## 一、选择或填空

**（数理逻辑部分）**

1、下列哪些公式为永真蕴含式？（　　　）

(1) $\neg Q \Rightarrow Q \rightarrow P$ (2) $\neg Q \Rightarrow P \rightarrow Q$ (3) $P \Rightarrow P \rightarrow Q$ (4) $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow \neg P$

答：(1)，(4)

2、下列公式中哪些是永真式？（　　　　）

(1) $(\neg P \wedge Q) \rightarrow (Q \rightarrow \neg R)$ (2) $P \rightarrow (Q \rightarrow Q)$ (3) $(P \wedge Q) \rightarrow P$ (4) $P \rightarrow (P \vee Q)$

答：(2)，(3)，(4)

3、设有下列公式，请问哪几个是永真蕴涵式?（　　　　）

(1) $P \Rightarrow P \wedge Q$ (2) $P \wedge Q \Rightarrow P$ (3) $P \wedge Q \Rightarrow P \vee Q$

(4) $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ (5) $\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$ (6) $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow \neg P$

答：(2)，(3)，(4)，(5)，(6)

4、公式 $\forall x((A(x) \rightarrow B(y, x)) \wedge \exists z\, C(y, z)) \rightarrow D(x)$ 中，自由变元是（　），约束变元是（　）。

答：x,y,　x,z

5、判断下列语句是不是命题。若是，给出命题的真值。（　　　　）

(1) 北京是中华人民共和国的首都。 (2) 陕西师大是一座工厂。

(3) 你喜欢唱歌吗？　　　(4) 若 7+8＞18，则三角形有 4 条边。

(5) 前进！　　　　　(6) 给我一杯水吧！

答：(1) 是，T　(2) 是，F　(3) 不是

(4) 是，T　(5) 不是　(6) 不是

6、命题“存在一些人是大学生”的否定是（　　　），而命题“所有的人都是要死的”的否定是（　　　）。

答：所有人都不是大学生，有些人不会死

7、设 P：我生病，Q：我去学校，则下列命题可符号化为（　　）。

(1) 只有在生病时，我才不去学校 (2) 若我生病，则我不去学校

(3) 当且仅当我生病时，我才不去学校(4) 若我不生病，则我一定去学校

答:（1） $\neg Q \to P$ （2） $P \to \neg Q$ （3） $P \leftrightarrow \neg Q$ （4）$\neg P \to Q$

8、设个体域为整数集，则下列公式的意义是(　　)。

（1） $\forall x \exists y(x+y=0)$ （2） $\exists y \forall x(x+y=0)$

答:（1）对任一整数 x 存在整数 y 满足 x+y=0（2）存在整数 y 对任一整数 x 满足 x+y=0

9、设全体域 D 是正整数集合，确定下列命题的真值:

（1） $\forall x \exists y\ (xy=y)$ （　　） （2） $\exists x \forall y(x+y=y)$ （　　）

(3) $\exists x \forall y(x+y=x)$ （　　） （4） $\forall x \exists y(y=2x)$ （　　）

答:（1） F （2） F （3）F （4）T

10、设谓词 P(x)：x 是奇数，Q(x)：x 是偶数，谓词公式 $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ 在哪个个体域中为真?(　　)

(1) 自然数 (2) 实数 (3) 复数 (4) (1)--(3)均成立

答:（1）

11、命题“2 是偶数或-3 是负数”的否定是（　　）。

答: 2 不是偶数且-3 不是负数。

12、永真式的否定是（　　）

(1) 永真式 (2) 永假式 (3) 可满足式 (4) (1)--(3)均有可能

答:（2）

13、公式$(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$化简为（　　），公式 $Q \to (P \vee (P \wedge Q))$可化简为（　　）。

答: $\neg P$ ，$Q \to P$

14、谓词公式$\forall x(P(x) \vee \exists yR(y)) \to Q(x)$中量词$\forall x$ 的辖域是（　　）。

答: $P(x) \vee \exists yR(y)$

15、令 R(x):x 是实数，Q(x):x 是有理数。则命题“并非每个实数都是有理数”的符号化表示为（　　）。

答: $\neg \forall x(R(x) \to Q(x))$

**（集合论部分）**

16、设 $A=\{a,\{a\}\}$，下列命题错误的是（ ）。

(1) $\{a\}\in P(A)$ (2) $\{a\}\subseteq P(A)$ (3) $\{\{a\}\}\in P(A)$ (4) $\{\{a\}\}\subseteq P(A)$

答：(2)

17、在 0（ ）$\Phi$之间写上正确的符号。

(1) = (2) $\subseteq$ (3) $\in$ (4) $\notin$

答：(4)

18、若集合 S 的基数$|S|=5$，则 S 的幂集的基数$|P(S)|=$（ ）。

答：32

19、设 $P=\{x|(x+1)^2\leq 4$ 且 $x\in R\}$，$Q=\{x|5\leq x^2+16$ 且 $x\in R\}$，则下列命题哪个正确（ ）

(1) $Q\subset P$ (2) $Q\subseteq P$ (3) $P\subset Q$ (4) $P=Q$

答：(3)

20、下列各集合中，哪几个分别相等（ ）。

(1) $A1=\{a,b\}$ (2) $A2=\{b,a\}$ (3) $A3=\{a,b,a\}$ (4) $A4=\{a,b,c\}$

(5) $A5=\{x|(x-a)(x-b)(x-c)=0\}$ (6) $A6=\{x|x^2-(a+b)x+ab=0\}$

答：A1=A2=A3=A6， A4=A5

21、若 $A-B=\Phi$，则下列哪个结论不可能正确？（ ）

(1) $A=\Phi$ (2) $B=\Phi$ (3) $A\subset B$ (4) $B\subset A$

答：(4)

22、判断下列命题哪个为真?（ ）

(1) A-B=B-A => A=B (2) 空集是任何集合的真子集

(3) 空集只是非空集合的子集 (4) 若 A 的一个元素属于 B，则 A=B

答：(1)

23、判断下列命题哪几个为正确？（ ）

(1) $\{\Phi\}\in\{\Phi,\{\{\Phi\}\}\}$ (2) $\{\Phi\}\subseteq\{\Phi,\{\{\Phi\}\}\}$ (3) $\Phi\in\{\{\Phi\}\}$

(4) $\Phi\subseteq\{\Phi\}$　　(5) $\{a,b\}\in\{a,b,\{a\},\{b\}\}$

答:(2),(4)

24、判断下列命题哪几个正确?(　　　　　)

(1) 所有空集都不相等 (2) $\{\Phi\}\neq\Phi$　(4) 若 A 为非空集,则 $A\subset A$ 成立。

答:(2)

25、设 $A\cap B=A\cap C$,$\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$,则 B(　)C。

答:=(等于)

26、判断下列命题哪几个正确?(　　　　　)

(1) 若 $A\cup B=A\cup C$,则 $B=C$ (2) $\{a,b\}=\{b,a\}$

(3) $P(A\cap B)\neq P(A)\cap P(B)$ (P(S)表示 S 的幂集)

(4) 若 A 为非空集,则 $A\neq A\cup A$ 成立。

答:(2)

27、A,B,C是三个集合,则下列哪几个推理正确:

(1) $A\subseteq B$,$B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$　(2) $A\subseteq B$,$B\subseteq C \Rightarrow A\in B$ (3) $A\in B$,$B\in C \Rightarrow A\in C$

答:(1)

**(二元关系部分)**

28、设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$,$B=\{1,2,3\}$,从 A 到 B 的关系 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x=y^2\}$,求(1)R　(2)　$R^{-1}$ 。

答:(1) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$　(2) $R^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

29、举出集合 A 上的既是等价关系又是偏序关系的一个例子。(　　　　)

答:A 上的恒等关系

30、集合 A 上的等价关系的三个性质是什么?(　　　　)

答:自反性、对称性和传递性

31、集合 A 上的偏序关系的三个性质是什么?(　　　　)

答:自反性、反对称性和传递性

32、设 S={1,2,3,4},A 上的关系 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,$

〈3,4〉}

求(1)$R\circ R$　(2)　$R^{-1}$　。

答：$R\circ R$ ={〈1,1〉,〈1,3〉,〈2,2〉,〈2,4〉}

$R^{-1}$ = {〈2,1〉,〈1,2〉,〈3,2〉,〈4,3〉}

33、设 A ＝ {1，2，3，4，5，6}，R 是 A 上的整除关系，求 R={(　　　　　)}。

答：R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<6,6>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,

<1,5>,<1,6>,<2,4>,<2,6>,<3,6>}

34、设 A ＝ {1,2,3,4,5,6}，B={1,2,3}，从 A 到 B 的关系 R ＝ {〈x,y〉|x=2y}，求(1)R　(2)　$R^{-1}$　。

答：(1) R={<1,1>,<4,2>,<6,3>}　(2) $R^{-1}$={<1,1>,<2,4>,(36>}

35、设 A ＝ {1,2,3,4,5,6}，B={1,2,3}，从 A 到 B 的关系 R ＝ {〈x,y〉|$x=y^2$}，求 R 和 $R^{-1}$ 的关系矩阵。

答：R 的关系矩阵=$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　$R^{-1}$ 的关系矩阵=$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

36、集合 A={1,2,⋯,10}上的关系 R={$\langle x,y\rangle$|x+y=10,x,y∈A}，则 R 的性质为（　）。

(1) 自反的　(2) 对称的　(3) 传递的，对称的 (4) 传递的

答：(2)

**（代数结构部分）**

37、设 A={2,4,6}，A 上的二元运算*定义为：a*b=max{a,b}，则在独异点 $\langle A,*\rangle$中，单位元是(　　)，零元是(　　)。

答：2，6

38、设 A={3,6,9}，A 上的二元运算*定义为：a*b=min{a,b}，则在独异点

<A,*>中，单位元是(　　)，零元是(　　)；

答：9，3

**（半群与群部分）**

39、设〈G,*〉是一个群，则

(1)　若 a,b,x∈G，a∗x=b，则 x=(　　)；

(2)　若 a,b,x∈G，a∗x=a∗b，则 x=(　　)。

答：（1） $a^{-1}*b$　（2） b

40、设 a 是 12 阶群的生成元，则 $a^2$ 是(　　)阶元素，$a^3$ 是(　　)阶元素。

答：6,4

41、代数系统<G,*>是一个群，则 G 的等幂元是(　　　)。

答：单位元

42、设 a 是 10 阶群的生成元，则 $a^4$ 是(　　)阶元素，$a^3$ 是(　　)阶元素。

答：5，10

43、群<G,*>的等幂元是(　　)，有(　　)个。

答：单位元，1

44、素数阶群一定是(　　　)群，它的生成元是(　　　)。

答：循环群，任一非单位元

45、设〈G,*〉是一个群，a,b,c∈G，则

(1)　若 c∗a=b，则 c=(　　)；(2)　若 c∗a=b∗a，则 c=(　　)。

答：(1)　$b*a^{-1}$　(2)　b

46、<H,,∗>是<G,,∗>的子群的充分必要条件是(　　　)。

答：<H,,∗>是群 或 ∀ a，b ∈G，$a*b\in H$，$a^{-1}\in H$ 或∀ a,b ∈G，$a*b^{-1}\in H$

47、群＜A,*＞的等幂元有(　　)个，是(　　)，零元有(　　)个。

答：1，单位元，0

48、在一个群〈G,*〉中，若 G 中的元素 a 的阶是 k，则 $a^{-1}$ 的阶是(　　)。

答：k

49、在自然数集 N 上，下列哪种运算是可结合的？（　　）

（1）$a*b=a-b$　（2）$a*b=\max\{a,b\}$　（3）$a*b=a+2b$　（4）$a*b=|a-b|$

答：(2)

50、任意一个具有 2 个或以上元的半群，它（　）。

(1) 不可能是群　(2) 不一定是群

(3) 一定是群　(4) 是交换群

答：(1)

51、6 阶有限群的任何子群一定不是（　）。

(1) 2 阶　(2) 3 阶　(3) 4 阶　(4) 6 阶

答：(3)

**（格与布尔代数部分）**

52、下列哪个偏序集构成有界格（　）

(1)（$N,\leq$）　(2)（$Z,\geq$）

(3)（$\{2,3,4,6,12\}$，|（整除关系））　(4)（$P(A),\subseteq$）

答：(4)

53、有限布尔代数的元素的个数一定等于（　）。

(1) 偶数　(2) 奇数　(3) 4 的倍数　(4) 2 的正整数次幂

答：(4)

**（图论部分）**

54、设 G 是一个哈密尔顿图，则 G 一定是(　)。

(1) 欧拉图　(2) 树　(3) 平面图　(4) 连通图

答：(4)

55、下面给出的集合中，哪一个是前缀码？(　　)

(1) {0，10，110，101111}　(2) {01，001，000，1}

(3) {b，c，aa，ab，aba}　　　(4) {1，11，101，001，0011}

答：(2)

56、一个图的哈密尔顿路是一条通过图中(　　　)的路。

答：所有结点一次且恰好一次

57、在有向图中，结点 v 的出度 $deg^{+}(v)$ 表示(　　)，入度 $deg^{-}(v)$ 表示(　　)。

答：以 v 为起点的边的条数， 以 v 为终点的边的条数

58、设 G 是一棵树，则 G 的生成树有(　　)棵。

(1) 0　　(2) 1　　(3) 2　　(4) 不能确定

答：1

59、n 阶无向完全图 $K_n$ 的边数是(　　　)，每个结点的度数是(　　)。

答：$\frac{n(n-1)}{2}$，n-1

60、一棵无向树的顶点数 n 与边数 m 关系是(　　　　)。

答：m=n-1

61、一个图的欧拉回路是一条通过图中(　　　)的回路。

答：所有边一次且恰好一次

62、有 n 个结点的树，其结点度数之和是(　　　　)。

答：2n-2

63、下面给出的集合中，哪一个不是前缀码(　　)。

(1) {a，ab，110，a1b11}　(2) {01，001，000，1}

(3) {1，2，00，01，0210}　(4) {12，11，101，002，0011}

答：(1)

64、n 个结点的有向完全图边数是(　　　)，每个结点的度数是(　　)。

答：n(n-1),2n-2

65、一个无向图有生成树的充分必要条件是(　　　)。

答：它是连通图

66、设G是一棵树，n,m分别表示顶点数和边数，则

(1) n=m (2) m=n+1 (3) n=m+1 (4) 不能确定。

答：(3)

67、设T=〈V,E〉是一棵树，若|V|>1，则T中至少存在(　　)片树叶。

答：2

68、任何连通无向图G至少有(　　)棵生成树，当且仅当G 是(　　)，G的生成树只有一棵。

答：1，树

69、设G是有n个结点m条边的连通平面图，且有k个面，则k等于:

(1) m-n+2 (2) n-m-2 (3) n+m-2 (4) m+n+2。

答：(1)

70、设T是一棵树，则T是一个连通且(　　)图。

答：无简单回路

71、设无向图G有16条边且每个顶点的度数都是2，则图G有(　　)个顶点。

(1) 10 (2) 4 (3) 8 (4) 16

答：(4)

72、设无向图G有18条边且每个顶点的度数都是3，则图G有(　　)个顶点。

(1) 10 (2) 4 (3) 8 (4) 12

答：(4)

73、设图G=<V，E>，V={a，b，c，d，e}，E={<a,b>,<a,c>,<b,c>,<c,d>,<d,e>},则G是有向图还是无向图？

答：有向图

74、任一有向图中，度数为奇数的结点有(　　)个。

答：偶数

75、具有6 个顶点，12条边的连通简单平面图中，每个面都是由(　　)条边围成？

(1) 2 (2) 4 (3) 3 (4) 5

答：(3)

76、在有 n 个顶点的连通图中，其边数（　　）。

(1) 最多有 n-1 条　　(2) 至少有 n-1 条

(3) 最多有 n 条　　(4) 至少有 n 条

答：(2)

77、一棵树有 2 个 2 度顶点，1 个 3 度顶点，3 个 4 度顶点，则其 1 度顶点为（　　）。

(1) 5　(2) 7　(3) 8　(4) 9

答：(4)

78、若一棵完全二元（叉）树有 2n-1 个顶点，则它（　　）片树叶。

(1) n　(2) 2n　(3) n-1　(4) 2

答：(1)

79、下列哪一种图不一定是树（　　）。

(1) 无简单回路的连通图　　(2) 有 n 个顶点 n-1 条边的连通图

(3) 每对顶点间都有通路的图　　(4) 连通但删去一条边便不连通的图

答：(3)

80、连通图 G 是一棵树当且仅当 G 中（　　）。

(1) 有些边是割边　　(2) 每条边都是割边

(3) 所有边都不是割边　　(4) 图中存在一条欧拉路径

答：(2)

**（数理逻辑部分）**

## 二、求下列各公式的主析取范式和主合取范式：

1、$(P\rightarrow Q)\wedge R$

解：$(P\rightarrow Q)\wedge R \Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\wedge R$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$ （析取范式）

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge R) \vee ((\neg P \vee P) \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$（主析取范式）

$\neg((P \rightarrow Q) \wedge R) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

$\vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$（原公式否定的主析取范式）

$(P \rightarrow Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

$\wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$（主合取范式）

2、$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee \neg P$

解：$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee \neg P$（析取范式）

$\Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge R) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$\vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

$\vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$（主析取范式）

$\neg((P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee \neg P)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$（原公式否定的主析取范式）

$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee \neg P \Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$（主合取范式）

3、$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (R \vee P)$

解：$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (R \vee P)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (R \vee P)$（合取范式）

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (P \vee (Q \wedge \neg Q)) \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$（主合取范式）

$\neg((\neg P \rightarrow Q) \wedge (R \vee P))$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

$\wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$（原公式否定的主合取范式）

$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (R \vee P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

（主析取范式）

4、$Q\rightarrow(P\vee\neg R)$

解：$Q\rightarrow(P\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow\neg Q\vee P\vee\neg R$（主合取范式）

$\neg$（$Q\rightarrow(P\vee\neg R)$）

$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)$

$\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee R)$（原公式否定的主合取范式）

$Q\rightarrow(P\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)$

$\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$（主析取范式）

5、$P\rightarrow(P\wedge(Q\rightarrow P))$

解：$P\rightarrow(P\wedge(Q\rightarrow P))$

$\Leftrightarrow\neg P\vee(P\wedge(\neg Q\vee P))$

$\Leftrightarrow\neg P\vee P$

$\Leftrightarrow$ T（主合取范式）

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$（主析取范式）

6、$\neg(P\rightarrow Q)\vee(R\wedge P)$

解：$\neg(P\rightarrow Q)\vee(R\wedge P)\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee(R\wedge P)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(R\wedge P)$（析取范式）

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q\wedge(R\vee\neg R))\vee(P\wedge(\neg Q\vee Q)\wedge R)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$（主析取范式）

$\neg(\neg(P\rightarrow Q)\vee(R\wedge P))\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$

$\vee$（$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)$（原公式否定的主析取范式）

$\neg(P\rightarrow Q)\vee(R\wedge P)\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)$

$\wedge(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$（主合取范式）

7、$P\vee(P\rightarrow Q)$

解：$P\vee(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow P\vee(\neg P\vee Q)\Leftrightarrow(P\vee\neg P)\vee Q$

$\Leftrightarrow$ T(主合取范式)

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$（主析取范式）

8、$(R\rightarrow Q)\wedge P$

解：$(R\rightarrow Q)\wedge P\Leftrightarrow(\neg R\vee Q)\wedge P$

$\Leftrightarrow(\neg R\wedge P)\vee(Q\wedge P)$ （析取范式）

$\Leftrightarrow(\neg R\wedge(Q\vee\neg Q)\wedge P)\vee((\neg R\vee R)\wedge Q\wedge P)$

$\Leftrightarrow(\neg R\wedge Q\wedge P)\vee(\neg R\wedge\neg Q\wedge P)\vee(\neg R\wedge Q\wedge P)\vee(R\wedge Q\wedge P)$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$（主析取范式）

$\neg((R\rightarrow Q)\wedge P)\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)$

$\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$（原公式否定的主析取范式）

$(R\rightarrow Q)\wedge P\Leftrightarrow(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$

$\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)$（主合取范式）

9、$P\rightarrow Q$

解：$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$（主合取范式）

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q))\vee((\neg P\vee P)\wedge Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$（主析取范式）

10、 $P\vee\neg Q$

解： $P\vee\neg Q$ （主合取范式）

$\Leftrightarrow(P\wedge(\neg Q\vee Q))\vee((\neg P\vee P)\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$（主析取范式）

11、$P\wedge Q$

解：$P\wedge Q$（主析取范式）$\Leftrightarrow(P\vee(Q\wedge\neg Q))\wedge((P\wedge\neg P)\vee Q)$

$\Leftrightarrow(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)$（主合取范式）

12、$(P\vee R)\rightarrow Q$

解：$(P\vee R)\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow\neg(P\vee R)\vee Q$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg R)\vee Q$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(\neg R\vee Q)$（合取范式）

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee (R\wedge \neg R))\wedge ((\neg P\wedge P)\vee Q\vee \neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee R)\wedge (\neg P\vee Q\vee \neg R)\wedge (\neg P\vee Q\vee \neg R)\wedge (P\vee Q\vee \neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee R)\wedge (\neg P\vee Q\vee \neg R)\wedge (\neg P\vee Q\vee \neg R)\wedge (P\vee Q\vee \neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee R)\wedge (\neg P\vee Q\vee \neg R)\wedge (P\vee Q\vee \neg R)$（主合取范式）

$\neg (P\vee R)\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee \neg Q\vee R)\wedge (\neg P\vee \neg Q\vee \neg R)\wedge (P\vee Q\vee R)\wedge (P\vee \neg Q\vee R)\wedge (P\vee \neg Q\vee \neg R)$

（原公式否定的主析取范式）

$(P\vee R)\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q\wedge \neg R)\vee (P\wedge Q\wedge R)\vee (\neg P\wedge \neg Q\wedge \neg R)\vee (\neg P\wedge Q\wedge \neg R)$

$\vee (\neg P\wedge Q\wedge R)$（主析取范式）

13、$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

解：$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P\vee Q)\vee R$

$\Leftrightarrow (P\wedge \neg Q)\vee R$（析取范式）

$\Leftrightarrow (P\wedge \neg Q\wedge (R\vee \neg R))\vee ((P\vee \neg P)\wedge (Q\vee \neg Q)\wedge R)$

$\Leftrightarrow (P\wedge \neg Q\wedge R)\vee (P\wedge \neg Q\wedge \neg R)\vee (P\wedge Q\wedge R)\vee (P\wedge \neg Q\wedge R)\vee (\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\vee (\neg P\wedge \neg Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow (P\wedge \neg Q\wedge R)\vee (P\wedge \neg Q\wedge \neg R)\vee (P\wedge Q\wedge R)\vee (\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\vee (\neg P\wedge \neg Q\wedge R)$（主析取范式）

$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P\vee Q)\vee R$

$\Leftrightarrow (P\wedge \neg Q)\vee R$（析取范式）

$\Leftrightarrow (P\vee R)\wedge (\neg Q\vee R)$（合取范式）

$\Leftrightarrow (P\vee (Q\wedge \neg Q)\vee R)\wedge ((P\wedge \neg P)\vee \neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge (P\vee \neg Q\vee R)\wedge (P\vee \neg Q\vee R)\wedge (\neg P\vee \neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge (P\vee \neg Q\vee R)\wedge (\neg P\vee \neg Q\vee R)$（主合取范式）

14、$(P\rightarrow (Q\wedge R))\wedge (\neg P\rightarrow (\neg Q\wedge \neg R))$

解：$(P\rightarrow (Q\wedge R))\wedge (\neg P\rightarrow (\neg Q\wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee (Q\wedge R))\wedge (P\vee (\neg Q\wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R)$ （合取范式）

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee (R \wedge \neg R))$

$\wedge (P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee \neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$\wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$

$\wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$(主合取范式)

$\neg (P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$(原公式否定的主合取范式)

$(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$(主析取范式)

15、$P \vee (\neg P \rightarrow (Q \vee (\neg Q \rightarrow R)))$

解：$P \vee (\neg P \rightarrow (Q \vee (\neg Q \rightarrow R)))$

$\Leftrightarrow P \vee (P \vee (Q \vee (Q \vee R)))$

$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R$(主合取范式)

$\neg (P \vee Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$

$\wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$

(原公式否定的主合取范式)

$(P \vee Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

$\vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$(主析取范式)

16、$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

解、$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$ （合取范式）

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee (R \wedge \neg R) \wedge (\neg P \vee (\neg Q \wedge Q) \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$(主合取范式)

$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge R)$(合取范式)

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg R)) \vee ((\neg P \vee P) \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \neg R)$

$\vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

(主析取范式)

## 三、证明:

### 1、$P \rightarrow Q$, $\neg Q \vee R$, $\neg R$, $\neg S \vee P \Rightarrow \neg S$

证明:

(1) $\neg R$ 前提

(2) $\neg Q \vee R$ 前提

(3) $\neg Q$ (1),(2)

(4) $P \rightarrow Q$ 前提

(5) $\neg P$ (3),(4)

(6) $\neg S \vee P$ 前提

(7) $\neg S$ (5),(6)

### 2、$A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $C \rightarrow (\neg D \vee E)$, $\neg F \rightarrow (D \wedge \neg E)$, $A \Rightarrow B \rightarrow F$

证明:

(1) $A$ 前提

(2) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 前提

(3) $B \rightarrow C$ (1),(2)

(4) $B$ 附加前提

(5) $C$ (3),(4)

(6) $C \rightarrow (\neg D \vee E)$ 前提

(7) $\neg D \vee E$ (5),(6)

(8) $\neg F \rightarrow (D \wedge \neg E)$ 前提

(9) $F$ (7),(8)

(10)　B→F　　　CP

3、$P\vee Q$，　$P\to R$，$Q\to S$　=> $R\vee S$

证明：

(1)　$\neg R$　　　附加前提

(2)　$P\to R$　　　前提

(3)　$\neg P$　　　(1)，(2)

(4)　$P\vee Q$　　　前提

(5)　$Q$　　　(3)，(4)

(6)　$Q\to S$　　　前提

(7)　$S$　　　(5)，(6)

(8)　$R\vee S$　　　CP，(1)，(8)

4、$(P\to Q)\wedge(R\to S)$，$(Q\to W)\wedge(S\to X)$，$\neg(W\wedge X)$，$P\to R$ => $\neg P$

证明：

(1)　$P$　　　假设前提

(2)　$P\to R$　　　前提

(3)　$R$　　　(1)，(2)

(4)　$(P\to Q)\wedge(R\to S)$　前提

(5)　$P\to Q$　　　(4)

(6)　$R\to S$　　　(5)

(7)　$Q$　　　(1)，(5)

(8)　$S$　　　(3)，(6)

(9)　$(Q\to W)\wedge(S\to X)$　　前提

(10)　$Q\to W$　　　(9)

(11)　$S\to X$　　　(10)

(12)　$W$　　　(7)，(10)

(13)　$X$　　　(8)，(11)

(14)　$W\wedge X$　　　(12)，(13)

(15)　$\neg(W\wedge X)$　　　前提

(16)　$\neg(W\wedge X)\wedge(W\wedge X)$　　　(14)，(15) 5、$(U\vee V)\rightarrow(M\wedge N)$，$U\vee P$，$P\rightarrow(Q\vee S)$，$\neg Q\wedge\neg S \Rightarrow M$

证明：

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\neg Q\wedge\neg S$ | 附加前提 |
| (2) | $P\rightarrow(Q\vee S)$ | 前提 |
| (3) | $\neg P$ | (1),(2) |
| (4) | $U\vee P$ | 前提 |
| (5) | $U$ | (3),(4) |
| (6) | $U\vee V$ | (5) |
| (7) | $(U\vee V)\rightarrow(M\wedge N)$ | 前提 |
| (8) | $M\wedge N$ | (6),(7) |
| (9) | $M$ | (8) |

6、$\neg B\vee D$，$(E\rightarrow\neg F)\rightarrow\neg D$，$\neg E\Rightarrow\neg B$

证明：

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $B$ | 附加前提 |
| (2) | $\neg B\vee D$ | 前提 |
| (3) | $D$ | (1),(2) |
| (4) | $(E\rightarrow\neg F)\rightarrow\neg D$ | 前提 |
| (5) | $\neg(E\rightarrow\neg F)$ | (3),(4) |
| (6) | $E\wedge\neg F$ | (5) |
| (7) | $E$ | (6) |
| (8) | $\neg E$ | 前提 |
| (9) | $E\wedge\neg E$ | (7),(8) |

7、$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$，$R\rightarrow(Q\rightarrow S) \Rightarrow P\rightarrow(Q\rightarrow S)$

证明：

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $P$ | 附加前提 |
| (2) | $Q$ | 附加前提 |
| (3) | $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ | 前提 |
| (4) | $Q\rightarrow R$ | (1),(3) |
| (5) | $R$ | (2),(4) |

(6) $R\rightarrow(Q\rightarrow S)$ 前提

(7) $Q\rightarrow S$ (5),(6)

(8) $S$ (2),(7)

(9) $Q\rightarrow S$ CP,(2),(8)

(10) $P\rightarrow(Q\rightarrow S)$ CP,(1),(9)

8、$P\rightarrow\neg Q$, $\neg P\rightarrow R$, $R\rightarrow\neg S \Rightarrow S\rightarrow\neg Q$

证明:

(1) $S$ 附加前提

(2) $R\rightarrow\neg S$ 前提

(3) $\neg R$ (1),(2)

(4) $\neg P\rightarrow R$ 前提

(5) $P$ (3),(4)

(6) $P\rightarrow\neg Q$ 前提

(7) $\neg Q$ (5),(6)

(8) $S\rightarrow\neg Q$ CP,(1),(7)

9、$P\rightarrow(Q\rightarrow R) \Rightarrow (P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$

证明:

(1) $P\rightarrow Q$ 附加前提

(2) $P$ 附加前提

(3) $Q$ (1),(2)

(4) $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ 前提

(5) $Q\rightarrow R$ (2),(4)

(6) $R$ (3),(5)

(7) $P\rightarrow R$ CP,(2),(6)

(8) $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ CP,(1),(7)

10、$P\rightarrow(\neg Q\rightarrow\neg R)$, $Q\rightarrow\neg P$, $S\rightarrow R$, $P \Rightarrow \neg S$

证明:

(1) $P$ 前提

(2) $P\rightarrow(\neg Q\rightarrow\neg R)$ 前提

(3) $\neg Q \to \neg R$ (1)，(2)

(4) $Q \to \neg P$ 前提

(5) $\neg Q$ (1)，(4)

(6) $\neg R$ (3),(5)

(7) $S \to R$ 前提

(8) $\neg S$ (6)，(7)

11、$A$，$A \to B$， $A \to C$， $B \to (D \to \neg C)$ => $\neg D$

证明：

(1) $A$ 前提

(2) $A \to B$ 前提

(3) $B$ (1)，(2)

(4) $A \to C$ 前提

(5) $C$ (1)，(4)

(6) $B \to (D \to \neg C)$ 前提

(7) $D \to \neg C$ (3)，(6)

(8) $\neg \underline{\underline{D}}$ (5)，(7)

12、$A \to (C \vee B)$，$B \to \neg A$，$D \to \neg C$ => $A \to \neg D$

证明：

(1) $A$ 附加前提

(2) $A \to (C \vee B)$ 前提

(3) $C \vee B$ (1)，(2)

(4) $B \to \neg A$ 前提

(5) $\neg B$ (1)，(4)

(6) $C$ (3)，(5)

(7) $D \to \neg C$ 前提

(8) $\neg D$ (6)，(7)

(9) $A \to \neg D$ CP，(1)，(8)

13、$(P \to Q) \wedge (R \to Q) \Leftrightarrow (P \vee R) \to Q$

证明、

$(P\to Q)\wedge(R\to Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(\neg R\vee Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg R)\vee Q$

$\Leftrightarrow\neg(P\vee R)\vee Q$

$\Leftrightarrow(P\vee R)\to Q$

14、$P\to(Q\to P)\Leftrightarrow\neg P\to(P\to\neg Q)$

证明、

$P\to(Q\to P)$

$\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg Q\vee P)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P)\vee(\neg P\vee\neg Q)$

$\Leftrightarrow\neg P\to(P\to\neg Q)$

15、$(P\to Q)\wedge(P\to R)$，$\neg(Q\wedge R)$，$S\vee P\Rightarrow S$

证明、

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $(P\to Q)\wedge(P\to R)$ | 前提 |
| (2) | $P\to(Q\wedge R)$ | (1) |
| (3) | $\neg(Q\wedge R)$ | 前提 |
| (4) | $\neg P$ | (2)，(3) |
| (5) | $S\vee P$ | 前提 |
| (6) | $S$ | (4)，(5) |

16、$P\to\neg Q$，$Q\vee\neg R$，$R\wedge\neg S\Rightarrow\neg P$

证明、

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $P$ | 附加前提 |
| (2) | $P\to\neg Q$ | 前提 |
| (3) | $\neg Q$ | (1)，(2) |
| (4) | $Q\vee\neg R$ | 前提 |
| (5) | $\neg R$ | (3)，(4) |
| (6 ) | $R\wedge\neg S$ | 前提 |
| (7) | $R$ | (6) |
| (8) | $R\wedge\neg R$ | (5)，(7) |

17、用真值表法证明$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

证明、

列出两个公式的真值表：

| P | Q | $P \leftrightarrow Q$ | $(P\to Q) \wedge (Q\to P)$ |
|---|---|---|---|
| F | F | T | T |
| F | T | F | F |
| T | F | F | F |
| T | T | T | T |

由定义可知，这两个公式是等价的。

18、$P \to Q \Rightarrow P \to (P \wedge Q)$

证明、

设 $P \to (P \wedge Q)$ 为 F，则 P 为 T，$P \wedge Q$ 为 F。所以 P 为 T，Q 为 F ，从而 $P \to Q$ 也为 F。所以 $P \to Q \Rightarrow P \to (P \wedge Q)$。

19、用先求主范式的方法证明$(P \to Q) \wedge (P \to R) \Leftrightarrow (P \to (Q \wedge R))$

证明、

先求出左右两个公式 的主合取范式

$(P \to Q) \wedge (P \to R) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee (R \wedge \neg R))) \wedge (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$(P \to (Q \wedge R)) \Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

它们有一样的主合取范式，所以它们等价。

20、$(P \to Q) \wedge \neg (Q \vee R) \Rightarrow \neg P$

证明、

设 $(P\to Q)\wedge\neg(Q\vee R)$ 为 T，则 $P\to Q$ 和 $\neg(Q\vee R)$ 都为 T。即 $P\to Q$ 和 $\neg Q\wedge\neg R$ 都为 T。故 $P\to Q$，$\neg Q$ 和 $\neg R$)都为 T，即 $P\to Q$ 为 T，Q 和 R 都为 F。从而 P 也为 F，即 $\neg P$ 为 T。从而 $(P\to Q)\wedge\neg(Q\vee R)\Rightarrow\neg P$

21、为庆祝九七香港回归祖国，四支足球队进行比赛，已知情况如下，问结论是否有效?

前提：(1)　若 A 队得第一，则 B 队或 C 队获亚军；

(2) 若 C 队获亚军，则 A 队不能获冠军；

(3) 若 D 队获亚军，则 B 队不能获亚军；

(4) A 队获第一；

结论：(5) D 队不是亚军。

证明、

设 A：A 队得第一;B：B 队获亚军;C：C 队获亚军;D：D 队获亚军;则前提符号化为 $A\to(B\vee C)$，$C\to\neg A$，$D\to\neg B$，A；结论符号化为 $\neg D$。

本题即证明 $A\to(B\vee C)$，$C\to\neg A$，$D\to\neg B$，$A\Rightarrow\neg D$。

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $A$ | 前提 |
| (2) | $A\to(B\vee C)$ | 前提 |
| (3) | $B\vee C$ | (1)，(2) |
| (4) | $C\to\neg A$ | 前提 |
| (5) | $\neg C$ | (1)，(4) |
| (6) | $B$ | (3)，(5) |
| (7) | $D\to\neg B$ | 前提 |
| (8) | $\neg D$ | (6)，(7) |

22、用推理规则证明 $P\to Q$，$\neg(Q\vee R)$，$P\wedge R$ 不能同时为真。

证明、

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $P\wedge R$ | 前提 |
| (2) | $P$ | (1) |
| (3) | $P\to Q$ | 前提 |
| (4) | $Q$ | (2)，(3) |

(5)　$\neg(Q\vee R)$　前提

(6)　$\neg Q\wedge\neg R$　(5)

(7)　$\neg Q$　(6)

(8)　$\neg Q\wedge Q$　(4),(7)

**(集合论部分)**

**四、设A，B，C是三个集合，证明：**

1、$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

证明：

$(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap\overline{A\cap C}=(A\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{C})$

$=(A\cap B\cap\overline{A})\cup(A\cap B\cap\overline{C})=A\cap B\cap\overline{C}=A\cap(B\cap\overline{C})$

$=A\cap(B-C)$

2、$(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$

证明：

$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$

$=A\cap\overline{B\cap C}=A-(B\cap C)$

3、$A\cup B=A\cup C$，$\overline{A}\cup B=\overline{A}\cup C$，则 $C=B$

证明：

$B=B\cup(\overline{A}\cap A)=(B\cup\overline{A})\cap(B\cup A)$

$=(C\cup\overline{A})\cap(C\cup A)=C\cup(\overline{A}\cap A)=C$

4、$A\cup B=A\cup(B-A)$

证明：

$A\cup(B-A)=A\cup(B\cap\overline{A})=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})$

$=(A\cup B)\cap U=A\cup B$

5、$A=B \Leftrightarrow A\oplus B=\Phi$

证明：

$\Rightarrow$设 $A=B$，则 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=\Phi\cup\Phi=\Phi$。

$\Leftarrow$设 $A\oplus B=\Phi$，则 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=\Phi$。故 $A-B=\Phi$，$B-A=\Phi$，

从而 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$，故 $A=B$。

6、$A\cap B = A\cap C$，$A\cup B=A\cup C$，则 $C=B$

证明：

$B=B\cap(A\cup B)= B\cap(A\cup C)=(B\cap A)\cup(B\cap C)$

$=(A\cap C)\cup(B\cap C)= C\cap(A\cup B)$

$= C\cap(A\cup C)$

$=C$

7、$A\cap B=A\cap C$，$\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$，则 $C=B$

证明：

$B=B\cap(A\cup\overline{A})=(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})$

$=(C\cap A)\cup(C\cap\overline{A})=C\cap(A\cup\overline{A})$

$=C$

8、$A-(B\cup C)=(A-B)-C$

证明：

$A-(B\cup C)= A\cap\overline{B\cup C}$

$=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}$

$=(A-B)\cap\overline{C}=(A-B)-C$

9、$(A-B)\cap(A-C)=A-(B\cup C)$

证明：

$(A-B)\cap(A-C)$

$=(A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C})$

$=(A\cap A)\cap(\overline{B}\cap\overline{C})$

$=A\cap\overline{B\cup C}=A-(B\cup C)$

10、$A-B=B$，则 $A=B=\Phi$

证明：

因为 $B=A-B$，所以 $B=B\cap B=(A-B)\cap B=\Phi$。从而 $A=A-B=B=\Phi$。

11、$A=(A-B)\cup(A-C)\Leftrightarrow A\cap B\cap C=\Phi$

证明：

$\Rightarrow$ 因为(A-B)$\cup$(A-C) =(A$\cap\overline{B}$)$\cup$(A$\cap\overline{C}$) =A$\cap$($\overline{B}\cup\overline{C}$)

=A$\cap\overline{B\cap C}$= A-(B$\cap$C)，且 A=(A-B)$\cup$(A-C)，

所以 A= A-(B$\cap$C)，故 A$\cap$B$\cap$C=$\Phi$。

$\Leftarrow$ 因为 A$\cap$B$\cap$C=$\Phi$，所以 A-(B$\cap$C)=A。而 A-(B$\cap$C)= (A-B)$\cup$(A-C)，

所以 A=(A-B)$\cup$(A-C)。

12、(A-B)$\cap$(A-C)=$\Phi\Leftrightarrow$A$\subseteq$B$\cup$C

证明：

$\Rightarrow$ 因为(A-B)$\cap$(A-C) =(A$\cap\overline{B}$)$\cap$(A$\cap\overline{C}$) =A$\cap$($\overline{B}\cap\overline{C}$)

=A$\cap\overline{B\cup C}$= A-(B$\cup$C)，且(A-B)$\cap$(A-C)=$\Phi$，

所以$\Phi$= A-(B$\cup$C)，故 A$\subseteq$B$\cup$C。

$\Leftarrow$ 因为 A$\subseteq$B$\cup$C，所以 A-(B$\cup$C)=A。而 A-(B$\cup$C)= (A-B)$\cap$(A-C)，

所以 A=(A-B)$\cap$(A-C)。

13、(A-B)$\cup$(B-A)=A $\Leftrightarrow$ B=$\Phi$

证明：

$\Rightarrow$ 因为(A-B)$\cup$(B-A)=A，所以 B-A$\subseteq$A。但(B-A)$\cap$A=$\Phi$，故 B-A=$\Phi$。

即 B$\subseteq$A，从而 B=$\Phi$（否则 A-B$\subset$A，从而与(A-B)$\cup$(B-A)=A 矛盾)。

$\Leftarrow$ 因为 B=$\Phi$，所以 A-B=A 且 B-A=$\Phi$。从而(A-B)$\cup$(B-A)=A。

14、(A-B)-C$\subseteq$A-(B-C)

证明：

$\forall$x$\in$(A-B)-C，有$x\in$A-B 且 x$\notin$C，即$x\in$A，x$\notin$B 且 x$\notin$C。

从而$x\in$A，x$\notin$B-C，故 x$\in$A-(B-C)。从而(A-B)-C$\subseteq$A-(B-C)

15、P(A)$\cup$P(B)$\subseteq$P(A$\cup$B) （P(S)表示 S 的幂集）

证明：

$\forall$S$\in$P(A)$\cup$P(B)，有 S$\in$P(A)或 S$\in$P(B)，所以 S$\subseteq$A 或 S$\subseteq$B。

从而 S$\subseteq$A$\cup$B，故 S$\in$P(A$\cup$B)。即 P(A)$\cup$P(B)$\subseteq$P(A$\cup$B)

16、P(A)$\cap$P(B)=P(A$\cap$B) （P(S)表示 S 的幂集）

证明：

$\forall$S$\in$P(A)$\cap$P(B)，有 S$\in$P(A)且 S$\in$P(B)，所以 S$\subseteq$A 且 S$\subseteq$B。

从而 $S\subseteq A\cap B$，故 $S\in P(A\cap B)$。即 $P(A)\cap P(B)\subseteq P(A\cap B)$。

$\forall S\in P(A\cap B)$，有 $S\subseteq A\cap B$，所以 $S\subseteq A$ 且 $S\subseteq B$。

从而 $S\in P(A)$ 且 $S\in P(B)$，故 $S\in P(A)\cap P(B)$。即 $P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$。

故 $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

17、$(A-B)\cup B=(A\cup B)-B$ 当且仅当 $B=\Phi$。

证明：

$\Leftarrow$ 当 $B=\Phi$ 时，因为 $(A-B)\cup B=(A-\Phi)\cup\Phi=A$，$(A\cup B)-B=(A\cup\Phi)-\Phi=A$，所以 $(A-B)\cup B=(A\cup B)-B$。

$\Rightarrow$ 用反证法证明。假设 $B\neq\Phi$，则存在 $b\in B$。因为 $b\in B$ 且 $b\in A\cup B$，所以 $b\notin(A\cup B)-B$。而显然 $b\in(A-B)\cup B$。故这与已知 $(A-B)\cup B=(A\cup B)-B$ 矛盾。

## 五、证明或解答：

## （数理逻辑、集合论与二元关系部分）

1、设个体域是自然数，将下列各式翻译成自然语言：

(1) $\exists x\forall y(xy=1)$； (2) $\forall x\exists y(xy=1)$；

(3) $\forall x\exists y(xy=0)$； (4) $\exists x\forall y(xy=0)$；

(5) $\forall x\exists y(xy=x)$； (6) $\exists x\forall y(xy=x)$；

(7) $\forall x\forall y\exists z(x-y=z)$

答：

（1）存在自然数 x，对任意自然数 y 满足 xy=1；

（2）对每个自然数 x，存在自然数 y 满足 xy=1；

（3）对每个自然数 x，存在自然数 y 满足 xy=0；

（4）存在自然数 x，对任意自然数 y 满足 xy=1；

（5）对每个自然数 x，存在自然数 y 满足 xy=x；

（6）存在自然数 x，对任意自然数 y 满足 xy=x；

（7）对任意自然数 x,y，存在自然数 z 满足 x-y=z。

2、设 $A(x,y,z)$：$x+y=z$，$M(x,y,z)$：$xy=z$，$L(x,y)$：$x<y$，$G(x,y)$：$x>y$，个体域为自然数。将下列命题符号化：

（1）没有小于 0 的自然数；

（2）$x<z$ 是 $x<y$ 且 $y<z$ 的必要条件；

（3）若 $x<y$，则存在某些 z，使 $z<0$，$xz>yz$；

（4）存在 x，对任意 y 使得 $xy=y$；

（5）对任意 x，存在 y 使 $x+y=x$。

答：

（1）$\forall x(G(x,0)\vee M(0,0,x))$　　或 $\neg\exists x\, L(x,0)$

（2）$\forall x\forall y\forall z\,((L(x,y)\wedge L(y,z))\rightarrow L(x,z))$

（3）$\forall x\forall y\,((L(x,y)\rightarrow\exists z(L(z,0)\wedge G(xz,yz)))$

（4）$\exists x\forall y M(x,y,y)$

（5）$\forall x\exists y A(x,y,x)$

3、列出下列二元关系的所有元素：

（1）$A=\{0,1,2\}$，$B=\{0,2,4\}$，$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\cap B\}$；

（2）$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,2\}$，$R=\{\langle x,y\rangle \mid 2\le x+y\le 4$ 且 $x\in A$ 且 $y\in B\}$；

（3）$A=\{1,2,3\}$，$B=\{-3,-2,-1,0,1\}$，$R=\{\langle x,y\rangle \mid |x|=|y|$ 且 $x\in A$ 且 $y\in B\}$；

解：

(1)　$R=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

(2)　$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}$；

(3)　$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,-1\rangle,\langle 2,-2\rangle,\langle 3,-3\rangle\}$。

4、对任意集合 A,B，证明：若 $A\times A=B\times B$，则 $B=B$。

证明：

若 $B=\Phi$，则 $B\times B=\Phi$。从而 $A\times A=\Phi$。故 $A=\Phi$。从而 $B=A$。

若 $B\neq\Phi$，则 $B\times B\neq\Phi$。从而 $A\times A\neq\Phi$。

对 $\forall x\in B$，$\langle x,x\rangle\in B\times B$。因为 $A\times A=B\times B$，则 $\langle x,x\rangle\in A\times A$。从而 $x\in A$。故 $B\subseteq A$。

同理可证，$A\subseteq B$。

故 B=A。

5、对任意集合 A,B，证明：若 $A\neq\Phi$，$A\times B=A\times C$，则 B=C。

证明：

若 $B=\Phi$，则 $A\times B=\Phi$。从而 $A\times C=\Phi$。因为 $A\neq\Phi$，所以 $C=\Phi$。即 B=C。

若 $B\neq\Phi$，则 $A\times B\neq\Phi$。从而 $A\times C\neq\Phi$。

对 $\forall x\in B$，因为 $A\neq\Phi$，所以存在 $y\in A$，使 $\langle y,x\rangle\in A\times B$。因为 $A\times B=A\times C$，则 $\langle y,x\rangle\in A\times C$。从而 $x\in C$。故 $B\subseteq C$。

同理可证，$C\subseteq B$。

故 B=C。

6、设 A={a,b}，B={c}。求下列集合：

(1) $A\times\{0,1\}\times B$；　(2) $B^2\times A$；

(3) $(A\times B)^2$；　(4) $P(A)\times A$。

解：

(1) $A\times\{0,1\}\times B=\{\langle a,0,c\rangle,\langle a,1,c\rangle,\langle b,0,c\rangle,\langle b,1,c\rangle\}$；

(2) $B^2\times A=\{\langle c,c,a\rangle,\langle c,c,b\rangle\}$；

(3) $(A\times B)^2=\{\langle a,c,a,c\rangle,\langle a,c,b,c\rangle,\langle b,c,a,c\rangle,\langle b,c,b,c\rangle\}$；

(4) $P(A)\times A=\{\langle\Phi,a\rangle,\langle\Phi,b\rangle,\langle\{a\},a\rangle,\langle\{a\},b\rangle,\langle\{b\},a\rangle,\langle\{b\},b\rangle$
$,\langle A,a\rangle,\langle A,b\rangle\}$。

7、设全集 U={a,b,c,d,e}，A={a,d}，B={a,b,c}，C={b,d}。求下列各集合：

(1) $A\cap B\cap\overline{C}$；　(2) $\overline{A\cap B\cap C}$；(3) $(A\cap\overline{B})\cup C$；

(4) $P(A)-P(B)$；　(5) $(A-B)\cup(B-C)$；　(6) $(A\oplus B)\cap C$；

解：

(1) $A\cap B\cap\overline{C}=\{a\}$；　(2) $\overline{A\cap B\cap C}=\{a,b,c,d,e\}$；

(3) $(A\cap\overline{B})\cup C=\{b,d\}$；　(4) $P(A)-P(B)=\{\{d\},\{a,d\}\}$；

(5) $(A-B)\cup(B-C)=\{d,c,a\}$；　(6) $(A\oplus B)\cap C=\{b,d\}$。

8、设 A,B,C 是任意集合，证明或否定下列断言：

(1) 若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

(2) 若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，则 $A\in C$；

（3）若 $A\in B$，且 $B\in C$，则 $A\in C$；

（4）若 $A\in B$，且 $B\subseteq C$，则 $A\in C$；

证明：

(1) 成立。

对 $\forall x\in A$，因为 $A\subseteq B$，所以 $x\in B$。又因为 $B\subseteq C$，所以 $x\in C$。即 $A\subseteq C$。

(2) 不成立。反例如下：$A=\{a\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{a,b,c\}$。虽然 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，但 $A\notin C$。

(3) 不成立。反例如下：$A=\{a\}$，$B=\{\{a\},b\}$，$C=\{\{\{a\},b\},c\}$。虽然 $A\in B$，且 $B\in C$，但 $A\notin C$。

(4) 成立。因为 $A\in B$，且 $B\subseteq C$，所以 $A\in C$。

9、A 上的任一良序关系一定是 A 上的全序关系。

证明：

$\forall a$，$b\in A$，则 $\{a,b\}$ 是 A 的一个非空子集。$\because$ $\leqslant$ 是 A 上的良序关系，$\therefore$ $\{a,b\}$ 有最小元。若最小元为 a，则 $a\leqslant b$；否则 $b\leqslant a$。从而 $\leqslant$ 为 A 上的的全序关系。

10、若 R 和 S 都是非空集 A 上的等价关系，则 $R\cap S$ 是 A 上的等价关系。

证明：

$\forall a\in A$，因为 R 和 S 都是 A 上的等价关系，所以 xRx 且 xSx。故 $xR\cap Sx$。从而 $R\cap S$ 是自反的。

$\forall a,b\in A$，$aR\cap Sb$，即 aRb 且 aSb。因为 R 和 S 都是 A 上的等价关系，所以 bRa 且 bSa。故 $bR\cap Sa$。从而 $R\cap S$ 是对称的。

$\forall a,b,c\in A$，$aR\cap Sb$ 且 $bR\cap Sc$，即 aRb，aSb，bRc 且 bSc。因为 R 和 S 都是 A 上的等价关系，所以 aRc 且 aSc。故 $aR\cap Sc$。从而 $R\cap S$ 是传递的。

故 $R\cap S$ 是 A 上的等价关系。

11、设 $R\subseteq A\times A$，则 R 自反 $\Leftrightarrow I_A\subseteq R$。

证明：

$\Rightarrow$ $\forall x\in A$，$\because$ R 是自反的，$\therefore xRx$。即 $\langle x,x\rangle\in R$，故 $I_A\subseteq R$。

$\Leftarrow$ $\forall x\in A$，$\because$ $I_A\subseteq R$，$\therefore \langle x,x\rangle\in R$。即 xRx，故 R 是自反的。

12、设 A 是集合，$R\subseteq A\times A$，则 R 是对称的 $\Leftrightarrow R=R^{-1}$。

证明：

$\Rightarrow \forall \langle x,y\rangle \in R$，$\because R$ 是对称的，$\therefore yRx$。即 $\langle y,x\rangle \in R$，故 $\langle x,y\rangle \in R^{-1}$。从而 $R \subseteq R^{-1}$。

反之 $\forall \langle y,x\rangle \in R^{-1}$，即 $\langle x,y\rangle \in R$。$\because R$ 是对称的，$\therefore yRx$。即 $\langle y,x\rangle \in R$，$R^{-1} \subseteq R$。

故 $R=R^{-1}$。

$\Leftarrow \forall x$，$y\in A$，若 $\langle x,y\rangle \in R$，即 $\langle y,x\rangle \in R^{-1}$。$\because R=R^{-1}$，$\therefore \langle y,x\rangle \in R$。即 $yRx$，故 $R$ 是对称的。

13、设 A,B,C 和 D 均是集合，$R\subseteq A\times B$，$S\subseteq B\times C$，$T\subseteq C\times D$，则

(1)　$R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$；

(2)　$R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$；

证明：

（1）$\forall \langle x,z\rangle \in R\circ(S\cup T)$，则由合成关系的定义知 $\exists y\in B$，使得 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,z\rangle \in S\cup T$。从而 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,z\rangle\in S$ 或 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,z\rangle\in T$，即 $\langle x,z\rangle \in R\circ S$ 或 $\langle x,z\rangle\in R\circ T$。故 $\langle x,z\rangle\in(R\circ S)\cup(R\circ T)$。从而 $R\circ(S\cup T)\subseteq(R\circ S)\cup(R\circ T)$。

同理可证 $(R\circ S)\cup(R\circ T)\subseteq R\circ(S\cup T)$。

故 $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$。

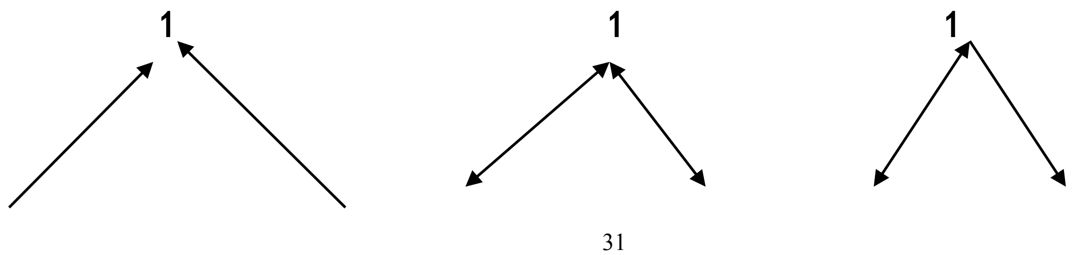
(2) $\forall \langle x,z\rangle \in R\circ(S\cap T)$，则由合成关系的定义知 $\exists y\in B$，使得 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,z\rangle \in S\cap T$。从而 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,z\rangle\in S$ 且 $\langle y,z\rangle\in T$，即 $\langle x,z\rangle\in R\circ S$ 且 $\langle x,z\rangle\in R\circ T$。故 $\langle x,z\rangle\in(R\circ S)\cap(R\circ T)$。从而 $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$。

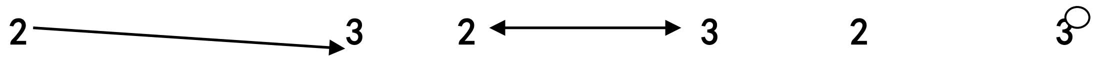
14、设 $\langle A,\leqslant\rangle$ 为偏序集，$\Phi\neq B\subseteq A$，若 B 有最大(小)元、上(下)确界，则它们是惟一的。

证明：

设 a,b 都是 B 的最大元，则由最大元的定义 $a\le b$，$b\le a$。$\because \le$ 是 A 上的偏序关系，$\therefore a=b$。即 B 如果有最大元则它是惟一的。

15、设 A={1,2,3}，写出下列图示关系的关系矩阵，并讨论它们的性质：






解:

（1）R={<2,1>,<3,1>,<2,3>};$M_R=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$;它是反自反的、反对称的、传递的;

（2）R={<1,2>,<2,1>,<1,3>,<3,1>,<2,3>,<3,2>};$M_R=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$;它是反自反的、对称的;

（3）R={<1,2>,<2,1>,<1,3>,<3,3>};$M_R=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;它既不是自反的、反自反的、也不是对称的、反对称的、传递的。

16、设 A={1,2,…,10}。下列哪个是 A 的划分？若是划分，则它们诱导的等价关系是什么？

（1）B={{1,3,6},{2,8,10},{4,5,7}};

（2）C={{1,5,7},{2,4,8,9},{3,5,6,10}};

（3）D={{1,2,7},{3,5,10},{4,6,8},{9}}

解:

（1）和（2）都不是 A 的划分。

（3）是 A 的划分。其诱导的等价关系是

$I_A\cup$ {<1,2>,<2,1>,<1,7>,<7,1>,<2,7>,<7,2>,<3,5>,<5,3>,<3,10>,<10,3>,<10,5>,<5,10>,<4,6>,<6,4>,<4,8>,<8,4>,<6,8>,<8,6>}。

17、R 是 A={1,2,3,4,5,6}上的等价关系，

R=$I_A\cup$ {<1,5>,<5,1>,<2,4>,<4,2>,<3,6>,<6,3>}

求 R 诱导的划分。

解:

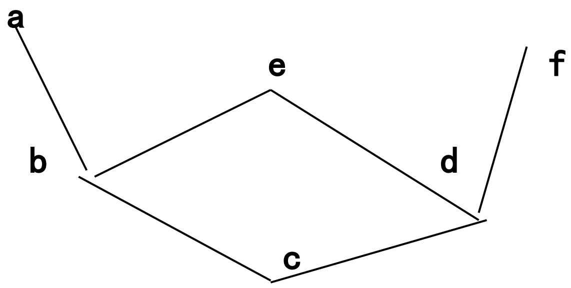
R 诱导的划分为{{1,5},{2,4},{3,6}}。

18、A 上的偏序关系≤的 Hasse 图如下。

（1） 下列哪些关系式成立：$a\le b, b\le a, c\le e, e\le f, d\le f, c\le f$；

（2） 分别求出下列集合关于≤的极大（小）元、最大（小）元、上（下）界及上（下）确界（若存在的话）：

(a) A；(b) $\{b, d\}$；(c) $\{b, e\}$；(d) $\{b, d, e\}$




解：

(1) $b\le a, c\le e, d\le f, c\le f$ 成立；

(2) (a)的极大元为 a,e,f,极小元为 c;无最大元，c 是最小元;

无上界，下界是 c;无上确界，下确界是 c。

(b)的极大元为 b,d,极小元为 b,d;无最大元和最小元;

上界是 e，下界是 c;上确界是 e，下确界是 c。

(c)的极大元为 e,极小元为 b;最大元是 e，b 是最小元;

上界是 e，下界是 b;上确界是 e，下确界是 b。

(d)的极大元为 e,极小元为 b,d;最大元是 e，无最小元;

上界是 e，下界是 c;上确界是 e，下确界是 c。

**（半群与群部分）**

19、求循环群 $C_{12}=\{e, a, a^2, \cdots, a^{11}\}$ 中 $H=\{e, a^4, a^8\}$ 的所有右陪集。

解：

因为 $|C_{12}|=12$，$|H|=3$，所以 H 的不同右陪集有 4 个：H，$\{a, a^5, a^9\}$，$\{a^2, a^6, a^{10}\}$，$\{a^3, a^7, a^{11}\}$。

20、求下列置换的运算：

解：

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&2&6&3&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&2&6&3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&2&6&3&1\end{pmatrix}^2$

$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&2&6&3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&5&1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$

21、试求出 8 阶循环群的所有生成元和所有子群。

解:

设 G 是 8 阶循环群，a 是它的生成元。则 $G=\{e,a,a^2,...,a^7\}$。由于 $a^k$ 是 G 的生成元的充分必要条件是 k 与 8 互素，故 $a,a^3,a^5,a^7$ 是 G 的所有生成元。

因为循环群的子群也是循环群，且子群的阶数是 G 的阶数的因子，故 G 的子群只能是 1 阶的、2 阶的、4 阶的或 8 阶的。因为 $|e|=1$, $|a|=|a^3|=|a^5|=8$, $|a^2|=|a^6|=8$, $|a^4|=2$, 且 G 的子群的生成元是该子群中 a 的最小正幂，故 G 的所有子群除两个平凡子群外，还有 $\{e,a^4\}$, $\{e,a^2,a^4,a^6\}$。

22、I 上的二元运算*定义为：$\forall a,b\in I$, $a*b=a+b-2$。试问<I,*>是循环群吗？

解:

<I,*>是循环群。因为<I,*>是无限阶的循环群，则它只有两个生成元。1 和 3 是它的两个生成元。因为 $a^n=na-2(n-1)$，故 $1^n=n-2(n-1)=2-n$。从而对任一个 $k\in I$, $k=2-(2-k)=1^{2-k}$，故 1 是的生成元。又因为 1 和 3 关于*互为逆元，故 3 也是<I,*>的生成元。

23、设<G,·>是群，$a\in G$。令 $H=\{x\in G\mid a\cdot x=x\cdot a\}$。试证：H 是 G 的子群。

证明:

$\forall c, d\in H$，则对 $\forall c, d\in HK$，$c\cdot a=a\cdot c$, $d\cdot a=a\cdot d$。故 $(c\cdot d)\cdot a=c\cdot(d\cdot a)=c\cdot(a\cdot d)=(c\cdot a)\cdot d=(a\cdot c)\cdot d=a\cdot(c\cdot d)$。从而 $c\cdot d\in H$。

由于 $c\cdot a=a\cdot c$, 且·满足消去律，所以 $a\cdot c^{-1}=c^{-1}\cdot a$。故 $c^{-1}\in H$。

从而 H 是 G 的子群。

24、证明：偶数阶群中阶为 2 的元素的个数一定是奇数。

证明:

设<G，•>是偶数阶群，则由于群的元素中阶为 1 的只有一个单位元，阶大于 2 的元素是偶数个，剩下的元素中都是阶为 2 的元素。故偶数阶群中阶为 2 的元素一定是奇数个。

25、证明：有限群中阶大于 2 的元素的个数一定是偶数。

证明：

设<G，•>是有限群，则 $\forall a\in G$，有 $|a|=|a^{-1}|$。且当 a 阶大于 2 时，$a\neq a^{-1}$。故阶数大于 2 的元素成对出现，从而其个数必为偶数。

26、试求 $\langle N_6,+_6\rangle$ 中每个元素的阶。

解：

0 是 $\langle N_6,+_6\rangle$ 中关于 $+_6$ 的单位元。则 $|0|=1$；$|1|=|5|=6$，$|2|=|4|=3$，$|3|=2$。

27、设<G，•>是群，$a,b\in G$，$a\neq e$，且 $a^4\cdot b=b\cdot a^5$。试证 $a\cdot b\neq b\cdot a$。

证明：

用反证法证明。

假设 $a\cdot b=b\cdot a$。则 $a^4\cdot b= a^3\cdot (a\cdot b) = a^3\cdot (b\cdot a)=(a^3\cdot b)\cdot a$

$=(a^2\cdot (a\cdot b))\cdot a= (a^2\cdot (b\cdot a))\cdot a=((a^2\cdot b)\cdot a)\cdot a=(a\cdot (a\cdot b))\cdot (a\cdot a)$

$=(a\cdot (b\cdot a))\cdot a^2=((a\cdot b)\cdot a)\cdot a^2 =((b\cdot a)\cdot a)\cdot a^2=(b\cdot a^2)\cdot a^2$
$=b\cdot (a^2\cdot a^2)=b\cdot a^4$。

因为 $a^4\cdot b= b\cdot a^5$，所以 $b\cdot a^5= b\cdot a^4$。由消去律得，a=e。

这与已知矛盾。

28、I 上的二元运算*定义为：$\forall a,b\in I$，$a*b=a+b-2$。试证：<I,*>为群。

证明：

（1）$\forall a,b,c\in I$，$(a*b)*c=(a*b)+c-2=(a+b-2)+c-2=a+b+c-4$，$a*(b*c)=a+(b*c)-2=a+(b+c-2)-2=a+b+c-4$。故 $(a*b)*c= a*(b*c)$，从而*满足结合律。

（2）记 e=2。对 $\forall a\in I$，$a*2=a+2-2=a=2+a-2=2*a$.。故 e=2 是 I 关于运算*的单位元。

（3）对 $\forall a\in I$，因为 $a*(4-a)=a+4-a-2=2=e=4-a+a-2=(4-a)*a$。故 4-a 是 a 关于运算*的逆元。

综上所述，<I,*>为群。

29、设<S，•>为半群，$a\in S$。令 $S_a=\{a^i \mid i\in I_+\}$。试证 $\langle S_a,\cdot\rangle$ 是<S，•>的

子半群。

证明:

$\forall$b，c$\in S_a$，则存在 k, l$\in I_+$，使得 $b=a^k, c=a^l$。从而 $b\cdot c=a^k\cdot a^l=a^{k+l}$。因为 $k+l\in I_+$，所以 $b\cdot c\in S_a$，即 $S_a$ 关于运算·封闭。故<$S_a$，·>是<S，·>的子半群。

30、单位元有惟一逆元。

证明:

设<G, $*$>是一个群，e 是关于运算$*$的单位元。

若 $e_1, e_2$ 都是 e 的逆元，即 $e_1*e=e$ 且 $e_2*e=e$。

因为 e 是关于运算$*$的单位元，所以 $e_1=e_1*e=e=e_2*e=e_2$。

即单位元有惟一逆元。

31、设 e 和 0 是关于 A 上二元运算*的单位元和零元，如果|A|>1，则 $e\neq 0$。

证明:

用反证法证明。假设 e=0。

对 A 的任一元素 a，因为 e 和 0 是 A 上关于二元运算*的单位元和零元，则 $a=a*e=a*0=0$。即 A 的所有元素都等于 0,这与已知条件|A|>1 矛盾。

从而假设错误。即 $e\neq 0$。

32、证明在元素不少于两个的群中不存在零元。

证明:（用反证法证明）

设在素不少于两个的群<G, $*$>中存在零元$\theta$。对$\forall$ a$\in$G, 由零元的定义有 $a*\theta=\theta$。

 <G, $*$>是群，$\therefore$关于*消去律成立。$\therefore$ a=e。即 G 中只有一个元素，这与|G|$\geq$2 矛盾。故在元素不少于两个的群中不存在零元。

33、证明在一个群中单位元是惟一的。

证明:

设 $e_1, e_2$ 都是群〈G,*〉的单位元。　　则 $e_1=e_1*e_2=e_2$。

所以单位元是惟一的。

34、设 a 是一个群〈G，*〉的生成元，则 $a^{-1}$ 也是它的生成元。

证明:

$\forall$x$\in$G，因为 a 是〈G，*〉的生成元，所以存在整数 k，使得 $x=a^k$。

故 $x=((a^{k})^{-1})^{-1}=((a^{-1})^{k})^{-1}=(a^{-1})^{-k}$。从而 $a^{-1}$ 也是〈G，*〉的生成元。

35、在一个偶数阶群中一定存在一个 2 阶元素。

证明：

群中的每一个元素的阶均不为 0 且单位元是其中惟一的阶为 1 的元素。因为任一阶大于 2 的元素和它的逆元的阶相等。且当一个元素的阶大于 2 时，其逆元和它本身不相等。故阶大于 2 的元素是成对的。从而阶为 1 的元素与阶大于 2 的元素个数之和是奇数。

因为该群的阶是偶数，从而它一定有阶为 2 的元素。

36、代数系统 $\langle G,*\rangle$ 是一个群，则 G 除单位元以外无其它等幂元。

证明：

设 e 是该群的单位元。若 a 是 $\langle G,*\rangle$ 的等幂元，即 $a*a=a$。

因为 $a*e=a$，所以 $a*a=a*e$。由于运算*满足消去律，所以 $a=e$。

即 G 除单位元以外无其它等幂元。

37、设 $\langle G,*\rangle$ 是一个群，则对于 $a,b\in G$，必有唯一的 $x\in G$，使得 $a*x=b$。

证明：

因为 $a^{-1}*b\in G$，且 $a*(a^{-1}*b)=(a*a^{-1})*b=e*b=b$，所以对于 $a,b\in G$，必有 $x\in G$，使得 $a*x=b$。

若 $x_1,x_2$ 都满足要求。即 $a*x_1=b$ 且 $a*x_2=b$。故 $a*x_1=a*x_2$。

由于*满足消去律，故 $x_1=x_2$。

从而对于 $a,b\in G$，必有唯一的 $x\in G$，使得 $a*x=b$。

38、设半群 $\langle S,\cdot\rangle$ 中消去律成立，则 $\langle S,\cdot\rangle$ 是可交换半群当且仅当 $\forall a,b\in S$，$(a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2$。

证明：

$\Rightarrow \forall a,b\in S$，$(a\cdot b)^2=(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)=((a\cdot b)\cdot a)\cdot b$
$=(a\cdot(a\cdot b))\cdot b=((a\cdot a)\cdot b)\cdot b=(a\cdot a)\cdot(b\cdot b)=a^2\cdot b^2$;

$\Leftarrow \forall a,b\in S$，因为 $(a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2$，所以 $(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)=(a\cdot a)\cdot(b\cdot b)$。故 $a\cdot((b\cdot a)\cdot b)=a\cdot(a\cdot(b\cdot b))$。由于·满足消去律，所以 $(b\cdot a)\cdot b=a\cdot(b\cdot b)$，即 $(b\cdot a)\cdot b=(a\cdot b)\cdot b$。从而 $a\cdot b=b\cdot a$。故·满足交换律。

39、设群$<G,\ast>$除单位元外每个元素的阶均为 2，则$<G,\ast>$是交换群。

证明：

对任一 $a\in G$，由已知可得 $a*a=e$，即 $a^{-1}=a$。

对任一 $a,b\in G$，因为 $a*b=(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}=b*a$，所以运算*满足交换律。

从而$<G,*>$是交换群。

40、设*是集合 A 上可结合的二元运算，且$\forall a,b\in A$，若 $a*b=b*a$，则 $a=b$。试证明：

（1）$\forall a\in A, a*a=a$，即 a 是等幂元；

（2）$\forall a,b\in A, a*b*a=a$；

（3）$\forall a,b,c\in A, a*b*c=a*c$。

证明：

（1）$\forall a\in A$，记 $b=a*a$。因为*是可结合的，故有 $b*a=(a*a)*a=a*(a*a)=a*b$。由已知条件可得 $a=a*a$。

（2）$\forall a,b\in A$，因为由（1），$a*(a*b*a)=(a*a)*(b*a)=a*(b*a)$，

$(a*b*a)*a=(a*b)*(a*a)=(a*b)*a=a*(b*a)$。

故 $a*(a*b*a)=(a*b*a)*a$，从而 $a*b*a=a$。

（3）$\forall a,b,c\in A$，$(a*b*c)*(a*c)=((a*b*c)*a)*c=(a*(b*c)*a)*c$

且$(a*c)*(a*b*c)=a*(c*(a*b*c))=a*(c*(a*b)*c))$。

由（2）可知 $a*(b*c)*a=a$ 且 $c*(a*b)*c=c$，

故 $(a*b*c)*(a*c)=(a*(b*c)*a)*c=a*c$

且$(a*c)*(a*b*c)= a*(c*(a*b)*c))= a*c$，

即 $(a*b*c)*(a*c)=(a*c)*(a*b*c)$。

从而由已知条件知，$a*b*c=a*c$。

41、设$<G,\cdot>$是群，作 $f:G\to G, a\mapsto a^{-1}$。证明：f 是 G 的自同构$\Leftrightarrow$G 是交换群。

证明：

$\Rightarrow$ 设 f 是 G 的自同构。对 $\forall a,b\in G$，$a\cdot b=(b^{-1}\cdot a^{-1})^{-1}=(f(b)\cdot f(a))^{-1}=(f(b\cdot a))^{-1}=((b\cdot a)^{-1})^{-1}=b\cdot a$。故运算·满足

交换律，即G是可交换群。

$\Leftarrow$因为当$a\neq b$时，$a^{-1}\neq b^{-1}$，即$f(a)\neq f(b)$，故f是G到G中的一个单一函数。又对$\forall a\in G$，有$f(a^{-1})=(a^{-1})^{-1}=a$。故f是G到G上的满函数。从而f是G到G上的自同构。

对$\forall a, b\in G$，因为G是可交换群，故$f(a\cdot b)=(a\cdot b)^{-1}=(b\cdot a)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}=f(a)\cdot f(b)$。故f满足同态方程。

从而f是G的自同构。

42、若群$\langle G,\star\rangle$的子群$\langle H,\star\rangle$满足$|G|=2|H|$，则$\langle H,\star\rangle$一定是群$\langle G,\star\rangle$的正规子群。

证明：

由已知可知，G关于H有两个不同的左陪集H，$H_1$和两个不同的右陪集H，$H_2$。因为$H\cap H_1=\Phi$且$H\cup H_1=G$，$H\cap H_2=\Phi$且$H\cup H_2=G$，故$H_1=G-H=H_2$。

对$\forall a\in G$，若$a\in H$，则$aH=H, Ha=H$。否则因为$a\in G-H$，故$aH\neq H, Ha\neq H$。从而$aH=Ha=G-H$。故H是G的不变子群。

43、设H和K都是G的不变子群。证明：$H\cap K$也是G的不变子群。

证明：

因为H和K都是G的不变子群，所以$H\cap K$是G的子群。对$\forall a\in G$，$h\in H\cap K$，有$a\cdot h\cdot a^{-1}\in a\cdot H\cdot a^{-1}$，$\cdot h\cdot a^{-1}\in a\cdot K\cdot a^{-1}$。因为H和K都是G的不变子群，所以$a\cdot h\cdot a^{-1}\in H$且$a\cdot h\cdot a^{-1}\in K$。从而$a\cdot h\cdot a^{-1}\in H\cap K$。故$H\cap K$是G的不变子群。

44、设群G的中心为$C(G)=\{a\in G\mid \forall x\in G, a\cdot x=x\cdot a\}$。证明C（G）是G的不变子群。

证明：

先证C（G）是G的子群。

$\forall a,b\in C(G)$，对$\forall x\in G$，有$a\cdot x=x\cdot a$，$b\cdot x=x\cdot b$。故$(a\cdot b)\cdot x=a\cdot(b\cdot x)=a\cdot(x\cdot b)=(a\cdot x)\cdot b=(x\cdot a)\cdot b=x\cdot(a\cdot b)$，$a^{-1}\cdot x=x\cdot a^{-1}$。从而$a\cdot b$，$a^{-1}\in C(G)$。　　故C（G）是G的子群。

再证C（G）是G的不变子群。

对$\forall a\in G$，$\forall h\in C(G)$，记$b=a\cdot h\cdot a^{-1}$。下证$b\in C(G)$。因为$h\in C(G)$，所以

$b=(a\cdot h)\cdot a^{-1}=(h\cdot a)\cdot a^{-1}=h\cdot(a\cdot a^{-1})=h\in C(G)$。

故 C（G）是 G 的不变子群。

## 45、设<G, •>是没有非平凡子群的有限群。试证: G 是平凡群或质数阶的循环群。

证明:

若 G 是平凡群，则结论显然成立。

否则设<G, •>的阶为 n。任取 $a\in G$ 且 $a\neq e$，记 H=（a）(由 a 生成的 G 的子群)。显然 $H\neq\{e\}$，且 G 没有非平凡子群，故 H=G。从而 G 一定是循环群，且 a 是 G 的生成元。

若 n 是合数，则存在大于 1 的整数 k,m，使得 n=mk。记 $H=\{e, a^k, (a^k)^2, \cdots, (a^k)^{m-1}\}$，易证 H 是 G 的子群，但 $1<|H|=m<n$，故 H 是 G 的非平凡子群。这与已知矛盾。从而 n 是质数。

故 G 是质数阶的循环群。

综上所述，G 是平凡群或质数阶的循环群。

## 46、设 H 和 K 都是 G 的有限子群，且|H|与|K|互质。试证：$H\cap K=\{e\}$。

证明:

用反证法证明。

若 $H\cap K\neq\{e\}$。则 $H\cap K$ 是一个元素个数大于 1 的有限集。

先证 $H\cap K$ 也是 G 的子群，从而也是 H 和 K 的子群。

$\forall a,b\in H\cap K$，则 $a,b\in H$ 且 $a,b\in K$。因为 H 和 K 都是 G 的子群，故 $a\cdot b, a^{-1}\in H$ 且 $a\cdot b, a^{-1}\in K$。从而 $a\cdot b\in H\cap K, a^{-1}\in H\cap K$。故 $H\cap K$ 是 G 的子群，从而也是 H 和 K 的子群。

由拉格朗日定理可知，$|H\cap K|$是|H|和|K|的因子，这与已知矛盾。

## 47、素数阶循环群的每个非单位元都是生成元。

证明:

设<G,*>是 p 阶循环群，p 是素数。

对 G 中任一非单位元 a。设 a 的阶为 k，则 $k\neq 1$。

由拉格朗日定理，k 是 p 的正整因子。因为 p 是素数，故 k=p。即 a 的阶就是 p，即群 G 的阶。故 a 是 G 的生成元。

48、若<S, ●>是可交换独异点，T 为 S 中所有等幂元的集合，则<T, ●>是<S, ●>的子独异点。

证明：

∵ $e \bullet e=e$，∴$e \in T$，即 T 是 S 的非空子集。

$\forall$ $a,b \in T$,∵ <S，●>是可交换独异点，

∴$(a \bullet b) \bullet (a \bullet b)=((a \bullet b) \bullet a) \bullet b$

$=(a \bullet (b \bullet a)) \bullet b=(a \bullet (a \bullet b)) \bullet b$

$=((a \bullet a) \bullet b) \bullet b=(a \bullet a) \bullet (b \bullet b)$

$=a \bullet b$，即 $a \bullet b \in T$。

故<T, ●>是<S, ●>的子独异点。

49、设<G, ●>是群，且 $a \in G$ 的阶为 n，$k \in I$，则 $|a^k|=\frac{n}{(k,n)}$，其中 $(k,n)$ 为 k 和 n 的最大公因子。

证明：

记 $p=\frac{n}{(k,n)}$，$q=\frac{k}{(k,n)}$，$|a^k|=m$。由 n 和 p 的定义，显然有 $(a^k)^p=e$。故 $m \le p$ 且 $m|p$。

又由于 $a^{km}=e$，所以由定理 5.2.5 知，$n|km$。即 $p|qm$。但 p 和 q 互质，故 $p|m$。

由于 p 和 m 都是正整数，所以 $p=m$。即 $|a^k|=\frac{n}{(k,n)}$。

50、设<G, ●>是有限群，$|G|=n$，则 $\forall a \in G$，$|a| \le n$。

证明：

$\forall a \in G$，由封闭性及 $|G|=n$ 可知 $a, a^2, \cdots, a^n, a^{n+1}$ 中必有相同的元素，不妨设为 $a^k=a^m$, $k<m$。 由消去律得 $a^{m-k}=e$。从而 $|a| \le m-k \le n$。

51、设 $G=(a)$，若 G 为无限群，则 G 只有两个生成元 a 和 $a^{-1}$；

证明：

$\forall b \in G=(a)$，则 $\exists n \in I$，使 $b=a^n$。故 $b=(a^{-n})^{-1}=(a^{-1})^{-n}$，从而 $a^{-1}$ 也是 G 的生成元。

若 c 是 G 的生成元，则 $\exists k, m \in I$，分别满足 $c=a^k$ 和 $a=c^m$。从而 $c=(c^m)^k=c^{mk}$。

若 $km\neq 1$，则由消去律可知 c 的阶是有限的，这与 $|G|$ 无限矛盾。从而 $km=1$，即 $k=1, m=1$ 或 $k=-1, m=-1$。故 $c=a$ 或 $c=a^{-1}$。

从而 G 只有两个生成元 a 和 $a^{-1}$。

52、设 $G=(a)$，$\{e\}\neq H\leq G$，$a^m$ 是 H 中 a 的最小正幂，则

（1） $H=(a^m)$；

（2） 若 G 为无限群，则 H 也是无限群；

证明：

（1）$\forall b\in H$，$\exists k\in I$，使得 $b=a^k$。令 $k=mq+r$，$0\leq r<m$。

则 $a^r=a^{k-mq}=a^k\bullet a^{-mq}=b\bullet (a^m)^{-q}$。

因为 $b, a^m\in H$，且 $H\leq G$，所以 $a^r\in H$。

由于 $0\leq r<m$，且 $a^m$ 是 H 中 a 的最小正幂，故 $r=0$，即 $k=mq$。

从而 $b=(a^m)^q$。故 $a^m$ 是 H 的生成元。

（2）因为 $\{e\}\neq H$，故 H 的生成元为 $a^m$ （$m\neq 0$）。因为 G 是无限群，所以 a 的阶是无限的，从而 $a^m$ 的阶也是无限的，故 H 也是无限群。

53、设 $G=(a)$，$|G|=n$，则对于 n 的每一正因子 d，有且仅有一个 d 阶子群。因此 n 阶循环群的子群的个数恰为 n 的正因子数。

证明：

$\Rightarrow$ 对 n 的每一正因子 d，令 $k=\dfrac{n}{d}$, $b=a^k$，$H=\{e, b, b^2, \cdots, b^{d-1}\}$。

因为 $|a|=n$, 所以 $b^d=(a^k)^d=a^{kd}=a^n=e$ 且 $|b|=d$。

从而 H 中的元素是两两不同的，易证 $H\leq G$。

故 $|H|=d$。所以是 G 的一个 d 阶子群。

设 $H_1$ 是 G 的任一 d 阶子群。则由定理 5.4.4 知，$H_1=(a^m)$，其中 $a^m$ 是 $H_1$ 中 a 的最小正幂，且 $|H|=\dfrac{n}{m}$。因为 $|H|=d$，所以 $m=\dfrac{n}{d}=k$，即 $H=H_1$。从而 H 是 G 的惟一 d 阶子群。

$\Leftarrow$ 设 H 是 G 的惟一的 d 阶子群。若 $d=1$，则结论显然成立。否则 $H=(a^m)$，其中 $a^m$ 是 H 中 a 的最小正幂。由定理 5.4.4 知，$d=\dfrac{n}{m}$。故 d 是 n 的一个正因子。

54、设 h 是从群 $<G_1, *>$ 到 $<G_2, \bullet>$ 的群同态，$G_1$ 和 $G_2$ 的单位元分别为 $e_1$ 和

$e_2$，则

（1） $h(e_1)=e_2$；

（2） $\forall a\in G_1$，$h(a^{-1})=h(a)^{-1}$；

（3） 若 $H\leq G_1$，则 $h(H)\leq G_2$；

（4） 若 h 为单一同态，则 $\forall a\in G_1$，$|h(a)|=|a|$。

证明：

(1) 因为 $h(e_1)\bullet h(e_1)=h(e_1\bullet e_1)= h(e_1)= e_2\bullet h(e_1)$，所以 $h(e_1)=e_2$。

(2) $\forall a\in G_1$，$h(a)\bullet h(a^{-1})=h(a\bullet a^{-1})= h(e_1)= e_2$，

$h(a^{-1})\bullet h(a)=h(a^{-1}\bullet a)= h(e_1)= e_2$，故 $h(a^{-1})=h(a)^{-1}$。

(3) $\forall c,d\in h(H)$，$\exists a,b\in H$，使得 $c=h(a),d=h(b)$。故 $c\bullet d=h(a)\bullet h(b)$ $=h(a* b)$。因为 $H\leq G$，所以 $a* b\in H$，故 $c\bullet d\in h(H)$。又 $c^{-1}=(h(a))^{-1}=h(a^{-1})$ 且 $a^{-1}\in H$，故 $c^{-1}\in h(H)$。由定理 5.3.2 知 $h(H)\leq G_2$。

(4) 若 $|a|=n$，则 $a^n=e_1$。故 $(h(a))^n=h(a^n)=h(e_1)=e_2$。从而 h(a) 的阶也有限，且 $|h(a)|\leq n$。

设 $|h(a)|=m$，则 $h(a^m)= (h(a))^m= h(e_1)=e_2$。因为 h 是单一同态，所以 $a^m=e_1$。即 $|a|\leq m$。

故 $|h(a)|=|a|$。

若 a 的阶是无限的，则类似于上述证明过程可以得出，h(a) 的阶也是无限的。

故结论成立。

55、有限群 G 的每个元素的阶均能整除 G 的阶。

证明：

设 $|G|=n$，$\forall a\in G$，则 $|a|=m$。令 $H=\{e,a,a^2,\cdots,a^{m-1}\}$。

则 H 是 G 的子群且 $|H|=m$。由 Lagrange 定理知 $|H|$ 能整除 $|G|$，故 a 的阶能整除 G 的阶。

56、证明：在同构意义下，只有两个四阶群，且都是循环群。

证明：

在 4 阶群 G 中，由 Lagrange 定理知，G 中的元素的阶只能是 1，2 或 4。阶为

1 的元素恰有一个，就是单位元 e.

若 G 有一个 4 阶元素，不妨设为 a，则 G=（a），即 G 是循环群 ，从而是可交换群。

若 G 没有 4 阶元素，则除单位元 e 外，G 的其余 3 个阶均为 2。不妨记为 a, b, c。因为 a, b, c 的阶均为 2，故 $a^{-1}=a, b^{-1}=b, c^{-1}=c$。从而 $a\bullet b\neq a$，$a\bullet b\neq b$，$a\bullet b\neq e$，故 $a\bullet b=c$。同理可得 $a\bullet c=c\bullet a=b$，$c\bullet b=b\bullet c=a$，$b\bullet a=c$。

57、在一个群<G, *>中，若 G 中的元素 a 的阶是 k，即|a|=k，则 $a^{-1}$ 的阶也是 k。

证明：

因为| a |=k，所以 $a^k=e$。即 $(a^{-1})^k=(a^k)^{-1}=e$。

从而 $a^{-1}$ 的阶是有限的，且 $|a^{-1}|\leq k$。

同理可证，a 的阶小于等于 $|a^{-1}|$。

故 $a^{-1}$ 的阶也是 k。

58、在一个群<G, *>中，若 A 和 B 都是 G 的子群。若 $A\cup B=G$，则 A=G 或 B=G。

证明：

用反证法证明。

若 $A\neq G$ 且 $B\neq G$，则有 $a\in A, a\notin B$ 且 $b\in B, b\notin A$。因为 A，B 都是 G 的子群，故 $a, b\in G$，从而 $a*b\in G$。

因为 $a\in A$，所以 $a^{-1}\in A$。若 $a*b\in A$，则 $b=a^{-1}*(a*b)\in A$，这与 $a\notin B$ 矛盾。从而 $a*b\notin A$。

同理可证 $a*b\notin B$。

综合可得 $a*b\notin A\cup B=G$，这与已知矛盾。从而假设错误，得证 A=G 或 B=G。

59、设 e 是奇数阶交换群<G, *>的单位元，则 G 的所有元素之积为 e。

证明：

设 $G=<\{e, a_1, a_2, \cdots, a_{2n}\}, *>$，n 为正整数。

因为 G 的阶数为奇数 2n+1，所以由拉格朗日定理知 G 中不存在 2 阶元素，即除了单位元 e 以外，G 的所有元素的阶都大于 2。故对 G 中的任一非单位元 a，它的逆元 $a^{-1}$ 不是它本身，且 G 中不同的元素有不同的逆元。

由此可见，G 中的 2n 个非单位元构成互为逆元的 n 对元素。因为 G 是交换群，故 G 的所有元素之积可变成单位元和 n 对互为逆元的元素之积的积，从而结果为 e。

60、设 $S=Q\times Q$，Q 为有理数集合，*为 S 上的二元运算：对任意(a, b)，(c, d) $\in$S，有

$$(a, b)*(c, d)=(ac, ad+b),$$

求出 S 关于二元运算*的单位元，以及当 $a\neq 0$ 时，(a, b)关于*的逆元。

解：

设 S 关于*的单位元为(a, b)。根据*和单位元的定义，对$\forall$(x, y)$\in$S，有

$$(a, b)*(x, y)=(ax, ay+b)=(x, y),\quad (x, y)*(a, b)=(ax, xb+y)=(x, y)。$$

即 ax=x, ay+b=y, xb+y=y 对$\forall$x, y$\in$Q 都成立。解得 a=1, b=0。

所以 S 关于*的单位元为(1, 0)。

当 $a\neq 0$ 时，设(a, b)关于*的逆元为(c, d)。根据逆元的定义，有

$$(a, b)*(c, d)= (ac, ad+b)=(1, 0)$$

$$(c, d)*(a, b)= (ac, cb+d)=(1, 0)$$

即 ac=1, ad+b=0, cb+d=0。解得 $c=\frac{1}{a}$, $d=-\frac{b}{a}$。

所以(a, b)关于*的逆元为($\frac{1}{a}$, $-\frac{b}{a}$)。

61、设<G, *>是一个群，H、K 是其子群。定义 G 上的关系 R：对任意 a, b$\in$G，aRb $\Leftrightarrow$存在 h$\in$H, k$\in$K，使得 b=h*a*k，则 R 是 G 上的等价关系。

证明：

$\forall$a$\in$G，因为 H、K 是 G 的子群，所以 e$\in$H 且 e$\in$K。令 h=k=e，则 a=e*a*a=h*e*k，从而 aRa。即 R 是自反的。

$\forall$a, b$\in$G，若 aRb，则存在 h$\in$H，k$\in$K，使得 b=h*a*k。因为 H、K 是 G 的子群，所以 $h^{-1}\in H$ 且 $k^{-1}\in K$。故 $a=h^{-1}*a*k^{-1}$，从而 bRa。即 R 是对称的。

$\forall$a, b, c$\in$G，若 aRb, bRc，则存在 h, g$\in$H，k, l$\in$K，使得 b=h*a*k，c=g*b*l。所以 c=g*b*l=g*(h*a*k)*l=(g*h)*a*(k*l)。因为 H、K 是 G 的子群，所以 g*h$\in$H 且 k*l$\in$K。从而 aRc。即 R 是传递的。

综上所述，R 是 G 上的等价关系。

62、设 H 是 G 的子群，则下列条件等价：

（1） H 是 G 的不变子群；

（2） $\forall a\in G$，$a\bullet H\bullet a^{-1}\subseteq H$；

（3） $\forall a\in G$，$a^{-1}\bullet H\bullet a\subseteq H$；

（4） $\forall a\in G$，$\forall h\in G$，$a\bullet h\bullet a^{-1}\subseteq H$。

证明：

(1)$\Rightarrow$(2) $\forall a\in G$，则对 $h\in H$，令 $h_1=a\bullet h\bullet a^{-1}$，因为 $a\bullet h\in a\bullet H$ 且 $H\bullet a=a\bullet H$，所以 $\exists h_2\in H$，使得 $a\bullet h=h_2\bullet a$。故 $h_1=(h_2\bullet a)\bullet a^{-1}=h_2\in H$。故 $a\bullet H\bullet a^{-1}\subseteq H$。

(2)$\Rightarrow$(3) $\forall a\in G$，对 $h\in H$，令 $h_1=a^{-1}\bullet h\bullet a$，则 $(h_1)^{-1}=a\bullet h^{-1}\bullet a^{-1}$。因为 $h^{-1}\in H$，所以 $(h_1)^{-1}=a\bullet h^{-1}\bullet a^{-1}\in a\bullet H\bullet a^{-1}$。由（2）可知 $(h_1)^{-1}\in H$，从而 $h_1\in H$。故 $a^{-1}\bullet H\bullet a\subseteq H$。

(3)$\Rightarrow$(4) 类似于（2）$\Rightarrow$(3)的证明。

(4)$\Rightarrow$(1) $\forall a\in G$，对 $\forall b\in a\bullet H$，则 $\exists h\in H$，使得 $b=a\bullet h$。故 $b=(a\bullet h)\bullet(a^{-1}\bullet a)=(a\bullet h\bullet a^{-1})\bullet a$。由于 $a\bullet h\bullet a^{-1}\in H$，所以 $b\in H\bullet a$。即 $a\bullet H\subseteq H\bullet a$。

反之对 $\forall b\in H\bullet a$，则 $\exists h\in H$，使得 $b=h\bullet a$。故 $b=(a\bullet a^{-1})\bullet(h\bullet a)=a\bullet(a^{-1}\bullet h\bullet a)=a\bullet(a^{-1}\bullet h\bullet(a^{-1})^{-1})$。由于 $a^{-1}\bullet h\bullet(a^{-1})^{-1}\in H$，所以 $b\in a\bullet H$。即 $H\bullet a\subseteq a\bullet H$。

即 $H\bullet a=a\bullet H$。从而 H 是 G 的不变子群。

63、在半群<G,*>中，若对 $\forall a,b\in G$，方程 $a*x=b$ 和 $y*a=b$ 都有惟一解，则<G,*>是一个群。

证明：

任意取定 $a\in G$，记方程 $a*x=a$ 的惟一解为 $e_R$。即 $a*e_R=a$。

下证 $e_R$ 为关于运算*的右单位元。

对 $\forall b\in G$，记方程 $y*a=b$ 的惟一解为 y。

$\because$ <G,*>是半群，$\therefore$运算*满足结合律。

$\therefore b*e_R=(y*a)*e_R=y*(a*e_R)=y*a=b$。

类似地，记方程 $y*a=a$ 的唯一解为 $e_L$。即 $e_L*a=a$。

下证 $e_L$ 为关于运算*的左单位元。

对 $\forall b\in G$，记方程 $a*x=b$ 的惟一解为 x。

∵ <G,*>是半群，∴运算*满足结合律。

$\therefore e_L*b=e_L*(a*x)=(e_L*a)*x=a*x=b$。

从而在半群<G,*>中，关于运算*存在单位元，记为 e。

现证 G 中每个元素关于运算*存在逆元。

对 $\forall b\in G$,记 c 为方程 $b*x=e$ 的惟一解。下证 c 为 b 关于运算的逆元。**记 $d=c*b$。**

则 $b*d=(b*c)*b=e*b=b$。

∵ $b*e=b$,且方程 $b*x=b$ 有惟一解，$\therefore d=e$。

$\therefore b*c=c*b=e$。从而 c 为 b 关于运算的逆元。

综上所述，<G,*>是一个群。

64、设<G，*>是群， H 和 K 都是 G 的子群，令 $HK=\{h*s \mid s\in K, h\in H\}$，$KH=\{s*h \mid s\in K, h\in H\}$，<HK,*>,<KH,*>是 G 的子群的充分必要条件是 HK=KH。

证明：

$\Rightarrow$HK 是 G 的子群。$\forall c\in HK$，则 $c^{-1}\in HK$，故存在 $a\in H, b\in K$，使得 $c^{-1}=a\cdot b$。因为 $c=(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$。因为 H 和 K 都是 G 的子群，所以 $a^{-1}\in H, b^{-1}\in K$，即 $c\in KH$。从而 $HK\subseteq KH$。 $\forall c\in KH$，则存在 $a\in H, b\in K$，使得 $c=b\cdot a$。因为 $c=(a^{-1}\cdot b^{-1})^{-1}$。因为 H 和 K 都是 G 的子群，所以 $a^{-1}\in H, b^{-1}\in K$，即 $a^{-1}\cdot b^{-1}\in HK$。因为 HK 是 G 的子群，所以 $c=(a^{-1}\cdot b^{-1})^{-1}\in HK$。从而 $KH\subseteq HK$。

故 HK=KH。

$\Leftarrow$HK=KH。对 $\forall c, d\in HK$，有 $a_1,a_2\in H, b_1,b_2\in K$，使得 $c=a_1\cdot b_1$，$d=a_2\cdot b_2$。则 $c\cdot d=(a_1\cdot b_1)\cdot(a_2\cdot b_2)=((a_1\cdot b_1)\cdot a_2)\cdot b_2=(a_1\cdot(b_1\cdot a_2))\cdot b_2$。因为 $b_1\cdot a_2\in KH=KH$，所以存在 $a_3\in H, b_3\in K$，使得 $b_1\cdot a_2=a_3\cdot b_3$。从而 $c\cdot d=(a_1\cdot(b_1\cdot a_2)\cdot b_2=(a_1\cdot(a_3\cdot b_3))\cdot b_2=(a_1\cdot a_3)\cdot(b_3\cdot b_2)$。因为 H 和 K 都是 G 的子群，故 $a_1\cdot a_3\in H$，$b_3\cdot b_2\in K$。从而 $c\cdot d\in HK$。

又 $c^{-1}=(a_1\cdot b_1)^{-1}=b^{-1}{}_1\cdot a^{-1}{}_1$。因为 H 和 K 都是 G 的子群，故 $a^{-1}{}_1\in H$，$b^{-1}{}_1\in K$。从而 $c^{-1}\in KH$。因为 HK=KH，所以 $c^{-1}\in HK$。

综上所述，HK 是 G 的子群。

65、设 H 和 K 都 是 G 的不变子群。证明：HK 也是 G 的不变子群。

证明：

先证 HK 是 G 的子群。

对 $\forall a \in HK$，有 $h \in H$，$k \in K$，使得 $a=h \cdot k$。因为 $a=h \cdot k=(h \cdot k \cdot h^{-1}) \cdot h$，且 K 是 G 的不变子群，所以 $h \cdot k \cdot h^{-1} \in K$。故 $a \in KH$。从而 $HK \subseteq KH$。

同理可证，$KH \subseteq HK$。

故 HK=KH。从而 HK 是 G 的子群。

下证 HK 是 G 的不变子群。

对 $\forall a \in G$，$b \in HK$，有 $h \in H$，$k \in K$，使得 $b=h \cdot k$。故 $a \cdot b \cdot a^{-1}=a \cdot (h \cdot k) \cdot a^{-1}=(a \cdot h \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot k \cdot a^{-1})$。因为 H 和 K 都是 G 的不变子群，所以 $a \cdot h \cdot a^{-1} \in H$ 且 $a \cdot k \cdot a^{-1} \in K$。从而 $a \cdot b \cdot a^{-1} \in HK$。故 HK 是 G 的不变子群。

66、设 $\langle G,*\rangle$ 为群，$a,b,c \in G$。若 $a*b=c*b*a, a*c=c*a, b*c=c*b$，且 a,b 的阶分别为 m,n，则 c 的阶整除 m 与 n 的最大公因子(m,n)。

证明：

设 c 的阶为 k。在 $a*b=c*b*a$ 两边同时右乘 $b^{n-1}$，再由 $a*b=c*b*a$ 得

$$a*b^{n}=(c*b*a)*b^{n-1}=(c*b)*(a*b)*b^{n-2}=(c*b)*(c*b*a)*b^{n-2}$$

$$=(c*b)^{2}*a*b^{n-2}=(c*b)^{2}*(a*b)*b^{n-3}=(c*b)^{2}*(c*b*a)*b^{n-3}$$

$$=(c*b)^{3}*a*b^{n-3}=\cdots=(c*b)^{n}*a,$$

再由 $b*c=c*b$ 及 b 的阶为 n 得

$$a=a*b^{n}=(c*b)^{n}*a=(c^{n}*b^{n})*a=c^{n}*a,$$

所以 $c^{n}=e$。故由元素阶的定义有 $k|n$。

由 $a*b=c*b*a, a*c=c*a, b*c=c*b$ 得 $a*b=b*a*c$，两边同时左乘 $a^{m-1}$，再由 $a*b=b*a*c$ 得

$$a^{m}*b=a^{m-1}*(b*a*c)=a^{m-2}*(a*b)*(a*c)=a^{m-2}*(b*a*c)*(a*c)$$

$$=a^{m-2}*b*(a*c)^{2}=a^{m-3}*(a*b)*(a*c)^{2}=a^{m-3}*(b*a*c)*(a*c)^{2}$$

$$=a^{m-3}*b*(a*c)^{3}=\cdots=b*(a*c)^{m},$$

再由 $a*c=c*a$ 及 a 的阶为 m 得

$$b=a^{m}*b=b*(a*c)^{m}=b*a^{m}*c^{m}=b*c^{m},$$

所以 $c^{m}=e$。故由元素阶的定义有 $k|m$。

由此可见，k 是 m 和 n 的公因子，从而能整除 m 和 n 的最大公因子(m,n)。

## （格与布尔代数）

67、当 n 分别是 24，36，110 时，$<S_n, |>$是布尔代数吗？若是，则求出其原子集。

解：

因为$|S_{24}|=8$，$|S_{36}|=9$，$|S_{110}|=8$，故$<S_{36}, |>$不是布尔代数。在$<S_{24}, |>$中 12 没有补元，故它也不是布尔代数。$<S_{110}, |>$是布尔代数，其原子集为{2,5,11}。

68、设 L 是有界格，且$|L|>1$。证明：$0\neq 1$。

证明：

用反证法证明。

设 0=1。则任取 $a\in L$，则由于 L 是有界格，故 $a\leq 1$ 且 $0\leq a$。即 $0\leq a\leq 1$。因为 0=1 且$\leq$是 L 上的偏序关系，所以 a=0。这与已知$|L|>1$ 矛盾。

69、设$(L,\leqslant)$是格，若 $a,b,c\in L$，$a\leqslant b\leqslant c$，则

$$a\oplus b=b\odot c\ ,\quad (a\odot b)\oplus(b\odot c)=(a\oplus b)\odot(a\oplus c)$$

证明：

因为 $a\leq b\leq c$，所以 $a*b=a$，$a\oplus b=b=b$，且 $b=b*c$，以 $c=b\oplus c$。从而 $a\oplus b=b*c$。

$$(a*b)\oplus(b*c)=a\oplus(b*c)=a\oplus(a\oplus b)=(a\oplus a)\ \oplus b=a\oplus b=b,$$

$$(a\oplus b)*(a\oplus c)=(b*c)*(a\oplus c)=b*(c*(a\oplus c))=b*c=b。$$

70、在布尔代数中，证明恒等式 $a\oplus(a'*b)=a\oplus b$

证明：

$$a\oplus(a'*b)=(a\oplus a')*(a\oplus b)=1*(a\oplus b)=a\oplus b$$

71、设$<L, \leq>$是格，$a_1, a_2, \ldots, a_n\in L$。试证：$a_1*a_2*\ldots*a_n= a_1\oplus a_2\oplus\ldots\oplus a_n$ 当且仅当 $a_1=a_2=\ldots=a_n$。

证明：

$\Leftarrow$显然是成立的。

$\Rightarrow$　　对任一 $k=1,2,..,n$，$a_1*a_2*\cdots*a_n\leq a_k$，$a_k\leq a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n$。

因为 $a_1*a_2*\cdots*a_n=a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n$，且≤是 L 上的偏序关系，故 $a_k=a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n$。从而 $a_1=a_2=\cdots=a_n$。

72、在布尔代数中，证明恒等式 $(a*c)\oplus(a'*b)\oplus(b*c)=(a*c)\oplus(a'*b)$

证明：

$((a*c)\oplus(a'*b))*(b*c)=((a*c)*(b*c))\oplus((a'*b)*(b*c))$

$=(a*b*c)\oplus(a'*b*c)=(a\oplus a')*b*c=1*b*c=b*c$，

故 $b*c\le(a*c)\oplus(a'*b)$，从而

$(a*c)\oplus(a'*b)\oplus(b*c)=(a*c)\oplus(a'*b)$。

73、在布尔代数中，证明恒等式 $(a*b)\oplus(a'*c)\oplus(b'*c)=(a*b)\oplus c$

证明：

$(a*b)\oplus(a'*c)\oplus(b'*c)=(a*b)\oplus((a'\oplus b')*c)$

$=(a*b)\oplus((a*b)'*c)=(a*b)\oplus c$。

74、设<L，≤>是格，$a,b,c,d\in L$。试证：若 $a\le b$ 且 $c\le d$，则

$a*c\le b*d$

证明：

因为 $a\le b$，$c\le d$，所以 $a=a*b, c=c*d$。从而

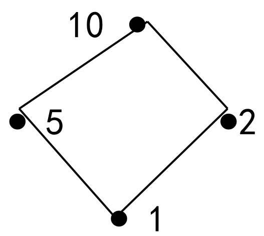
$(a*c)*(b*d)=((a*c)*b)*d=(b*(a*c))*d=((b*a)*c)*d$

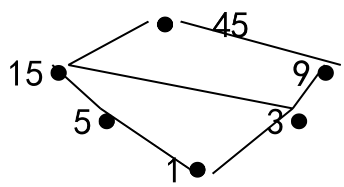
$=a*(c*d)=a*c$，

所以 $a*c\le b*d$。

75、当 n 分别是 10, 45 时，画出 $<S_n, |>$ 的哈斯图。

解：




76、在布尔代数中，证明恒等式

$(a\oplus b')*(b\oplus c')*(c\oplus a')=(a'\oplus b)*(b'\oplus c)*(c'\oplus a)$

证明：

$(a\oplus b')*(b\oplus c')*(c\oplus a')$

$=(a*b*c)\oplus(a*b*a')\oplus(a*c'*a')\oplus(a*c'*c)\oplus(b'*b*c)$

$\oplus(b'*c'*c)\oplus(b'*c'*a')\oplus(b'*b*a')=(a*b*c)\oplus(b'*c'*a')$,

$(a'\oplus b)*(b'\oplus c)*(c'\oplus a)$

$=(a'*b'*c')\oplus(a'*b'*a)\oplus(a'*c*c')\oplus(a'*c*a)\oplus(b*b'*c')$

$\oplus(b*b'*a)\oplus(b*c*c')\oplus(b*c*a)=(a*b*c)\oplus(a'*b'*c')$,

故 $(a\oplus b')*(b\oplus c')*(c\oplus a')=(a'\oplus b)*(b'\oplus c)*(c'\oplus a)$。

77、设 $\langle L,\leqslant\rangle$ 是格，$a,b\in L$，且 $a\leqslant b$，记

$$I[a,b]=\{x\in L\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

则 $\langle I[a,b],\leqslant\rangle$ 是 $\langle L,\leqslant\rangle$ 的子格。

证明：

$\forall x,y\in I[a,b]$，$a\leqslant x\leqslant b$ 且 $a\leqslant y\leqslant b$。由定理 6.1.1 有 $a\leqslant x*y\leqslant b$ 且 $a\leqslant x\oplus y\leqslant b$。从而 $x*y\in I[a,b]$ 且 $x\oplus y\in I[a,b]$。故 $I[a,b]$ 关于 $*$ 和 $\oplus$ 是封闭的，从而 $\langle I[a,b],\leqslant\rangle$ 是 $\langle L,\leqslant\rangle$ 的子格。

78、设 A＝{a, b, c}，求 $\langle P(A),\subseteq\rangle$ 的子格（P(A) 表示 A 的幂集）。

解：

$P(A)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}$。在 P(A) 的所有非空子集中，只要它关于 $\cap$ 和 $\cup$ 是封闭的，则它就是 $\langle P(A),\subseteq\rangle$ 的子格。

显然 $\langle P(A),\subseteq\rangle$ 和 $\langle\{\Phi\},\subseteq\rangle$ 是 $\langle P(A),\subseteq\rangle$ 的子格。

$\langle\{\Phi,\{a\}\},\subseteq\rangle$、$\langle\{\Phi,\{b\}\},\subseteq\rangle$、$\langle\{\Phi,\{c\}\},\subseteq\rangle$、$\langle\{\Phi,\{a,b\}\},\subseteq\rangle$、$\langle\{\Phi,\{a,c\}\},\subseteq\rangle$、$\langle\{\Phi,\{b,c\}\},\subseteq\rangle$、$\langle\{\Phi,A\},\subseteq\rangle$、$\langle\{\Phi,\{c\},\{a,c\},\{b,c\},A\},\subseteq\rangle$ 等都是 $\langle P(A),\subseteq\rangle$ 的子格。

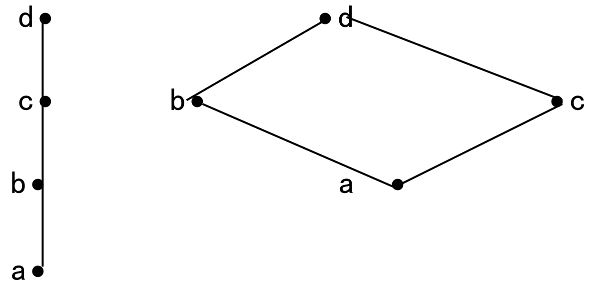
79、证明：在同构意义下，4 阶格只有 2 个。

证明：

若 $\leqslant$ 是 L 上的全序关系，则它一定是良序关系(因为任一有限的全序集一定是良序集)。若设 L={a, b, c, d}，则 L 的四个元素满足：$a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$。

若 $\leqslant$ 不是 L 上的全序关系，则 L 中一定存在两个元素（不妨设为 b, c），$b\leqslant c$ 和 $c\leqslant b$ 都不成立。因此 $b*c$ 和 $b\oplus c$ 既不可能相等，也不可能是 b 和 c。不妨记

a=b$*$c, d=b$\oplus$c。故<L, $\leqslant$>的四个元素 a, b, c, d 满足 a$\leqslant$a, b$\leqslant$b, c$\leqslant$c, d$\leqslant$d, a$\leqslant$b, a$\leqslant$c, a$\leqslant$d, b$\leqslant$d, c$\leqslant$d。




80、设<A, $\leq$>是有界格，$\leq$是 A 上的全序关系。若|A|>2，则$\forall$a$\in$A-{0, 1}，a 无补元。

证明：

用反证法证明。

若$\exists$ a$\in$A-{0, 1}，a 有补元 a'。即 a$\oplus$a'=1，a$*$a'=0。因为$\leq$是 A 上的全序关系，所以 a$\leq$a'或 a'$\leq$a。若 a$\leq$a'，则 a= a$*$a'=0。若 a'$\leq$a，则 a= a$\oplus$a'=1。无论如何，这与 $a\neq 0, a\neq 1$ 矛盾。

81、格<L, $*$, $\oplus$>是模格$\Leftrightarrow$ $\forall$a, b, c$\in$L，有

$$a\oplus(b*(a\oplus c))=(a\oplus b)*(a\oplus c)$$

证明：

$\Rightarrow$ $\forall$a, b, c$\in$L，记 d= a$\oplus$c。所以 a$\leq$d, 从而

$a\oplus(b*(a\oplus c))= a\oplus(b*d)= (a\oplus b)*d=(a\oplus b)*(a\oplus c)$。

$\Leftarrow$ $\forall$a, b, c$\in$L，若 a$\leq$c，则 c= a$\oplus$c。所以

$(a\oplus b)*c= (a\oplus b)*(a\oplus c) = a\oplus(b*(a\oplus c))= a\oplus(b*c)$。

82、设<L, $*$, $\oplus$>是分配格， a, b, c$\in$L。若(a$*$b)＝(a$*$c)且(a$\oplus$b)＝(a$\oplus$c)，则 b＝c。

证明：

由吸收律、分配律和交换律有

$b=b\oplus(a*b)=b\oplus(a*c)=(b\oplus a)*(b\oplus c)$

$=(a\oplus c) * (b\oplus c)=c\oplus(a* b)= c\oplus(a* c)=c$。

83、证明：在有补分配格中，每个元素的补元一定惟一。

证明：

设 $\langle L,\leq\rangle$ 是一个有补分配格。$\forall a\in L$，设 b 和 c 都是 a 的补元，即

$a\oplus b=1, a\oplus c=1, a* b=0, a* c=0$。

由吸收律、分配律和交换律有

$b= b\oplus 0=b\oplus(a* c)=(b\oplus a) * (b\oplus c)=1 * (b\oplus c)=b\oplus c$，

$c= c\oplus 0=c\oplus(a* b)=(c\oplus a) * (c\oplus b)=1 * (c\oplus b)=c\oplus b$。

故 b=c。从而每个元素的补元是惟一的。

84、设 $\langle L,*,\oplus\rangle$ 是格，则 L 是分配格当且仅当 $\forall a,b,c\in L$，有

$(a\oplus b)*c\leq a\oplus(b*c)$

证明：

$\Rightarrow$ 设 L 是分配格。对 $\forall a,b,c\in L$，有

$(a\oplus b)*c=(a*c)\oplus(b*c)$

因为 $a*c\leq a$，故 $(a*c)\oplus(b*c)\leq a\oplus(b*c)$。从而

$(a\oplus b)*c\leq a\oplus(b*c)$

$\Leftarrow$ 对 $\forall a,b,c\in L$，因为 $a*c\leq a, a*c\leq c, a\leq a\oplus b, b*c\leq c, b*c\leq b, b\leq a\oplus b$，所以 $a*c\leq a\oplus b$，$a*c\leq c$，$b*c\leq c, b*c\leq a\oplus b$，

从而 $(a*c)\oplus(b*c)\leq(a\oplus b)*c$。

又由已知有

$(a\oplus b)*c=((b\oplus a)*c)*c\leq(b\oplus(a*c))*c=((a*c)\oplus b)*c\leq(a*c)\oplus(b*c)$。

故 $(a\oplus b)*c=((a*c)\oplus b)*c\leq(a*c)\oplus(b*c)$。

从而 L 是分配格。

85、设 $\langle S,\oplus,\odot,',0,1\rangle$ 是一布尔代数，则 $\langle S,+\rangle$ 是一个交换群，其中＋定义为

$a+b=(a\odot b')\oplus(a'\odot b)$。

证明：

$\forall a,b\in S$，∵ $\langle S,\oplus,\odot,',0,1\rangle$ 是一布尔代数，

∴ $a+b=(a\odot b')\oplus(a'\odot b)= (b\odot a')\oplus(b'\odot a)=b+a$。

∴ 运算+满足交换律。

$\forall a,b,c\in S$，$(a+b)+c=((a\odot b')\oplus(a'\odot b))+c$

$=(((a\odot b')\oplus(a'\odot b))\odot c')\oplus(((a\odot b')\oplus(a'\odot b))'\odot c)$

$=(a\odot b'\odot c')\oplus(a'\odot b\odot c')\oplus((a'\oplus b)\odot(a\oplus b')\odot c)$

$=(a\odot b'\odot c')\oplus(a'\odot b\odot c')\oplus(((a'\odot b')\oplus(b\odot a))\odot c)$

$=(a\odot b'\odot c')\oplus(a'\odot b\odot c')\oplus(a'\odot b'\odot c)\oplus(a\odot b\odot c)$

$a+(b+c)=(c+b)+a$

$=(c\odot b'\odot a')\oplus(c'\odot b\odot a')\oplus(c'\odot b'\odot a)\oplus(c\odot b\odot a)$

$=(a\odot b'\odot c')\oplus(a'\odot b\odot c')\oplus(a'\odot b'\odot c)\oplus(a\odot b\odot c)$

$=(a+b)+c$

∴ 运算+满足结合律。

$\forall a\in S$，∵ $<S,\oplus,\odot,',0,1>$是一布尔代数，

∴ $a+0=(a\odot 0')\oplus(a'\odot 0)=(a\odot 1)\oplus 0=a$。

∴ 0 关于运算+的单位元。

$\forall a\in S$，∵ $<S,\oplus,\odot,',0,1>$是一布尔代数，

∴ $a+a=(a\odot a')\oplus(a'\odot a)=0\oplus 0=0$。

∴ a 是 a 关于运算+的逆元。

综上所述，$\langle S,+\rangle$是一个交换群。

86、设$<S,\oplus,\odot,',0,1>$是一布尔代数，则 $R=\{\langle a,b\rangle \mid a\oplus b=b\}$是 S 上的偏序关系。

证明：

$\forall a\in S$，∵ $\oplus$满足等幂律，∴ $a\oplus a=a$，故 aRa。即 R 是自反的。

$\forall a,b\in S$，若 aRb 且 bRa,∵ $\oplus$满足交换律，∴ $b=a\oplus b=b\oplus a=a$。即 R 是反对称的。

$\forall a,b,c\in S$，若 aRb 且 bRc,∵ $\oplus$满足结合律，∴ $c=c\oplus b=c\oplus(b\oplus a)$ $=(c\oplus b)\oplus a=c\oplus a$，故 aRc。即 R 是反对称的。

综上所述，$R=\{\langle a,b\rangle \mid a\oplus b=b\}$是 S 上的偏序关系。

87、设$<S,\oplus,\odot,',0,1>$是一布尔代数，则关系$\leq=\{\langle a,b\rangle \mid a\odot b=a\}$是 S

上的偏序关系。

证明：

$\forall a\in S$，因为⊙满足等幂律，所以 a⊙a=a，故 a≤a。即≤是自反的。

$\forall a,b\in S$，若 a≤b 且 b≤a，因为⊙满足交换律，所以 a=a⊙b=b⊙a=b。即≤是反对称的。

$\forall a,b,c\in S$，若 a≤b 且 b≤c，因为⊙满足结合律，因为 a=a⊙b=a⊙(b⊙c)=(a⊙b)⊙c=a⊙c，故 a≤c。即≤是反对称的。

综上所述，≤={<a,b> | a⊙b=a}是 S 上的偏序关系。

**（图论部分）**

88、证明在有 n 个结点的树中，其结点度数之和是 2n-2。

证明：

设 T=<V,E>是任一棵树，则|V|=n，且|E|=n-1。

由欧拉握手定理，树中所有结点的度数之和等于 2|E|.

从而结点度数之和是 2n-2。

88、任一图中度数为奇数的结点是偶数个。

证明：

设 G=〈V,E〉是任一图。设|V|=n。

由欧拉握手定理可得 $\sum_{v\in V}$ deg(v)=2|E|可得，图中所有结点度数之和是偶数。

显然所有偶数度结点的度数之和仍为偶数，从而所有奇数度结点的度数之和也是偶数。因此，图中度数为奇数的结点一定为偶数个。

89、连通无向图 G 的任何边一定是 G 的某棵生成树的弦。这个断言对吗？若是对的请证明之，否则请举例说明。

证明：

不对。

反例如下：若 G 本身是一棵树时，则 G 的每一条边都不可能是 G 的任一棵生成树（实际上只有惟一一棵）的弦。

90、设 T=<V,E>是一棵树，若|V|>1，则 T 中至少存在两片树叶。

证明：

（用反证法证明）设|V|=n。

因为 T=〈V,E〉是一棵树，所以|E|=n-1。

由欧拉握手定理可得 $\sum_{v \in V} \deg(v)$=2|E|=2n-2。

假设 T 中最多只有 1 片树叶，则$\sum_{v \in V} \deg(v) \geq 2(n-1)+1>2n-2$。

得出矛盾。

91、画一个使它分别满足：

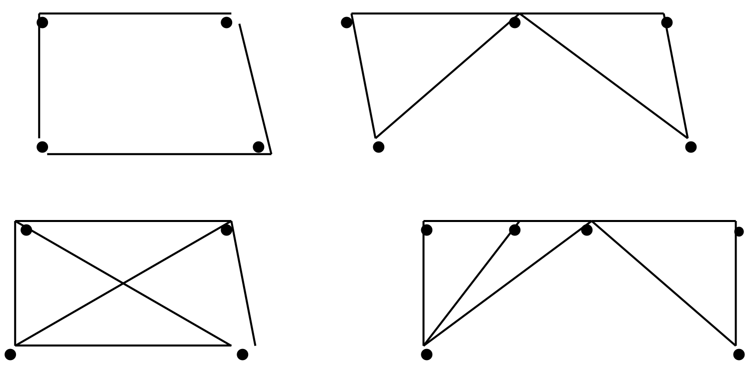
(1) 有欧拉回路和哈密尔顿回路；

(2) 有欧拉回路，但无条哈密尔顿回路；

(3) 无欧拉回路，但有哈密尔顿回路；

(4) 既无欧拉回路，又无哈密尔顿回路。

解



92、设无向图 G=<V,E>，|E|=12。已知有 6 个 3 度顶点，其他顶点的度数均小于 3。问 G 中至少有多少个顶点？

解：

设 G 中度数小于 3 的顶点有 k 个，由欧拉握手定理

$$24=\sum_{v \in V} \deg(v)$$

知，度数小于 3 的顶点度数之和为 6。故当其余的顶点度数都为 2 时，G 的顶点最少。即 G 中至少有 9 个顶点。

93、设图 $G=\langle V,E\rangle$，$|V|=n$，$|E|=m$。k 度顶点有 $n_k$ 个，且每个顶点或是 k 度顶点或是 k+1 度顶点。证明：$n_k=(k+1)-2m$。

证明：

由已知可知，G 中 k+1 度顶点为 $n-n_k$ 个。再由欧拉握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V}\deg(v)=kn_k+(k+1)(n-n_k)=(k+1)n+-n_k$$

故 $n_k=(k+1)-2m$。

94、设 $G=\langle V,E\rangle$ 是一个连通且 $|V|=|E|+1$ 的图，则 G 中有一个度为 1 的结点。

证明：

（用反证法证明）

设 $|V|=n$，则 $|E|=n-1$。

由欧拉握手定理可得 $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|=2n-2$。

因为 G 连通，所以 $\forall v\in V$，$\deg(v)\geq 1$。假设 G 中没有 1 片树叶，则 $\sum_{v\in V}\deg(v)\geq 2n>2n-2$。

得出矛盾。

95、若 n 阶连通图中恰有 n-1 条边，则图中至少有一个结点度数为 1。

证明：

（用反证法证明）设 $G=\langle V,E\rangle$ 有 n-1 条边且 $|V|=n$。

由欧拉握手定理可得 $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|=2n-2$。

因为 G 是连通图，所以 G 中任一结点的度数都大于等于 1。

假设 G 中不存在度数为 1 的结点，则 G 中任一结点的度数都大于等于 2. 故

$$\sum_{v\in V}\deg(v)\geq 2(n-1)+1>2n-2,$$

得出矛盾。

96、若 G 有 n 个结点，m 条边，f 个面，且每个面至少由 $k(k\geq 3)$ 条边围成，则 $m\leq k(n-2)/(k-2)$。

证明：

设连通简单无向平面图 G=〈V,E,F〉，则|V|=n,|E|=m,|F|=p。

由已知对任一 $f\in F$，　$\deg(f)\geq k$。

由公式 $\sum_{f\in F}\deg(f)=2|E|$ 可得，$2|E|\geq k|F|$。

再由欧拉公式 $|V|-|E|+|F|=2$ 可得 $|V|-|E|+\frac{2}{k}|E|\geq 2$。

即 $k(n-2)\geq(k-2)m$。

所以 $m\leq k(n-2)/(k-2)$。

97、设 G=<V,E>是连通的简单平面图，|V|=n≥3，面数为 k,则 k≤2n-4。

证明：

记|E|=m。因为 G=<V,E>是连通的简单平面图，故每个面的度数都不小于 3。从而由公式 $\sum_{f\in F}\deg(f)=2|E|$ 可得

$3k\leq 2m$

再由欧拉公式 $|V|-|E|+|F|=2$ 有

$m=n+k-2$

及　$\frac{3}{2}k\leq n+k-2$

故　$k\leq 2n-4$。

98、证明对于连通无向简单平面图，当边数 e＜30 时，必存在度数≤4 的顶点。

证明：

若结点个数小于等于 3 时，结论显然成立。

当结点多于 3 个时，用反证法证明。

记|V|=n,|E|=m,|F|=k。

假设图中所有结点的度数都大于等于 5。

由欧拉握手定理得 $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$ 得　$5n\leq 2m$。

又因为 G=〈V,E,F〉是一个连通简单无向平面图，

所以对每个面 f,$\deg(f)\geq 3$。

由公式 $\sum_{f\in F}\deg(f)=2|E|$ 可得，$2m\geq 3k$。

再由欧拉公式|V|-|E|+|F|=2 可得 $2\leq\frac{2}{5}m-m+\frac{2}{3}m=\frac{1}{15}m$

从而 30≤m,这与已知矛盾。

99、在一个连通简单无向平面图 G=〈V，E，F〉中若|V|≥3，则 |E|≤3|V|－6。

证明：

∵ |V|≥3，且 G=〈V，E，F〉是一个连通简单无向平面图，

∴ d(f) ≥3，∀ f∈F。

由公式 $\sum_{f\in F}$ deg (f)=2|E|可得，2|E|≥3|F|。

再由欧拉公式|V|-|E|+|F|=2 可得|V|-|E|+$\frac{2}{3}$|E|≥2。

∴|E|≤3|V|－6。

100、给定连通简单平面图 G=<V,E,F>，且|V|=6，|E|=12，则对于任意 f∈F，d(f)=3。

证明：

因为|V|=6≥3，且 G=〈V,E,F〉是一个连通简单无向平面图，

所以对任一 f∈F，deg(f)≥3。

由欧拉公式|V|-|E|+|F|=2 可得|F|=8。

再由公式 $\sum_{f\in F}$ deg(f)=2|E|，$\sum_{f\in F}$ deg(f)=24。

因为对任一 f∈F，deg(f)≥3，故要使上述等式成立， 对任一 f∈F，deg(f)=3。

101、设 G=<V,E>是 n 个顶点的无向图(n>2)，若对任意 u,v∈V，有 d(u)+d(v)≥n，则 G 是连通图。

证明：

用反证法证明。

若 G 不连通，则它可分成两个独立的子图 $G_1$ 和 $G_2$，其中|V($G_1$)|+|V($G_2$)|-2=n ，且 $G_1$ 中的任一个顶点至多只和 $G_1$ 中的顶点邻接，而 $G_2$ 中的任一顶点至多只和 $G_2$ 中的顶点邻接。任取 u∈V($G_1$),v∈V($G_2$),则 d(u)≤|V(G

$_1)|-1$，$d(v)\le|V(G_2)|-1$。

故 $d(u)+d(v)\le(|V(G_1)|-1)+(|V(G_2)|-1)\le|V(G_1)|+|V(G_2)|-2$

$=n-2<n$，这与已知矛盾。

故 G 是连通图。

102、一次会议有 20 人参加，其中每个人都在其中有不下 10 个朋友。这 20 人围成一圆桌入席。有没有可能使任意相邻而坐的两个人都是朋友？为什么？

证明：

可以。

将每个人对应成相应的顶点，若两人是朋友，则对应的两个顶点间连上一条无向边，作出一个简单无向图。由已知，图中每个顶点的度数都大于等于 10。即图中任两个不相邻的顶点的度数大于等于 20，即顶点数。故这个图是一个哈密尔顿图，从而存在哈密尔顿回路。任取一条哈密尔顿回路，按回路经过的顶点的次序安排对应的人的座位，就可满足要求。

103、证明在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友。

证明：

将每个人对应成相应的顶点，若两人是朋友，则对应的两个顶点间连上一条无向边，作出一个简单无向图。则原命题相当于在该无向图中一定存在两个顶点的度数相等。

设该简单无向图中有 n 个顶点，则图中 n 个顶点的度数只能为 $0,1,2,\cdots,n-1$。若图中有两个或两个以上的顶点度数为 0，则结论显然成立。否则所有顶点的度数都大于等于 1。现用反证法证明该无向图中一定存在两个顶点的度数相等。

设该简单无向图中 n 个顶点中任何一对顶点的度数都不相等，即这 n 个顶点的度数两两不同。但每个顶点的度数只能是 $1,2,\cdots,n-1$ 这 $n-1$ 个数中的某一种，这显然产生了矛盾。

因此该无向图中一定存在两个顶点的度数相等。从而在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友。

104、设有如下有向图 $G=\langle V,E\rangle$，

（1）求 G 的邻接矩阵；（2）G 中 $v_1$ 到 $v_4$ 的长度为 4 的通路有多少条？（3）G 中经过 $v_1$ 的长度为 3 的回路有多少条？（4）G 中长度不超过 4 的通路有多少条？其中有多少条通路？

解：

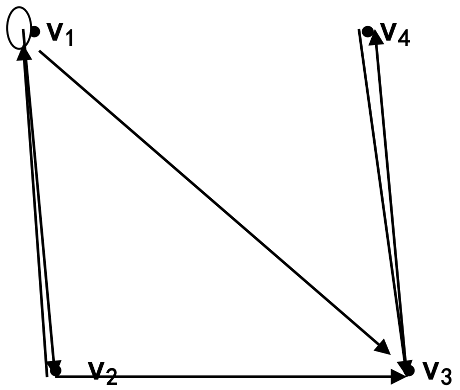
（1） $A=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}2&1&2&1\\1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix}3&2&4&2\\2&1&3&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，$A^4=\begin{bmatrix}5&3&7&4\\3&2&4&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

（2） G 中 $v_1$ 到 $v_4$ 的长度为 4 的通路有 4 条；

（3） G 中经过 $v_1$ 的长度为 3 的回路有 3 条；

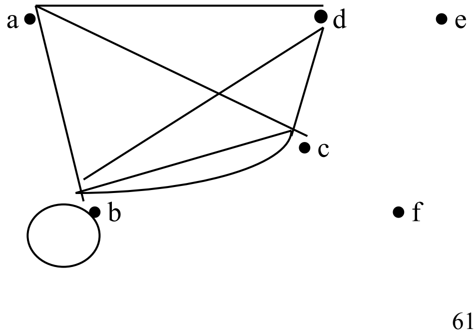
（4） G 中长度不超过 4 的通路有 72 条，其中有 19 条回路。



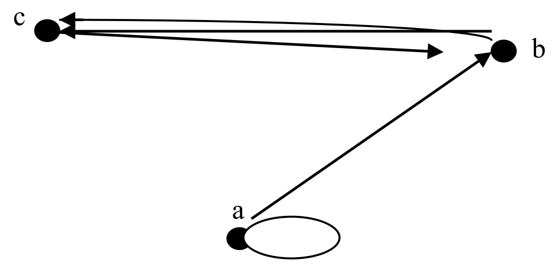

题 104 图

105、求下列无向图中每个顶点的度数；求下列有向图中每个顶点的出度、入度和度。

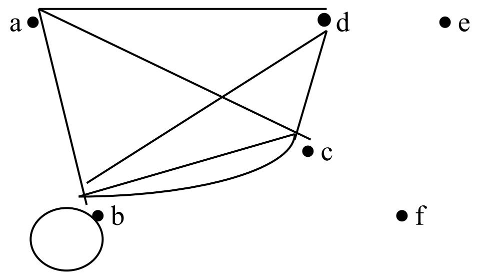
解：



在这个无向图中 $d(a)=3, d(b)=6$，$d(c)=4$，$d(d)=3$，$d(e)=0$，$d(f)=0$。



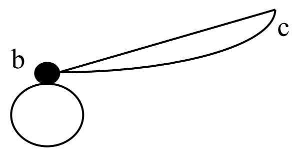

在这个有向图中 $d(a)=3, d(b)=4$，$d(c)=3$，$d^{+}(a)=2$，$d^{-}(a)=1$，$d^{+}(b)=2$，$d^{-}(b)=2, d^{+}(c)=1$，$d^{-}(a)=2$。



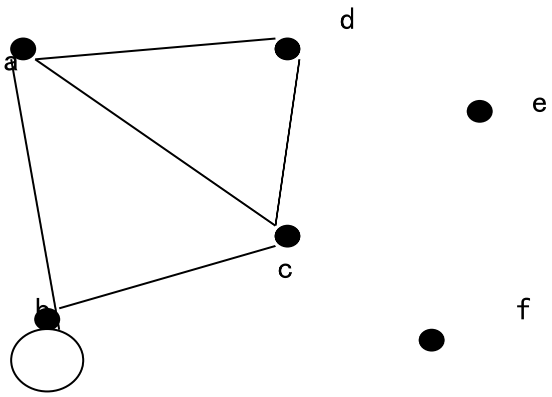

题 106 图

106、求下列无向图的子图、生成子图、由边集诱导的子图和由顶点集诱导的子图。

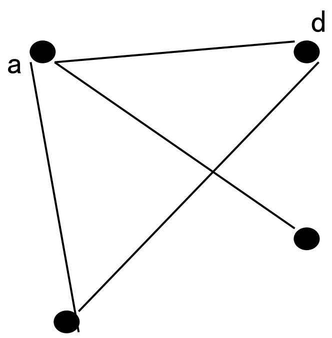
解：




它的一个子图



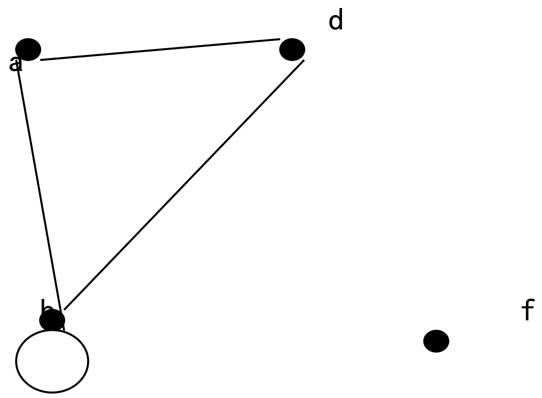

它的一个生成子图



c

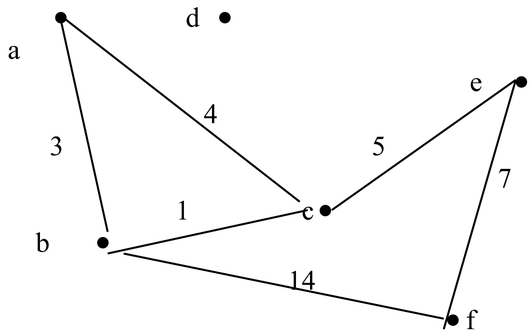
b

由边集{(a,b),(a,c),(a,d),(b,d)}诱导出的子图




由顶点集{a,b,d,f}诱导出的子图

107、求下列赋权图顶点间的距离。




解:

d(a,b)=3, d(a,c)=3, d(a,d)=∞, d(a,e)=8, d(a,f)=16,

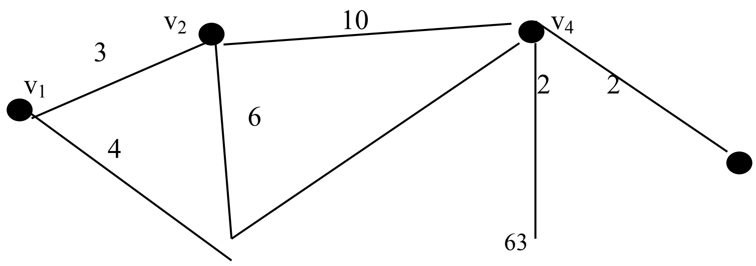
d(b,c)=1, d(b,d)=∞, d(b,e)=6, d(b,f)=13,

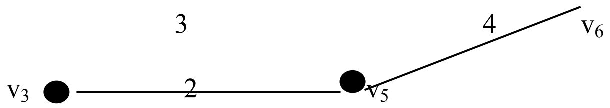
d(c,d)=∞, d(c,e)=5, d(c,f)=12,

d(d,e)=∞, d(d,f)=∞,

d(e,f)=7,

108、求下列赋权图中 $v_1$ 到其他顶点的距离。



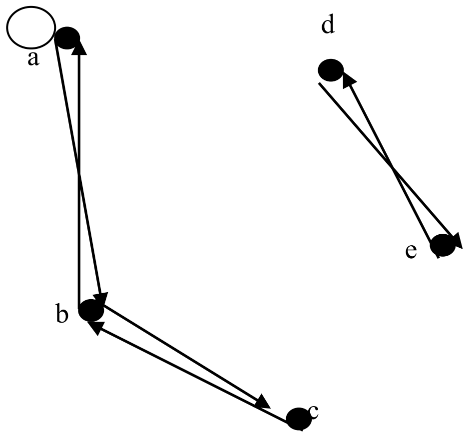



解：

| S | $l(v_2)$ | $l(v_3)$ | $l(v_4)$ | $l(v_5)$ | $l(v_6)$ | t | l(t) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{v_1\}$ | 3 | 4 | ∞ | ∞ | ∞ | $v_2$ | 3 |
| $\{v_1,v_2\}$ | | 4 | 13 | ∞ | ∞ | $v_3$ | 4 |
| $\{v_1, v_2, v_3\}$ | | | 7 | 6 | ∞ | $v_5$ | 6 |
| $\{v_1,v_2, v_3, v_5\}$ | | | 7 | | 10 | $v_4$ | 7 |
| $\{v_1,v_2, v_3, v_5, v_4\}$ | | | | | 9 | $v_6$ | 9 |
| $\{v_1,v_2, v_3, v_5, v_4, v_6\}$ | | | | | | | |

故 $v_1$ 到 $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 的距离分别是 3，4，7，6，9。

109、求下图的可达矩阵。




解：

该图的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}2&1&1&0&0\\1&2&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

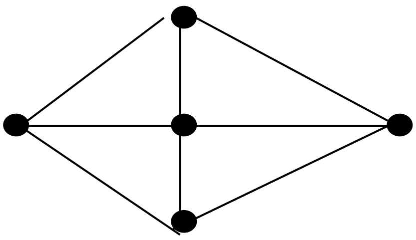
$$A^3=\begin{bmatrix}3&3&1&0&0\\3&1&2&0&0\\1&2&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}6&4&3&0&0\\4&5&1&0&0\\3&1&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

故图的可达矩阵为

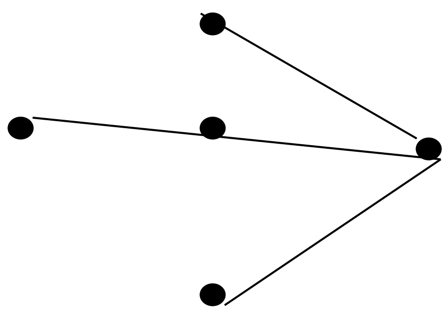
$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

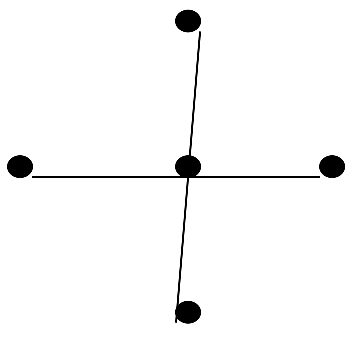
110、求下列图的生成树。



解：

下面是它的两棵生成树：





111、在一个有 n 个顶点的 $G=\langle V,E\rangle$ 中，$u,v\in V$。若存在一条从 u 到 v 的一条通路，则必有一条从 u 到 v 的长度不超过 n-1 的通路。

证明：

设 $v_0e_1v_1e_2\cdots e_l\ v_l$ 是从 $u=v_0$ 到 $v=v_l$ 的长为 l 的通路。

若 $l\leq n-1$，则结论显然成立。

否则因为 $l+1>n$，故 $v_0$，$v_1$，…，$v_l$ 中必有一个顶点是重复出现的。不妨设 $v_i=v_j(0\leq i<j\leq l)$，则新通路 $v_0e_1v_1e_2\cdots v_ie_{j+1}v_{l+1}e_{j+2}v_{j+2}\cdots e_lv_l$ 是一条从 u 到 v 的通路，且此通路长度比原通路长度至少少 1。

若新通路的长度≤n-1，则结论得证。否则对新通路重复上述过程，必可以得到一条从 u 到 v 的长为 n-1 的通路。

112、设简单平面图 G 中顶点数 n=7，边数 m=15。证明：G 是连通的。

证明：

设 G 具有 k 个连通分支 $G_1$，$G_2$，...，$G_k$。设 $G_i$ 的顶点数为 $n_i$，边数为 $m_i$，$i=1,2,\ldots,k$。

先证每个连通分支的顶点数都大于 1。否则说明 G 中有孤立结点。由于 G 是简单图，从而要使 G 的边数是 15，则 G 只有两个连通分支，其中一个是由孤立结点导出的，另一个是 $K_6$。但 $K_6$ 不是平面图，故要每个连通分支的顶点数都大于 1。

同理可证，每个连通分支的顶点数都大于 2。

由此可得，G 的每个连通分支至少有 3 个顶点。从而

$$m_i\leq 3n_i-6$$

即 $m=\sum_{i=1}^{k}m_i\leq\sum_{i=1}^{k}(3n_i-6)=3n-6k$

从而 $15\leq 21-6k$，即 $k\leq 1$。从而 k=1，故 G 是连通图。

113、已知一棵无向树中有 2 个 2 度顶点、1 个 3 度顶点、3 个 4 度顶点，其余顶点度数都为 1。问它有多少个 1 度顶点？

解：

设它有 k 个 1 度顶点，则由欧拉握手定理

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$$

可得 $2|E|=k+4+3+12=k+19$。再由于它是一棵树，故

$$|E|=k+2+1+3-1=k+5$$

从而 $2(k+5)=k+19$，$k=9$。故它有 9 个 1 度顶点。

## 114、有向图 G 是强连通的⇔G 中有一回路，它至少通过每个顶点一次。

证明：

⇒设 $G=\langle V,E\rangle$是强连通图。任取 $u,v\in V$，则 u 和 v 相互可达，即从 u 到 v 有路径 $P_1$，从 v 到 u 有路径 $P_1$。故从 $P_1$ 和 $P_2$ 首尾相接可得到一条经过 u 和 v 的回路 $C_1$。

若 $C_1$ 经过 G 中所有顶点至少一次，则 $C_1$ 就是满足结论要求的回路。否则若 $C_1$ 没有经过顶点 w，则类似地我们可得到一条经过 u 和 w 的回路 $C_2$。从 $C_1$ 和 $C_2$ 我们可得到一条经过更多顶点的回路 $C_3$（先从 u 经过 $P_1$ 到 v,再从 v 经过 $C_2$ 回到 v,再从 v 经过 $P_2$ 回到 u)。

对 $C_3$ 重复上述过程，直到得到一条经过所有顶点的回路为止。

⇐若 G 中存在一条经过 G 中所有顶点至少一次的回路，则 G 中任意两个顶点是相互可达的，从而 G 是强连通的。

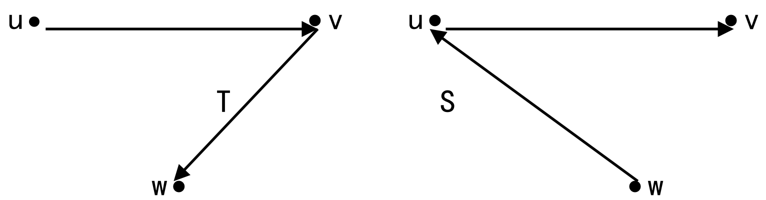
## 115、一个有向图是单向连通图⇔ 它有一条经过所有结点的路。

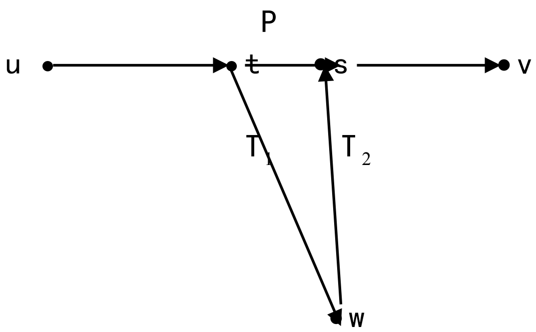
证明：

⇒设 $G=\langle V,E\rangle$是单向连通图。任取 $u,v\in V$，则 u 可达 v 或 v 可达 u。不妨设 u 可达 v，即从 u 到 v 有路径 $P_1$。

若 $P_1$ 经过 G 中所有顶点至少一次，则 $P_1$ 就是满足结论要求的路径。否则若 $P_1$ 没有经过顶点 w，则如果 v 经过路径 T 可达 w，连接 $P_1$ 和 T 我们可得一条经过 $P_1$ 经过的所有顶点及 w 的更长的路径 $P_2$；否则若 w 经过路径 S 可达 u，连接 S 和 $P_1$ 我们也可得一条经过 w 及 $P_1$ 经过的所有顶点的更长的路径 $P_2$；再否则我们一定可以找到 $P_1$ 经过的两个相邻顶点 t 和 s，t 到 s 有边，t 经过路径 $T_1$ 可达 w，w 经过路径 $T_2$ 可达 s（否则就与 u 可达 w, w 可达 v 矛盾)，我们构造这样一条路径 $P_2$：从 u 出发经过 $P_1$ 到达 t, t 经过路径 $T_1$ 到达 w, 再从 w 出发经过路径 $T_2$ 到达 s，然后从 s 出发经过 $P_1$ 到达 v。这是一条经过 w 及 $P_1$ 所经过的所有顶点的更长的路径。

$P_1$ $P_1$




对 $P_2$ 重复上述过程，直到得到一条经过所有顶点的路径为止。

⇐若 G 中存在一条经过 G 中所有顶点至少一次的路径，则 G 中任意两个顶点中至少有一个可达另一个，从而 G 是单向连通的。