1. Цель этой кампании — доказать теорему Гаусса-Маркова для множественной регрессии. Итак, $y = X\beta + u$, про случайные ошибки u известно, что $\mathrm{E}(u) = 0$, $\mathrm{Var}(u) = \sigma^2 \cdot I$. Поехали! :)

   Тульский дворянин Дмитрий Сергеевич Дохтуров использует классическую МНК-оценку, $\hat{\beta}_{OLS}$:

   а) Вспомните формулу для МНК-оценки $\hat{\beta}_{OLS}$

   б) Является ли оценка $\hat{\beta}_{OLS}$ линейной по y?

   в) Докажите, что оценка $\hat{\beta}_{OLS}$ является несмещённой

   Корсиканец Наполеон Бонапарт предлагает альтернативную несмещённую оценку $\hat{\beta}_{alt} = A \cdot y$:

   г) Является ли оценка $\hat{\beta}_{alt}$ линейной по y?

   д) Чему равняется матрица AX? Да поможет здесь условие несмещённости!

   е) Найдите $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_{alt}, \hat{\beta}_{OLS})$ и $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_{OLS}, \hat{\beta}_{alt})$.

   ж) Полученное в предыдущем пункте выражение должно вызывать ностальгию, так как очень похоже на... На что?

   Теперь пора посмотреть на разницу $\hat{\beta}_{alt} - \hat{\beta}_{OLS}$:

   з) Вспомните или выведите формулу для $\mathrm{Var}(r + s)$, где r и s — случайные векторы одинаковой длины

   и) Докажите, что $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{alt} - \hat{\beta}_{OLS}) = \mathrm{Var}(\hat{\beta}_{alt}) - \mathrm{Var}(\hat{\beta}_{OLS})$

   к) Рассмотрим матрицу $C = \mathrm{Var}(\hat{\beta}_{alt}) - \mathrm{Var}(\hat{\beta}_{OLS})$. Что находится на её диагонали?

   л) Является ли матрица C симметричной?

   м) Докажите, что матрица C является положительно полуопределённой. Если кто забыл, то это означает, что для любого вектора a выполнено неравенство $a'Ca \geq 0$

   н) Докажите, что диагональные элементы матрицы C не меньше нуля

2. Вектор u размера 3×1 имеет стандартное нормальное распределение, $u \sim \mathcal{N}(0; I)$. Дана матрица D:

$$D = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

   а) Является ли матрица D симметричной? Идемпотентной?

   б) Найдите собственные числа матрицы D с учётом кратности

   в) Как распределена случайная величина $u'Du$?

   г) Аккуратно объясните, в чём состоит геометрический смысл умножения произвольного вектора y на матрицу D?

3. Найдите величины ESS, RSS, TSS и R^2 для регрессии $y_i = \mu + u_i$

4. В прошлом году, в курсе теории вероятностей и математической статистики, использовалось без доказательства следующее утверждение:

   Если случайные величины y_i независимы и нормально распределены $y_i \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, то $q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2/\sigma^2$ имеет хи-квадрат распределение с $(n-1)$ степенью свободы.

   Настала пора вернуть долг чести и доказать это утверждение :)

   а) Рассмотрим вектор центрированных y, то есть такой вектор $\tilde{y}$, что $\tilde{y}_i = y_i - \bar{y}$. Представьте вектор $\tilde{y}$ в виде $\tilde{y} = Ay$. Как выглядит матрица A?

   б) Является ли матрица A симметричной? Идемпотентной? Найдите все её собственные числа с учётом кратности.

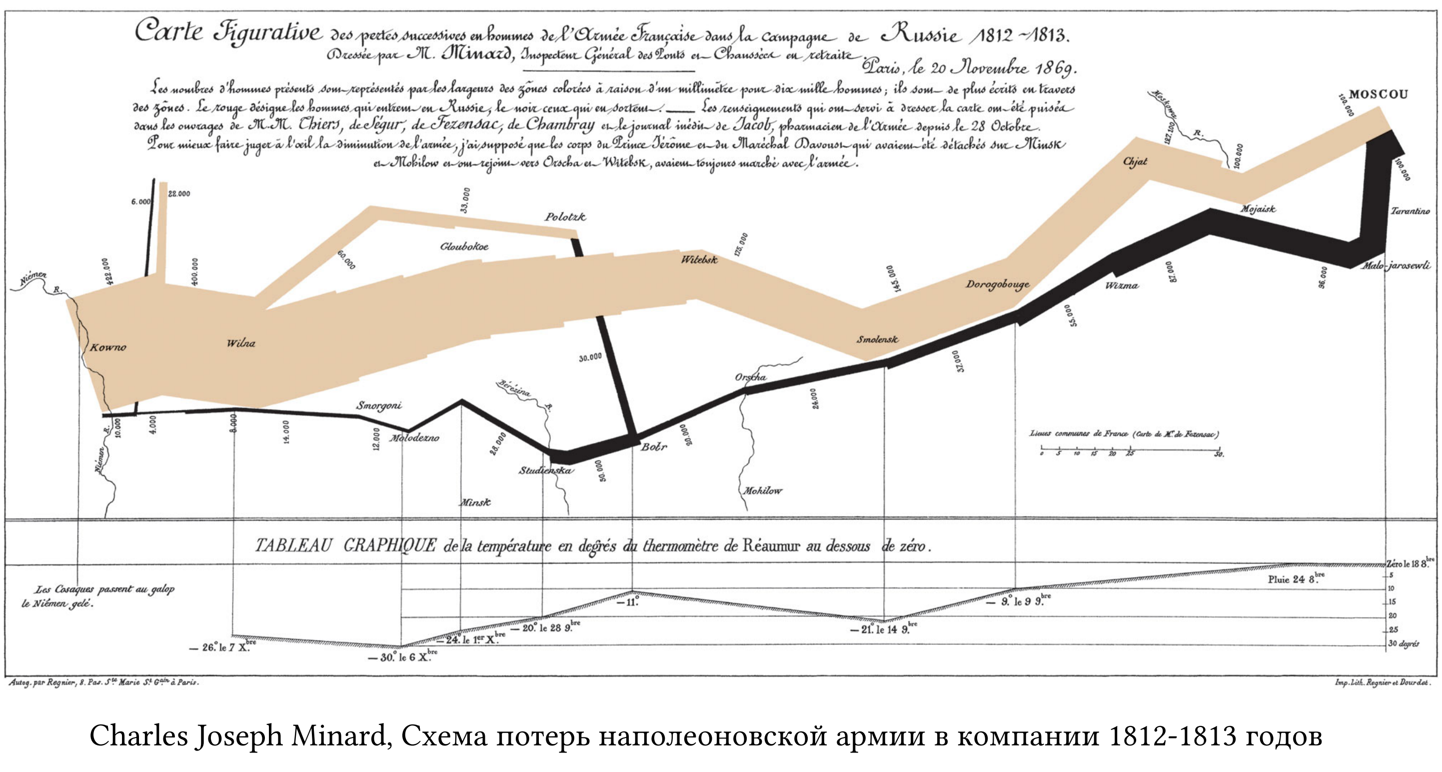
   в) Представьте скаляр q в виде $q = \frac{1}{\sigma^2}\tilde{y}'B\tilde{y}$. Как выглядит матрица B?

   г) Представьте скаляр q в виде $q = \frac{1}{\sigma^2}y'Cy$. Как выглядит матрица C?

   д) Представьте скаляр q в виде $q = u'Du$, где вектор $u \sim \mathcal{N}(0; I)$. Как выглядит матрица D?

   е) Является ли матрица D симметричной? Идемпотентной? Найдите все её собственные числа с учётом кратности.

   ж) Сформулируйте теорему о законе распределение квадратичной формы нормальных случайных величин и верните долг чести.



Charles Joseph Minard, Схема потерь наполеоновской армии в компании 1812-1813 годов