Метрика. Блокбастер, 28-12-2015

В этот день, 28 декабря 1895 года, в индийском салоне «Гран-кафе» на бульваре Капуцинок в Париже состоялся публичный показ «Синематографа братьев Люмьер» :)

1. Регрессионная модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ задана в матричном виде $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)'$. Известно, что $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$. Известно также, что
$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Для удобства расчетов приведены матрицы
$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1.5 & 1 \\ -1 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}.$$
   (a) Найдите вектор МНК-оценок коэффициентов $\hat{\beta}$.
   (b) Найдите коэффициент детерминации R^2
   (c) Предполагая нормальное распределение вектора ε, проверьте гипотезу H_0: $\beta_3 = 0$ против альтернативной H_a: $\beta_3 \neq 0$ на уровне значимости 5%.
   (d) Постройте точечный прогноз и 95%-ый предиктивный интервал для $x_6 = 2$ и $z_6 = 0$.

2. Рассмотрим модель со стохастическими регрессорами $y = X\beta + \varepsilon$. При этом $\mathbb{E}(\varepsilon|X) = 0$, как и положено, однако ошибки ε хитро зависят друг от друга, и поэтому $\mathrm{Var}(\varepsilon|X)$ есть некоторая известная недиагональная матрица V. Несмотря на нарушение предпосылок теоремы Гаусса-Маркова Чак Норрис использует обычный МНК для получения оценок $\hat{\beta}$. Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta}|X)$, $\mathrm{Var}(\hat{\beta}|X)$ и $\mathrm{Cov}(\hat{y}, \hat{\varepsilon}|X)$

3. Рассмотрим классическую линейную регрессионную модель:
$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$$
   (a) Огюст Люмьер утверждает, что при нестохастических регрессорах математические ожидания $\mathbb{E}(y_i)$ различны. Луи Люмьер утверждает, что при стохастических регрессорах и предпосылке о том, что наблюдения являются случайной выборкой, все $\mathbb{E}(y_i)$ равны между собой. Кто из них прав?
   (b) Помогите Луи Люмьеру найти $\operatorname{plim} \hat{\varepsilon}_1$ и $\operatorname{plim} \hat{y}_1$

4. Рассмотрим классическую линейную регрессионную модель:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$$

Наблюдения является случайной выборкой. Истинная коварица $\mathrm{Cov}(x_i, z_i)$ равна нулю. Мы оцениваем с помощью МНК две регрессии.

Регрессия 1:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 z_i$$

Регрессия 2:

$$\hat{y}_i = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x_i$$

(a) Верно ли, что $\hat{\beta}_2$ совпадает с $\hat{\gamma}_2$?

(b) Верно ли, что $\operatorname{plim} \hat{\beta}_2 = \operatorname{plim} \hat{\gamma}_2$?

5. Аккуратно опишите процедуру сравнения с помощью F-теста двух вложенных (ограниченной и неограниченной) линейных моделей:

(a) Сформулируйте H_0 и H_a

(b) Сформулируйте все предпосылки теста

(c) Укажите способ подсчёта тестовой статистики

(d) Укажите закон распределения тестовой статистики при верной H_0

(e) Сформулируйте правило, по которому делается вывод об H_0

6. Чтобы не выдать себя, Джеймс Бонд оценивает с помощью МНК только однопараметрические регрессии вида $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Однако он знаком с теоремой Фриша-Вау.

(a) Сколько подобных однопараметрических регрессий ему придется оценить, чтобы получить оценку коэффициента β_3 в множественной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$?

(b) Укажите, какие именно регрессии нужно построить для данной цели