1 Aufgabe 1

1.1 Teilaufgabe a)

Die Formel zur Berechnung von d ist $d = 1/\pi$. Daraus ergibt sich $\frac{\partial d}{\partial \pi} = -\frac{1}{\pi^2}$. Laut Fehlerfortpflanzung gilt:

$$\delta d = \sqrt{\frac{1}{\pi^4 \cdot \delta\pi^2}} = |\frac{\delta\pi}{\pi^2}| \tag{1}$$

Damit ergibt sich

$$d = \frac{1}{0.3107} pc = 3.219 pc \tag{2}$$

und

$$\delta d = |\frac{0.0009}{0.3107^2}| pc = 0.010 pc \tag{3}$$

Die Entfernung des Sterns ist also:

$$d = (3.219 \pm 0.010) pc \tag{4}$$

1.2 Teilaufgabe b)

Aufgrund des relativen Fehlers ergibt sich für $\pi = (1.0 \pm 0.6) mas$. Damit ergibt sich

$$d = \frac{1}{0.001} pc = 1000 pc \tag{5}$$

und mit (1)

$$\delta d = |\frac{0.0006}{0.001^2}| pc = 600 pc \tag{6}$$

Die Enfernung von Deneb ist damit:

$$d = (1.0 \pm 0.6) kpc \tag{7}$$

1.3 Teilaufgabe c)

1.3.1 Teilaufgabe (i)

Die Beziehung $(m - M)_V - A_V = 5 \cdot \log_{10}(d) - 5$ lässt sich umformen zu:

$$d = 10 \cdot 10^{\frac{m_V - M_V - A_V}{5}} \tag{8}$$

Für die Berechnung des Fehlers wird berechnet:

$$\frac{\partial d}{\partial M_V} = -2 \cdot \ln(10) \cdot 10^{\frac{m_V - M_V - A_V}{5}} = -\frac{\ln(10)}{5} \cdot d \tag{9}$$

Mit (9) ergibt sich dann für die Fehlerfortpflanzung:

$$\delta d = \sqrt{(-\frac{\ln(10)}{5} \cdot d)^2 \cdot \delta {M_V}^2} = \frac{\ln(10)}{5} \cdot |d \cdot \delta M_V| \tag{10}$$

So ergibt sich die Entfernung von Deneb zu:

$$d = 10 \cdot 10^{\frac{1.25-(-8.27)-0.113}{5}} = 761pc \tag{11}$$

Für den Fehler erhält man:

$$\delta d = \frac{\ln(10)}{5} \cdot |761 \cdot 0.23| pc = 90pc \tag{12}$$

Der Abstand von Deneb ergibt sich also mit dieser Methode zu:

$$d = (761 \pm 90)pc \tag{13}$$

1.3.2 Teilaufgabe (ii)

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz lässt sich umformen zu:

$$R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma}} \cdot \frac{1}{T_{eff}^2} \tag{14}$$

Um (14) in den Einheiten $L_\odot$ und $T_{eff,\odot}^2$ ausdrücken, wird (14) so erweitert, dass sich ergibt:

$$R = \sqrt{\frac{L/L_\odot}{4\pi\sigma}} \cdot \frac{1}{T_{eff}^2/T_{eff,\odot}^2} \cdot \frac{\sqrt{L_\odot}}{T_{eff,\odot}^2} \tag{15}$$

Definiert man $L[L_\odot] := L/L_\odot$, $T_{eff}[T_{eff,\odot}] := T_{eff}/T_{eff,\odot}$ und $R[R_\odot] := R/R_\odot$ als Leuchtkraft, effektive Temperatur und Radius in Sonneneinheiten, so ergibt sich:

$$R[R_\odot] = \frac{\sqrt{L[L_\odot]}}{T_{eff}^2[T_{eff,\odot}]} \cdot \frac{\sqrt{L_\odot}}{\sqrt{4\pi\sigma} \cdot T_{eff,\odot}^2 \cdot R_\odot} \tag{16}$$

Mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz (Gl. (14)) folgt, dass:

$$\frac{\sqrt{L_\odot}}{\sqrt{4\pi\sigma} \cdot T_{eff,\odot}^2 \cdot R_\odot} = 1 \tag{17}$$

Man erhält dann aus (16) die Formel des Radius in Abhängigkeit der Leuchtkraft und der Effektivtemperatur in Einheiten der Sonne:

$$R[R_\odot] = \frac{\sqrt{L[L_\odot]}}{T_{eff}^2[T_{eff,\odot}]} \tag{18}$$

Für die Fehlerfortpflanzung berechnet man

$$\frac{\partial R}{\partial T_{eff}} = -\frac{2\sqrt{L}}{T_{eff}^3} \tag{19}$$

und

$$\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{1}{2\sqrt{L} \cdot T_{eff}^2} \tag{20}$$

Aus (19) und (20) folgt dann:

$$\delta R[R_\odot] = \sqrt{(\frac{\partial R}{\partial T_{eff}})^2 \cdot \delta T_{eff}^2 + (\frac{\partial R}{\partial L})^2 \cdot \delta L^2} = \sqrt{\frac{4L}{T_{eff}^6} \cdot \delta T_{eff}^2 + \frac{1}{4LT_{eff}^4} \cdot \delta L^2} \tag{21}$$

Für den Radius von Deneb ergibt sich dann aus den vorigen Überlegungen:

$$R[R_\odot] = \frac{\sqrt{1.8 \cdot 10^5}}{(\frac{8530}{5778})^2} = 195 \tag{22}$$

und

$$\delta R[R_\odot] = \sqrt{\frac{4 \cdot 1.8 \cdot 10^5}{(\frac{8530}{5778})^6} \cdot (\frac{80}{5778})^2 + \frac{1}{4 \cdot 1.8 \cdot 10^5 \cdot (\frac{8530}{5778})^4} \cdot (0.4 \cdot 10^5)^2} = 22 \tag{23}$$

Damit ergibt sich für den Radius von Deneb als Funktion von Leuchtkraft und Effektivtemperatur in Sonneneinheiten:

$$\delta R[R_\odot] = 195 \pm 22 \tag{24}$$

Literatur

[Bec] BECKMANN, Dieter. Astrophysik. C.C.Buchner, 2011.

[Ort] Wikipedia: Ortszeit. Online im Internet: URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Ortszeit (Stand: 01.03.2014).