线性离散系统的分析与校正

《自动控制原理》第九章

制作人 哈尔滨工程大学 王辉

第九章 线性离散系统的分析与校正

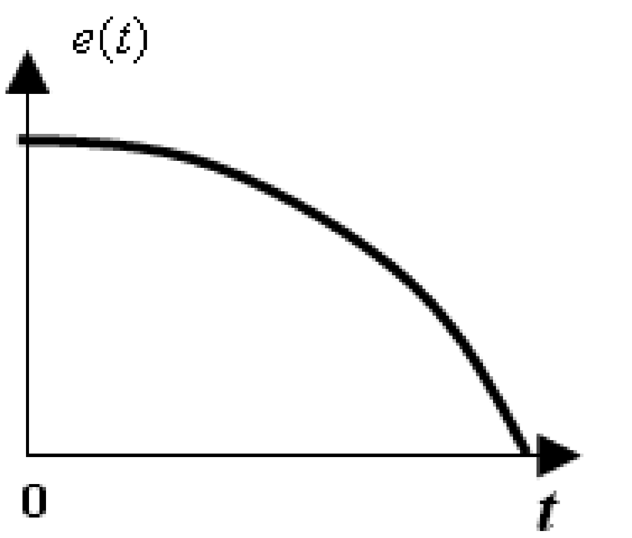


图1-1　连续信号

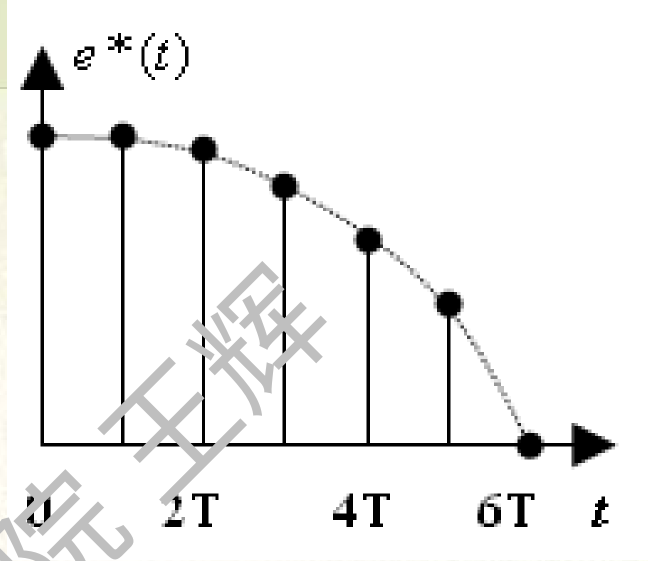


图1-2　离散信号

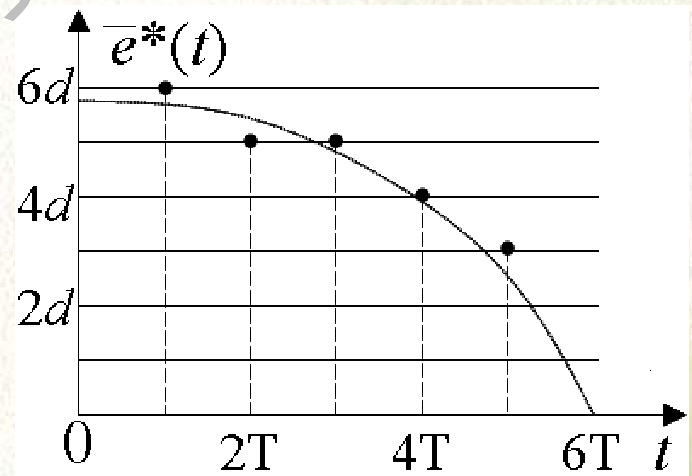


图1-3　数字信号

返回　主目录

9.1 离散系统的基本概念

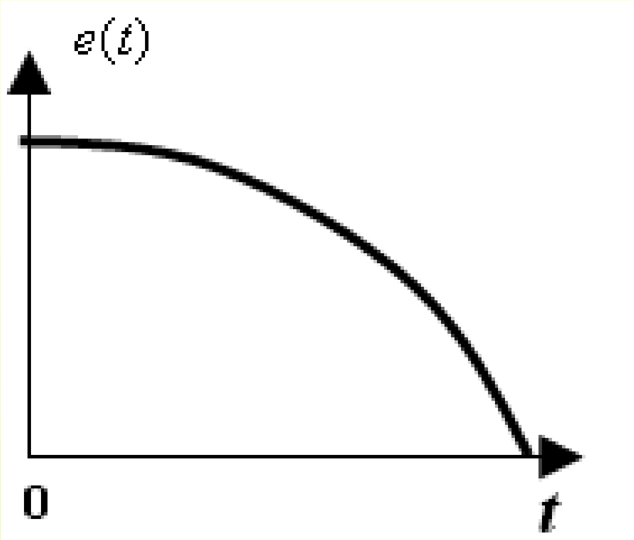


图1-1　**连续信号**

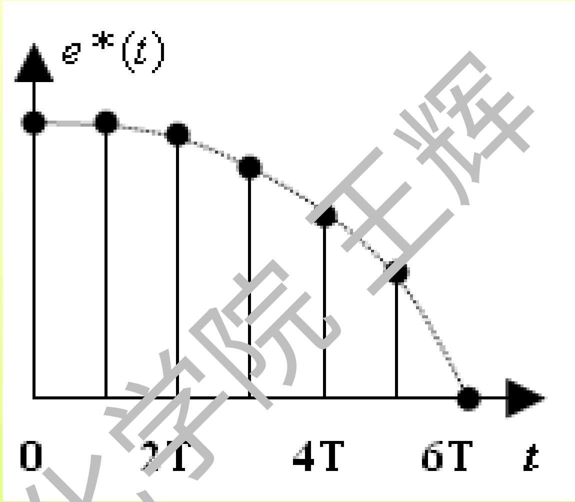


图1-2　**采样信号**

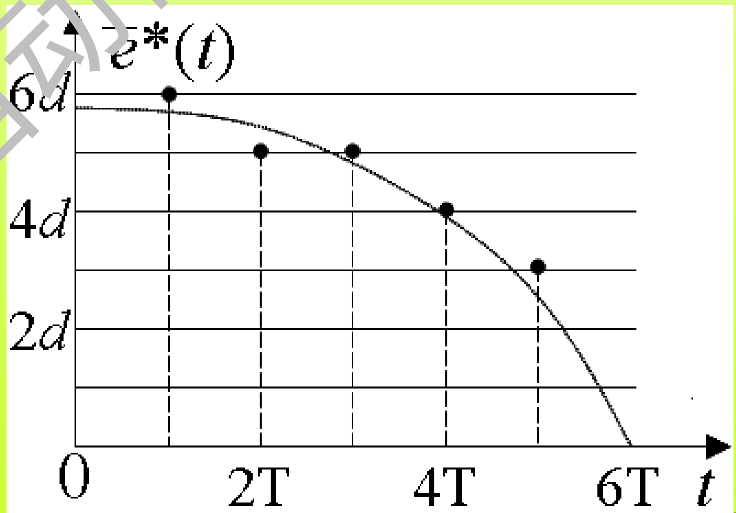


图1-3　**数字信号**

9.1 离散系统的基本概念

一. 什么是采样控制系统？

二. 什么是数字控制系统？

（——计算机控制系统）

三. 连续系统与离散系统比较

返回 主目录

一、采样控制系统

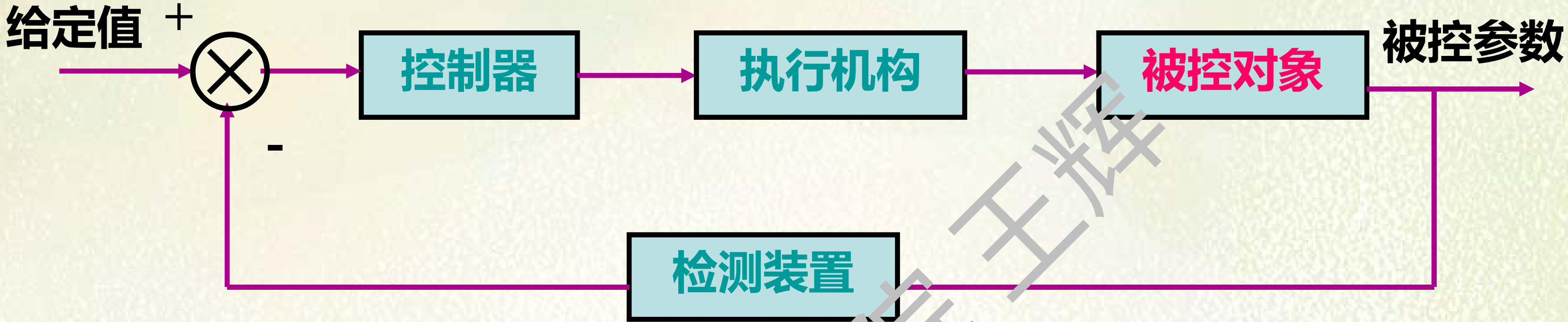
周期采样：信息之间的间隔是有规律的。

随机采样：信息之间的间隔是随机的。

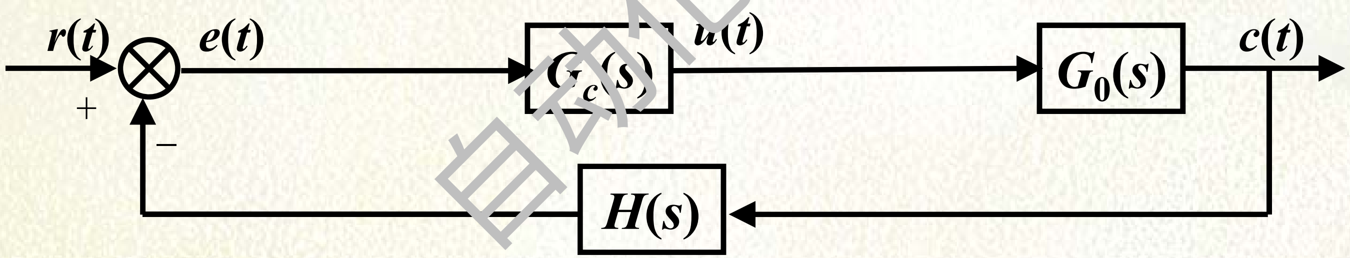
本书讨论的离散系统有以下限制：

1 等周期采样

2 所有采样开关同步工作。



连续控制系统的典型结构

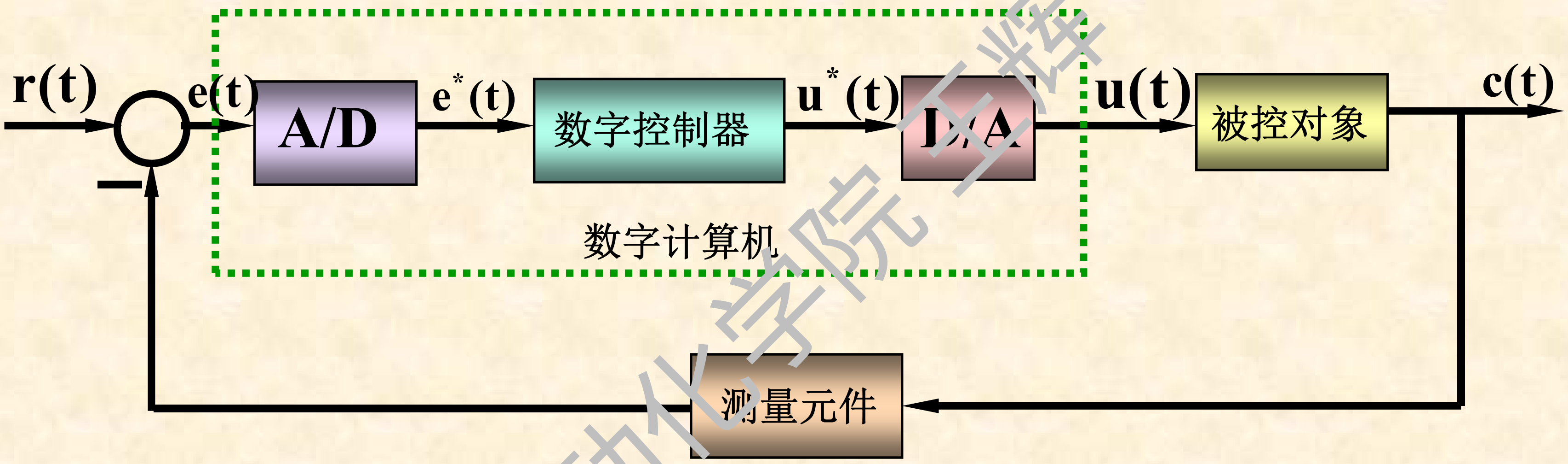


返回 主目录

二、数字控制系统

数字控制系统：以数字计算机为控制器去控制具有连续工作状态的被控对象的闭环控制系统，又称为计算机控制系统。

计算机控制系统典型原理图



三、连续系统与离散系统比较

	连续系统	离散系统
信　　号	均为时间连续信号	含有时间离散信号
时域模型	微分方程	差分方程
复域模型	传递函数	脉冲传递函数
复 变 量	s (拉氏变换)	z (Z变换)
算　子	p (微分算子)	q (时间移动算子)

第一部分

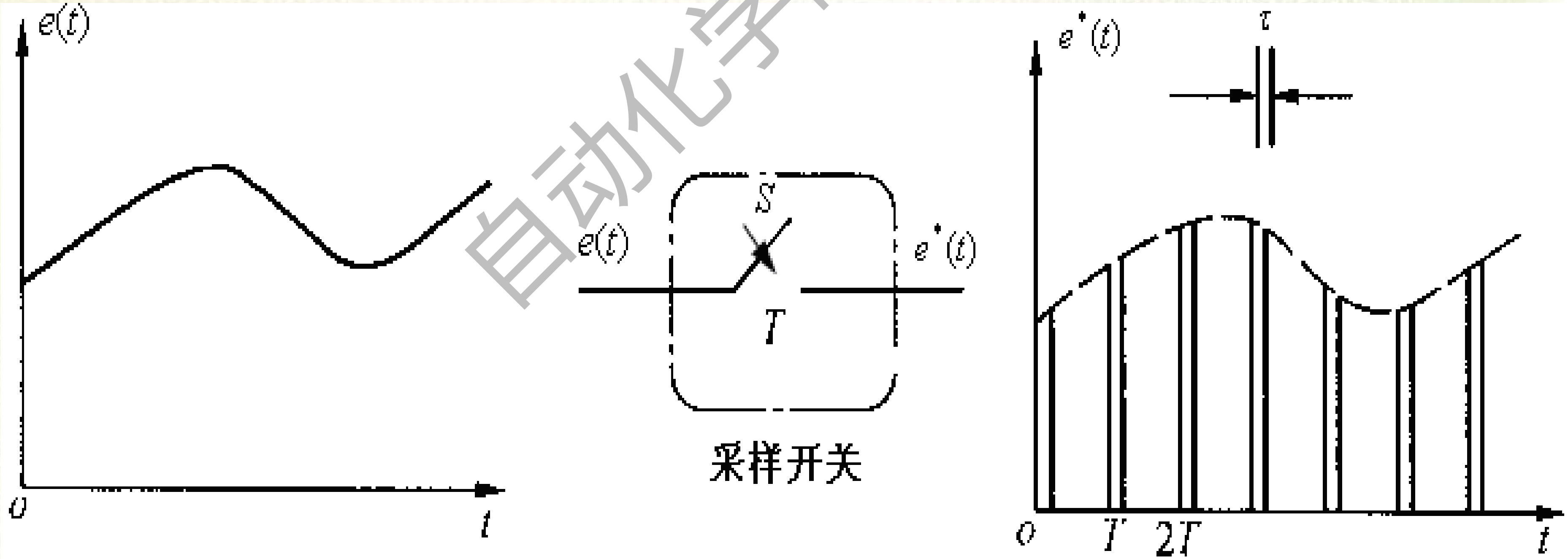
Ch1 离散系统分析的数学基础

离散系统分析的数学基础

9.2 采样过程及采样定理

一 采样过程

采样过程：就是把连续信号变成离散信号的过程，简称采样。



9.2 采样过程及采样定理

一 采样过程

采样周期：采样开关两次闭合的时间间隔 *T*。

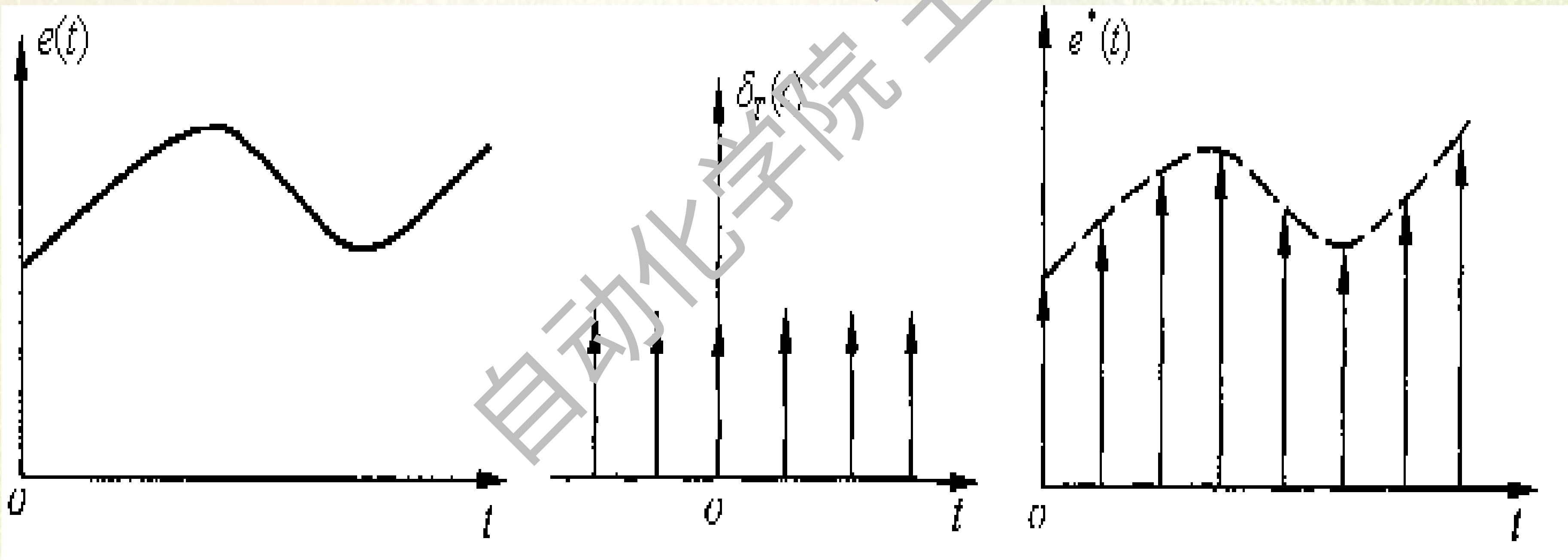
采样角频率: $\omega_s = 2\pi / T$；

采样频率: $f_s = \dfrac{1}{T}$

返回 主目录

二、理想采样过程

理想采样：采样开关闭合时间→0;



理想采样过程

返回　主目录

$$e^{*}(t)=\sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT)$$

采样信号的频谱

这就是

香农采样定理

ω_s满足什么条件时

才能从 $\left|E^*(j\omega)\right|$ 恢复出

$\left|E(j\omega)\right|$??

$$\omega_s \geq 2\omega_h$$

或：$T \leq \pi/\omega_h$

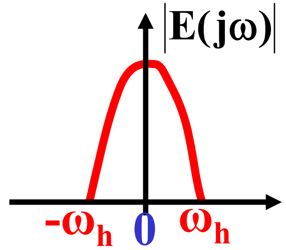
同学们注意啦!!

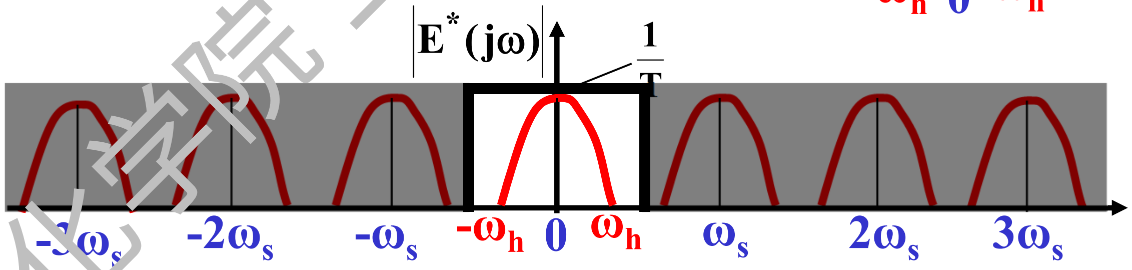
我不是用来判稳的哟!

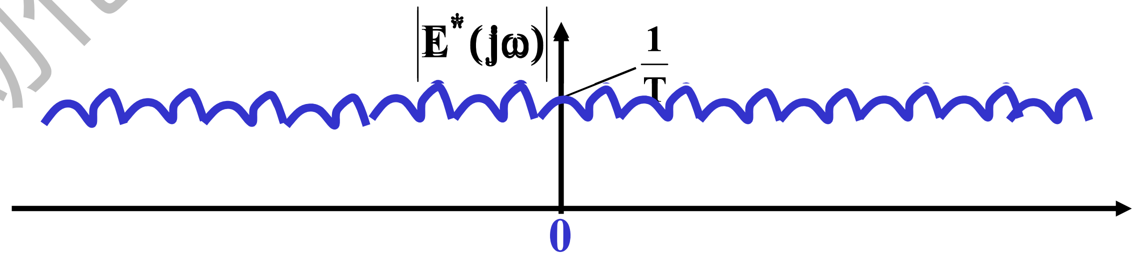
$$E^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}E[j(\omega+n\omega_s)]$$

连续信号的频谱为 $\left|E(j\omega)\right|$

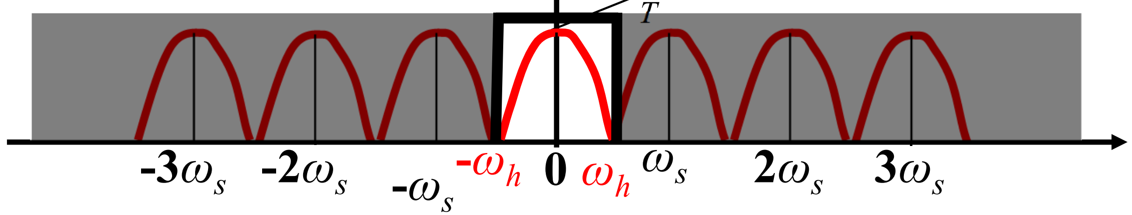
采样信号的频谱为 $\left|E^*(j\omega)\right|$







若$\omega_s = 2\omega_h$



三 香依采样定理

如果连续信号 $e(t)$ 具有有限频谱 $(-\omega_h \leq \omega \leq \omega_h)$

当采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_h$ 时，可以从离散信号 $e(nT)$

无失真地（香依重构）恢复原连续信号 $e(t)$。

返回 主目录

9.3 采样信号的恢复与零阶保持器

一、信号的恢复

把离散信号转换为连续信号的过程称为信号保持或信号的恢复，它是采样的逆过程。

二 零阶保持器

数学表达式: $$e(nT+\Delta t)=e(nT)\qquad 0\le\Delta t<T$$

表明:零阶保持器是一种按常值规律外推的装置。

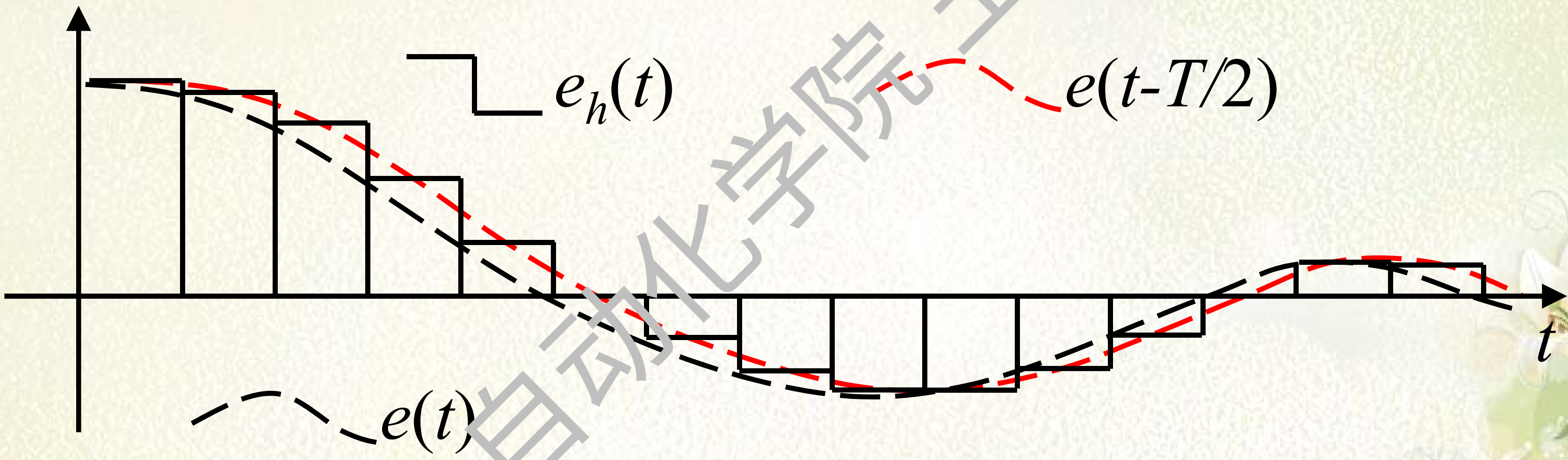


图1-7 零阶保持器的输出特性

9.4 Z 变换理论

一、Z变换定义

1．Z变换的定义：

$$E(z) = Z[e^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) z^{-n}$$

二、Z变换方法

- 级数求和法
- 部分分式法
- 留数计算法（补充）

1. 级数求和法

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}=e(0)+e(T)z^{-1}+\cdots+e(nT)z^{-n}+\cdots$$

例：求指数函数 $x(t)=\mathrm{e}^{-at}$，$a>0$ 的Z变换。

2. 部分分式法

主要步骤:

1）先求出已知连续时间函数 $e(t)$ 的拉氏变换 $E(s)$；

2）将 $E(s)$ 展成部分分式之和的形式；

3）对每一部分分式分别求取Z变换，则可得到E(Z)。

注意：常用时间函数的Z变换表参见教材表

常用函数Z变换

序号	E(s)	e(t)	E(z)
1	e^{-nTs}	$\delta(t-nT)$	z^{-n}
2	1	$\delta(t)$	1
3	$\dfrac{1}{s}$	$1(t)$	$\dfrac{z}{z-1}$
4	$\dfrac{1}{s^2}$	t	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\dfrac{1}{s^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2$	$\dfrac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6		$a^{\frac{t}{T}}$	$\dfrac{z}{z-a}$
7	$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$

3. 留数计算法（补充的内容）

已知连续时间函数$e(t)$的拉氏变换$E(s)$及全部极点

$$E(z)=\sum_{i=1}^{K}\left\{\frac{1}{(r_i-1)!}\frac{d^{r_i-1}}{d\,s^{r_i-1}}\left[(s-s_i)^{r_i}E(s)\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\right]_{s=s_i}\right\}$$

式中：K—$E(s)$的不相同极点的个数；

r_i— 极点s_i的阶数；

T— 采样周期。

例：用留数法求单位斜坡函数$e(t)=t$的Z变换。

$$E(z)=\sum_{i=1}^{K}\left\{\frac{1}{(r_i-1)!}\frac{d^{r_i-1}}{d\,s^{r_i-1}}\left[(s-s_i)^{r_i}E(s)\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\right]_{s=s_i}\right\}$$

返回 主目录

三、Z变换的性质

1．线性定理

2．实数位移定理（平移定理）（※）

滞后定理（负偏移定理）：

$$Z[e(t-kT)] = z^{-k}E(z)$$

超前定理（正偏移定理） ※

$$Z[e(t+kT)] = z^{k}[E(z) - \sum_{n=0}^{k-1} e(nT)z^{-n}]$$

返回 主目录

3．复数位移定理

如果函数$e(t)$是可拉氏变换的，其Z变换为 $E(z)$，则有

$$Z[e^{\mp at}e(t)] = E(ze^{\pm aT})$$

例： 计算 $x(t)=e^{-t}(1-\sin 2t)$ 的Z变换。

返回 主目录

4．终值定理（※）

如果函数$e(t)$的Z变换为$E(z)$，且极限 $\lim_{n\to\infty} e(nT)$ 存在，则函数序列的终值

※

$$e(\infty)=\lim_{n\to\infty} e(nT)=\lim_{z\to 1}(z-1)E(z)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)$$

例：设Z变换函数为

$$E(z)=\frac{0.792z^2}{(z-1)(z^2-0.416z+0.208)}$$

试用终值定理计算$e(nT)$的终值。

5．卷积定理

$$u(nT)*g(nT)=\sum_{k=0}^{\infty}u(kT)g[(n-k)T]$$

若 $y(nT)=u(nT)*g(nT)$

$$Y(z)=U(z)\cdot G(z)$$

卷积定理指出，两个采样函数卷积的Z变换，就等于这两个采样函数相应Z变换的乘积。

返回 主目录

四、Z反变换

Z反变换：已知$E(z)$，求相应的离散序列$e^*(t)$的过程。记为

$$e^*(t) = Z^{-1}[E(z)]$$

Z反变换方法
- 长除法
- 部分分式法
- 反演积分法

1. 长除法（幂级数法）

$$E(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}}$$

$$E(z)=c_0+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}+\cdots+c_nz^{-n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^{-n}$$

离散函数

怎样写？

$$e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\delta(t-nT)$$

返回 主目录

哈尔滨工程大学
Harbin Engineering University

2. 部分分式法（查表法）

已知的$F(s)$无重极点

$$e^{*}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}e_{i}(nT)\right)\delta(t-nT)$$

返回 主目录

3. 反演积分法（留数法）

$$e(nT)=\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{1}{(r_i-1)!}\frac{d^{r_i-1}}{dz^{r_i-1}}\left[(z-z_i)^{r_i}E(z)z^{n-1}\right]\right\}_{z=z_i}$$

式中：k—$E(z)$的不相同极点的个数；

z_i—$E(z)\,z^{n-1}$的极点($i=1,2,\ldots,k$)；

r_i— 极点z_i的阶数。

返回　主目录

例:用留数计算法求下列函数的z反变换。

$$E(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-0.8)^2}$$

返回 主目录

第二部分

Ch2　离散系统的数学描述

返回　主目录

9.5 离散系统的数学模型

一、线性差分方程

二、脉冲传递函数

返回 主目录

一、 线性差分方程

$$c(n) = F\left[r(n)\right]$$

返回 主目录

线性常系数差分方程及其解法

n阶后向差分方程：

$$c(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i c(k-i) + \sum_{j=0}^{m} b_j r(k-j)$$

n阶前向差分方程：

$$c(k+n) = -\sum_{i=1}^{n} a_i c(k+n-i) + \sum_{j=0}^{m} b_j r(k+m-j)$$

返回 主目录

线性差分方程的解

（1）迭代法：利用递推关系求解。

（2）Z变换法：利用Z变换求解。

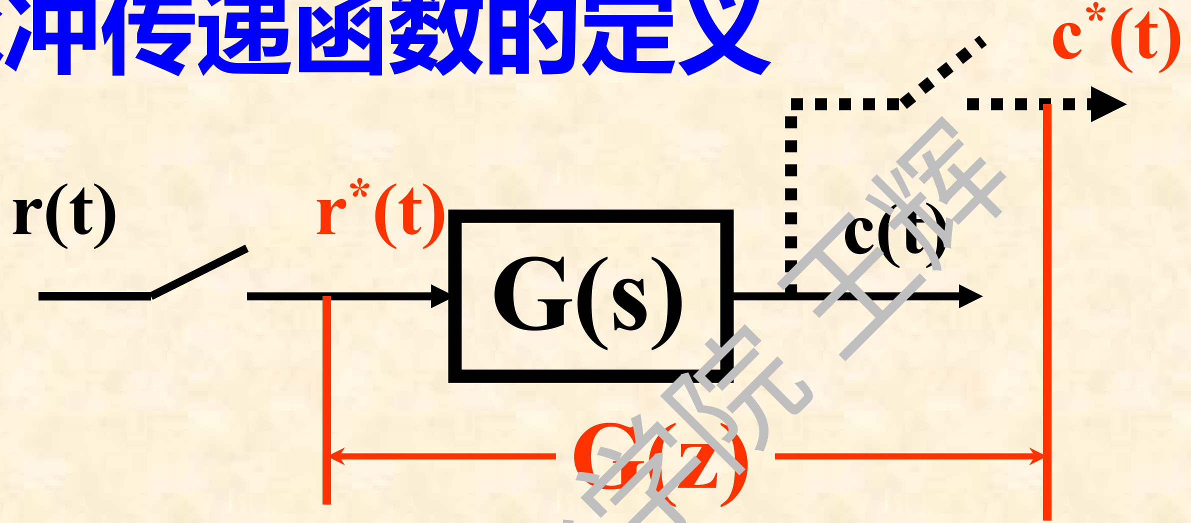
具体步骤：

① 对差分方程逐项取Z变换；
② 求出$C(z)$；
③ Z反变换求差分方程的时域解$c(k)$。

二、 脉冲传递函数

二、 脉冲传递函数

1、脉冲传递函数的定义



在零初始条件下，系统输出采样信号的Z变换与输入采样信号的Z变换之比。

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)};$$

注意：在输入端必须有采样开关。

2、脉冲传递函数的物理意义

脉冲传递函数的含义：G(z) 就等于单位脉冲响应序列K(nT)的Z变换。

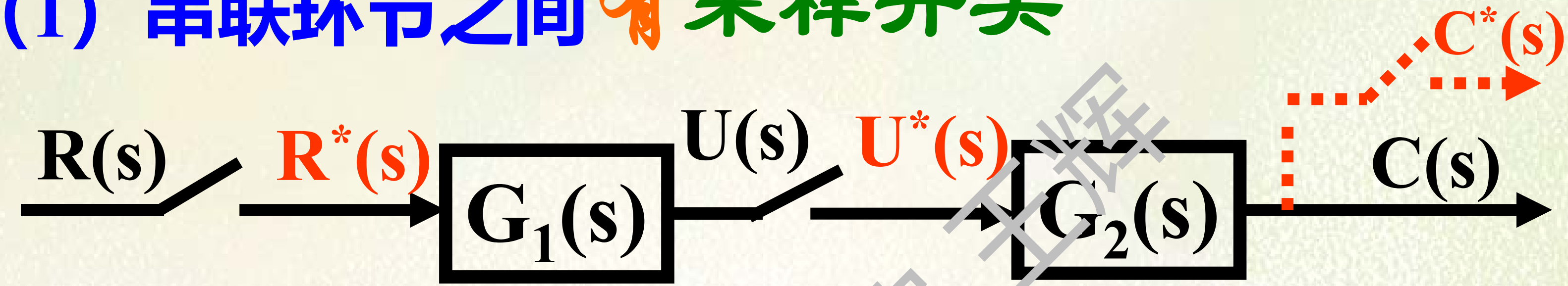
$$G(z)=K(z)=\sum_{n=0}^{\infty}K(nT)z^{-n}$$

返回 主目录

三、开环系统脉冲传递函数

1. 串联环节的脉冲传递函数

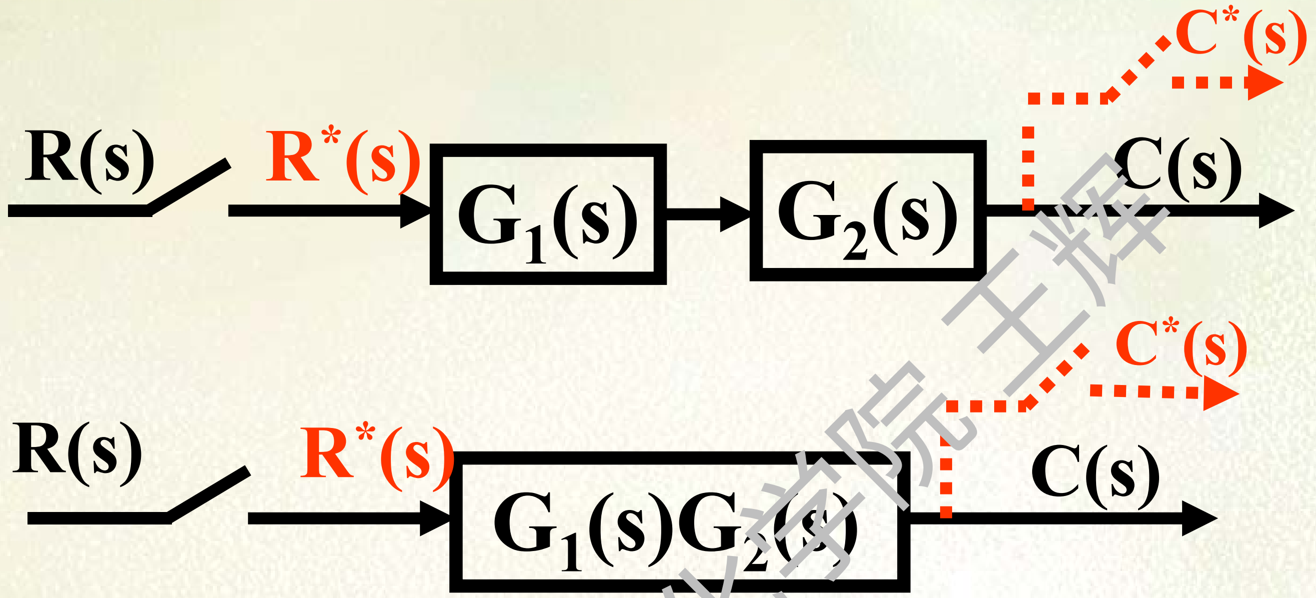
(1) 串联环节之间有采样开关



$$C(z)=R(z)G_1(z)G_2(z)$$

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=G_1(z)G_2(z)$$

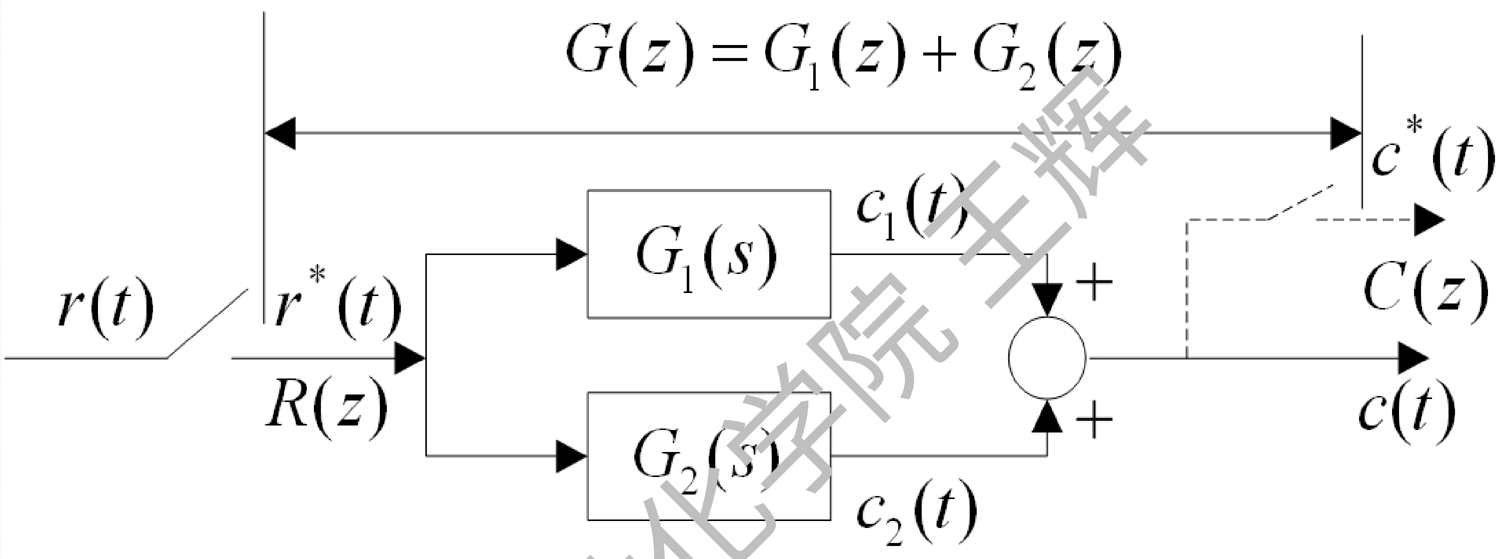
(2) 串联环节之间无采样开关



$$\frac{C(z)}{R(z)} = Z[G_1(s)G_2(s)]$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = G_1G_2(z)$$

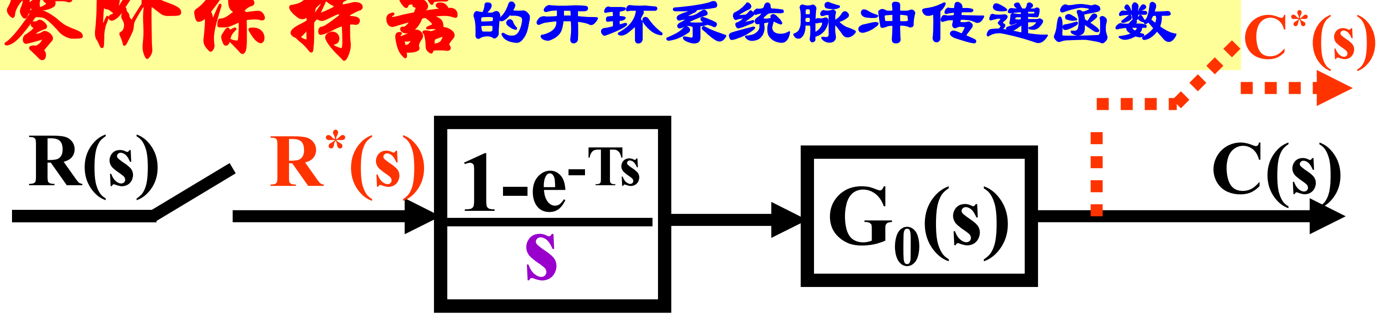
2、并联环节的脉冲传递函数



并联环节的开环系统脉冲传函数为:

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=G_1(z)+G_2(z)$$

3、有零阶保持器的开环系统脉冲传递函数

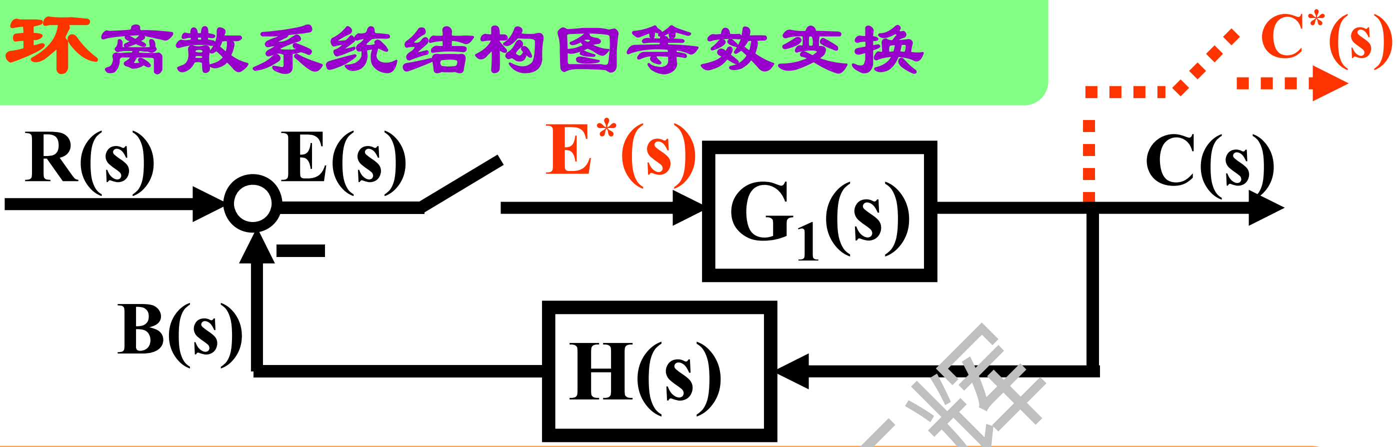


$$\frac{C(z)}{R(z)}=(1-z^{-1})Z[\frac{G_0(s)}{s}]$$

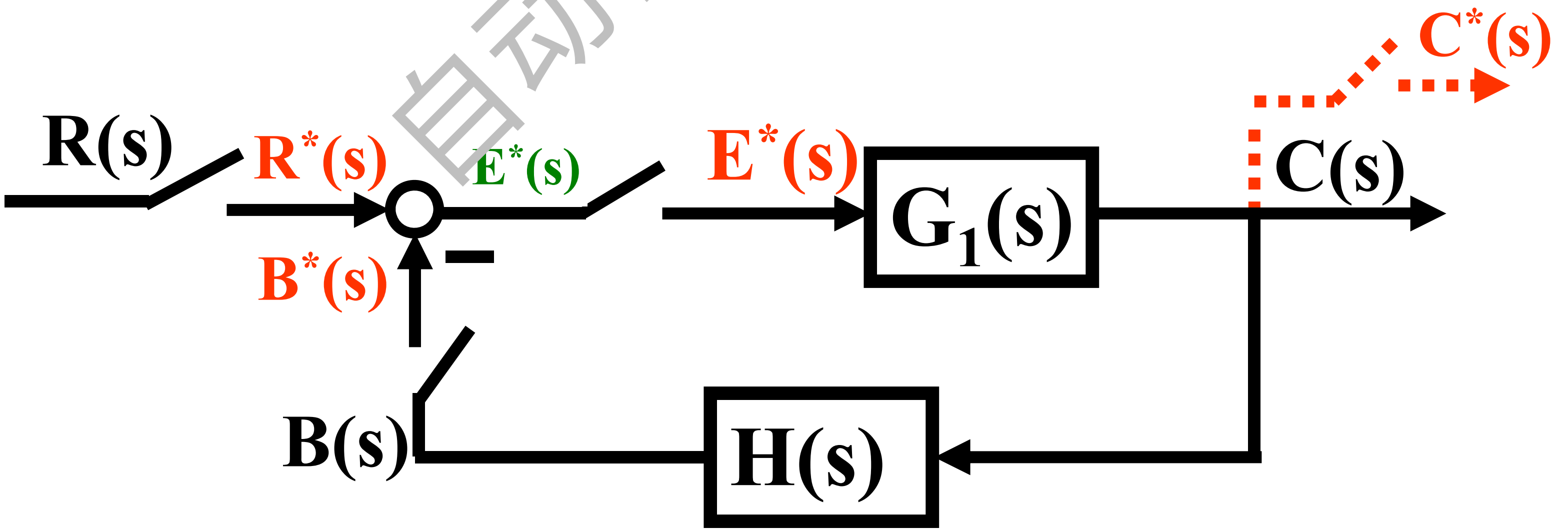
四、闭环系统脉冲传递函数（※）

1. 对偏差信号进行采样的系统

闭环离散系统结构图等效变换



$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G_1(z)}{1+G_1H(z)}$$



（1）闭环离散系统对于输入量的脉冲传递函数

$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+HG(z)}$$

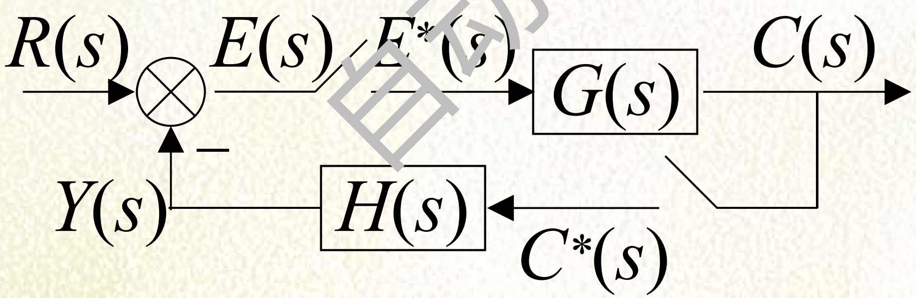
（2）闭环离散系统对于输入量的误差脉冲传递函数

$$\Phi_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+HG(z)}$$

（3）闭环离散系统的特征方程

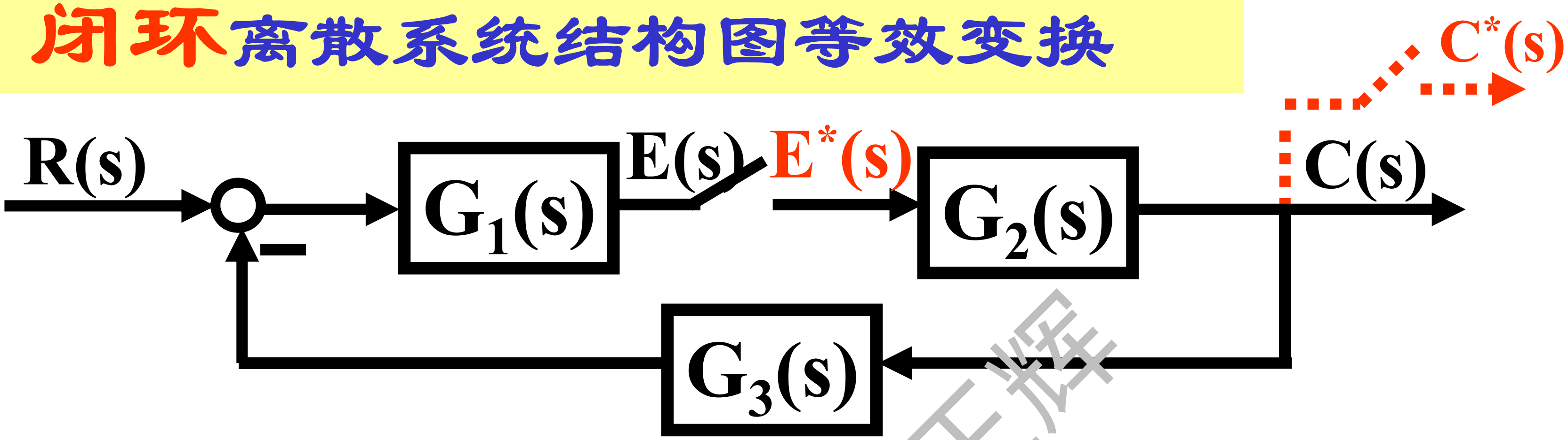
$$D(z)=1+GH(z)=0$$

注意： $\Phi(z)\neq Z[\Phi(s)]$ $\Phi_e(z)\neq Z[\Phi_e(s)]$



2. 不对偏差信号进行采样的系统

闭环离散系统结构图等效变换



$$C(z)=E(z)\cdot G_2(z)=\frac{RG_1(z)G_2(z)}{1+G_1G_2G_3(z)}$$

第三部分

Ch3 离散系统分析

9.6 离散系统分析

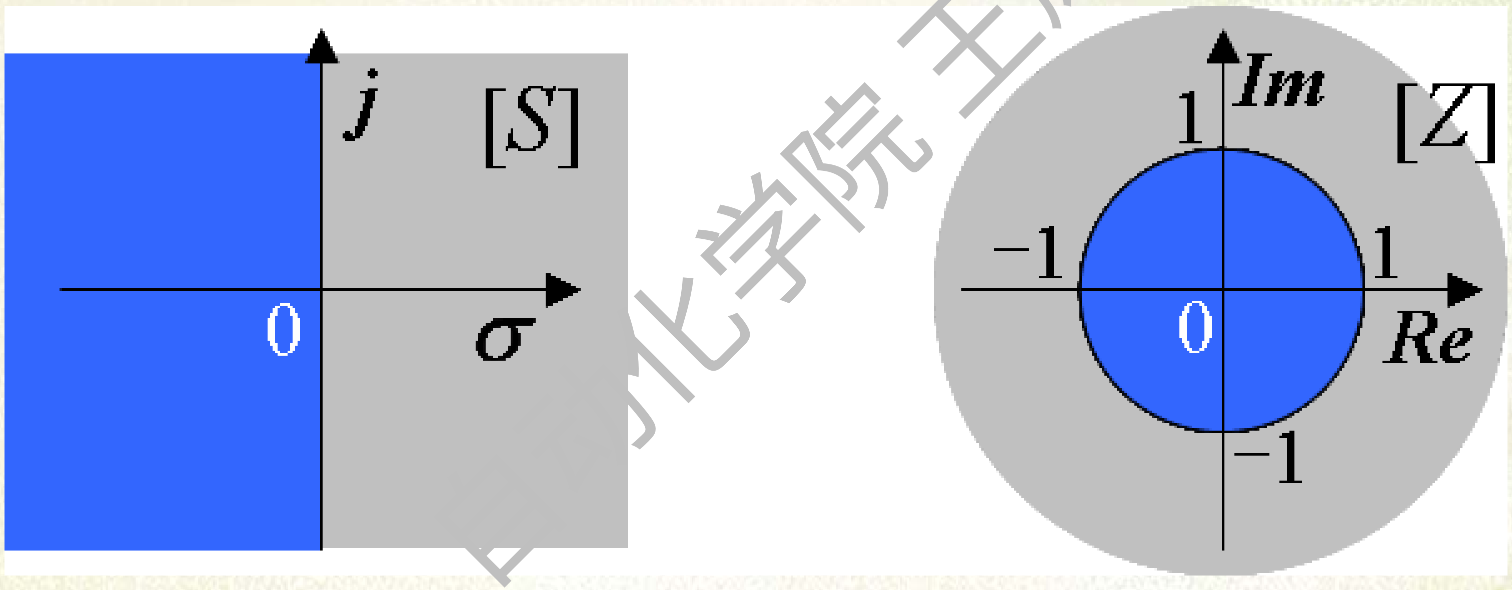
一、离散系统的稳定性分析

二、离散系统稳态误差分析

三、离散系统的动态性能分析

一、离散系统的稳定性分析

1、S域到Z域的映射



2、离散系统稳定的充分必要条件

1） Z域中离散系统稳定的充要条件

当且仅当离散系统特征方程

$$D(z)=0$$

的全部特征根z_i均分布在Z平面的**单位圆内**，或者所有特征根的**模均小于1**，即$|z_i| < 1$，则相应的线性定常离散系统是稳定的。

2、离散系统稳定的充分必要条件

2）时域中离散系统稳定的充要条件

当且仅当差分方程

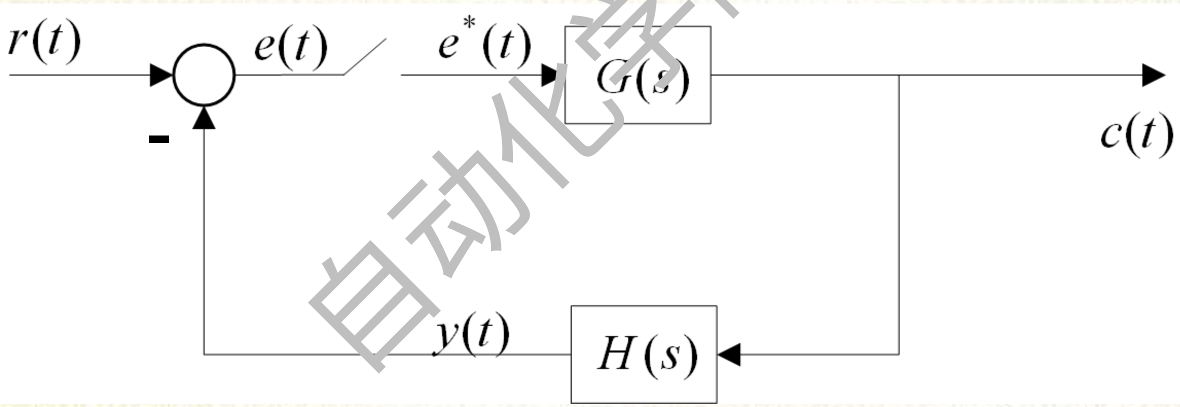
$$c(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i c(k-i) + \sum_{j=0}^{m} b_j r(k-j)$$

的所有特征根的模 $|\lambda_i| < 1, i = 1, \cdots, n$，则相应的线性定常离散系统是稳定的。

例2：设离散系统如下图，其中：

$$G(s)=\frac{10}{s(s+1)}$$

$H(s)=1$，$T=1s$。**试分析系统的稳定性。**



3、离散系统的稳定性判据

1) 修正的劳思稳定判据

*w*变换(双线性变换)：

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

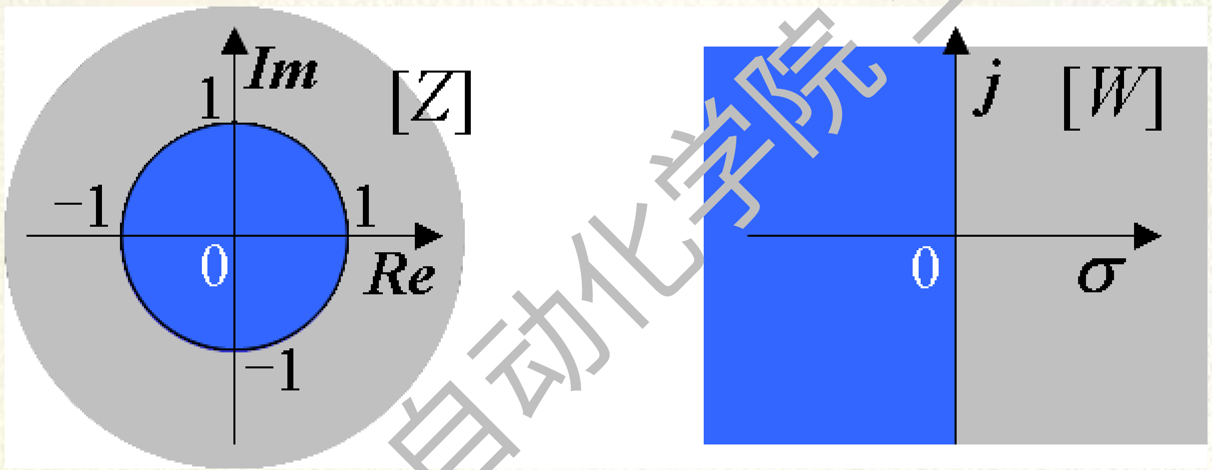


图4-7　*Z*平面与*w*平面的映射关系

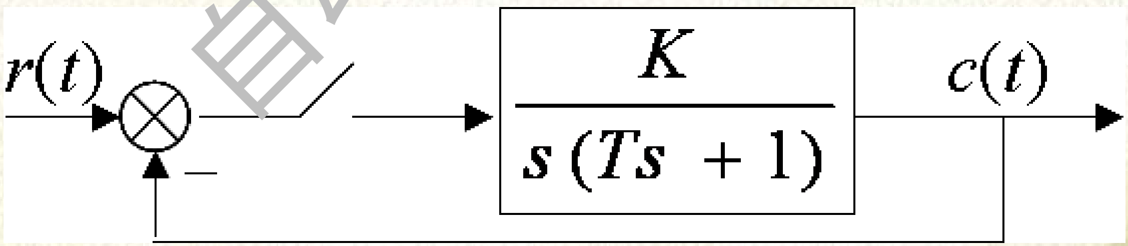
劳思稳定判据具体步骤：

① 求离散系统在Z域的特征方程： $D(z)=0$

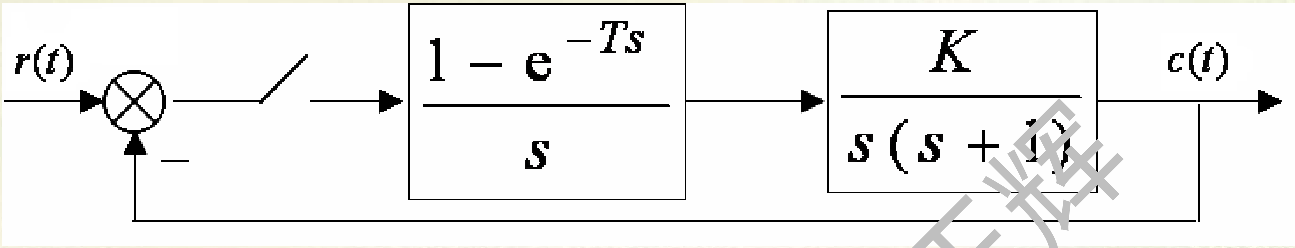
② 进行w变换（$z=\dfrac{w+1}{w-1}$），得w域的特征方程：$D(w)=0$

③ 对w域的特征方程，应用劳思判据判断系统稳定性。

例3：设闭环离散系统如图所示，其中$T=1s$，求系统稳定时K的界值。



设有零阶保持器的系统如图所示



试求：当采样周期T分别为0.5s、1s、 2s时，系统的临界开环增益K_c

零阶保持器对系统有何影响？

2）朱利稳定判据

设离散系统*n*阶闭环特征方程为：

$$D(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n=0 \qquad (a_n>0)$$

利用特征方程系数，按P353表7-4方法构造(2*n*-3)行，(*n*+1)列朱利阵列。

表4-1 朱利矩阵

行数	z^0	z^1	z^2	z^3	$\cdots$	z^{n-k}	$\cdots$	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-k}	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_{n-k}	$\cdots$	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	$\cdots$	b_{k-1}	$\cdots$	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	c_{n-2}			
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}	$\cdots$	c_0			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
$2n-5$	p_0	p_1	p_2	p_3					
$2n-4$	p_3	p_2	p_1	p_0					
$2n-3$	q_0	q_1	q_2						

在朱利阵列中，第2k+2行（即偶数行）各元是2k+1行（即奇数行）各元的反序排列。从第三行起，阵列中各元的定义如下：

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}; \qquad k = 0,1,\cdots n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-k-1} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}; \qquad k = 0,1,\cdots n-2$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-k-2} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}; \qquad k = 0,1,\cdots n-3$$

$$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix}, \quad q_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix}, \quad q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$$

朱利稳定判据（※）：特征方程$D(z)=0$的根，全部位于Z平面上单位圆内的充分必要条件是：

$$\begin{cases} D(1)>0 \\ D(-1)\begin{cases} >0 & \text{当}n\text{为偶数时} \\ <0 & \text{当}n\text{为奇数时} \end{cases} \end{cases}$$

以及下列$(n\text{-}1)$个约束条件成立：

$$|a_0|<a_n,\quad |b_0|>|b_{n-1}|,\quad |c_0|>|c_{n-2}|,\quad |d_0|>|d_{n-3}|,\cdots,|q_0|>|q_2|$$

只有当上述诸条件均满足时，离散系统才是稳定的，否则系统不稳定。

例4：已知离散系统闭环特征方程

$$D(z)=z^4-1.368z^3+0.4z^2+0.08z+0.002=0$$

试用朱利稳定判据判断系统的稳定性。

二、离散系统的稳态误差

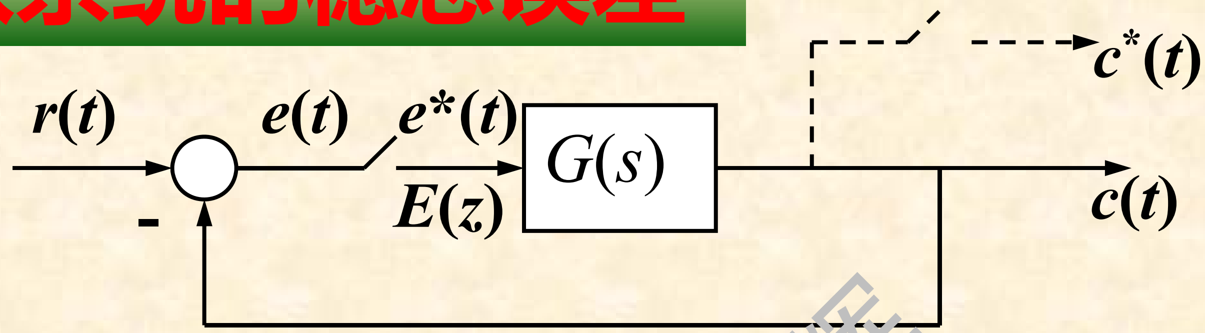


图4-11 单位负反馈离散系统

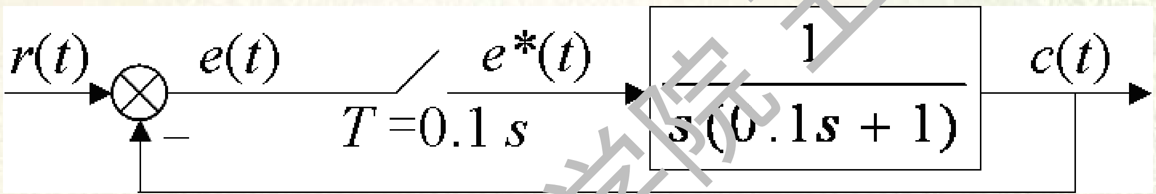
该系统误差脉冲传递函数为：

$$\Phi_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+G(z)}$$

可利用Z变换的终值定理计算采样瞬时的稳态误差：

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)R(z)}{z\left[1+G(z)\right]}$$

例： 系统如下图所示



试求： 1） $r(t)=1(t)$；2） $r(t)=t$ 时的系统稳态误差。

$$E(z)=\frac{R(z)}{1+G(z)}$$

若系统稳定,则

$$e_{ss}=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{R(z)}{1+G(z)}$$

离散系统的型别＝

G(z)中z＝1的极点个数

静态误差系数

$$k_p=\lim_{z\to 1}(z-1)^0G(z)$$

$$k_v=\lim_{z\to 1}(z-1)^1G(z)$$

$$k_a=\lim_{z\to 1}(z-1)^2G(z)$$

r(t) / e_{ss} / 型别	$r(t)=1(t)$ $R(z)=\frac{z}{z-1}$	$r(t)=t$ $R(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$r(t)=\frac{1}{2}t^2$ $R(z)=\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
0型	$\frac{1}{1+k_p}$	∞	∞
I型	0	$\frac{T}{k_v}$	∞
II型	0	0	$\frac{T^2}{k_a}$

三、离散系统的动态性能分析

1、离散系统的时间响应

假定外作用为单位阶跃函数$1(t)$，用系统的阶跃响应来定义离散系统的时域性能指标。

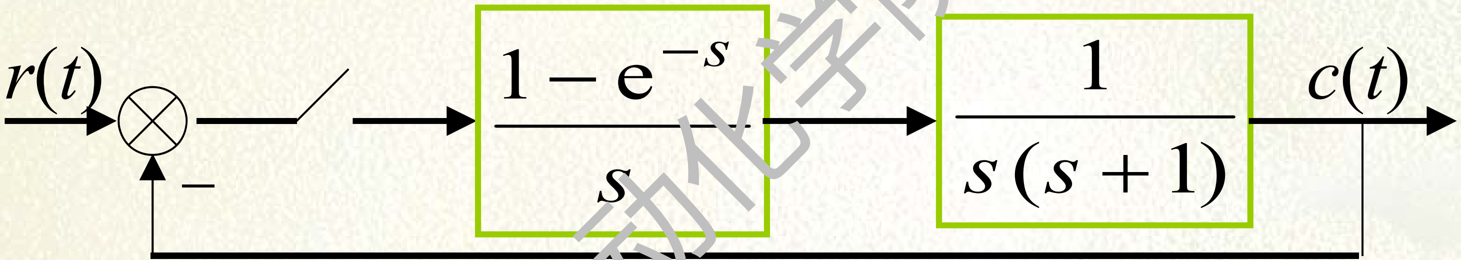
具体步骤：

1 $C(z)=\Phi(z)\dfrac{z}{z-1}$；

2 通过Z反变换，得到系统阶跃响应的输出脉冲序列$c^*(t)$。

3 根据单位阶跃响应曲线就可以方便地分析离散系统的动态和稳态性能。

例:系统如图所示，$T=1$秒，$r(t)=1(t)$。分析离散系统的动态和稳态性能。

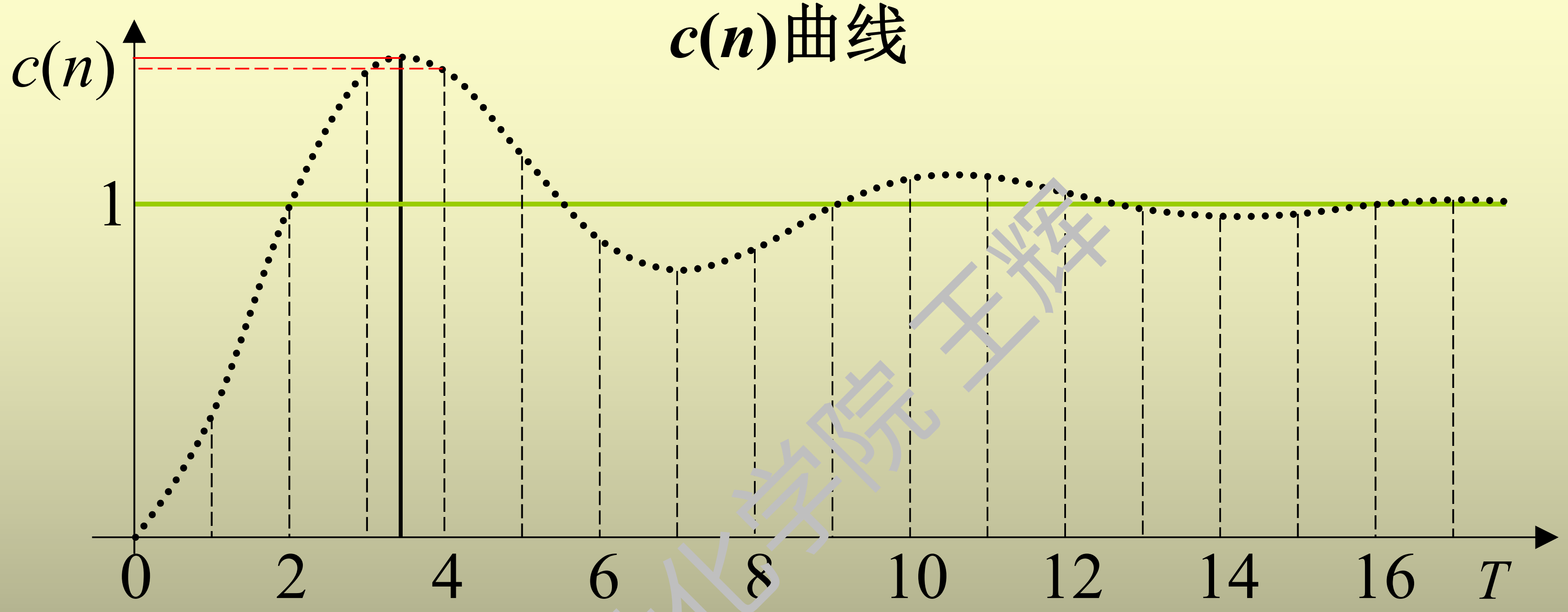


根据 $c(n)$ 的数值可以得到近似的离散系统时域性能指标：

峰值时间 $t_p \approx 4$ 秒；　超调量 $\sigma_p \approx 40\%$；

调节时间 $t_s \approx 12$ 秒，$\Delta=0.05$；　$t_s \approx 15.5$ 秒，$\Delta=0.02$；

$c(0)=0.000$	0.368	1.000	$\boxed{1.400}$	$\boxed{1.400}$	1.147
$c(6)=0.895$	0.802	0.868	0.993	1.077	1.081
$c(12)=1.032$	0.981	0.961	0.973	0.997	1.015

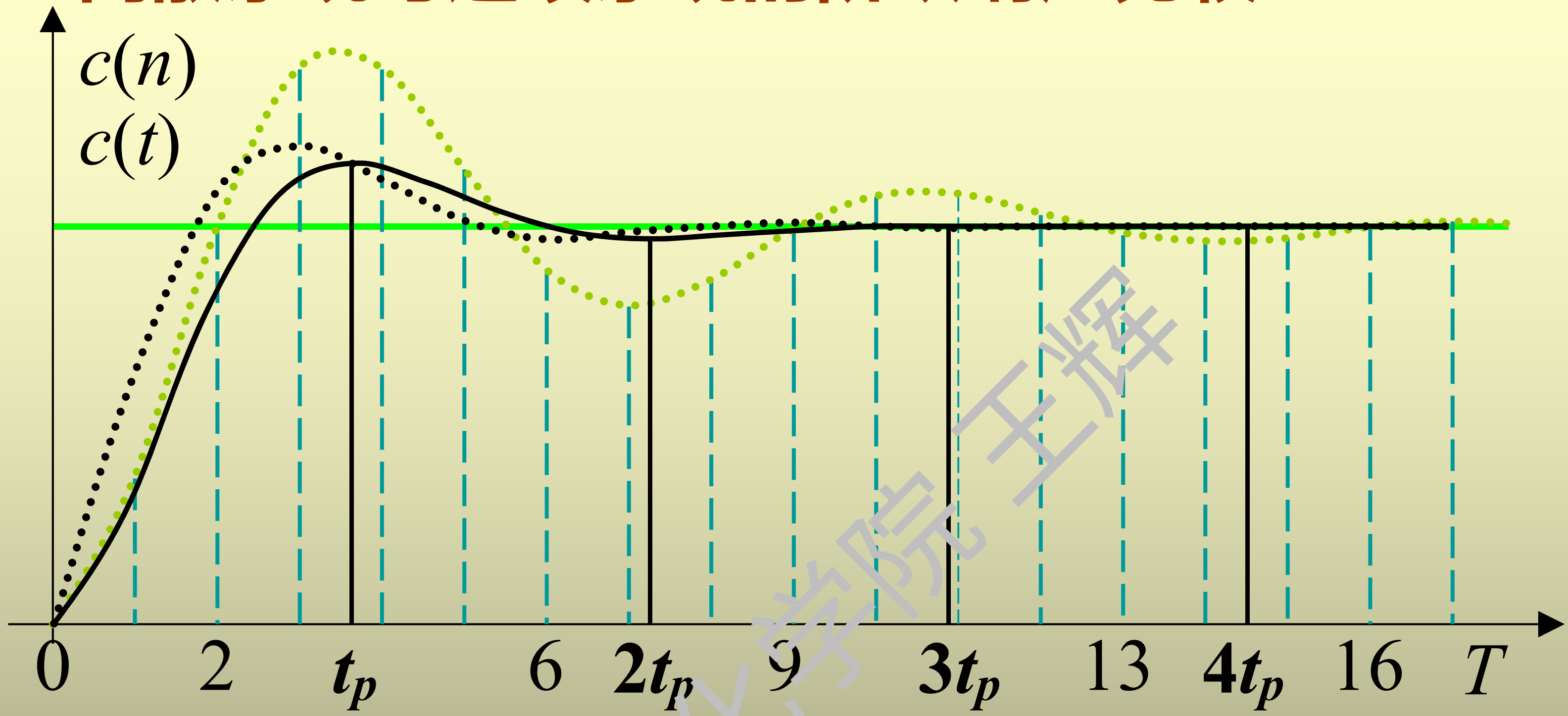


根据 $c(n)$ 的数值可以得到近似的离散系统时域性能指标：

峰值时间 $t_p \approx 4$ 秒； 超调量 $\sigma_p \approx 40\%$；

调节时间 $t_s \approx 12$ 秒，$\Delta = 0.05$； $t_s \approx 15.5$ 秒，$\Delta = 0.02$；

离散系统与连续系统的阶跃响应比较



	连续系统	离散系统 (只有采样器)	离散系统 (有采样器和保持器)
峰值时间/s	3.6	3.0	4.0
调节时间/s	5.3	5.0	12
超调量/%	16.3	20.7	40.0
振荡次数	0.5	0.5	1.5

采样器和保持器对动态性能的影响

(1) 采样器可使系统的峰值时间和调节时间略有减小，但使超调量增大，故采样造成的信息损失会降低系统的稳定程度；

(2) 零阶保持器使系统的峰值时间和调节时间都加长，超调量和振荡次数也增加。这是因为除了采样造成的不稳定因素外，零阶保持器的相角滞后降低了系统的稳定程度。

返回 主目录

哈尔滨工程大学 Harbin Engineering

3、闭环极点与动态响应的关系

1．正实轴上的闭环单极点

2．负实轴上的闭环单极点

3．Z平面上的闭环共轭复数极点

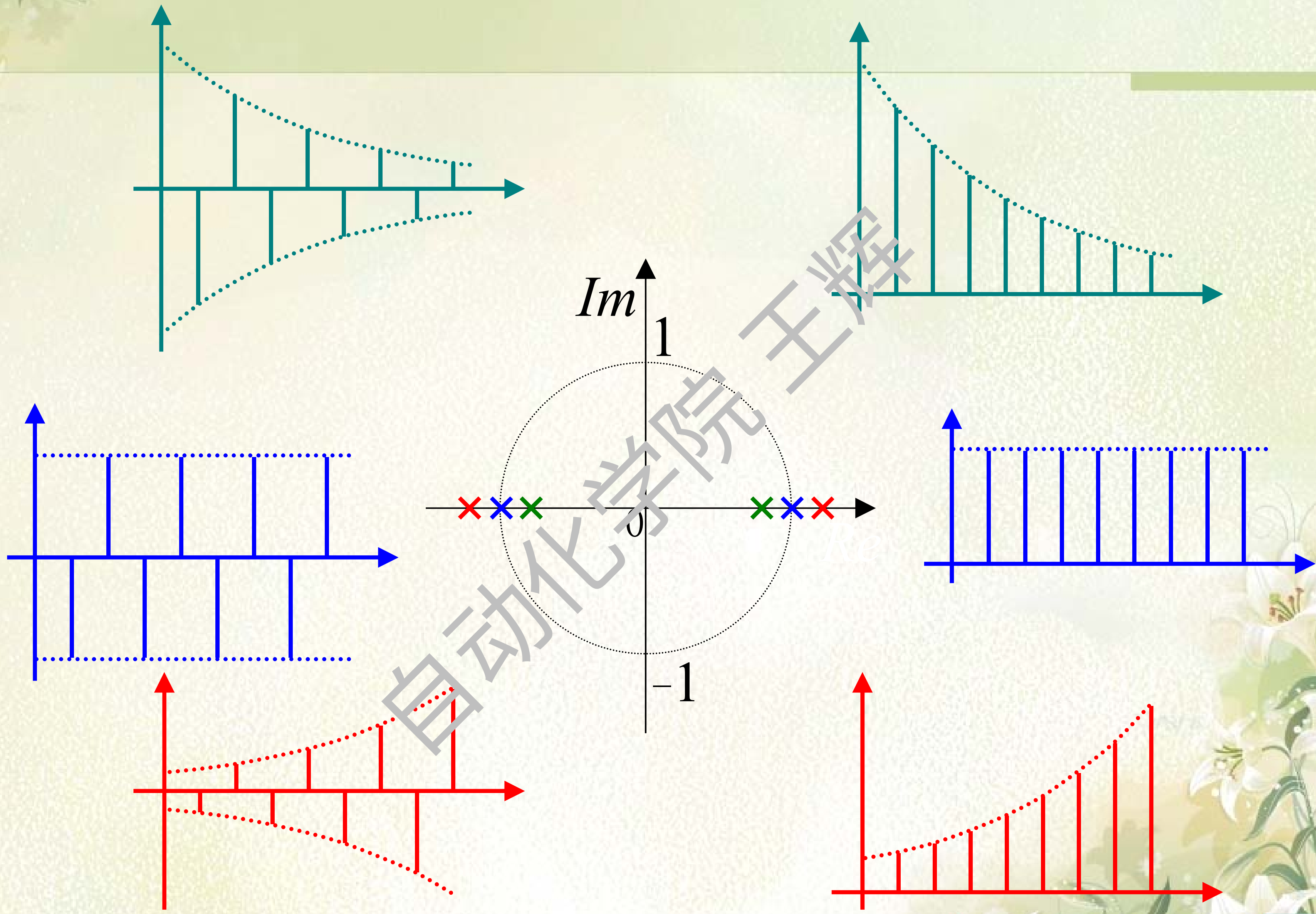
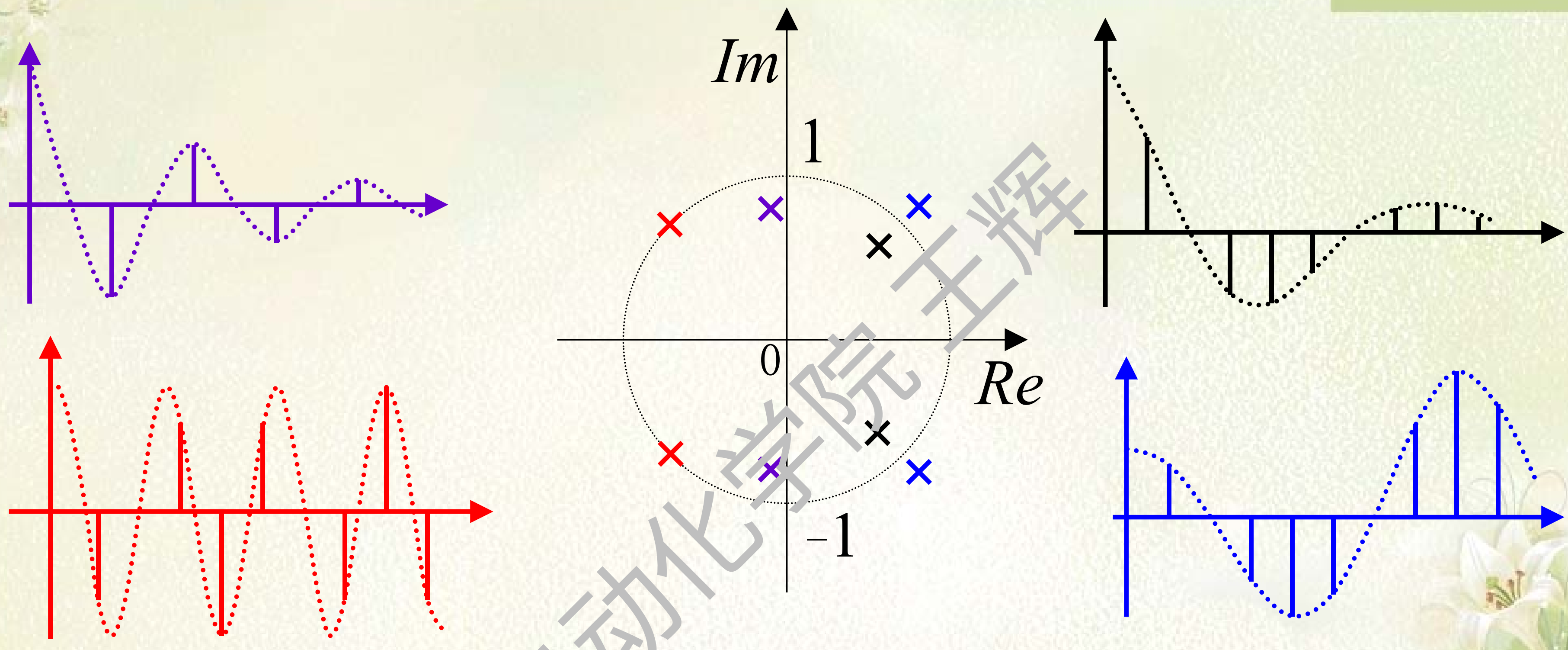


图4-15 闭环实极点分布与相应的动态响应形式



位于Z平面上单位圆内的共轭复数极点，对应输出动态响应的形式为振荡收敛脉冲序列，但复极点位于左边单位圆内所对应的振荡频率，要高于右边单位圆内的情况。

总结： 离散系统的动态特性与闭环极点的分布密切相关。当闭环实极点位于Z平面上左半单位圆内时，由于输出衰减脉冲交替变号，故动态过程质量很差；当闭环复极点位于左半单位圆内时，由于输出衰减高频振荡脉冲，故动态过程性能欠佳。因此，在离散系统设计时，应该把闭环极点安置在Z平面的右半单位圆内，且尽量靠近原点。

9.7 离散系统的数字校正

- **离散系统设计**是指在给定系统性能指标的条件下，设计出控制器的控制规律和相应的数字控制算法。其实，设计离散系统（即计算机控制系统），主要就是设计数字控制器。

- **数字控制器的设计方法**

- 经典法
  - 模拟化设计方法
  - 离散化设计方法
- 状态空间设计法

返回
主目录

一. 数字控制器的脉冲传递函数

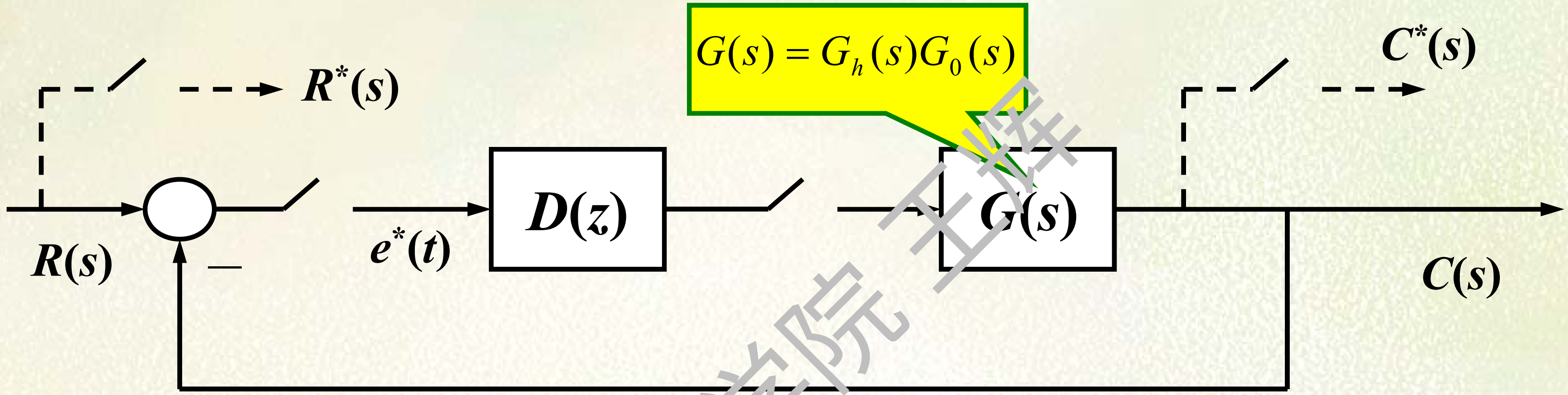


图5-12 具有数字控制器的离散系统

数字控制器的脉冲传递函数为：

$$D(z)=\frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

设计数字控制器的主要思路是:

根据对离散系统性能指标的要求，构造闭环脉冲传递函数$\Phi(z)$或误差脉冲传递函数$\Phi_e(z)$，然后利用关系式

$$\Phi_e(z)=1-\Phi(z),\quad D(z)=\frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

问题归结为如何构造$\Phi(z)$和 $\Phi_e(z)$

二. 最少拍系统设计(Deadbeat system 简称DB)(※)

拍： 通常称离散系统中的一个采样周期为一拍。

最少拍（随动）系统定义： 是指在典型输入作用下，能以有限拍结束瞬态响应过程，拍数最少，且在采样时刻上无稳态误差的随动系统。

对最少拍系统的要求是：

1) 对典型输入信号的稳态误差等于零；

2) 对典型输入信号的过渡过程能在最少个采样周期内结束；

3) 数字控制器是物理可实现的。

1. 使系统对典型输入信号稳态误差为零的条件

使 $e(\infty)$为零的条件是$\Phi_e(z)$中包含有$(1-z^{-1})^m$的因子，即

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^m F(z)$$

2. 使过渡过程时间最短的条件

3. D(z)的物理可实现条件

1) $D(z)$要是物理可实现的，则要求其分母多项式的阶次大于等于分子多项式的阶次。由于

$$D(z)=\frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

$\Phi(z)$的分母与分子多项式阶次之差应大于、等于$G(z)$的分母与分子多项式的阶次之差，才能保证$D(z)$的物理可实现性。

2) G(z)中不稳定因素的处理方法

a）$G(z)$中有单位圆上或单位圆外的**极点**，为保证稳定，设计时应让$\Phi_e(z)$的零点含有$G(z)$的不稳定极点。

b）$G(z)$中有单位圆上或单位圆外的**零点**，要保证$D(z)$稳定，应该让$\Phi(z)$的零点中含$G(z)$的不稳定零点。

c）G(z)中出现**纯延迟环节**时，设计时应让$\Phi(z)$中包含G(z)中的纯延迟环节，从而保证D(z)是物理上可实现的。

在最少拍设计时，$\Phi(z)$及$\Phi_e(z)$的选取应遵循下述原则：

1） $\Phi_e(z)$的分子中必须包含$(1-z^{-1})^m$因子；

(保证系统稳态误差为零)

2）以z^{-1}为变量的 $\Phi(z)$展开式的项数应尽量少；

(保证随动系统为最少拍系统)

3） $\Phi(z)$的分母与分子多项式阶次之差应大于、等于$G(z)$的分母与分子多项式的阶次之差；

(保证$D(z)$是物理可实现的有理多项式)

4） $\Phi_e(z)$ 的零点必须包含$G(z)$中位于单位圆上及单位圆外的极点;（保证闭环系统稳定）

5） $\Phi(z)$ 的零点必须包含$G(z)$中位于单位圆上及单位圆外的零点;（保证控制器$D(z)$稳定）

6) $\Phi(z)$中必须包含$G(z)$中的纯延迟环节.

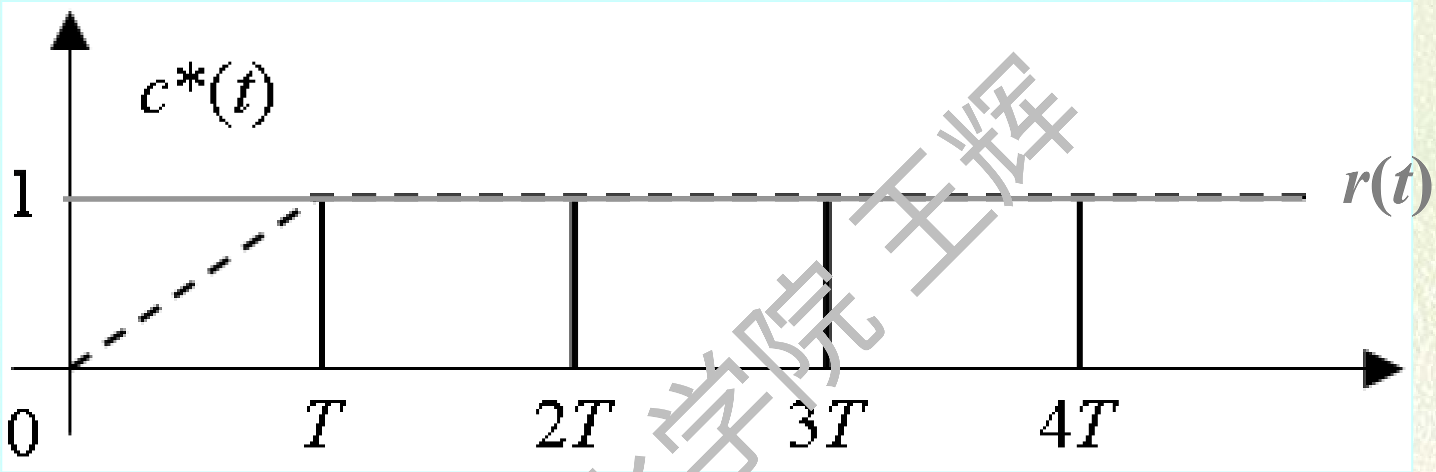
（保证控制器是物理可实现的）

4、典型的最少拍系统设计

所谓典型最少拍系统设计

是指在$G(z)$无延迟，且不含不稳定零点和不稳定极点（即不含单位圆上和单位圆外的零极点），且$G(z)$的分母多项式最多比分子多项式高一次，这样的条件下，设计最少拍系统在不同典型输入作用下的数字控制器脉冲传递函数$D(z)$。

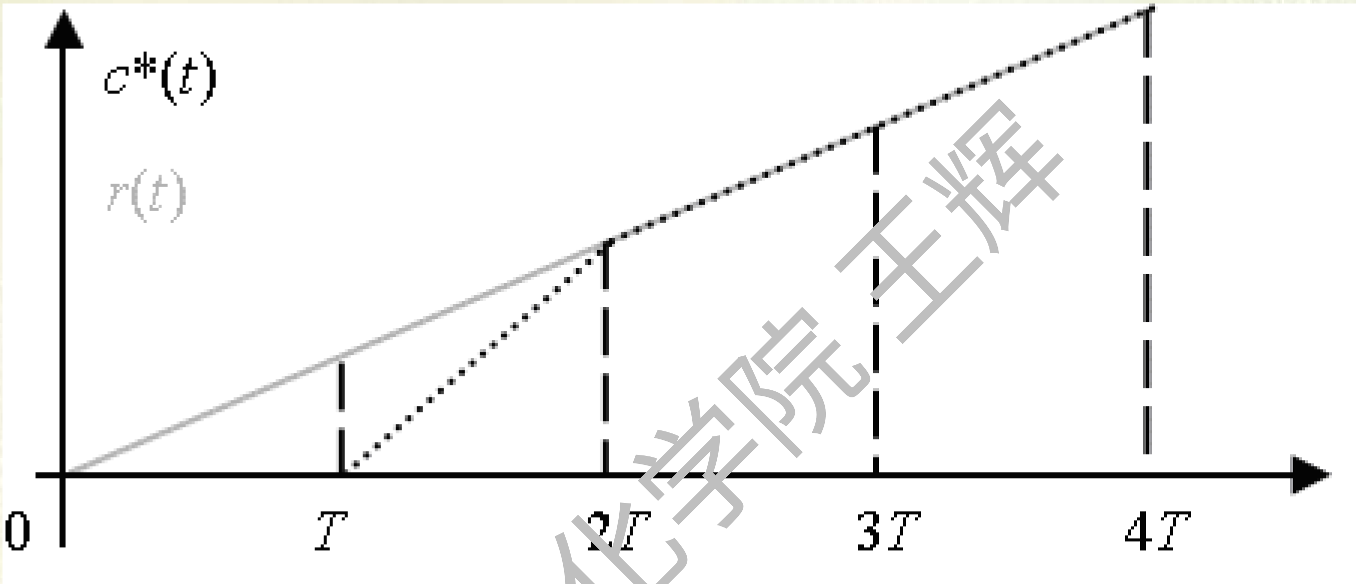
1） 单位阶跃输入时设计最少拍系统的数字控制器$D(z)$



最少拍系统的单位阶跃响应序列

结论：最少拍系统经过一拍便可完全跟踪输入$r(t)=1(t)$，这样的离散系统称为一拍系统，其调节时间$t_s=T$。

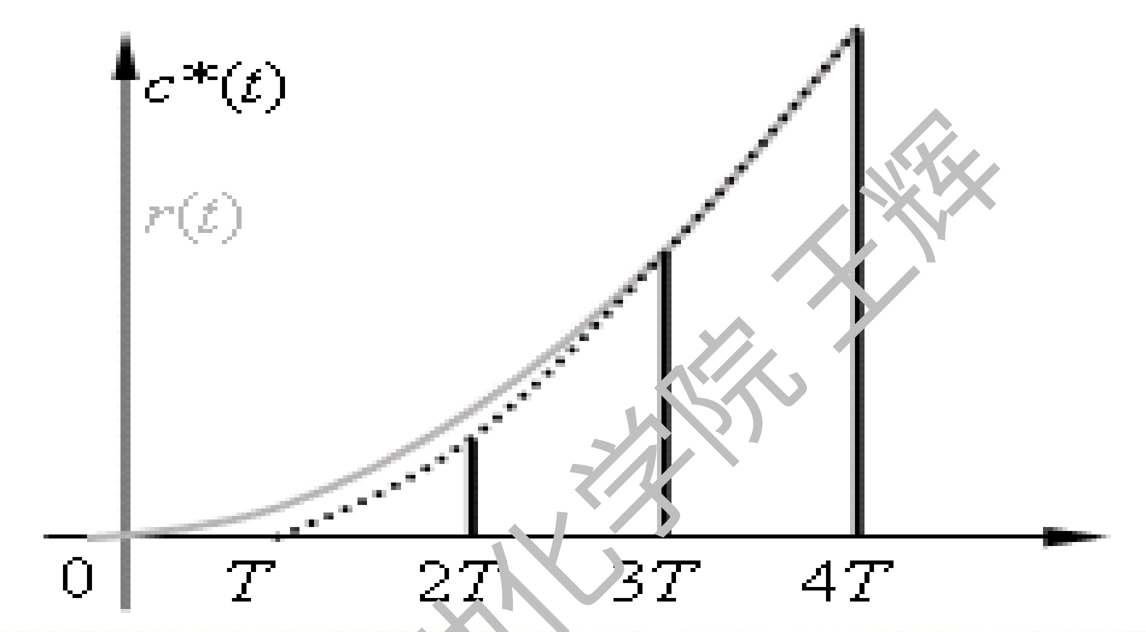
2）单位斜坡输入时设计最少拍系统的数字控制器D(z)



最少拍系统的单位斜坡响应序列

结论：最少拍系统经过二拍便可完全跟踪输入 $r(t)=t$，这样的离散系统称为二拍系统，其调节时间$t_s=2T$。

3) 单位加速度输入时设计最少拍系统的数字控制器D(z)



最少拍系统的单位加速度响应序列

说明：最少拍系统经过三拍便可完全跟踪输入 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$，这样的离散系统称为三拍系统，其调节时间$t_s=3T$。

例（※）设单位反馈线性定常离散系统的连续部分和零阶保持器的传递函数分别为:

$$G_p(s)=\frac{10}{s(s+1)},\qquad G_h(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}$$

其中采样周期$T=1s$，若要求系统在单位斜坡输入时实现最少拍控制，试求数字控制器脉冲传递函数$D(z)$。

例（※）(补充题)已知开环脉冲传递函数为：

$$G(z)=\frac{0.5z^{-1}(1+0.05z^{-1})(1+1.2z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.2z^{-1})(1-0.015z^{-1})}$$

设计$D(z)$，使闭环系统是响应阶跃输入的最少拍系统。

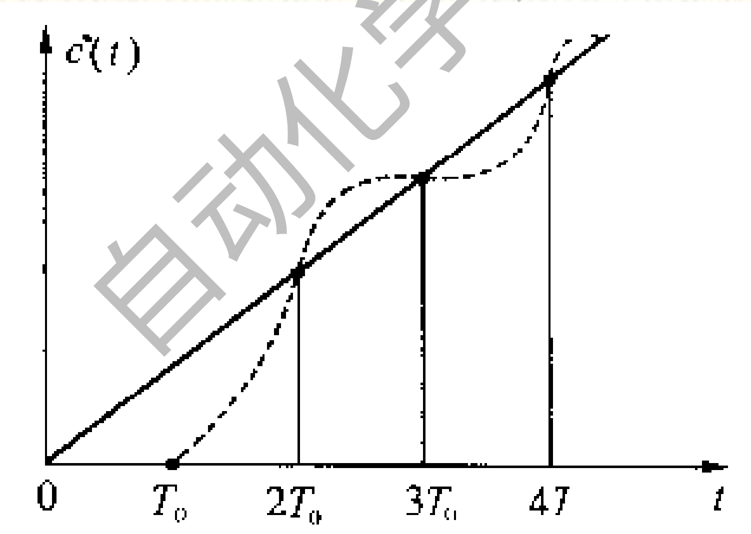
例（※）设数字控制系统的连续部分和零阶保持器的传递函数分别为：

$$G_p(s)=\frac{10}{s(0.1s+1)(0.05s+1)},\qquad G_h(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}$$

其中采样周期$T=0.2s$。试按最少拍设计以阶跃函数输入时的数字控制器$D(z)$。

5、无波纹最少拍系统设计（※）

思考：最少拍系统在过渡过程结束，系统进入稳态后，两个采样时刻之间的稳态误差也一定为零吗？



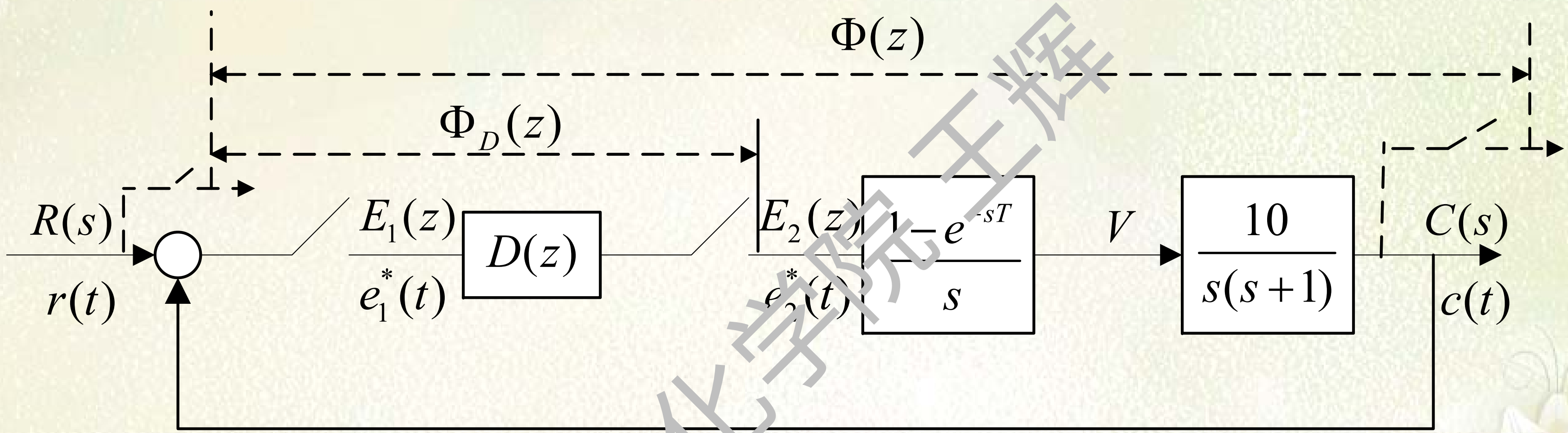
最小拍系统的波纹

5、无波纹最少拍系统设计（※）

无纹波最少拍系统的设计要求是：

在某一种典型输入作用下设计的系统，其输出响应经过尽可能少的采样周期后，不仅在采样时刻上输出可以完全跟踪输入，而且在非采样时刻不存在波纹。

1) 最少拍系统产生波纹的原因



其中采样周期$T=1s$。若要求系统在**单位斜坡输入**时实现最少拍控制，试求数字控制器脉冲传递函数$D(z)$。

返回 主目录

2）无波纹最少拍系统设计

当要求最少拍系统无波纹时，闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 除应满足最少拍系统要求的形式外，还应满足附加条件：$\Phi(z)$ 还必须包含$G(z)$的全部零点，而不论这些零点在Z平面的何处

$$\Phi(z)=P(z)M(z)$$

返回　主目录

在无波纹最少拍设计时，$\Phi(z)$及$\Phi_e(z)$的选取应遵循下述原则:

1）$\Phi_e(z)$的分子中必须包含$(1-z^{-1})^m$因子；

(保证系统稳态误差为零)

2）以z^{-1}为变量的 $\Phi(z)$展开式的项数应尽量少;

(保证随动系统为最少拍系统)

3） $\Phi(z)$的分母与分子多项式阶次之差应大于、等于$G(z)$的分母与分子多项式的阶次之差；

(保证$D(z)$是物理可实现的有理多项式)

4） $\Phi_e(z)$ 的零点必须包含$G(z)$中位于单位圆上及单位圆外的极点；（保证闭环系统稳定）

5）$\Phi(z)$的零点必须包含$G(z)$的全部零点；

（保证控制器稳定，无波纹）

6）$\Phi(z)$中必须包含$G(z)$中的纯延迟环节.

（保证控制器是物理可实现的）

返回 主目录

例（※）：对上例中所给系统，已知开环脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{3.68z^{-1}(1+0.717z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

要求在单位斜坡输入时实现无波纹最少拍控制，试设计 $D(z)$。(T =1秒)

结论：$G(z)$在单位圆内的零点数，就是无波纹最少拍系统比有波纹最少拍系统所增加的拍数。

作业：针对上述$G(z)$,分别在单位阶跃输入、单位加速度输入作用下，设计$D(z)$实现无波纹最少拍控制。

继续下一章吗？

继续

结束

返回

主目录