

Сегодня 256-ой день года, всех с днём программиста! :) А ещё 12 сентября в 490 году до нашей эры Фидиппид добегал из Марафона в Афины с криком «Νενικήκαμεν»<sup>1</sup>!

1. Найдите длины векторов  $a = (1, 1, 1)$  и  $b = (1, 2, 3)$  и косинус угла между ними. Найдите любой вектор, перпендикулярный вектору  $b$ .
2. Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах и обратную к ней
3. На плоскости  $\alpha$  лежит прямая  $\ell$ . Вне плоскости  $\alpha$  лежит точка  $C$ . Ромео проецирует точку  $C$  на прямую  $\ell$  и получает точку  $R$ . Джульетта проецирует точку  $C$  сначала на плоскость  $\alpha$ , а затем проецирует полученную точку  $A$  на прямую  $\ell$ . После двух действий Джульетта получает точку  $D$ . Обязательно ли  $R$  и  $D$  совпадают?
4. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы
  - (b) Найдите  $\det(A)$ ,  $\text{tr}(A)$
  - (c) Найдите собственные числа матрицы  $A^{2016}$ ,  $\det(A^{2016})$  и  $\text{tr}(A^{2016})$
5. Известно, что  $X$  — матрица размера  $n \times k$  и  $n > k$ , известно, что  $X'X$  обратима. Рассмотрим матрицу  $H = X(X'X)^{-1}X'$ . Укажите размер матрицы  $H$ , найдите  $H^{2016}$ ,  $\text{tr}(H)$ ,  $\det(H)$ , собственные числа матрицы  $H$ . Штрих означает транспонирование.
  6. Занудная халява: известно, что  $\text{Cov}(X, Y) = 5$ ,  $\text{Var}(X) = 10$ ,  $\text{Var}(Y) = 20$ ,  $\mathbb{E}(X) = 10$ ,  $\mathbb{E}(Y) = -10$ . Найдите  $\text{Cov}(X + 2Y, Y - X)$ ,  $\text{Var}(X + 2Y)$ ,  $\mathbb{E}(X + 2Y)$ .
  7. За 100 дней Ромео посчитал все глубокие вздохи Джульетты. Настроение Джульетты столь спонтанно, что глубокие вздохи за разные дни можно считать независимыми. В сумме оказалось 890 вздохов. Сумма квадратов оказалась равна 8000. Постройте 95%-ый доверительный интервал для математического ожидания ежедневного количества глубоких вздохов Джульетты. На уровне значимости 5%-ов проверьте гипотезу, что математическое ожидание равно 9.
  8. Ромео подкидывает монетку два раза. Если монетка выпадает орлом, то Ромео кладет в мешок черный шар, если решкой — белый. Джульетта не знает, как выпадала монетка, и достает шары из мешка наугад по очереди. Первый шар оказался черного цвета. Какова вероятность того, что второй шар Джульетты будет белым?

---

<sup>1</sup>Ликуйте! Мы победили!