1. Убедитесь, что в рамках классической модели $y = X\beta + u$ и предпосылок $\mathrm{E}(u) = 0$, $\mathrm{Var}(u) = \sigma^2 I$ умеете находить любые $\mathrm{E}()$, $\mathrm{Var}()$ и $\mathrm{Cov}(,)$ для векторов β, $\hat{\beta}$, y, $\hat{y}$, u, $\hat{u}$.

2. Вектор u размера 4×1 имеет стандартное нормальное распределение, $u \sim \mathcal{N}(0; I)$. Известен вектор d, $d = (1, -1, 2, -2)$.

   а) Найдите такую матрицу H, что её умноженение на произвольный вектор y означает проецирование вектора y на прямую порождённую вектором d

   б) Как распределена случайная величина $u'Hu$? Чему равно её математическое ожидание и дисперсия?

3. Вектор u имеет стандартное нормальное распределение, $u \sim \mathcal{N}(0; I)$. Матрица A такова, что Au также имеет стандартное нормальное распределение, $Au \sim \mathcal{N}(0; I)$.

   а) Выпишите уравнение, которому подчиняется матрица A

   б) Чему может равняться $\det A$?

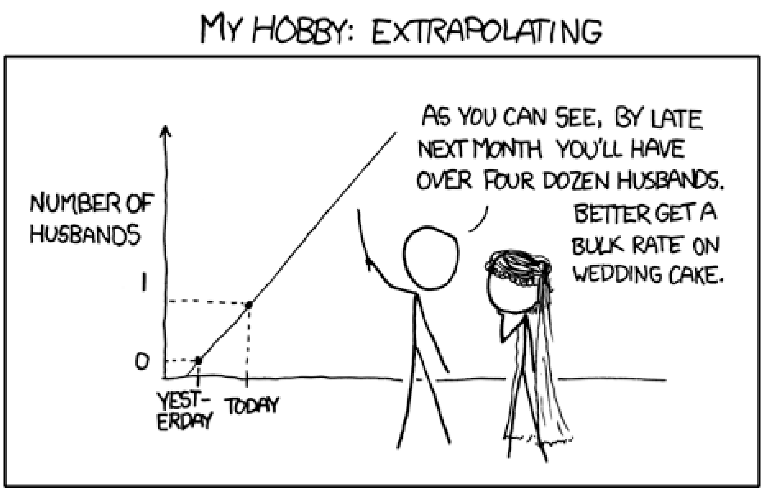
   в) Рассмотрим c_1 и c_2 — первый и второй столбец матрицы A. Найдите $c_1'c_1$ и $c_1'c_2$

4. Предположим, что функция $f(x) = x'Ax + Bx + c$ имеет минимум. Найдите его, используя технику дифференциирования по вектору

5. Рассмотрим систему уравнений $X\beta = y$. Здесь y — известный вектор размера $n \times 1$, β — неизвестный вектор размера $k \times 1$, и X — известная матрица размера $n \times k$ полного ранга. Мы хотим решить эту систему относительно β. Если $n = k$, то решать это уравнение скучно. Естественно, $\beta = X^{-1}y$. Гораздо интереснее решать систему, когда решений нет или когда их бесконечно много :)

   а) Если решений нет, то найдите наилучшее приближение к решению, то есть такое β при котором длина $(y - X\beta)$ минимальна.

   б) Если решений, β, бесконечно много, то найдите решение с наименьшей длиной.



Randall Munroe, xkcd