

1. Случайные величины Z_i независимы и нормально распределены $N(0, 1)$. Для их суммы $S = \sum_{i=1}^n Z_i$ найдите $\mathbb{E}(S)$ и $\text{Var}(S)$.
2. Социологическим опросам доверяют 70% жителей. Те, кто доверяют опросам, на все вопросы отвечают искренне; те, кто не доверяют, отвечают равновероятно наугад. Социолог Петя в анкету очередного опроса включил вопрос «Доверяете ли Вы социологическим опросам?»

- (a) Какова вероятность, что случайно выбранный респондент ответит «Да»?
- (b) Какова вероятность того, что он действительно доверяет, если известно, что он ответил «Да»?

3. Регрессионная модель задана в матричном виде при помощи уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)'$. Известно, что $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ и $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$. Известно также, что

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для удобства расчетов приведены матрицы

$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X'X)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Укажите число наблюдений.
 - (b) Укажите число регрессоров с учетом свободного члена.
 - (c) Рассчитайте при помощи метода наименьших квадратов $\hat{\beta}$, оценку для вектора неизвестных коэффициентов.
 - (d) Рассчитайте $TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2$, $RSS = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$ и $ESS = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$.
 - (e) Чему равен $\hat{\varepsilon}_4$, МНК-остаток регрессии, соответствующий 4-ому наблюдению?
 - (f) Чему равен R^2 в модели?
 - (g) Рассчитайте несмещенную оценку для неизвестного параметра σ^2 регрессионной модели.
 - (h) Рассчитайте $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta})$, оценку для ковариационной матрицы вектора МНК-коэффициентов $\hat{\beta}$.
 - (i) Найдите $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1)$, несмещенную оценку дисперсии МНК-коэффициента $\hat{\beta}_1$.
 - (j) Найдите $\widehat{\text{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, несмещенную оценку ковариации МНК-коэффициентов $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$.
 - (k) Найдите $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)$
 - (l) Найдите $\widehat{\text{Corr}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, оценку коэффициента корреляции МНК-коэффициентов $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$.
 - (m) Найдите $se(\hat{\beta}_1)$, стандартную ошибку МНК-коэффициента $\hat{\beta}_1$.
4. В классической линейной модели предполагается, что $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$. Найдите $\text{Cov}(y, \hat{\varepsilon})$, $\text{Cov}(\hat{y}, \hat{\varepsilon})$.