

Метрика. Ликвидация безграмотности — 2014

В этот день, 26 декабря 1919 года, совнарком РСФСР принял декрет «О ликвидации безграмотности в РСФСР». Всем желаю отметить этот день написанием грамотного зачета по эконометрике! Удачи!

1. Регрессионная модель задана в матричном виде при помощи уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)'$. Известно, что $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ и $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$. Известно также, что

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства расчетов приведены матрицы

$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X'X)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- (a) Найдите вектор МНК-оценок коэффициентов $\hat{\beta}$.
- (b) Найдите коэффициент детерминации R^2 .
- (c) Предполагая нормальное распределение вектора ε , проверьте гипотезу $H_0: \beta_2 = 0$ против альтернативной $H_a: \beta_2 \neq 0$.
2. Для линейной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ была выполнена сортировка наблюдений по возрастанию переменной x . Исходная модель оценивалась по разным частям выборки:

Выборка	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	RSS
$i = 1, \dots, 50$	0.93	2.02	3.38	145.85
$i = 1, \dots, 21$	1.12	2.01	3.32	19.88
$i = 22, \dots, 29$	0.29	2.07	2.24	1.94
$i = 30, \dots, 50$	0.87	1.84	3.66	117.46

Известно, что ошибки в модели являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием.

- (a) Предполагая гомоскедастичность остатков на уровне значимости 5% проверьте гипотезу, что исследуемая зависимость одинакова на всех трёх частях всей выборки.
- (b) Протестируйте ошибки на гетероскедастичность на уровне значимости 5%.
- (c) Какой тест можно на гетероскедастичность можно было бы использовать, если бы не было уверенности в нормальности остатков? Опишите пошагово процедуру этого теста.

3. По 2040 наблюдениям оценена модель зависимости стоимости квартиры в Москве (в 1000\$) от общего метража и метража жилой площади.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
Константа	-88.81	4.37	-20.34	0.00
Общая площадь	1.70	0.10	17.78	0.00
Жилая площадь	1.99	0.18	10.89	0.00

Оценка ковариационной матрицы $\widehat{Var}(\hat{\beta})$ имеет вид

	(Intercept)	totsp	livesp
(Intercept)	19.07	0.03	-0.45
totsp	0.03	0.01	-0.02
livesp	-0.45	-0.02	0.03

Оценка стандартной ошибки случайной составляющей, $\hat{\sigma} = 33.0253$.

- Можно ли интерпретировать коэффициент при переменной *totsp* как стоимость одного метра нежилой площади?
 - Проверьте гипотезу о том, что коэффициенты при регрессорах *totsp* и *livesp* равны.
 - Постройте 95%-ый доверительный интервал для ожидаемой стоимости квартиры с жилой площадью 30 м² и общей площадью 60 м².
 - Постройте 95%-ый прогнозный интервал для фактической стоимости квартиры с жилой площадью 30 м² и общей площадью 60 м².
4. Аккуратно сформулируйте теорему Гаусса-Маркова
- для нестохастических регрессоров
 - для стохастических регрессоров в предположении, что наблюдения являются случайной выборкой