

1 Aufgabe 1

1.1 Teilaufgabe a)

Die Formel zur Berechnung von d ist $d = 1/\pi$. Daraus ergibt sich $\frac{\partial d}{\partial \pi} = -\frac{1}{\pi^2}$. Laut Fehlerfortpflanzung gilt:

$$\delta d = \sqrt{\frac{1}{\pi^4 \cdot \delta \pi^2}} = \left| \frac{\delta \pi}{\pi^2} \right| \quad (1)$$

Damit ergibt sich

$$d = \frac{1}{0.3107} \text{ pc} = 3.2185 \text{ pc} \approx 3.219 \text{ pc} \quad (2)$$

und

$$\delta d = \left| \frac{0.0009}{0.3107^2} \right| \text{ pc} = 0.00932 \text{ pc} \approx 0.010 \text{ pc} \quad (3)$$

Die Entfernung des Sterns ist also:

$$d = 3.219 \pm 0.010 \text{ pc} \quad (4)$$

1.2 Teilaufgabe b)

Aufgrund des relativen Fehlers ergibt sich für $\pi = (1.0 \pm 0.6) \text{ mas}$. Damit ergibt sich

$$d = \frac{1}{0.001} \text{ pc} = 1000 \text{ pc} \quad (5)$$

und mit (1)

$$\delta d = \left| \frac{0.0006}{0.001^2} \right| \text{ pc} = 600 \text{ pc} \quad (6)$$

Die Entfernung von Deneb ist damit:

$$d = 1.0 \pm 0.6 \text{ kpc} \quad (7)$$

1.3 Teilaufgabe c)

1.3.1 Teilaufgabe (i)

Die Beziehung $(m - M)_V - A_V = 5 \cdot \log_{10}(d) - 5$ lässt sich umformen zu:

$$d = 10 \cdot 10^{\frac{m_V - M_V - A_V}{5}} \quad (8)$$

Für die Berechnung des Fehlers wird berechnet:

$$\frac{\partial d}{\partial M_V} = -2 \cdot \ln(10) \cdot 10^{\frac{m_V - M_V - A_V}{5}} = -\frac{\ln(10)}{5} \cdot d \quad (9)$$

Mit (9) ergibt sich dann für die Fehlerfortpflanzung:

$$\delta d = \sqrt{\left(-\frac{\ln(10)}{5} \cdot d\right)^2 \cdot \delta M_V^2} = \frac{\ln(10)}{5} \cdot |d \cdot \delta M_V| \quad (10)$$

So ergibt sich die Entfernung von Deneb zu:

$$d = 10 \cdot 10^{\frac{1.25 - (-8.27) - 0.113}{5}} = 761.03 \text{pc} \quad (11)$$

Für den Fehler erhält man:

$$\delta d = \frac{\ln(10)}{5} \cdot |761 \cdot 0.23| \text{pc} = 80.60 \text{pc} \approx 90 \text{pc} \quad (12)$$

Der Abstand von Deneb ergibt sich also mit dieser Methode zu:

$$d = (761 \pm 90) \text{pc} \quad (13)$$

1.3.2 Teilaufgabe (ii)

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz lässt sich umformen zu:

$$R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma}} \cdot \frac{1}{T_{eff}^2} \quad (14)$$

Um (14) in den Einheiten L_\odot und $T_{eff,\odot}^2$ auszudrücken, wird (14) so erweitert, dass sich ergibt:

$$R = \sqrt{\frac{L/L_\odot}{4\pi\sigma}} \cdot \frac{1}{T_{eff}^2/T_{eff,\odot}^2} \cdot \frac{\sqrt{L_\odot}}{T_{eff,\odot}^2} \quad (15)$$

Definiert man $L[L_\odot] := L/L_\odot$, $T_{eff}[T_{eff,\odot}] := T_{eff}/T_{eff,\odot}$ und $R[R_\odot] := R/R_\odot$ als Leuchtkraft, effektive Temperatur und Radius in Sonneneinheiten, so ergibt sich:

$$R[R_\odot] = \frac{\sqrt{L[L_\odot]}}{T_{eff}^2[T_{eff,\odot}]} \cdot \frac{\sqrt{L_\odot}}{\sqrt{4\pi\sigma} \cdot T_{eff,\odot}^2 \cdot R_\odot} \quad (16)$$

Mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz (Gl. 14) folgt, dass:

$$\frac{\sqrt{L_\odot}}{\sqrt{4\pi\sigma} \cdot T_{eff,\odot}^2 \cdot R_\odot} = 1 \quad (17)$$

Man erhält dann aus (16) die Formel des Radius in Abhängigkeit der Leuchtkraft und der Effektivtemperatur in Einheiten der Sonne:

$$R[R_\odot] = \frac{\sqrt{L[L_\odot]}}{T_{eff}^2[T_{eff,\odot}]} \quad (18)$$

Für die Fehlerfortpflanzung berechnet man

$$\frac{\partial R}{\partial T_{eff}} = -\frac{2\sqrt{L}}{T_{eff}^3} \quad (19)$$

und

$$\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{1}{2\sqrt{L} \cdot T_{eff}^2} \quad (20)$$

Aus (19) und (20) folgt dann:

$$\delta R[R_\odot] = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial T_{eff}}\right)^2 \cdot \delta T_{eff}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial L}\right)^2 \cdot \delta L^2} = \sqrt{\frac{4L}{T_{eff}^6} \cdot \delta T_{eff}^2 + \frac{1}{4LT_{eff}^4} \cdot \delta L^2} \quad (21)$$

Für den Radius von Deneb ergibt sich dann aus den vorigen Überlegungen:

$$R[R_\odot] = \frac{\sqrt{1.8 \cdot 10^5}}{\left(\frac{8530}{5778}\right)^2} = 194.67 \approx 195 \quad (22)$$

und

$$\delta R[R_\odot] = \sqrt{\frac{4 \cdot 1.8 \cdot 10^5}{\left(\frac{8530}{5778}\right)^6} \cdot \left(\frac{80}{5778}\right)^2 + \frac{1}{4 \cdot 1.8 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{8530}{5778}\right)^4} \cdot (0.4 \cdot 10^5)^2} = 21.936 \approx 22 \quad (23)$$

Damit ergibt sich für den Radius von Deneb als Funktion von Leuchtkraft und Effektivtemperatur in Sonneneinheiten:

$$\delta R[R_\odot] = 195 \pm 22 \quad (24)$$

2 Aufgabe 2

2.1 a)

Die erste Messung werde mit $P_{orb,1}$ bezeichnet, die zweite mit $P_{orb,2}$ bezeichnet. Es gilt

$$\Delta P_{orb,A} = P_{orb,1} - P_{orb,2} = 24.31704 \text{ d} - 24.316 \text{ d} = 0.00104 \text{ d} \approx 0.0010 \pm 0.0011 \text{ d}. \quad (25)$$

Für den Fehler ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta(\Delta P_{orb,A}) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta P_{orb,A}}{\partial P_{orb,1}}\right)^2 \cdot (\delta P_{orb,1})^2 + \left(\frac{\partial \Delta P_{orb,A}}{\partial P_{orb,2}}\right)^2 \cdot (\delta P_{orb,2})^2} \\ &= \sqrt{(\delta P_{orb,1})^2 + (\delta P_{orb,2})^2} \\ &= 0.001002 \text{ d} \approx 0.0011 \text{ d} \end{aligned} \quad (26)$$

2.2 b)

Diese Messung von 2010 sei mit $P_{orb,1}$ bezeichnet. Analog ergibt sich:

$$\Delta P_{orb,B} = P_{orb,1} - P_{orb,3} = 24.31704 \text{ d} - 24.31617 \text{ d} = (0.00087 \pm 0.00010) \text{ d}. \quad (27)$$

Für den Fehler ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta(\Delta P_{orb,B}) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta P_{orb,B}}{\partial P_{orb,1}}\right)^2 \cdot (\delta P_{orb,1})^2 + \left(\frac{\partial \Delta P_{orb,B}}{\partial P_{orb,3}}\right)^2 \cdot (\delta P_{orb,3})^2} \\ &= \sqrt{(\delta P_{orb,1})^2 + (\delta P_{orb,3})^2} \\ &= 0.0000922 \text{ d} \approx 0.0001 \text{ d} \end{aligned} \quad (28)$$

3 Aufgabe 3

3.1 a)

Es ist ein κ gesucht, sodass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa \cdot \exp\left(-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1. \quad (29)$$

Es gilt aufgrund der Symmetrie der Gaußkurve und mittels passender Substitution:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa \cdot \exp\left(-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}\right) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \kappa \cdot \exp\left(-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}\right) d(x-M) \\ &= 2 \cdot \int_0^{\infty} \kappa \cdot \exp\left(-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}\right) d(x-M) \\ &= \kappa \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sigma = 1. \end{aligned} \quad (30)$$

Daraus ergibt sich:

$$\kappa \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sigma = 1 \quad (31)$$

oder

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma}. \quad (32)$$

3.2 b)

Zur Lösung dieser Aufgabe werden die Differenzen $\Delta P_{orb,A}$ und $\Delta P_{orb,B}$ und die in Teilaufgabe 2b) angegebenen Fehler verwendet, die in diesem Fall mangels weiterer Daten als Standardabweichung aufgefasst werden. Der Lösung liegt die Betrachtung einer Gauß-Verteilung um den Mittelwert 0 und mit der Standardabweichung $\delta(\Delta P_{orb,A})$ bzw. $\delta(\Delta P_{orb,B})$ zugrunde. Als gesuchte Wahrscheinlichkeit wird nun der Bereich der

Gaußkurve mit einer Abweichung von mehr als $\Delta P_{orb,A}$ bzw. $\Delta P_{orb,B}$ angesehen. Diese Wahrscheinlichkeit α ergibt sich über die entsprechende Fläche zu:

$$\alpha = \int_{-\infty}^{-\Delta P_{orb,A}} f(x)dx + \int_{\Delta P_{orb,A}}^{\infty} f(x)dx. \quad (33)$$

Aufgrund der in a) vorgenommenen Normierung kann