1 Aufgabe 1

1.1 Teilaufgabe a)

Die Formel zur Berechnung von d ist $d = 1/\pi$. Daraus ergibt sich $\frac{\partial d}{\partial \pi} = -\frac{1}{\pi^2}$. Laut Fehlerfortpflanzung gilt:

$$\delta d = \sqrt{\frac{1}{\pi^4 \cdot \delta\pi^2}} = \left|\frac{\delta\pi}{\pi^2}\right| \tag{1}$$

Damit ergibt sich

$$d = \frac{1}{0.3107} pc = 3.2185 \text{ pc} \approx 3.219 \text{ pc} \tag{2}$$

und

$$\delta d = \left|\frac{0.0009}{0.3107^2}\right| pc = 0.00932 \text{ pc} \approx 0.010 \text{ pc} \tag{3}$$

Die Entfernung des Sterns ist also:

$$d = 3.219 \pm 0.010 pc \tag{4}$$

1.2 Teilaufgabe b)

Aufgrund des relativen Fehlers ergibt sich für $\pi = (1.0 \pm 0.6) mas$. Damit ergibt sich

$$d = \frac{1}{0.001} \text{pc} = 1000 \text{pc} \tag{5}$$

und mit (1)

$$\delta d = |\frac{0.0006}{0.001^2}| pc = 600 pc \tag{6}$$

Die Enfernung von Deneb ist damit:

$$d = 1.0 \pm 0.6 \text{kpc} \tag{7}$$

1.3 Teilaufgabe c)

1.3.1 Teilaufgabe (i)

Die Beziehung $(m - M)_V - A_V = 5 \cdot \log_{10}(d) - 5$ lässt sich umformen zu:

$$d = 10 \cdot 10^{\frac{m_V - M_V - A_V}{5}} \tag{8}$$

Für die Berechnung des Fehlers wird berechnet:

$$\frac{\partial d}{\partial M_V} = -2 \cdot \ln(10) \cdot 10^{\frac{m_V - M_V - A_V}{5}} = -\frac{\ln(10)}{5} \cdot d \tag{9}$$

Mit (9) ergibt sich dann für die Fehlerfortpflanzung:

$$\delta d = \sqrt{(-\frac{\ln(10)}{5} \cdot d)^2 \cdot \delta {M_V}^2} = \frac{\ln(10)}{5} \cdot |d \cdot \delta M_V| \tag{10}$$

So ergibt sich die Entfernung von Deneb zu:

$$d = 10 \cdot 10^{\frac{1.25-(-8.27)-0.113}{5}} = 761.03\text{pc} \tag{11}$$

Für den Fehler erhält man:

$$\delta d = \frac{\ln(10)}{5} \cdot |761 \cdot 0.23| pc = 80.60\text{pc} \approx 90\text{pc} \tag{12}$$

Der Abstand von Deneb ergibt sich also mit dieser Methode zu:

$$d = (761 \pm 90) pc \tag{13}$$

1.3.2 Teilaufgabe (ii)

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz lässt sich umformen zu:

$$R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma}} \cdot \frac{1}{T_{eff}^2} \tag{14}$$

Um (14) in den Einheiten $L_\odot$ und $T_{eff,\odot}^2$ auszudrücken, wird (14) so erweitert, dass sich ergibt:

$$R = \sqrt{\frac{L/L_\odot}{4\pi\sigma}} \cdot \frac{1}{T_{eff}^2/T_{eff,\odot}^2} \cdot \frac{\sqrt{L_\odot}}{T_{eff,\odot}^2} \tag{15}$$

Definiert man $L[L_\odot] := L/L_\odot$, $T_{eff}[T_{eff,\odot}] := T_{eff}/T_{eff,\odot}$ und $R[R_\odot] := R/R_\odot$ als Leuchtkraft, effektive Temperatur und Radius in Sonneneinheiten, so ergibt sich:

$$R[R_\odot] = \frac{\sqrt{L[L_\odot]}}{T_{eff}^2[T_{eff,\odot}]} \cdot \frac{\sqrt{L_\odot}}{\sqrt{4\pi\sigma} \cdot T_{eff,\odot}^2 \cdot R_\odot} \tag{16}$$

Mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz (Gl. 14) folgt, dass:

$$\frac{\sqrt{L_\odot}}{\sqrt{4\pi\sigma} \cdot T_{eff,\odot}^2 \cdot R_\odot} = 1 \tag{17}$$

Man erhält dann aus (16) die Formel des Radius in Abhängigkeit der Leuchtkraft und der Effektivtemperatur in Einheiten der Sonne:

$$R[R_\odot] = \frac{\sqrt{L[L_\odot]}}{T_{eff}^2[T_{eff,\odot}]} \tag{18}$$

Für die Fehlerfortpflanzung berechnet man

$$\frac{\partial R}{\partial T_{eff}} = -\frac{2\sqrt{L}}{T_{eff}^3} \tag{19}$$

und

$$\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{1}{2\sqrt{L} \cdot T_{eff}^2} \tag{20}$$

Aus (19) und (20) folgt dann:

$$\delta R[R_\odot] = \sqrt{(\frac{\partial R}{\partial T_{eff}})^2 \cdot \delta T_{eff}^2 + (\frac{\partial R}{\partial L})^2 \cdot \delta L^2} = \sqrt{\frac{4L}{T_{eff}^6} \cdot \delta T_{eff}^2 + \frac{1}{4LT_{eff}^4} \cdot \delta L^2} \tag{21}$$

Für den Radius von Deneb ergibt sich dann aus den vorigen Überlegungen:

$$R[R_\odot] = \frac{\sqrt{1.8 \cdot 10^5}}{(\frac{8530}{5778})^2} = 194.67 \approx 195 \tag{22}$$

und

$$\delta R[R_\odot] = \sqrt{\frac{4 \cdot 1.8 \cdot 10^5}{(\frac{8530}{5778})^6} \cdot (\frac{80}{5778})^2 + \frac{1}{4 \cdot 1.8 \cdot 10^5 \cdot (\frac{8530}{5778})^4} \cdot (0.4 \cdot 10^5)^2} = 21.936 \approx 22 \tag{23}$$

Damit ergibt sich für den Radius von Deneb als Funktion von Leuchtkraft und Effektivtemperatur in Sonneneinheiten:

$$\delta R[R_\odot] = 195 \pm 22 \tag{24}$$

2 Aufgabe 2

2.1 a)

Die erste Messung werde mit $P_{orb,1}$ bezeichnet, die zweite mit $P_{orb,2}$ bezeichnet. Es gilt

$$\Delta P_{orb,A} = P_{orb,1} - P_{orb,2} = 24.31704\text{d} - 24.316\text{d} = 0.00104 \text{ d} \approx 0.0010 \pm 0.0011 \text{ d}. \tag{25}$$

Für den Fehler ergibt sich:

$$\begin{aligned}\delta(\Delta P_{orb,A}) &= \sqrt{(\frac{\partial \Delta P_{orb,A}}{\partial P_{orb,1}})^2 \cdot (\delta P_{orb,1})^2 + (\frac{\partial \Delta P_{orb,A}}{\partial P_{orb,2}})^2 \cdot (\delta P_{orb,2})^2} \\ &= \sqrt{(\delta P_{orb,1})^2 + (\delta P_{orb,2})^2} \\ &= 0.001002 \text{ d} \approx 0.0011 \text{ d}\end{aligned} \tag{26}$$

2.2 b)

Diese Messung von 2010 sei mit $P_{orb,1}$ bezeichnet. Analog ergibt sich:

$$\Delta P_{orb,B} = P_{orb,1} - P_{orb,3} = 24.31704\text{ d} - 24.31617\text{ d} = (0.00087 \pm 0.00010)\text{d}. \tag{27}$$

Für den Fehler ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\delta(\Delta P_{orb,B}) &= \sqrt{(\frac{\partial \Delta P_{orb,B}}{\partial P_{orb,1}})^2 \cdot (\delta P_{orb,1})^2 + (\frac{\partial \Delta P_{orb,B}}{\partial P_{orb,3}})^2 \cdot (\delta P_{orb,3})^2} \\
&= \sqrt{(\delta P_{orb,1})^2 + (\delta P_{orb,3})^2} \\
&= 0.0000922\text{ d} \approx 0.0001\text{ d}
\end{aligned} \tag{28}$$

3 Aufgabe 3

3.1 a)

Es ist ein κ gesucht, sodass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \kappa \cdot exp(-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2})dx = 1. \tag{29}$$

Es gilt aufgrund der Symmetrie der Gaußkurve und mittels passender Substitution:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \kappa \cdot exp(-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2})dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \kappa \cdot exp(-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2})d(x-M) \\
&= 2 \cdot \int_{0}^{\infty} \kappa \cdot exp(-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2})d(x-M) \\
&= \kappa \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sigma = 1.
\end{aligned} \tag{30}$$

Daraus ergibt sich:

$$\kappa \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sigma = 1 \tag{31}$$

oder

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma}. \tag{32}$$

3.2 b)

Zur Lösung dieser Aufgabe werden die Differenzen $\Delta P_{orb,A}$ und $\Delta P_{orb,B}$ und die in Teilaufgabe 2b) angegebenen Fehler verwendet, die in diesem Fall mangels weiterer Daten als Standardabweichungen aufgefasst werden. Der Lösung liegt die Betrachtung einer

Gauß-Verteilung um den Mittelwert 0 und mit der Standardabweichung $\delta(\Delta P_{orb,A})$ bzw. $\delta(\Delta P_{orb,B})$ zugrunde. Diese ergibt sich damit zu:

$$f(x) := \kappa \cdot exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}). \tag{33}$$

Als gesuchte Wahrscheinlichkeit wird nun der Bereich der Gaußkurve mit einer Abweichung von mehr als $\Delta P_{orb,A}$ bzw. $\Delta P_{orb,B}$ angesehen. Diese Wahrscheinlichkeit α ergibt sich über die entsprechende Fläche zu:

$$\alpha = \int_{-\infty}^{-\Delta P_{orb}} f(x)dx + \int_{\Delta P_{orb}}^{\infty} f(x)dx. \tag{34}$$

Aufgrund der in a) vorgenommenen Normierung kann dies umgeschrieben werden zu:

$$\alpha = 1 - \int_{-\Delta P_{orb}}^{\Delta P_{orb}} f(x)dx = 1 - 2 \cdot \int_{0}^{\Delta P_{orb}} \kappa \cdot exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})dx. \tag{35}$$

Mittels $y = \frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sigma}$ und unter Berücksichtigung von (32) ergibt sich:

$$\alpha = 1-2\cdot\int_{0}^{\frac{\Delta P_{orb}}{\sqrt{2}\cdot\sigma}} \kappa\cdot exp(-y^2)\cdot\sqrt{2}\cdot\sigma dy = 1-2\cdot\int_{0}^{\frac{\Delta P_{orb}}{\sqrt{2}\cdot\sigma}} exp(-y^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sigma dy = 1-\mathrm{erf}(\frac{\Delta P_{orb}}{\sqrt{2}\cdot\sigma}). \tag{36}$$

Diese Integrale sind leider analytisch nicht lösbar, sodass sie mittels eines Befehls in ISIS gelöst werden. Es ergibt sich im Fall a) zunächst $\frac{\Delta P_{orb,A}}{\sqrt{2}\cdot\delta(\Delta P_{orb,A})} = \frac{0.00104}{\sqrt{2}\cdot 0.001002} = 0.73392$ und in b) $\frac{(\Delta P_{orb,B})}{\sqrt{2}\cdot\delta(\Delta P_{orb,B})} = \frac{0.00087}{\sqrt{2}\cdot 0.0000922} = 6.6723$. Für die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich dann:

$$\alpha_1 = 1 - \mathrm{erf}(0.73392) = 0.29931 \approx 0.3. \tag{37}$$

Für α_2 ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit, die ISIS als 0 ausgibt. Tatsächlich ist diese natürlich ungleich Null, aber verschwindend klein.