведите пример базиса в пространстве матриц размерности 2×3.**

    К примеру, матричные единицы. (матрицы в каждой из которых ровно 1 элемент является 1, а все остальные 0)

18. **Что называется размерностью векторного пространства? Как обозначается размерность пространства L?**

    Число элементов произвольного базиса (если он существует) в L называется размерностью пространства L и обозначается dim L.

19. **Чему равна размерность пространства {0}?**

    В пространстве {0} базисом по определению является пустая система (то есть его размерность равна нулю).

20. **Какое линейное пространство называется конечномерным? Бесконечномерным?**

    Если $\dim L < \infty$, то пространство называется конечномерным, иначе бесконечномерным.

21. **В каком случае подмножество $U \subset L$ будет являться подпространством L?**

Опр. 1.1. Подмножество U векторного пространства L называется ***подпространством***, если

1. U является подгруппой аддитивной группы L;
2. $a \in U \Rightarrow \lambda a \in U$ для любого $\lambda \in \mathbb{F}$.

Тот факт, что U является подпространством V будем обозначать $U \leqslant L$.

22. **Какие подпространства L называются тривиальными?**

$\{0\}$ и само L.

23. **Как связаны размерности подпространства и пространства, если они конечномерны?**

Размерность подпространства меньше либо равна размерности пространства.

24. **Какое множество называется линейным многообразием? Как определяется его размерность?**

Пусть $U \leqslant L$, $a \in L$ — фиксированный вектор. Множество векторов вида $x = a + U = \{a + u \mid u \in U\}$ называется линейным многообразием размерности $\dim U$.

25. **При каком условии линейное многообразие называют гиперплоскостью в линейном пространстве? Как иначе называют гиперплоскость в пространстве $\dim V = 2$.**

Если размерность линейного многообразия равна $\dim V - 1$, где V – линейное пространство, над которым было построено линейное многообразие. В пространстве с размерностью 2 гиперплоскость называется прямой.

26. **При каком условии линейное многообразие является подпространством?**

Линейное многообразие является подпространством только при условии $a \in U$. При этом оно совпадает с U.

27. **В каком случае размерность подпространства $U \leqslant V$ совпадает с размерностью пространства V?**

Если их базисы совпадают.

28. **Напишите размерности пространства диагональных матриц $\boldsymbol{Mat_D^n}$ $(\boldsymbol{R})$, пространства полиномов $R[x]^{\leqslant n}$ степени не выше n, комплексного арифметического пространства C_n.**

n, n+1, 2 или n или 2n зависит от обозначения

29. Какие линейные пространства называются изоморфными?

Опр. 2.1. Векторные пространства U и V над полем $\mathbb{F}$ называются ***изоморфными***, если существует такое биективное отображение $\varphi : V \to U$, что

- $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ для любых $a, b \in V$;
- $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in V$.

Само отображение φ называется при этом ***изоморфизмом*** пространств.

30. Благодаря чему существует возможность построить изоморфизм между линейным пространством и координатным пространством той же размерности?

Теорема 2.1. *Всякое векторное пространство V над полем $\mathbb{F}$, имеющее базис из n векторов, изоморфно пространству $\mathbb{F}^n$.*

Доказательство. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис V. Рассмотрим отображение $\varphi : V \to \mathbb{F}^n$, которое ставит в соответствие каждому вектору из V его координатную строку в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. В силу определения базиса оно биективно. Если $a = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots a_ne_n$ и $b = b_1e_1 + b_2e_2 + \ldots b_ne_n$, то

$$a + b = (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + \ldots (a_n + b_n)e_n,$$

$$\lambda a = (\lambda a_1)e_1 + (\lambda a_2)e_2 + \ldots (\lambda a_n)e_n.$$

Из этого следует, что φ — изоморфизм. $\square$

31. Почему изоморфность линейных пространств является отношением эквивалентности?

NtB. Изоморфность линейных пространств — это отношение эквивалентности, т.к. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

32. Назовите достаточное условие того, чтобы линейные пространства были изоморфными.

Любые два векторных конечномерных пространства одной размерности над одним полем изоморфны.

33. Сформулируйте определение ранга матрицы. @

Опр. 3.1. ***Рангом системы векторов*** называется размерность её линейной оболочки. ***Строчным рангом матрицы*** называется ранг системы её строк. ***Столбцовым рангом матрицы*** называется ранг системы её столбцов.

Опр. 3.2. ***Минорным рангом матрицы*** называется наибольший порядок отличного от нуля минора матрицы. Сам этот минор называется ***базисным.***

Ранг матрицы равен размерности пространства, порождённого строками (или столбцами) матрицы, как элементами векторного пространства.

34. Дайте определение базисного минора.

В матрице A размеров $m \times n$ минор r-го порядка называется базисным, если он отличен от нуля, а все миноры (r+1)-го порядка равны нулю или их вообще не существует.

35. Сформулируйте теорему о базисном миноре.

Теорема 3.1. ***(о базисном миноре)*** *Столбцы (строки), пересекающие базисный минор матрицы, линейно независимы. Любой столбец (строка) матрицы является линейной комбинацией базисных.*

36. Как найти ранг ступенчатой матрицы?

Посчитать количество ее ненулевых строк

37. Сформулируйте теорему о ранге суммы и произведения матриц.

Теорема 3.3. ***(о ранге суммы и произведения матриц)*** *Имеют место следующие свойства:*

- $\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$;
- $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$.

38. О чём говорит характеристика совместности СЛАУ? Несовместности?

Если СЛАУ совместна, то она имеет решение. Иначе решений нет.

39. Напишите теорему Кронекера-Капелли.

Теорема 1.1. ***(Кронекера-Капелли)*** *СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы.*

40. Что можно сказать о решениях СЛАУ, если rk(A|b) = rk(A) = n, где n – количество неизвестных, rk(A|b), rk(A) – ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов соответственно?

Решение есть и оно единственное.

41. Что можно сказать о решениях СЛАУ, если rk(A|b) = rk(A) + 1, где rk(A|b), rk(A) – ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов соответственно?

Решений нет.

42. Что можно сказать о решениях СЛАУ, если rk(A|b) = rk(A) < nгде n – количество неизвестных, rk(A|b), rk(A) – ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов соответственно?

Решения есть и их больше одного.

43. В каком случае СЛАУ называется однородной? Неоднородной?

Опр. 2.1. СЛАУ называется ***однородной***, если столбец свободных членов является нулевым вектором.

44. Какой алгебраической структурой обладает множество решений однородной СЛАУ?

Лемма 2.1. *Множество $X = \{x \in \mathbb{F}^n | Ax = 0\}$ решений однородной СЛАУ образует линейное подпространство $X \leqslant \mathbb{F}^k$.*

45. Когда однородная СЛАУ имеет ненулевое решение?

Если число уравнений в СЛАУ меньше числа неизвестных, то она всегда имеет ненулевое решение.

46. Чему равна размерность пространства X решений однородной СЛАУ с n неизвестными и матрицей коэффициентов A?

$\dim X = n - \operatorname{rank} A$

47. Сформулируйте определение ФСР (фундаментальной системы решений).

Опр. 2.2. Базис пространства решений однородной СЛАУ называется ***фундаментальной системой решений*** (ФСР).

48. Что называется общим решением однородной СЛАУ?

Опр. 2.3. ***Общим решением однородной СЛАУ*** называется линейная комбинация векторов ФСР:

$$x_0 = \sum_{1}^{n-r} \lambda_i e_i, \qquad \forall \lambda_i \in \mathbb{F}$$

49. Опишите способ задания подпространства как решения однородной СЛАУ? @

- Определите размерность подпространства k, которое вы хотите задать.
- Выберите матрицу коэффициентов A размерности $m \times n$ так, чтобы $\operatorname{rank}(A) = n - k$.
- Решите однородную систему $Ax = 0$.

Решения системы образуют линейное пространство размерности k.

50. Запишите теорему о структуре решений неоднородной СЛАУ.

Теорема 3.1. ***(о структуре решения СЛАУ)*** *Общее решение неоднородной СЛАУ вида $Ax = b$ является суммой общего решения однородной x_0 и произвольного частного решения $\widetilde{x}$ неоднородной:*

$$x = \widetilde{x} + x_0 = \widetilde{x} + \sum_{1}^{n-r} \lambda_i e_i, \qquad \forall \lambda_i \in \mathbb{F},$$

где $Ax_0 = 0$ и $A\widetilde{x} = b$.

51. Запишите альтернативу Фредгольма.

Теорема 3.2. ***(альтернатива Фредгольма)*** *Если в СЛАУ $Ax = b$ число уравнений равно числу неизвестных, то*

- *либо она имеет единственное решение при любых значениях правой части,*
- *либо однородная СЛАУ $Ax = 0$ обладает ненулевым решение.*

52. Пусть U, W ⩽ L. Как определяется сумма U и W?

Минимальное подпространство, содержащее оба подпространства U и W, называется суммой подпространств U и W и обозначается U+W.

53. Из каких элементов состоит пересечение подпространств U и W? Как обозначается пересечение пространств?

U ∩ W — наибольшее подпространство, содержащееся в как U, так и в W. U ∩ W = {v | v ∈ U ∨ v ∈ W} ⩽ V.

54. Какой из операций с подпространствами U и V определяется наименьшее подпространство, содержащее оба эти подпространства?

U+V, т.е. сумма.

55. Какой из операций с подпространствами U и V определяется наибольшее подпространство, которое содержится в обоих подпространствах?

U ∩ W, т.е. пересечение

56. В каком случае базис называется согласованным с подпространством?

Опр. 2.1. Базис пространства V называется ***согласованным*** с подпространством U, если U является линейной оболочкой какой-то части базисных векторов пространства V.

57. Напишите формулу Грассмана.

Следствие 2.1.1. *(**формула Грассмана**) Для любых двух конечномерных подпространств U и W произвольного векторного пространства V верно равенство* $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

58. В каком случае сумма подпространств U и W называется прямой? Как обозначается прямая сумма этих пространств?

Опр. 3.1. Сумма $U + W$ называется ***прямой***, если для любого вектора $v \in U + W$ представление $v = u + w$, где $u \in U$, $w \in W$ единственно. Прямая сумма обозначается $U \oplus W$ или $U \dotplus W$.

59. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при котором сумма двух подпространств является прямой.

Теорема 3.1. *Для того, чтобы сумма двух подпространств U и W была прямой, необходимо и достаточно, чтоб их пересечение было нулевым.*

60. Пусть U $\leqslant$ V . Какое пространство называется прямым дополнением U в V?

Опр. 3.2. Пусть $U \leqslant V$. Подпространство $W \leqslant V$ называется ***прямым дополнением*** к U в V, если $V = U \oplus W$.

61. Пусть $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i = V$. Что называется проекцией вектора v ∈ V на подпространство U_i?

Проекцией вектора v на подпространство U_i называется вектор u_i из разложения вектора v на сумму векторов подпространств U_i.

62. Что позволяет представить конечномерное пространство в виде прямой суммы одномерных пространств? @

Разложение векторов пространства по базису.

63. Дайте определение матрице перехода. Как она обозначается? @

Матрица перехода — это матрица, которая содержит координаты векторов нового базиса, записанные в координатах старого базиса. Обозначается T = (e ⇝ ĕ).

64. Как связать с помощью матрицы перехода две строки, элементы которых являются базисными векторами? @

Пусть $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — некоторый базис в V и $\widetilde{e} = \{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_n\}$ — другая, в общем случае отличная от первой, система векторов из V. Выразим векторы системы $\{\widetilde{e}_i\}_{i=1}^n$ через базисные векторы.

$$\begin{cases} \widetilde{e}_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n \\ \widetilde{e}_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n \\ \ldots \\ \widetilde{e}_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{cases}$$

и составим матрицу $T = (\tau_{ij})$. Подчеркнем, что матрица T получается выписыванием координат векторов системы относительно базиса в столбцы. Если распространить правило умножения матриц на случай, когда элементами одной из них являются векторы (что имеет смысл ввиду операций, определенных в линейном пространстве), то можно записать

$$(\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n) = (e_1, \ldots, e_n)T \tag{1}$$

65. Запишите свойства матрицы перехода.

Лемма 1.2. ***(свойства матрицы перехода)***

1. $(e \rightsquigarrow e) = E$;
2. $(e \rightsquigarrow f) = (e \rightsquigarrow g)(g \rightsquigarrow f)$;
3. $(e \rightsquigarrow f)$ *обратима и* $(e \rightsquigarrow f)^{-1} = (f \rightsquigarrow e)$.

66. Пусть C = (e ⇝ ẽ) — матрица перехода, X̃, X – координатные столбцы вектора x ∈ V в базисе ẽ и e соответственно. Запишите связь между перечисленными объектами.

Теорема 2.1. *Пусть V — конечномерное векторное пространство, e и $\widetilde{e}$ — базисы. Тогда для любого вектора $x \in V$ выполнено $\widetilde{X} = (\widetilde{e} \rightsquigarrow e)X$.*

67. Какое преобразование называется контравариантным?

Преобразование столбца координат из одного базиса в другой.

68. Что такое полная линейная группа и как она обозначается?

Опр. 3.1. Множество невырожденных квадратных матриц n-го порядка с операцией умножения называется **полной линейной группой** и обозначается $\mathrm{GL}(n)$.

69. Что такое специальная линейная группа и как она обозначается?

Опр. 3.2. Специальной линейной группой $\mathrm{SL}(n)$ называется группа, которая образована подмножеством $\mathrm{GL}(n)$ квадратных матриц, определитель которых равен 1.

70. Какие матрицы содержатся в унитреугольной группе?

Верхнетреугольные матрицы, все диагональные элементы которых равны 1.

71. Каким свойством обладают ортогональные матрицы по определению?

$C^T = C^{-1}$

72. Запишите общий вид матрицы поворота в двумерном пространстве.

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

73. Какие объекты необходимо задать, чтобы определить элемент евклидовой группы?

Необходимо задать ортогональную матрицу A и вектор сдвига b.