复变函数公式速查

求导：$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ （C-R方程）

函数：$e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

$Lnz=\ln|z|+iArgz$

$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2i}$

积分：

①参数方程　$z=e^{i\theta}$　$dz=ie^{i\theta}d\theta$

$\begin{cases}x=t\\ y=t\end{cases}$　若 $z=x+iy$ 则 $z=(1+i)t$

②柯西积分定理：$\oint_c f(z)dz=0$ （闭路上及内部D解析）

·复合闭路定理：$\oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}\oint_{C_k}f(z)dz$

·柯西积分公式：$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$ （f(z)在C上及其内部解析）

·高阶求导公式：$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$ （同时，泰勒展开定理 $c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$）

③留数基本定理：$\oint_c f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res[f(z),z_k]$

留数：

①定义推论：$Res[f(z),z_0]=c_{-1}$

② z_0为可去奇点：$Res[f(z),z_0]=0$

③ z_0为f(z)的(n+1)阶极点：$Res[f(z),z_0]=\frac{1}{n!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^n}{dz^n}[(z-z_0)^{n+1}f(z)]$

·若 z_0为一阶奇点：

$Res[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

若 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z_0)\neq 0$，$Q(z_0)=0$ 在 z_0处解析，$Res[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

级数:　　　　　　　　　　　　　　　　　福轩

①等比数列求和公式　$S_n=\frac{1-q^n}{1-q}$

②幂级数　$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$

③Abel定理

④敛散性:　·$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lambda$

或　·$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lambda$

$$\Rightarrow R=\begin{cases}0 & \lambda=\infty\\ \frac{1}{\lambda} & 0<\lambda<+\infty\\ +\infty & \lambda=0\end{cases}$$

⑤泰勒级数

· $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots$; $|z|<1$

· $\ln(1-z)=-\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\right)$; $|z|<1$

· $e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$　收敛半径 $R=+\infty$　因为在平面内都可导

· $\sin z=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^m\frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}+\cdots$　$|z|<+\infty$

· $\cos z=\frac{z^0}{0!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{z^{2m}}{(2m)!}+\cdots$

⑥加减乘除