Пусть регрессионная модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, задана в матричном виде при помощи уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}^T$. Известно, что ошибки ε нормально распределены с $\mathbb{E}\varepsilon = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$. Известно также, что:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для удобства расчётов ниже приведены матрицы:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

1. Оценки $\hat{\beta}$
2. Спрогнозируйте y, если $x_2 = 1$ и $x_3 = -2$
3. TSS, ESS, RSS, R^2
4. $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2)$
5. $\hat{\sigma}^2$
6. $\mathrm{Var}(\varepsilon_1)$
7. $\mathrm{Var}(\beta_1)$
8. $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)$
9. $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)$
10. $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$
11. $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$
12. $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$
13. $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$
14. $\mathrm{Var}(\beta_2 - \beta_3)$
15. Проверьте гипотезу H_0: $\beta_1 = 1$ против гипотезы H_a: $\beta_1 \neq 1$ на уровне значимости 5%
16. Проверьте гипотезу H_0: $\beta_2 = 0$ против гипотезы H_a: $\beta_2 \neq 0$ на уровне значимости 10%
17. Проверьте гипотезу H_0: $\beta_2 = \beta_3$ против гипотезы H_a: $\beta_2 \neq \beta_3$ на уровне значимости 5%