

Группа, имя и фамилия: _____

Настроение: _____

1. В рамках классической линейной регрессионной модели $y = X\beta + \varepsilon$, $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$, найдите: $\mathbb{E}(\hat{\varepsilon})$, $\text{Var}(\hat{\varepsilon})$, $\text{Cov}(\hat{\varepsilon}, y)$

2. Имеются данные:

y_i	x_i	z_i
1	2	1
2	-1	2
3	-3	-3
4	2	0

Предположим, что ошибки нормальны $N(0; \sigma^2)$ и независимы.

- (a) Оцените с помощью МНК модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$
 - (b) Найдите RSS , TSS , ESS и R^2
 - (c) Проверьте гипотезу о незначимости коэффициента $\hat{\beta}_2$ на уровне значимости 5%.
 - (d) Найдите оценку ковариационной матрицы коэффициентов $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta})$
 - (e) Проверьте гипотезу $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ на уровне значимости 5%.
 - (f) Для четвёртого наблюдения постройте прогноз и найдите ошибку прогноза.
3. Как могут измениться (могут ли увеличиться? уменьшиться?) RSS , TSS и ESS при добавлении дополнительного наблюдения? При добавлении дополнительного регрессора?
4. Эконометресса Агнесса оценила множественную регрессию $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$. Потом она добавила два наблюдения к своей выборке: $y_{n+1} = 1$, $x_{n+1} = 2$, $z_{n+1} = 3$ и $y_{n+2} = -1$, $x_{n+2} = 1$, $z_{n+2} = 2$. Как при этом изменились матрицы $X'X$ и $X'y$?
5. По 47 наблюдениям оценивается зависимость фертильности женщин от доли мужчин занятых в сельском хозяйстве и доли католического населения по Швейцарским кантонам в 1888 году.

$$\text{Fertility}_i = \beta_1 + \beta_2 \text{Examination}_i + \beta_3 \text{Catholic}_i + \varepsilon_i$$

	Оценка	Ст. ошибка	t-статистика
(Intercept)		4.98	16.68
Examination	-0.89		-4.08
Catholic	0.04	0.04	

- (a) Заполните пропуски в таблице.
- (b) Укажите коэффициенты, значимые на 10% уровне значимости.
- (c) Постройте 95%-ый доверительный интервал для коэффициента при Examination

6. Аккуратно сформулируйте (с «Если» и «то») теорему Гаусса-Маркова для случая нестохастических регрессоров.

7. Нарисуйте Самую Главную Картинку, иллюстрирующую метод наименьших квадратов для множественной регрессии. Отметьте на картинке RSS , ESS , TSS и R^2

8. Эконометресса Ефросинья оценивала модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$. Найдя матрицы $X'X$ и $(X'X)^{-1}$, она призадумалась...

$$X'X = \begin{bmatrix} 47 & 775 & 1934 \\ 775 & 15707 & 23121 \\ 1934 & 23121 & 159570 \end{bmatrix}, (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.26653 & -0.01067 & -0.00168 \\ -0.01067 & 0.00051 & 0.00006 \\ -0.00168 & 0.00006 & 0.00002 \end{bmatrix}$$

(a) Помогите Ефросинье найти количество наблюдений, \bar{z} , $\sum x_i z_i$, $\sum (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})$

(b) Ефросинья решила зачем-то также оценить модель $x_i = \gamma_1 + \gamma_2 z_i + u_i$. Как выглядят матрицы $X'X$ и $X'y$ для новой модели?

(c) (*) Как Ефросинья может найти RSS в новой модели в одно арифметическое действие?

9. Как известно, $\hat{y} = Hy$, где матрица-шляпница H задаётся формулой $H = X(X'X)^{-1}X'$.

(a) Является ли вектор остатков $\hat{\varepsilon}$ собственным вектором матрицы H ? Если да, то какое собственное число ему соответствует?

(b) Является ли вектор прогнозов \hat{y} собственным вектором матрицы H ? Если да, то какое собственное число ему соответствует?

(c) Является ли регрессор z (скажем, второй столбец матрицы X) собственным вектором матрицы H ? Если да, то какое собственное число ему соответствует?