Гетероскедастичная контрольная

19 февраля 2015

1. Имеются наблюдения

x	y
0	-1
2	1
2	0

Предположим, что $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и регрессоры неслучайные.

Для удобства приведены матрицы

$$X'X = \begin{bmatrix} 3.00 & 4.00 \\ 4.00 & 8.00 \end{bmatrix},\ (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.00 & -0.50 \\ -0.50 & 0.38 \end{bmatrix},\ (X'X)^{-1}X' = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.50 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

А также:

$$H = X(X'X)^{-1}X' = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 & 0.50 \\ 0.00 & 0.50 & 0.50 \end{bmatrix},\ y'y = \begin{bmatrix} 2.00 \end{bmatrix},\ X'y = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 2.00 \end{bmatrix}$$

1.1. Найдите оценки коэффициентов с помощью МНК и оценку их ковариационной матрицы предполагая независимость и гомоскедастичность ошибок.

1.2. Найдите две робастных к гетероскедастичности оценки ковариационной матрицы оценок МНК: в форме Уайта и в форме HC3.

1.3. Предположим, что дисперсии первых двух наблюдений равны, а дисперсия третьего наблюдения в 4 раза больше. Найдите оценки взвешенного МНК и оценку их ковариационной матрицы.

1.4. Предположим, что дисперсии первых двух наблюдений равны, а дисперсия третьего наблюдения в 4 раза больше. Также предположим, что $Corr(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = 0.5$, а остальные корреляции между ошибками равны 0. Найдите оценки обобщенного МНК и оценку их ковариационной матрицы.

1.5. Аккуратно объясните, с какой целью используются робастные оценки ковариационной матрицы (например, оценка Уайта). Ответ "для борьбы с гетероскедастичностью" не оценивается. Как конкретно и при каких условиях можно использовать робастные оценки ковариационной матрицы?

1.6. Аккуратно объясните, с какой целью вместо МНК используется обобщенный МНК. Ответ "для борьбы с гетероскедастичностью" не оценивается. Что конкретно даёт обобщенный МНК, чего не даёт обычный МНК и при каких условиях?

2. Для линейной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ была выполнена сортировка наблюдений по возрастанию переменной x. Исходная модель оценивалась по разным частям выборки:

Выборка	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	RSS
$i = 1, \ldots, 30$	0.96	2.25	3.44	52.70
$i = 1, \ldots, 11$	1.07	2.46	2.40	5.55
$i = 12, \ldots, 19$	1.32	1.01	2.88	11.69
$i = 20, \ldots, 30$	1.04	2.56	4.12	16.00

Известно, что ошибки в модели являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. Протестируйте ошибки на гетероскедастичность на уровне значимости 5%.

3. Рассмотрим линейную регрессию $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ по 50 наблюдениям. При оценивании с помощью МНК были получены результаты: $\hat{\beta}_1 = 1.21$, $\hat{\beta}_2 = 1.11$, $\hat{\beta}_3 = 3.15$, $R^2 = 0.72$.

Оценена также вспомогательная регрессия: $\hat{\varepsilon}_i^2 = \delta_1 + \delta_2 x_i + \delta_3 z_i + \delta_4 x_i^2 + \delta_5 z_i^2 + \delta_6 x_i z_i + u_i$. Результаты оценивания следующие: $\hat{\delta}_1 = 1.50$, $\hat{\delta}_2 = -2.18$, $\hat{\delta}_3 = 0.23$, $\hat{\delta}_4 = 1.87$, $\hat{\delta}_5 = -0.56$, $\hat{\delta}_6 = -0.09$, $R^2_{aux} = 0.36$

Известно, что ошибки в модели являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. Протестируйте ошибки на гетероскедастичность на уровне значимости 5%.

4. Предположим, что y_i независимы, нормально распределены и имеют одинаковое математическое ожидание μ.

4.1. Предложите эффективную оценку для μ, предполагая, что y_i гомоскедастичны

4.2. Предложите эффективную оценку для μ, предполагая, что $Var(y_i) = 1/i^2$