

1. Регрессионная модель задана в матричном виде при помощи уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)'$. Известно, что $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ и $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$. Известно также, что

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства расчетов приведены матрицы

$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X'X)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Найдите вектор МНК-оценок коэффициентов $\hat{\beta}$.
- (b) Найдите несмещенную оценку для неизвестного параметра σ^2 .
- (c) Проверьте гипотезу $\beta_2 = 0$ против альтернативной о неравенстве на уровне значимости 5%
2. По данным о пассажирах Титаника оценивается логит-модель. Зависимая переменная **survived** равна 1, если пассажир выжил. Объясняющая переменная **sexmale** равна 1 для мужчин.

	Model 1
(Intercept)	1.92*** (0.28)
age	-0.01 (0.01)
sexmale	-2.84*** (0.21)
AIC	633.45
BIC	646.80
Log Likelihood	-313.72
Deviance	627.45
Num. obs.	633

*** $p < 0.001$, ** $p < 0.01$, * $p < 0.05$

Таблица 1: Statistical models

- (a) Оцените вероятность выжить для женщины 20 лет
- (b) Оцените предельный эффект увеличения возраста для женщины 20 лет
- (c) С помощью какого метода оценивается логит-модель? Каким образом при этом получаются оценки стандартных ошибок коэффициентов?

3. Теорема Гаусса-Маркова.

- (a) Аккуратно сформулируйте теорему Гаусса-Маркова для нестохастических регрессоров.
 - (b) Поясните каждое из свойств оценок, фигурирующих в теореме.
 - (c) Как меняются свойства оценок МНК при нарушении предпосылки теоремы о том, что дисперсия ε_i постоянна?
4. Для линейной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ была выполнена сортировка наблюдений по возрастанию переменной x . Исходная модель оценивалась по разным частям выборки:

Выборка	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	RSS
$i = 1, \dots, 50$	0.93	2.02	3.38	145.85
$i = 1, \dots, 21$	1.12	2.01	3.32	19.88
$i = 22, \dots, 29$	0.29	2.07	2.24	1.94
$i = 30, \dots, 50$	0.87	1.84	3.66	117.46

Известно, что ошибки в модели являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием.

- (a) Предполагая гомоскедастичность остатков на уровне значимости 5% проверьте гипотезу, что исследуемая зависимость одинакова на всех трёх частях всей выборки.
- (b) Протестируйте ошибки на гетероскедастичность на уровне значимости 5%.
- (c) Какой тест можно на гетероскедастичность можно было бы использовать, если бы не было уверенности в нормальности остатков? Опишите пошагово процедуру этого теста.