Fyzika

Sbírka úloh pro střední školy – Řešení úloh

1 Úvod k řešení fyzikálních úloh

Elektronický doplněk knihy **Sbírka úloh z fyziky pro střední školy** (dále Sbírka) vydané nakladatelstvím Prometheus (5. vydání, 2023), obsahuje úplná řešení všech 1 336 úloh Sbírky, u nichž je v knize uveden jen stručný výsledek. Je určen uživatelům Sbírky, kteří si chtějí buď ověřit správnost svého postupu řešení úloh, nebo překonat obtíže při jejich řešení.

Číselné označení úloh. V elektronickém doplňku je zachováno pořadové číslování úloh jako ve Sbírce, ale před číslem úlohy je uvedeno číslo kapitoly (např. 2.1 je úloha 1 v kapitole 2).

Číslování obrázků. Na rozdíl od Sbírky, kde jsou obrázky číslovány průběžně, má každý obrázek číslo odpovídající kapitole a číslu úlohy (např. obr. 2-21 je obrázek k úloze 21 v kapitole 2).

Význam řešení fyzikálních úloh

Ve fyzice poznáváme mnoho přírodních jevů, jejich fyzikální zákonitosti a uplatnění v technické praxi. K osvojení učiva však nestačí pouhé paměťové zvládnutí definic, pouček a fyzikálních vztahů, ale je třeba naučit se používat je při řešení praktických problémů. Jednou z cest, jak toho dosáhnout, je právě řešení fyzikálních úloh.

Typy fyzikálních úloh

Úlohy Sbírky jsou různého typu podle formy zadání, stupně obtížnosti, popř. podle postupu řešení. Jsou to následující úlohy:

1. číselně zadané,
2. obecně zadané,
3. graficky zadané,
4. úlohy vyžadující grafické řešení,
5. problémové,
6. experimentální.

Co je pro uvedené typy úloh charakteristické?

1. Ve Sbírce jsou nejčastější **číselně zadané úlohy.** Jsou to úlohy, v kterých jsou dány číselné hodnoty určitých fyzikálních veličin, pomocí nichž máme vypočítat hodnoty jiných veličin. Při tom používáme známé fyzikální vztahy, do nichž buď dané číselné hodnoty přímo dosazujeme, nebo je ještě před dosazením hodnot upravujeme. Výsledkem řešení je pak opět číselná hodnota fyzikální veličiny. Číselně zadaná je např. následující úloha:

Automobil jede rychlostí 54 km · h^{-1} a za dobu 10 s se jeho rychlost zvětšila na 90 km · h^{-1}. Jakou dráhu ujede? Předpokládáme že pohyb automobilu je rovnoměrně zrychlený?

Rychlosti vyjádříme v m · s^{-1}. Ze vztahu $v = v_0 + at$ určíme velikost zrychlení (a = 1 m · s^{-2}) a vypočítáme dráhu s:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \left(15 \cdot 10 + \frac{1}{2} 1 \cdot 10^2\right) \mathrm{m} = 200 \mathrm{~m}.$$

Automobil ujede rovnoměrně zrychleným pohybem dráhu 200 m.

2. Náročnější na řešení jsou **obecně zadané úlohy**, v nichž nejsou fyzikální veličiny zadány číselnými hodnotami, ale jen obecně, značkami fyzikálních veličin. Při řešení vycházíme z fyzikálních vztahů, jejichž úpravami dospějeme k obecnému řešení.

Úloha na stanovení dráhy automobilu může být obecně zadána např. takto:

Rychlost automobilu v_0, se za dobu t zvětšila na rychlost v. Jakou dráhu automobil ujede při rovnoměrně zrychleném pohybu?

Při řešení úlohy určíme ze vztahu $v = v_0 + at$ velikost zrychlení $a = (v - v_0)/t$, které dosadíme do vztahu pro dráhu

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 .$$

Po úpravě dostaneme

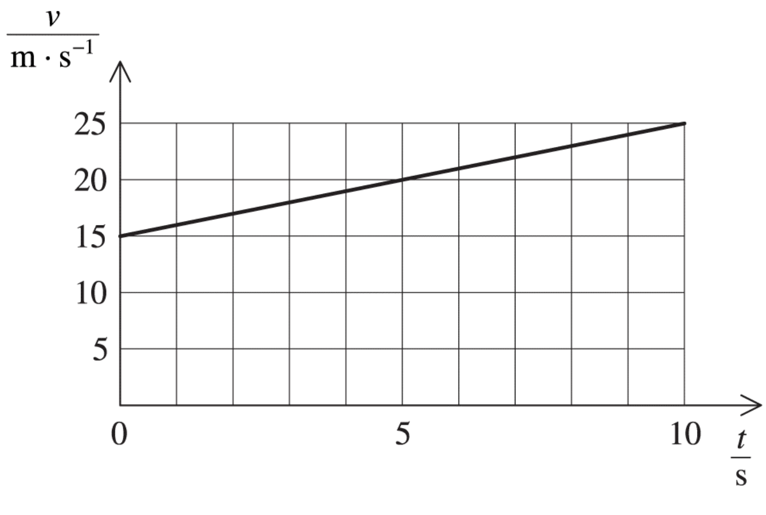
$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t,$$

což je obecné řešení pro hledanou dráhu automobilu.

Uvedeným postupem zpravidla řešíme také úlohy zadané číselně. V našem případě tedy určíme nejprve dráhu automobilu obecně, tzn. vyjádříme ji výsledným vztahem $s = (v_0 + v)t/2$, do něho pak dosadíme dané číselné hodnoty a vypočítáme $s = 200$ m.

3. **Graficky zadané úlohy** tvoří např. grafy, diagramy nebo schémata, z nichž je třeba získat údaje potřebné k řešení úlohy. Zvláště důležité jsou grafy funkční závislosti jedné fyzikální veličiny na dalších veličinách. Jsou to např. grafy závislosti dráhy na čase v kinematice, grafy časové závislosti okamžité výchylky u kmitání nebo grafy závislosti proudu na elektrickém napětí v elektřině. Z grafu lze často vyčíst nejen údaje potřebné k řešení, ale i celkovou charakteristiku řešeného děje.

Předchozí úloha o automobilu by mohla být např. zadána grafem na obr. 1-1. Z grafu je patrné, že pohyb automobilu je rovnoměrně zrychlený (grafem je část přímky). Snadno určíme rychlost automobilu v libovolném čase do 10 s (např. v čase 5 s je rychlost 20 m · s^{-1}) a také velikost zrychlení (1 m · s^{-2}). Určením obsahu plochy pod grafem pak můžeme vypočítat dráhu (s = 200 m).



Obr. 1-1

4. U úloh zadaných graficky je graf vždy východiskem pro řešení úlohy. Je-li graf naopak cílem řešení, jde o **úlohy vyžadující grafické řešení**. Na základě údajů obsažených v textu úlohy, nejčastěji číselných hodnot zadané úlohy, sestrojujeme graf, schéma nebo jinou geometrickou konstrukci. Takto můžeme např. sestrojit graf závislosti rychlosti na čase, je-li dána počáteční a konečná rychlost vozidla (viz obr. 1-1 v předchozí úloze), výslednici několika sil působících v jednom bodě tuhého tělesa, schéma elektrického obvodu s různě zapojenými rezistory apod.

Součástí řešení úlohy může být kromě grafu nebo schématu také stanovení číselné hodnoty některé fyzikální veličiny. Např. z průsečíku dvou přímek vyjadřujících grafy závislosti dráhy dvou vozidel na čase můžeme určit místo a čas jejich setkání nebo míjení.

Grafy závislosti fyzikálních veličin zakreslujeme do pravoúhlé soustavy souřadnic, přičemž každou osu označujeme značkou příslušné veličiny a její jednotkou a na osách vyznačíme vhodnou stupnici.

5. Pro správné porozumění fyzikálním poznatkům mají velký význam **problémové úlohy**. Tyto úlohy řešíme logickou úvahou, někdy graficky nebo experimentálně. Při tom často neprovádíme žádné matematické operace a opíráme se především o slovní vyjádření fyzikálních zákonů. Výsledkem úlohy je také jen slovní odpověď. Jednoduché odpovědi vyžadují např. úlohy:

Kterým fyzikálním zákonem vysvětlíme vyklepávání koberců?

Proč jsou u železobetonových staveb dilatační mezery?

Poměrně složitější odpověď se očekává např. při řešení úlohy:

Na miskách rovnoramenných vah je vyvážena nádoba s vodou. Do vody ponoříme prst tak, abychom se při tom nádoby nedotkli. Poruší se rovnováha? Vysvětlete a ověřte pokusem.

Do skupiny problémových úloh patří rovněž úlohy požadující zdůvodnění nebo zhodnocení odpovědi. Často se např. setkáte s úlohou, v níž je uvedeno „Odpověď zdůvodněte“. U některých úloh se požaduje nalezení chyby v daném tvrzení nebo schématu.

6. Uvedená ukázka problémové úlohy o rovnováze na vahách je současně příkladem **experimentální úlohy.** Ve Sbírce jsou zařazeny jen takové experimentální úlohy, které si můžete provést s jednoduchými pomůckami i sami. Samostatné provádění pokusů podpoří vaši vynalézavost, vzbudí váš zájem o fyziku a usnadní vám lépe porozumět probíranému učivu.

Jak postupovat při řešení fyzikální úlohy

Úspěšnost řešení úloh závisí na třech základních předpokladech:

1. znalost učiva v rozsahu jednotlivých článků učebnice,

2. zvládnutí potřebných matematických dovedností (úprava algebraických výrazů, operace s číselnými výrazy, používání výpočetní techniky, čtení a sestrojování grafů),

3. osvojení si určité strategie řešení úloh s použitím vhodných pracovních postupů.

Zaměříme se na třetí předpoklad – *strategii řešení úloh*.

Strategie řešení fyzikálních úloh zahrnuje u většiny úloh (zejména úloh zadaných číselně) celkem osm základních činností, osm základních kroků:

1. porozumění obsahu úlohy,
2. zápis úlohy,

3. fyzikální rozbor situace,
4. obecné řešení úlohy,
5. určení jednotky výsledku,
6. řešení pro dané hodnoty,
7. diskuse řešení,
8. formulace odpovědi.

Jestliže si při řešení fyzikálních úloh osvojíte tuto strategii, velmi si usnadníte práci a snadno pak překonáte obtíže, s nimiž se při řešení úloh setkáte. Proto rozebereme jednotlivé kroky naší strategie podrobněji.

1. **Porozumění obsahu úlohy.** Nejprve se na základě textu nebo obrazu seznámíme s obsahem úlohy. Pozornost zaměřujeme především na části textu nebo obrazu, které jsou pro řešení úlohy podstatné.

Vraťme se k první ukázkové úloze o rovnoměrně zrychleném pohybu automobilu. Při řešení se zaměříme na veličiny *rychlost, doba, dráha* a na pojem *pohyb rovnoměrně zrychlený*, s nímž souvisí veličina *zrychlení.*

2. **Zápis úlohy.** Značkami zapíšeme fyzikální veličiny, u číselných hodnot převedeme jednotky na nenásobné jednotky soustavy SI a hledanou veličinu označíme otazníkem. Např.:

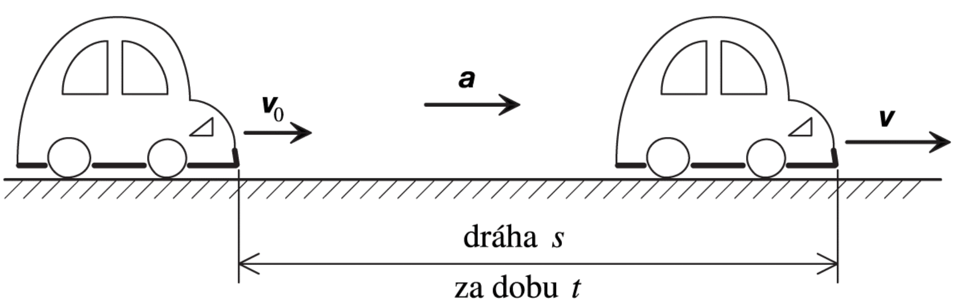
$v_0 = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

$v = 90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

$t = 10\ \mathrm{s}$

$s = ?$

3. **Fyzikální rozbor situace.** Jde o nejdůležitější krok strategie řešení fyzikální úlohy, který obvykle zahrnuje několik dílčích kroků. Prvním krokem je náčrtek situace nebo schématu, do něhož zapíšeme symboly fyzikálních veličin, kterých se úloha týká, tedy veličin zadaných i hledaných. Dobrý náčrtek nebo schéma velmi usnadňuje orientaci v úloze a pomáhá pochopit podstatu řešené úlohy. Na základě náčrtku a zápisu úlohy (viz druhý krok řešení) bychom měli být schopni celé zadání úlohy (bez nahlížení do textu) volně reprodukovat. Proto se vyplatí použít náčrtek i v případě tak jednoduché situace, jakou představuje naše ukázková úloha (obr. 1-2).



Obr. 1-2

Druhým dílčím krokem rozboru je popis situace pomocí pojmů příslušného učiva. Uvážíme, o jaký fyzikální děj jde, které zákonitosti pro něj platí a za kterých předpokladů lze tyto zákonitosti použít. Někdy jsou zjednodušující předpoklady uvedeny přímo v textu úlohy, jindy je formulujeme až při řešení úlohy. Např. v naší úloze je předpoklad o rovnoměrně zrychleném pohybu již zadán, z čehož vyplývá, že rychlost automobilu se během doby t rovnoměrně zvětšuje z počáteční rychlosti v_0 na konečnou rychlost v a zrychlení a je tedy konstantní.

Třetím dílčím krokem je zápis vztahů, kterými jsou dané a hledané veličiny navzájem vázány. Např. v naší úloze jsou to vztahy

$$v = v_0 + at, \;\; s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

4. **Obecné řešení úlohy.** Ze vztahů, ke kterým jsme dospěli při rozboru situace, vyjádříme hledanou veličinu pomocí veličin daných (postup je uveden v odstavci „Obecně zadané úlohy"). Dostaneme rovnici, která představuje obecné řešení. V případě naší úlohy vyjadřuje obecné řešení rovnice

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t.$$

Ve složitějších případech, kdy při řešení úlohy vycházíme z více než dvou vztahů, bývá někdy vyjádření hledané veličiny komplikovanější. Pak postupujeme tak, že místo důsledného obecného řešení postupně provádíme dílčí číselné výpočty. Např. v naší úloze můžeme napřed z rovnice $a = (v - v_0)/t$ určit číselnou hodnotu zrychlení 1 m · s^{-2}, kterou pak dosadíme přímo do rovnice pro dráhu

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

5. **Určení jednotky výsledku.** Dříve než přistoupíme k řešení pro dané hodnoty (viz další krok), je vhodné předem stanovit jednotku hledané veličiny. Do obecného řešení dosadíme za symboly daných veličin jejich jednotky a po úpravě obdržíme jednotku hledané veličiny. Např. do rovnice

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

dosadíme za rychlost v jednotku m · s^{-1}, za dobu t jednotku s a dostaneme m · s^{-1} · s = m, tj. jednotku pro dráhu.

Tomuto postupu se také říká „zkouška jednotkou". Nejde však o zkoušku v pravém slova smyslu. Určení správné jednotky hledané veličiny ještě totiž nezaručuje správnost obecného řešení. Pokud však při této „zkoušce" vychází nesprávná jednotka, je v obecném řešení zřejmě chyba.

6. **Řešení pro dané hodnoty** spočívá v dosazení číselných hodnot do obecného řešení a výpočet hodnoty hledané veličiny. V naší úloze dostáváme

$$s = \frac{1}{2}\left(15\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} + 25\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot 10\ \mathrm{s} = \frac{1}{2}\cdot 40\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot 10\ \mathrm{s} = 200\ \mathrm{m},$$

nebo jednodušeji

$$s = \frac{1}{2}(15 + 25)\cdot 10\ \mathrm{m} = \frac{1}{2}\cdot 40\cdot 10\ \mathrm{m} = 200\ \mathrm{m}.$$

7. **Diskuse řešení** slouží k ověření hodnověrnosti výsledku. Především uvážíme, zda vypočítaná číselná hodnota veličiny odpovídá alespoň přibližně skutečnosti. Kdybychom např. vypočetli, že automobil urazil za dobu 10 s dráhu 2 000 m, znamenalo by to, že by musel jet průměrnou rychlostí 200 m · s^{-1} = 720 km · h^{-1}, což není reálné a dráha 2 000 m je patrně vypočtena chybně.

Diskutovat však můžeme také o obecném řešení úlohy s tím, že zkoumáme, jak hledaná veličina závisí na veličinách daných. Např. u obecného vztahu pro zrychlení

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

zjišťujeme, že zrychlení *a* je při daném čase přímo úměrné rozdílu rychlostí $v - v_0$ (většímu rozdílu rychlostí odpovídá větší zrychlení), nebo že zrychlení *a* je při daném rozdílu rychlostí nepřímo úměrné času *t* (při delším čase pohybu je zrychlení menší). Tyto závěry jsou opět ve shodě se skutečností.

8. **Formulace odpovědi.** Na závěr řešení formulujeme odpověď na otázku, která je uvedena v zadání úlohy. U číselně zadaných úloh obsahuje odpověď vždy číselnou hodnotu hledané veličiny, u obecně zadaných úloh jen obecné řešení.

Uvedenou strategii lze použít v celém rozsahu osmi kroků u úloh zadaných číselně, kterých je ve Sbírce většina. V případě obecně zadaných úloh vynecháváme šestý krok strategie, u problémových úloh čtvrtý, pátý a šestý krok, stejně tak u úloh experimentálních a úloh vyžadujících grafické řešení. U posledních dvou typů přibude však další krok, a to „provedení pokusu“ nebo „konstrukce grafu“.

Až nabudete při řešení úloh zkušenosti a získáte určité dovednosti, poznáte, že jednotlivé kroky strategie nelze od sebe přesně oddělovat. Úvahy předepsané pro jednotlivé kroky se zčásti navzájem prostupují a ovlivňují. Např. již při čtení textu a zápisu úlohy začínáme uvažovat o fyzikálním rozboru situace a naopak se k rozboru znovu vracíme při diskusi řešení, stejně jako při formulování odpovědi znovu čteme zadání úlohy.

2 MECHANIKA

2.1 Kinematika

R2.1 Pro převod jednotek platí 1 m · s^{-1} = 3,6 km · h^{-1}, rychlosti jsou 36 km · h^{-1}, 72 km · h^{-1}, 108 km · h^{-1} a 144 km · h^{-1}.

R2.2 Pro převod jednotek platí

$$1\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = \frac{1}{3{,}6}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1},$$

rychlosti jsou 5 m · s^{-1}, 15 m · s^{-1} a 25 m · s^{-1}.

R2.3 s = 180 km, t = 2,5 h; v_p = ?

$v_\mathrm{p} = s/t$ = 72 km · h^{-1} = 20 m · s^{-1}.

R2.4 s = 7,5 km = 7 500 m, t = 5 min = 300 s; v_p = ?

$v_\mathrm{p} = s/t$ = 25 m · s^{-1} = 90 km · h^{-1}

R2.5 s = 3 km = 3 000 m, t = 10 min = 600 s, t_1 = 0,5 h = 1 800 s; v_p = ?, s_1 = ?

$v_\mathrm{p} = s/t$ = 5,0 m · s^{-1} = 18 km · h^{-1}

$s_1 = v_\mathrm{p} t_1$ = 9 km

R2.6 s = 600 m, t = 40 s, v_dov = 40 km · h^{-1}; $v - v_\mathrm{dov}$ = ?

$v = s/t$ = 15 m · s^{-1} = 54 km · h^{-1}

$v - v_\mathrm{dov}$ = 14 km · h^{-1}

R2.7 v_1 = 90 km · h^{-1}, v_2 = 50 km · h^{-1}, $t_1 = 3t/4$, $t_2 = t/4$; v_p = ?

Průměrnou rychlost v_p určíme jako podíl celkové dráhy s a doby t, za kterou automobil tuto dráhu ujede, tedy

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t}.$$

Za dobu t_1 ujede automobil při rychlosti v_1 dráhu

$s_1 = v_1 t_1 = \dfrac{3v_1 t}{4}$, za dobu t_2 při rychlosti v_2 dráhu $s_2 = v_2 t_2 = \dfrac{v_2 t}{4}$.

Celková dráha je pak

$$s = s_1 + s_2 = \frac{3v_1 t}{4} + \frac{v_2 t}{4} = \frac{(3v_1 + v_2)t}{4}$$

a průměrná rychlost

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} = \frac{3v_1 + v_2}{4} = 80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

R2.8 $v_1 = 90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $v_2 = 50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $s_1 = 3s/4$, $s_2 = s/4$; $v_\mathrm{p} = ?$

Průměrnou rychlost v_p určíme jako podíl celkové dráhy s a doby t, za kterou automobil tuto dráhu ujede, tedy

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t}.$$

Dráhu s_1 ujede automobil za dobu

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{3s}{4v_1},$$

dráhu s_2 za dobu

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s}{4v_2}.$$

Celková doba jízdy je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{3s}{4v_1} + \frac{s}{4v_2}$$

a po úpravě

$$t = \frac{(v_1 + 3v_2)s}{4v_1 v_2}.$$

Průměrná rychlost automobilu je pak

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} = \frac{4v_1 v_2}{v_1 + 3v_2} = 75\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

R2.9 $t_1 = 2\ \mathrm{h}$, $v_1 = 6\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $t_2 = 1\ \mathrm{h}$, $v_2 = 3\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; $v_\mathrm{p} = ?$

$$v_\mathrm{p} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = 5\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

R2.10 $s_1 = s/2$, $v_1 = 80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $s_2 = s/2$, $v_2 = 20\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; $v_\mathrm{p} = ?$

$$v_p = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 32\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

R2.11 s_1 = 18 km, s_2 = 9 km, v_1 = 15 km · h^{-1}, v_2 = 30 km · h^{-1}; v_p = ?

$$v_p = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} = \frac{v_1 v_2 (s_1 + s_2)}{s_1 v_2 + s_2 v_1} = 18\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

R2.12 s = 30 km, t = 1/2 h, t_1 = 20 min = 1/3 h, t_2 = 10 min = 1/6 h, v_1 = 30 km · h^{-1}; v_2 = ?

$$s = v_1 t_1 + v_2 t_2 \Rightarrow v_2 = \frac{s - v_1 t_1}{t_2} = 120\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

R2.13 t = 15 min = 0,25 h, v = 80 km · h^{-1}; s = ?

$s = vt$ = 20 km

R2.14 s = 400 m, v = 8 m · s^{-1}; t = ?

$t = s/v$ = 50 s

R2.15 v = 25 cm · s^{-1} = 0,25 m · s^{-1}, t = 3 min = 180 s; a) s = ?, b) s_1 = 10 m; t_1 = ?

a) $s = vt$ = 45 m

b) $t_1 = s_1/v$ = 40 s

R2.16 s = 150 · 10^6 km, c = 3 ·10^5 km · s^{-1}; t = ?

$t = s/c$ = 500 s ≈ 8,3 min

R2.17 l = 700 m, d = 200 m, t = 1 min = 60 s; v = ?

$$v = \frac{s}{t} = \frac{l + d}{t} = 15\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 54\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

R2.18 a) Z grafu odečteme pro automobil dvě odpovídající si hodnoty, např. t_1 = 15 s, s_1 = 300 m. Rychlost $v_1 = s_1/t_1$ = 20 m · s^{-1}. Pro cyklistu např. t_2 = 20 s, s_2 = 100 m, jeho rychlost $v_2 = s_2/t_2$ = 5 m · s^{-1}. b) Dráhy můžeme odečíst z grafu nebo vypočítat pomocí rychlosti a času. Dráha automobilu je 300 m, dráha cyklisty je 75 m.

R2.19 d_1 = 160 m, v_1 = 54 km · h^{-1} = 15 m · s^{-1}, d_2 = 240 m; a) t_1 = 6 s; v_2 = ?, b) t_2 = ?

a) $t_1 = \dfrac{d_2}{v_1 + v_2} \Rightarrow v_2 = \dfrac{d_2}{t_1} - v_1 = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$

b) $t_2 = \dfrac{d_1}{v_1 + v_2} = 4\ \mathrm{s}$

R2.20 l = 400 m, v_A = 5 m · s^{-1}, v_B = 3 m · s^{-1}; t = ?, s_A = ?, s_B = ?

$$t = \frac{l}{v_\mathrm{A} - v_\mathrm{B}} = 200\ \mathrm{s} = 3\ \mathrm{min}\ 20\ \mathrm{s}$$

$$s_\mathrm{A} = v_\mathrm{A} t = 1\,000\ \mathrm{m}$$

$$s_\mathrm{B} = v_\mathrm{B} t = 600\ \mathrm{m}$$

R2.21 v_A = 20 cm · s^{-1}, v_B = 30 cm · s^{-1}, t_B = 5 s; t = ?, s = ?

Dobu pohybu hmotného bodu A do okamžiku míjení obou bodů označíme t. Hmotný bod A urazí za dobu t dráhu $s_A = v_A t$, hmotný bod B za dobu $t - t_B$ dráhu $s_B = v_B(t - t_B)$. Poněvadž oba hmotné body urazí do místa setkání stejné dráhy $s_A = s_B$, platí

$$v_A t = v_B(t - t_B),$$

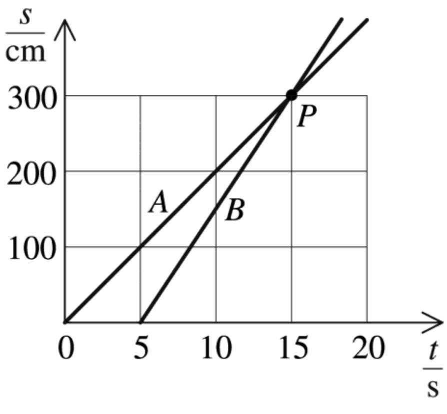
odtud doba

$$t = \frac{v_B t_B}{v_B - v_A} = 15\ \mathrm{s}.$$

Je to doba, za kterou je hmotný bod A dostižen hmotným bodem B. Doba pohybu bodu B je pak $t - t_B$ = 10 s, doba pohybu bodu A je t = 15 s.

Vzdálenost bodů od místa startu určíme ze vztahu pro dráhu s_A nebo ze vztahu pro dráhu s_B. V obou případech dostaneme $s_A = s_B$ = 300 cm = 3 m.

Při grafickém řešení sestrojíme pro oba body grafy závislosti dráhy na čase (obr. R2-21 [2-2]). Sestrojené polopřímky se protínají v bodě P, jehož souřadnice 15 s a 300 cm udávají dobu a místo setkání bodů.



Obr. R2-21

R2.22 v_1 = 60 km · h^{-1}, v_2 = 80 km · h^{-1}, Δt = 0,5 h; t = ?, s = ?

$$v_1 t = v_2 (t - \Delta t)$$
$$t = \frac{v_2 \Delta t}{v_2 - v_1} = 2\ \mathrm{h}$$
$$s = v_1 t = v_2 (t - \Delta t) = 120\ \mathrm{km}$$

R2.23 v_1 = 600 km · h^{-1}, v_2 = 1 200 km · h^{-1}, Δt = 15 min = 0,25 h; t = ?, s = ?

$$v_1 t = v_2 (t - \Delta t)$$
$$t = \frac{v_2 \Delta t}{v_2 - v_1} = 0{,}5\ \mathrm{h} = 30\ \mathrm{min}$$
$$s = v_1 t = v_2 (t - \Delta t) = 300\ \mathrm{km}$$

R2.24 d = 6 km = 6 000 m, v_1 = 36 km · h^{-1} = 10 m · s^{-1}, v_2 = 72 km · h^{-1} = 20 m · s^{-1}; t = ?, s = ?

$$t = \frac{d}{v_1 + v_2} = 200\ \mathrm{s} = 3\ \mathrm{min}\ 20\ \mathrm{s}$$
$$s = v_1 t = 2\ 000\ \mathrm{m} = 2\ \mathrm{km}$$

R2.25 l_1 = 20 m, l_2 = 20 m, d_1 = 5 m, d_2 = 15 m, v_1 = 72 km · h^{-1} = 20 m · s^{-1}, v_2 = 54 km · h^{-1} = 15 m · s^{-1}; t = ?, s = ?

$$v_1 t = l_1 + l_2 + d_1 + d_2 + v_2 t$$
$$t = \frac{l_1 + l_2 + d_1 + d_2}{v_1 - v_2} = 12\ \mathrm{s}$$
$$s_1 = v_1 t = 240\ \mathrm{m}$$

R2.26 v = 3 m · s^{-1}, v_A = 3 m · s^{-1}, v_B = 3 m · s^{-1}, v_C = 0; v_1 = ?, v_2 = ?, v_3 = ?

$v_1 = v + v_A$ = 6 m · s^{-1}

$v_2 = v - v_B$ = 0

$v_3 = v$ = 3 m · s^{-1}

R2.27 Vzhledem k povrchu Země jsou v klidu body, v kterých se dotýkají kola povrchu kolejnic. Opačným směrem, než je směr pohybu vozu, se pohybují body kola, které jsou níže, než je povrch kolejnic.

R2.28 v = 5 m · s^{-1}; v_1 = ?, v_2 = ?

Rychlost horní části pásu $v_1 = 2v = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, dolní část je v klidu, $v_2 = 0$.

R2.29 $v_1 = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 3{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $v_a = ?$, $v_b = ?$

a) $v_a = v_1 + v_2 = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

b) $v_b = v_2 - v_1 = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (ve směru proudu v řece)

R2.30 $s = 120\ \mathrm{m}$, $t_1 = 12\ \mathrm{s}$, $t_2 = 24\ \mathrm{s}$; $v_1 = ?$, $v_2 = ?$

$v_1 + v_2 = \dfrac{s}{t_1}$, $v_1 - v_2 = \dfrac{s}{t_2}$. Sečtením těchto rovnic dostaneme

$2v_1 = \dfrac{s}{t_1} + \dfrac{s}{t_2}$, po úpravě $v_1 = \dfrac{s(t_1 + t_2)}{2t_1t_2} = 7{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,

odečtením rovnic dostaneme $2v_2 = \dfrac{s}{t_1} - \dfrac{s}{t_2}$ a po úpravě

$v_2 = \dfrac{s(t_2 - t_1)}{2t_1t_2} = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

R2.31 $v_1 = 15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; a) $v = ?$, b) $\alpha = ?$

a) $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 17\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

b) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{v_1}{v_2} = 1{,}875$, $\alpha = 62°$

R2.32 $v_1 = 24\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $v = ?$

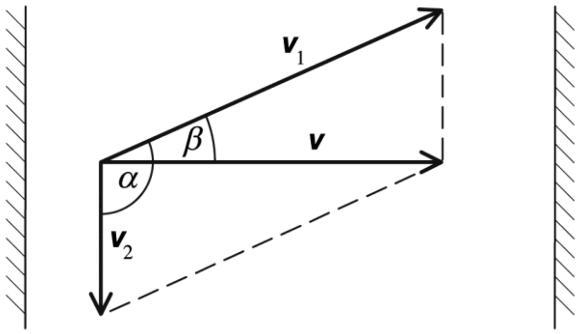
a) $v = v_1 + v_2 = 31\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

b) $v = v_1 - v_2 = 17\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

c) $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

R2.33 $v_1 = 13\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $\alpha = ?$, $v = ?$

Výslednou rychlost v motorového člunu vzhledem ke břehům řeky určíme jako vektorový součet rychlosti v_1 člunu a rychlosti v_2 vodního proudu v řece. Sestrojíme vektorový rovnoběžník rychlostí v_1 a v_2 tak, aby výsledná rychlost v byla kolmá k rychlosti proudu v_2, a tedy i k břehům řeky (obr. R2-33 [2-3]).



Obr. R2-33

a) Vzhledem k proudu řeky pluje člun po úhlem $\alpha = 90° + \beta$, kde pro úhel β platí $\sin \beta = v_2/v_1$. Pro dané hodnoty $\beta = 23°$, $\alpha = 113°$.

b) Velikost výsledné rychlosti člunu je pak

$$v = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 12\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

R2.34 $v_1 = 0{,}85\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 0{,}40\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $d = 90\ \mathrm{m}$; a) $v = ?$, b) $t = ?$

a) $v = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 0{,}75\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

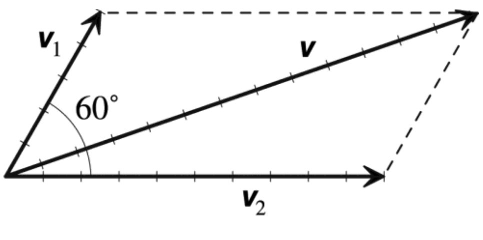
b) $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{d}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}} = 120\ \mathrm{s}$

R2.35 $v_1 = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $h = 800\ \mathrm{m}$; a) $v = ?$, b) $d = ?$

a) $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

b) $d = h\dfrac{v_2}{v_1} = 600\ \mathrm{m}$

R2.36 $v_1 = 5\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $v_2 = 10\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $\alpha = 60°$; $v = ?$



Obr. R2-36

Z obrázku R2-36 odečteme výslednou rychlost $v \approx 13\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

R2.37 $t = 5\ \mathrm{s}$, $v = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $a = ?$, $s = ?$

$$a = \frac{v}{t} = 0{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = 2{,}5\ \mathrm{m}$$

R2.38 t = 5 s, s = 50 m; a = ?

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2s}{t^2} = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

R2.39 $v_0 = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v = 7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, t = 8 s; a) a = ?, b) s = ?

a) Z rovnice pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu $v = v_0 + at$ vyjádříme velikost zrychlení

$$a = \frac{v - v_0}{t} = 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

b) Vztah pro zrychlení dosadíme do rovnice pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu $s = v_0t + at^2/2$ a po úpravě dostaneme

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t = 40\ \mathrm{m}.$$

R2.40 t = 10 s, $v_1 = 6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 18\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; a = ?, s = ?

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t} = 1{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$s = v_1t + \frac{1}{2}at^2 = 120\ \mathrm{m}$$

R2.41 $v_1 = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, s = 200 m; a = ?

$$s = v_1t + \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \frac{v_2 - v_1}{a}$$

Po dosazení a úpravě dostaneme pro dráhu vztah

$$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a},$$

odtud zrychlení

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

R2.42 t = 6 s, s = 18 m, $v_0 = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; a = ?, v = ?

Pro rovnoměrně zrychlený pohyb hmotného bodu s počáteční rychlostí v_0 platí rovnice

$v = v_0 + at$, $s = v_0 t + at^2/2$.

Z rovnice pro dráhu určíme zrychlení

$$a = \frac{2(s - v_0 t)}{t^2} = 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Vztah pro zrychlení dosadíme do rovnice pro rychlost a po úpravě dostaneme

$$v = \frac{2s}{t} - v_0 = 4{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

R2.43 $d = 3$ m, $v = 600\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $t = ?$, $a = ?$

$$d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}vt \Rightarrow t = \frac{2d}{v} = 0{,}01\ \mathrm{s}$$

$$a = \frac{v}{t} = 60\,000\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 60\ \mathrm{km \cdot s^{-2}}$$

R2.44 $t = 12$ s, $s = 36$ m, $t_1 = 1$ s; $s_1 = ?$

$$a = \frac{2s}{t^2} = 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = s\frac{t_1^2}{t^2} = 0{,}25\ \mathrm{m}$$

R2.45 a) Z grafu odečteme pro dané časy rychlosti $v_1 = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_3 = 7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

b) $a_1 = v_1/t_1 = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $a_2 = 0$ (rychlost se v době od 2 s do 4 s nemění),

$$a_3 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

R2.46 a) $v_0 = ?$, b) $v_{\max} = ?$, c) $a = ?$, d) $t = 10$ s; $s = ?$

a) Z grafu odečteme pro čas $t = 0$ počáteční rychlost $v_0 = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

b) $v_{\max} = 16\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

c) $a = \dfrac{v_{\max} - v_0}{t} = 1{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

d) $s = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 = 100\ \mathrm{m}$

R2.47 a) Po dobu t_1 = 2 s je pohyb rovnoměrně zrychlený, po dobu t_2 = (9 – 2) s = 7 s je pohyb rovnoměrný, po dobu t_3 = (10 – 9) s = 1 s je pohyb rovnoměrně zpomalený.

b) $a_1 = v/t_1 = 0{,}75\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

$a_2 = 0$

$a_3 = v/t_3 = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

c) $s = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + v t_2 + v t_3 - \frac{1}{2}a_3 t_3^2 = 12{,}75\ \mathrm{m}$

R2.48 v_0 = 72 km · h^{-1} = 20 m · s^{-1}, t = 5 s; a) a = ?, b) s = ?

a) Z rovnice pro rychlost rovnoměrně zpomaleného pohybu $v = v_0 - at$, kde konečná rychlost automobilu v = 0 (automobil zastavil), určíme velikost zrychlení

$$a = \frac{v_0}{t} = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

b) Vztah pro zrychlení dosadíme do rovnice pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

a dostaneme

$$s = \frac{1}{2}v_0 t = 50\ \mathrm{m}.$$

R2.49 v_0 = 15 m · s^{-1}, a = 2 m · s^{-2}; a) t = 5 s; v = ?, s = ?, b) t_1 = ?

a) $v = v_0 - at$ = 5 m · s^{-1}, $s = v_0 t - at^2/2$ = 50 m

b) $t_1 = v_0/a$ = 7,5 s

R2.50 t = 50 s, v_1 = 72 km · h^{-1} = 20 m · s^{-1}, v_2 = 36 km · h^{-1} = 10 m · s^{-1}; a = ?, s = ?

$$a = \frac{v_1 - v_2}{t} = 0{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$s = v_1 t - \frac{1}{2}at^2 = 750\ \mathrm{m}$$

R2.51 a = 5 m · s^{-2}, a) v_0 = 54 km · h^{-1} = 15 m · s^{-1}, b) v_0 = 108 km · h^{-1} = 30 m · s^{-1}; s = ?

$$s = \frac{v_0^2}{2a}$$

a) $s = 22{,}5$ m

b) $s = 90$ m

Při dvojnásobné rychlosti je brzdná dráha čtyřnásobná.

R2.52 $v_0 = 40\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} = 11{,}1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $s = 12{,}5$ m; $a = ?$

$$a = \frac{v_0^2}{2s} \approx 4{,}9\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

R2.53 $v_{\text{dov}} = 60\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} = 16{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $s = 40$ m, $a = 5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $v_0 = ?$

$$v_0 = \sqrt{2sa} = 20\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 72\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$v_0 - v_{\text{dov}} = 12\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$

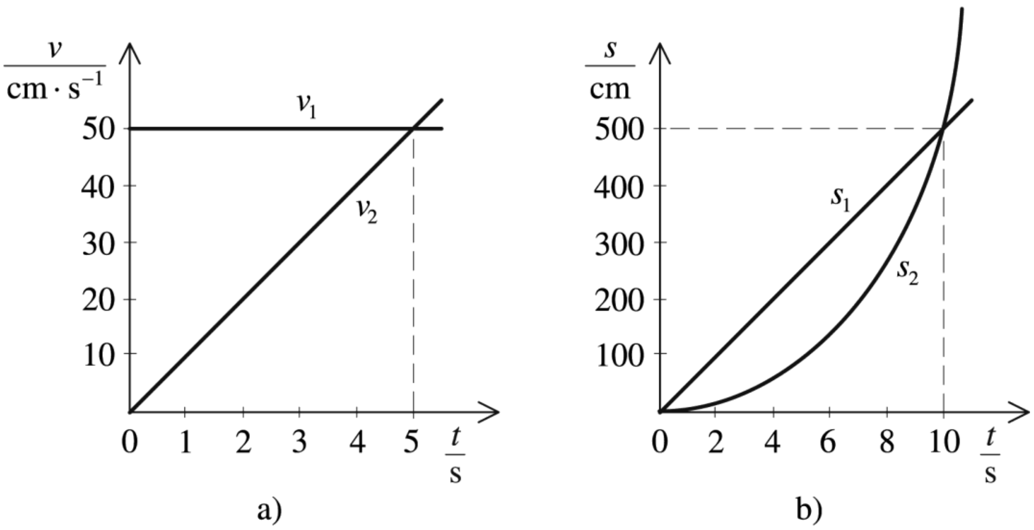
Automobil překročil dovolenou rychlost o 12 km $\cdot$ h^{-1}.

R2.54 $v_1 = 50\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$, $a = 10\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$; $t = ?$

a) První hmotný bod se pohybuje stálou rychlostí o velikosti v_1, velikost rychlosti druhého bodu závisí na čase vztahem $v_2 = at$. Jestliže mají mít oba hmotné body stejně velkou rychlost, platí $v_1 = v_2$ neboli $v_1 = at$. Odtud doba

$$t = \frac{v_1}{a} = 5\ \text{s}.$$

Pro grafické řešení sestrojíme grafy závislosti rychlosti obou hmotných bodů na čase (obr. R2-54a [2-7]). Časová souřadnice průsečíku obou přímek udává čas, ve kterém jsou rychlosti bodů stejně velké.



Obr. R2-54

b) Dráha prvního hmotného bodu v závislosti na čase je dána vztahem $s_1 = v_1 t$, druhého hmotného bodu vztahem $s_2 = at^2/2$. Mají-li hmotné body urazit stejnou dráhu, pak $s_1 = s_2$

neboli $v_1 t = \frac{1}{2}at^2$. Odtud doba $t = \frac{2v_1}{a} = 10$ s.

Pro grafické řešení sestrojíme grafy závislosti dráhy obou hmotných bodů na čase (obr. R2-54b [2-8]). Časová souřadnice jejich průsečíku opět udává čas, ve kterém hmotné body urazily stejné dráhy.

R2.55 $v_{01} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $a_1 = 0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $v_{02} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $a_2 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; a) $t_1 = ?$, $v = ?$, b) $t_2 = ?$, $s = ?$

a) $v_{01} + a_1 t_1 = v_{02} - a_2 t_1$

Odtud $t_1 = \frac{v_{02} - v_{01}}{a_1 + a_2} = 4 \text{ s}$, $v = v_{01} + a_1 t_1 = v_{02} - a_2 t_2 = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) $v_{01} t_2 + \frac{1}{2} a_1 t_2^2 = v_{02} t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2$

Tato kvadratická rovnice má dva kořeny.

1. $t_2 = 0$, což odpovídá počáteční poloze těles,

2. $t_2 = \frac{2(v_{02} - v_{01})}{a_1 + a_2} = 8 \text{ s}$, což je hledaná doba.

Dráha, kterou obě tělesa za tuto dobu urazí, je

$$s = v_{01} t_2 + \frac{1}{2} a_1 t_2^2 = v_{02} t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 48 \text{ m}.$$

R2.56 $d = 240$ m, $v_{01} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $a_1 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $v_{02} = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $a_2 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $t = ?$, $s_1 = ?$

$$d = v_{01} t + \frac{1}{2} a_1 t^2 + v_{02} t + \frac{1}{2} a_2 t^2.$$

Po jednoduché úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2)t^2 + (v_{01} + v_{02})t - d = 0.$$

Řešením této rovnice dostaneme dva kořeny, $t_1 = 8$ s, $t_2 = -12$ s. Záporný kořen zde nemá smysl, čas, ve kterém dojde ke kolizi těles, je tedy $t = 8$ s.

Vzdálenost místa kolize od počáteční polohy prvního tělesa je

$$s_1 = v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 = 128\,\text{m}.$$

R2.57 $a_1 = 0{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a_2 = 2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\tau = 15$ s; a) t = ?, s = ?, b) v_1 = ?, v_2 = ?

Čas začneme počítat od výjezdu druhého auta.

a) Pro rovnost drah pak platí

$$s = \frac{1}{2}a_1(t+\tau)^2 = \frac{1}{2}a_2t^2,$$

čas vypočteme z kvadratické rovnice

$(a_2 - a_1)t^2 - 2a_1\tau t - a_1\tau^2 = 0$; kořeny rovnice jsou $t_1 = 15$ s, $t_2 = -5$ s. Záporný kořen zde nemá smysl (auta ještě nevyjela), je tedy $t = 15$ s a dráha

$$s = \frac{1}{2}a_2t^2 = \frac{1}{2}a_1(t+\tau)^2 = 225\,\text{m}.$$

b) Rychlosti aut v okamžiku předjíždění jsou $v_1 = a_1(t + \tau) = 15\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_2 = a_2t = 30\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

R2.58 $v_0 = 30\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_2 = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $s_0 = 30$ m, $a = 5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; v_1 = ?, v_2 = ?

Předpokládejme, že ke srážce dojde. Dráhy budeme měřit od počáteční polohy osobního auta;

$$v_0t - \frac{1}{2}at^2 = v_1t + s_0.$$

Po úpravě dostaneme pro čas srážky kvadratickou rovnici

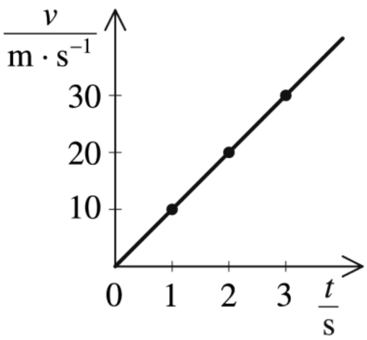
$$at^2 - 2(v_0 - v_1)t + 2s_0 = 0,$$

jejímž řešením dostaneme pro čas dva kořeny, $t_1 = 6$ s, $t_2 = 2$ s.

Ke srážce vozidel dojde v čase $t_2 = 2$ s. Druhý kořen zde uvažovat nebudeme, po srážce se situace změní, auta se nemohou srazit podruhé (kdyby auta jela vedle sebe, pak by v čase 6 s míjel nákladní vůz osobní auto). Na následky srážky můžeme soudit z rychlostí aut při srážce. Nákladní vůz má stále rychlost $v_1 = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, osobní auto rychlost $v_2 = v_0 - at = 20\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, rychlost osobního auta vzhledem k nákladnímu je tedy $v_2 - v_1 = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

R2.59 $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s, $t_3 = 3$ s; v_1 = ?, v_2 = ?, v_3 = ?

Ze vztahu pro rychlost volného pádu $v = gt$ dostaneme $v_1 = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_2 = 20\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_3 = 30\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Graf je na obr. R2-59.



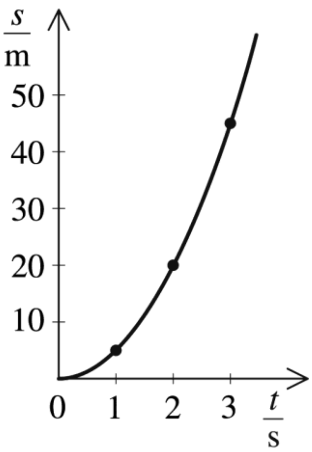
Obr. R2-59

R2.60 $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s, $t_3 = 3$ s; $s_1 = ?$, $s_2 = ?$, $s_3 = ?$

Ze vztahu pro dráhu volného pádu

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

dostaneme $s_1 = 5$ m, $s_2 = 20$ m, $s_3 = 45$ m. Graf je na obr. R2-60.



Obr. R2-60

R2.61 $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $t_1 = 3$ s, $t_2 = 4$ s; $s = ?$

$$s = s_2 - s_1 = \frac{1}{2}g\left(t_2^2 - t_1^2\right) = 35\ \mathrm{m}$$

R2.62 $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $h = 80$ m; a) $t = ?$, b) $v = ?$

a) $h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 4\ \mathrm{s}$

b) $v = gt = \sqrt{2gh} = 40\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

R2.63 $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $t = 5{,}25$ s; $h = ?$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = 138\,\mathrm{m}$$

R2.64 $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $h = 1{,}5\ \mathrm{m}$; $v = ?$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v = gt = \sqrt{2gh} = 5{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R2.65 $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $v = 100\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $h = ?$

$$t = \frac{v}{g}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v^2}{2g} = 500\,\mathrm{m}$$

R2.66 $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $s_1 = 1\ \mathrm{m}$, $s_2 = 2\ \mathrm{m}$; $t_1 = ?$, $t_2 = ?$

a) $t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{g}} = 0{,}45\,\mathrm{s}$

b) $t_2 = \sqrt{\frac{2s_2}{g}} - \sqrt{\frac{2s_1}{g}} = 0{,}63\,\mathrm{s} - 0{,}45\,\mathrm{s} = 0{,}18\,\mathrm{s}$

R2.67 $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $s = 10\ \mathrm{m}$, $h = 2\ \mathrm{m}$; $t = ?$, $v_\mathrm{p} = ?$

$$t = \sqrt{\frac{2(s+h)}{g}} - \sqrt{\frac{2s}{g}} = 0{,}13\,\mathrm{s}$$

$$v_\mathrm{p} = \frac{h}{t} = 15\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R2.68 $r = 50\ \mathrm{cm} = 0{,}5\ \mathrm{m}$, $f = 2\ \mathrm{Hz}$; $T = ?$, $v = ?$

$$T = \frac{1}{f} = 0{,}5\,\mathrm{s}$$

$$v = 2\pi r f = 6{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R2.69 $T = 5\ \mathrm{s}$; $f = ?$, $\omega = ?$

$$f = \frac{1}{T} = 0{,}2\ \mathrm{Hz}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1{,}3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

R2.70 $r = 3{,}84 \cdot 10^5\ \mathrm{km} = 3{,}84 \cdot 10^8\ \mathrm{m}$, $T = 27{,}3\ \mathrm{d} = 2{,}36 \cdot 10^6\ \mathrm{s}$; $v = ?$

$$v = \frac{2\pi r}{T} \approx 1{,}0 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1{,}0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

R2.71 T = 24 h = 86 400 s, $\varphi = 2\pi$; ω = ?

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

R2.72 T_1 = 12 h, T_2 = 24 h; ω_1/ω_2 = ?

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = 2$$

Úhlová rychlost hodinové ručičky je dvakrát větší než úhlová rychlost otáčení Země.

R2.73 ω = 200 rad · s^{-1}, a) r = 1,5 m; v = ?, b) v = 540 km · h^{-1} = 150 m · s^{-1}; s = ?

a) $v = r\omega = 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

b) $s = vT = v\dfrac{2\pi}{\omega} = 4{,}7 \text{ m}$

R2.74 r = 0,4 m, ω = 31,4 rad · s^{-1}; v = ?, a_n = ?

$v = \omega r$ = 13 m · s^{-1}

$a_n = \omega^2 r$ = 400 m · s^{-2}

R2.75 r = 50 m, v = 36 km · h^{-1} = 10 m · s^{-1}; a_n = ?

$$a_n = \frac{v^2}{r} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

R2.76 f_1 = 450 ot/min = 7,5 Hz, r = 10 cm = 0,1 m; a_n = ?, $f_2 = 2f_1$; a_2/a_1 = ?

$a_1 = 4\pi^2 f_1^2 r$ = 220 m · s^{-2}

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{f_2^2}{f_1^2} = 4$$

Zrychlení se zvětší čtyřikrát.

R2.77 Projíždí-li automobil zatáčkou, opisují hnací kola kružnice různých poloměrů, tzn. že pokud nenastane smyk vozidla, musí ujet hnací kola různé dráhy.

R2.78 Na přímočarých úsecích trajektorie (úseky *AB* a *CD*) je zrychlení nulové, na obloucích kružnice má cyklista normálové (dostředivé) zrychlení a_n.

2.2 Dynamika

R2.79 Při rozjíždění působí na cestující vlivem setrvačnosti síla směrem dozadu, při zastavování směrem dopředu, v zatáčce směrem ven ze zatáčky (od středu oblouku, který autobus opisuje).

R2.80 Při prudkém zastavení automobilu zabrání pásy pohybu cestujících směrem dopředu.

R2.81 Příčinou tohoto jevu je setrvačnost dveří při zmenšování nebo zvětšování rychlosti vlaku.

R2.82 Při třepání prachovky se látka náhle zastaví, ale částice prachu se setrvačností v pohybu oddělí od látky. Podobně vysvětlíme setřásání kapek vody z mokré ruky.

R2.83 Kladivo nasazujeme na dřevěnou násadu tak, že několikrát udeříme násadou na tvrdou podložku. Kladivo se setrvačností posouvá po násadě.

R2.84 Při rychlém vytažení papíru zůstane kniha setrvačností v klidu.

R2.85 Při klopýtnutí je tělo v pohybu a nohy se na překážce zastaví; tělo setrvačností padá dopředu. Při uklouznutí nám nohy ujedou značnou rychlostí dopředu, tělo zůstává setrvačností v pomalejším pohybu a padá dozadu k zemi.

R2.86 Dopadnete na stejné místo, neboť tělo má při výskoku stejnou rychlost ve vodorovném směru jako podlaha vagonu.

R2.87 Neodporuje, zastavíte se působením třecí síly a odporu vzduchu.

R2.88 O druhu pohybu rozhoduje výslednice působících sil. Proti tažné síle lokomotivy působí třecí síly a odporová síla vzduchu, výslednice sil je nulová.

R2.89 $a = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, a) $F_1 = 2F$; $a_1 = ?$, b) $F_2 = F/2$; $a_2 = ?$

$$a = \frac{F}{m}$$

a) $a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{2F}{m} = 2a = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

b) $a_2 = \frac{F_2}{m} = \frac{F}{2m} = \frac{a}{2} = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

R2.90 $a = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, a) $m_1 = 2m$; $a_1 = ?$, b) $m_2 = m/2$; $a_2 = ?$

$$a = \frac{F}{m}$$

a) $a_1 = \frac{F}{2m} = \frac{a}{2} = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

b) $a_2 = \frac{2F}{m} = 2a = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

R2.91 Vagon s menší hmotností zastaví dříve, neboť brzdicí síla mu uděluje větší zrychlení.

R2.92 a) Z grafu odečteme pro $F = 6$ N velikost zrychlení $a = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

b) Z grafu odečteme pro $a = 4{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ velikost síly $F = 9$ N.

c) $m = F/a$, z libovolných sobě odpovídajících hodnot určíme $m = 2$ kg.

R2.93 $m = 800\ \mathrm{t} = 8 \cdot 10^5\ \mathrm{kg}$, $F = 160\ \mathrm{kN} = 1{,}6 \cdot 10^5\ \mathrm{N}$; $a = ?$

$$a = \frac{F}{m} = 0{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

R2.94 $F_1 = 50$ N, $F_2 = 10$ N, $m = 80$ kg; $a = ?$

$$a = \frac{F_1 - F_2}{m} = 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

R2.95 $t = 10$ s, $s = 50$ m, $m = 80$ kg, $F_1 = 15$ N; $F = ?$

$F = ma + F_1, \quad a = \frac{2s}{t^2},$

po dosazení $F = m\frac{2s}{t^2} + F_1 = 95\ \mathrm{N}$.

R2.96 $m = 1\,200$ kg, $v_1 = 72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $t = 10$ s; $F = ?$, $s = ?$

a) Předpokládejme, že pohyb automobilu je rovnoměrně zrychlený. Ze vztahu pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu $v_2 = v_1 + at$ určíme velikost zrychlení $a = (v_2 - v_1)/t$.

Velikost síly, která zrychlený pohyb automobilu způsobila, určíme z druhého pohybového zákona, $F = ma$. Po dosazení vztahu pro velikost zrychlení dostaneme

$$F = \frac{m(v_2 - v_1)}{t} = 600\ \mathrm{N}.$$

b) Vzdálenost, kterou automobil při zvětšující se rychlosti urazil, určíme ze vztahu pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu $s = v_1 t + at^2/2$. Dosadíme-li vztah pro velikost zrychlení, dostaneme po úpravě

$$s = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)t = 225\ \mathrm{m}.$$

R2.97 $m = 600$ kg, $v_1 = 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $t = 2$ s; $F = ?$

$$F = ma = m\frac{v_2 - v_1}{t} = 450\ \mathrm{N}.$$

R2.98 $t = 1$ min $= 60$ s, $v = 3\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 3\,000\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $F = 150\ \mathrm{kN} = 1{,}5 \cdot 10^5$ N; a) $m = ?$, b) $s = ?$

a) $m = \dfrac{F}{a} = \dfrac{Ft}{v} = 3\,000\ \mathrm{kg} = 3\ \mathrm{t}$

b) $s = \dfrac{1}{2}at^2 = \dfrac{vt}{2} = 9 \cdot 10^4\ \mathrm{m} = 90\ \mathrm{km}$

R2.99 $t = 2{,}5$ min $= 150$ s, $v = 6\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 6\,000\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $F = 320\ \mathrm{kN} = 3{,}2 \cdot 10^5$ N; $m = ?$

$$mv = Ft$$

$$m = \frac{Ft}{v} = 8\,000\ \mathrm{kg} = 8\ \mathrm{t}$$

R2.100 $m = 500\ \mathrm{t} = 5 \cdot 10^5$ kg, $F = 100\ \mathrm{kN} = 1 \cdot 10^5$ N, $t = 1$ min $= 60$ s; $v = ?$

$$mv = Ft$$

$$v = \frac{Ft}{m} = 12\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R2.101 $m = 800\ \mathrm{t} = 8 \cdot 10^5$ kg, $v = 72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $s = 400$ m; $F = ?$

$F = ma$, $t = v/a$, $s = vt - at^2/2$, po dosazení za t je dráha $s = v^2/2a$, zrychlení $a = v^2/2s$ a síla

$$F = ma = m\frac{v^2}{2s} = 4 \cdot 10^5\ \text{N} = 400\ \text{kN}.$$

R2.102 $v = 20\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $t = 0{,}05\ \text{s}$, $m = 500\ \text{g} = 0{,}5\ \text{kg}$; $F = ?$

$$F = ma = m\frac{v}{t} = 200\ \text{N}$$

R2.103 $m = 400\ \text{g} = 0{,}4\ \text{kg}$, $F = 240\ \text{N}$, $t = 0{,}01\ \text{s}$; $v = ?$

$$Ft = mv$$

$$v = \frac{Ft}{m} = 6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

R2.104 $m = 800\ \text{g} = 0{,}8\ \text{kg}$, $v = 4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $p = ?$, $Ft = ?$

$p = mv = 3{,}2\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$Ft = mv = 3{,}2\ \text{N} \cdot \text{s}$

R2.105 $m_1 = 800\ \text{kg}$, $v_1 = 90\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} = 25\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $m_2 = 2\,000\ \text{kg}$, $v_2 = 54\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} = 15\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; a) $v_1/v_2 = ?$, b) $p_1/p_2 = ?$

a) $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{25}{15} = \dfrac{5}{3}$

b) $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{m_1 v_1}{m_2 v_2} = \dfrac{2}{3}$

R2.106 $m_1 = 2\ \text{kg}$, $m_2 = 3\ \text{kg}$, $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $a = ?$

Na závaží o hmotnosti m_1 působí tíhová síla F_1 o velikosti $F_1 = m_1 g$, na závaží o hmotnosti m_2 tíhová síla F_2 o velikosti $F_2 = m_2 g$. Obě síly se přenášejí na vlákno, které je po celé délce napínáno silou F (viz obr. 2-106).

Podle druhého pohybového zákona se výslednice sil působících na těleso rovná součinu hmotnosti a zrychlení, přičemž zrychlení a má pro obě závaží stejnou velikost, ale opačný směr (první závaží bude stoupat, druhé klesat).

Výslednice sil pro závaží o hmotnosti m_1 je

$F - m_1 g = m_1 a$

a pro závaží o hmotnosti m_2

$m_2 g - F = m_2 a.$

Sečteme-li levé a pravé strany obou rovnic, dostaneme

$m_2g - m_1g = m_1a + m_2a.$

Odtud velikost zrychlení

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Zajímavá je diskuse výsledného vztahu pro velikost zrychlení: Je-li $m_1 = m_2$, pak $a = 0$ a soustava zůstává v klidu. Je-li $m_1 = 0$, pak $a = g$, závaží o hmotnosti m_2 padá k zemi se zrychlením g.

R2.107 Při šplhání působí člověk na lano určitou silou. Stejně velkou silou působí lano na závaží. Závaží i člověk se budou pohybovat stejně velkou rychlostí směrem vzhůru.

R2.108 $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 2$ kg, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $a = ?$, $F = ?$

Označme F sílu napínající vlákno. Tato síla působí na obě tělesa. Na zavěšené těleso působí také tíhová síla o velikosti $F_G = m_2g$. Pro těleso ležící na vodorovné desce platí $F = m_1a$, pro zavěšené těleso $m_2g - F = m_2a$. Sečtením dostaneme $m_2g = (m_1 + m_2)a$, odtud zrychlení

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Velikost síly napínající vlákno $F = m_1a = m_2(g - a) = 12$ N.

R2.109 $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $\alpha = 30°$; $a = ?$

Složka tíhové síly, rovnoběžná s nakloněnou rovinou, má velikost $F = mg \sin\alpha$ a uděluje kvádru zrychlení

$$a = \frac{F}{m} = g \sin\alpha = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

R2.110 $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 2$ kg, $\alpha = 30°$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $a = ?$

Označme F velikost síly napínající vlákno. Tato síla působí na obě tělesa. Pohybová rovnice pro těleso ležící na nakloněné rovině je

$F - m_1g \sin\alpha = m_1a,$

pro těleso zavěšené na vlákně je pohybová rovnice

$m_2 g - F = m_2a.$

Sečtením levých i pravých stran těchto rovnice dostaneme

$m_2g - m_1g \sin\alpha = (m_1 + m_2)a$, odtud

$$a = \frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)g}{m_1 + m_2} = 1\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

R2.111 $m = 80$ kg, $f = 0{,}7$, $g = 10$ m · s^{-2}, v = konst.; F = ?

Aby se bedna pohybovala rovnoměrným přímočarým pohybem, musí být výslednice sil které na ni působí rovna nule, proto síla, kterou na bednu působíme ve vodorovném směru, musí být rovna třecí síle. Kolmá tlaková síla je rovna tíhové síle, $F_n = F_G = mg$, třecí síla $F_t = fmg = 560$ N a tedy $F = F_t = 560$ N.

R2.112 $m = 600$ g = 0,6 kg, $F = 1{,}2$ N, $g = 10$ m · s^{-2}; f = ?

$$F = F_t = fmg \Rightarrow f = \frac{F}{mg} = 0{,}2$$

R2.113 $m = 2$ kg, $F_t = mg/4$, $g = 10$ m · s^{-2}; a) f = ?, b) $m_1 = 10$ kg; F_{t1} = ?

a) $F_t = fmg \Rightarrow \frac{F_t}{mg} = \frac{mg}{4mg} = 0{,}25$

b) $F_{t1} = f(m + m_1)g = 30\,\mathrm{N}$

R2.114 Třecí síla klidového tření je větší než třecí síla smykového tření při pohybu.

R2.115 Zmenšujeme tím velikost třecí síly, která je v tomto případě škodlivá.

R2.116 Zvětšujeme tím velikost třecí síly, která je v tomto případě užitečná.

R2.117 Čistý hřebík, neboť na něj působí menší třecí síla.

R2.118 Síla valivého odporu je za jinak stejných podmínek menší než síla smykového tření.

R2.119 $m = 80$ kg, $r = 5$ cm = 0,05 m, $\xi = 0{,}01$ m, $g = 10$ m · s^{-2}; F = ?

$$F = F_v = \xi \frac{mg}{r} = 160\,\mathrm{N}$$

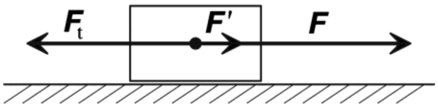
R2.120 Na ocelovou kouli, jejíž poloměr je vzhledem k větší hustotě menší než poloměr hliníkové koule (odporová síla je nepřímo úměrná poloměru).

R2.121 $m = 5$ kg, $F = 30$ N, $f = 0{,}4$, $g = 10$ m · s^{-2}; a = ?

Na kvádr působí síla F o velikosti F. Na stykové ploše kvádru s podložkou působí třecí síla F_t o velikosti $F_t = fmg$. V obr. R2-121 [2-14] jsou nakresleny síly F a F_t ve společném působišti v těžišti kvádru. Poněvadž jde o síly opačného směru, je velikost jejich výslednice $F' = F - fmg$.

Podle druhého pohybového zákona je velikost zrychlení přímo úměrná velikosti výslednice sil, tedy:

$$a = \frac{F - fmg}{m} = \frac{F}{m} - fg = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$



Obr. R2-121

R2.122 $m = 10$ kg, $t = 2$ s, $f = 0{,}5$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $a = ?$

$$F = ma + F_t = m\frac{v}{t} + fmg = 45\ \mathrm{N}$$

R2.123 $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 2$ kg, $f = 0{,}5$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $a = ?$

Síla F napínající vlákno působí na obě tělesa, na těleso ležící na vodorovné rovině působí kromě této síly třecí síla o velikosti $F_t = fm_1g$, na zavěšené těleso tíhová síla o velikosti m_2g. Pohybové rovnice jsou

$F - fm_1g = m_1a$, $m_2g - F = m_2a$.

Jejich sečtením dostaneme $(m_2 - fm_1)g = (m_1 + m_2)a$. Odtud

$$a = \frac{g(m_2 - fm_1)}{m_1 + m_2} = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

R2.124 $\alpha = 30°$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $f = 0{,}4$; $a = ?$

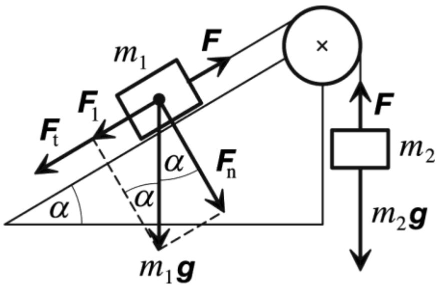
Na kvádr působí složka tíhové síly rovnoběžná s nakloněnou rovinou, jejíž velikost je $F_1 = mg\sin\alpha$, a třecí síla $F_t = fF_n = fmg\cos\alpha$.

Pohybová rovnice pro kvádr je $F_1 - F_t = ma$, neboli $mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha = ma$.

Zrychlení kvádru $a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

R2.125 $\alpha = 30°$, $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 2$ kg, $f = 0{,}4$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $a = ?$

Síly působící na obě tělesa jsou znázorněny na obr. R2-125.



Obr. R2-125

Pohybová rovnice pro těleso ležící na nakloněné rovině je

$F - m_1 g \sin\alpha - f m_1 g \cos\alpha = m_1 a$,

pro těleso visící na vlákně $m_2 g - F = m_2 a$.

Po sečtení a úpravě dostaneme pro zrychlení těles

$$a = g\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 0{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

R2.126 Reakce tryskající vody působí v opačném směru, než tryská voda.

R2.127 Reakce střely působí na pušku v opačném směru, než je pohyb střely.

R2.128 Nepřetrhne, bude napínán silou o velikosti 100 N.

R2.129 Neodporuje; nárazové síly jsou na oba automobily stejné, ale jejich účinky závisejí na hmotnostech a konstrukcích automobilů.

R2.130 Rychlosti loďky a vyskakujícího člověka jsou v opačném poměru než jejich hmotnosti. Loď s velkou hmotností odjede od břehu velmi malou rychlostí.

R2.131 $m_1 = 50$ kg, $m_2 = 200$ kg, $t = 5$ s, $s = 2$ m; $v_1 = ?$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 = m_2\frac{s}{t}$$

$$v_1 = \frac{m_2 s}{m_1 t} = 1{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

R2.132 Vyhodíme-li z loďky předmět v jednom směru, loďka se v důsledku zákona zachování hybnosti začne pohybovat v opačném směru.

R2.133 Buď je připoután ke kosmické lodi lanem, nebo je vybaven reaktivní pistolí.

R2.134 $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 10$ kg; $v_1/v_2 = ?$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} = 2$$

R2.135 m_1 = 4 kg, m_2 = 20 g = 0,02 kg, v_2 = 600 m · s^{-1}; v_1 = ?

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

$$v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1} = 3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R2.136 m_1 =10 g = 0,01 kg, t = 0,02 s, v_1 = 800 m · s^{-1}; a) F = ?, b) m_2 = 5 kg, v_2 = ?, c) p = ?

a) $m_1 v_1 = Ft$

$$F = \frac{m_1 v_1}{t} = 400\,\mathrm{N}$$

b) $m_1 v_1 = m_2 v_2,\ v_2 = \dfrac{m_1 v_1}{m_2} = 1{,}6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

c) Celková hybnost střely a pušky je nulová, p = 0, neboť hybnosti střely a pušky jsou stejně velké a mají navzájem opačný směr.

R2.137 m_1 = 20 t, v_1 = 1 m · s^{-1}, m_2 = 30 t, v_2 = 0,5 m · s^{-1}; v = ?

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v$$

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 0{,}7\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R2.138 m_1 = 400 g = 0,4 kg, v_1 = 1 m · s^{-1}, m_2 = 100 g = 0,1 kg, v_2 = 0,5 m · s^{-1}; v = ?

a) $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v$

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 0{,}9\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

b) $m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v$

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 0{,}7\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R2.139 a) Rovnoměrně zrychleně směrem k přední stěně vagonu, b) rovnoměrně ve směru jízdy vagonu.

R2.140 m = 400 g = 0,4 kg, a = 2,5 m · s^{-2}; F_s = ?

$F_s = ma$ = 1 N

R2.141 $m = 60$ kg, a) $a_1 = 2$ m · s^{-2}; $F_1 = ?$, b) $a_2 = 2{,}5$ m · s^{-2}; $F_2 = ?$

Pokud je kabina výtahu v klidu nebo koná rovnoměrný přímočarý pohyb, působí náklad na podlahu kabiny tlakovou silou F_G o velikosti $F_G = mg$. Pro dané hodnoty $F_G = 600$ N.

a) Při rozjíždění výtahu, kdy koná kabina rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením a_1, zvětší se tlaková síla působící na podlahu kabiny o setrvačnou sílu $\mathrm{F}_\mathrm{s} = -m\mathrm{a}_1$, jejíž velikost $F_\mathrm{s} = ma_1$. Velikost výsledné tlakové síly je tedy

$F_1 = F_G + F_\mathrm{s} = m(g + a_1) = 720$ N.

b) Při zastavování výtahu, kdy koná kabina rovnoměrně zpomalený pohyb se zrychlením a_2, zmenší se tlaková síla o setrvačnou sílu F_s o velikosti $F_\mathrm{s} = ma_2$. Proto velikost výsledné tlakové síly je

$F_2 = F_\mathrm{G} - F_\mathrm{s} = m(g - a_2) = 450$ N.

R2.142 $m = 500$ g $= 0{,}5$ kg, $g = 10$ m · s^{-2}, a) $v =$ konst.; $F = ?$, b) $a = 2$ m · s^{-2}; $F = ?$, c) $a = 2$ m · s^{-2};

$F = ?$

a) Zrychlení je nulové, na závaží působí jen tíhová síla, $F = F_G = mg = 5$ N.

b) $F = F_G + F_\mathrm{s} = mg + ma = m(g + a) = 6$ N,

c) $F = F_G - F_\mathrm{s} = mg - ma = m(g - a) = 4$ N.

R2.143 $a = 2$ m · s^{-2}, $g = 10$ m · s^{-2}; a) $a_1 = ?$, b) $a_2 = ?$

a) $a_1 = a + g = 12$ m · s^{-2},

b) v inerciální vztažné soustavě nepůsobí setrvačné síly, zrychlení padajícího tělesa je rovné tíhovému zrychlení, $a_2 = g = 10$ m · s^{-2}.

R2.144 $m = 5$ t $= 5\,000$ kg, $g = 10$ m · s^{-2}, $t = 2{,}5$ s, $v = 5$ m · s^{-1}; $F = ?$

$$F = mg + ma = mg + \frac{v}{t} = m\left(g + \frac{v}{t}\right) = 60\,000\ \mathrm{N} = 60\ \mathrm{kN}$$

R2.145 $a = 50$ m · s^{-2}, $g = 10$ m · s^{-2}, $m = 90$ kg; $F = ?$

$F = F_G + F_\mathrm{s} = mg + ma = m(g + a) = 5\,400$ N

R2.146 $f_1 = 1$ Hz, $F_{\mathrm{d}1} = 2$ N, $f_2 = 2f_1$; $F_{\mathrm{d}2} = ?$

$F_{d1} = 4\pi^2 f_1^2 r$
$F_{d2} = 4\pi^2 f_2^2 r = 4\pi^2 4 f_1^2 r = 4F_{d1} = 8\ \text{N}$

R2.147 m = 20 g = 0,02 kg, r = 0,5 m, ω = 30 rad · s^{-1}; F_d = ?

$F_d = m\omega^2 r$ = 9 N

R2.148 m = 7,25 kg, r = 2,00 m, T = 0,50 s; a) F_d = ?, b) v = ?

a) $F_d = m\dfrac{4\pi^2}{T^2} r \approx 2\,290\ \text{N} \approx 2{,}3\ \text{kN}$

b) $v = \omega r = \dfrac{2\pi}{T} r = 25\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

R2.149 $r = 150 \cdot 10^6$ km $= 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, v = 30 km · s^{-1} = $3 \cdot 10^4$ m · s^{-1}, m = $6 \cdot 10^{24}$ kg; F_d = ?

$F_d = m\dfrac{v^2}{r} = 3{,}6 \cdot 10^{22}\ \text{N}$

R2.150 m = 800 kg, r = 50 m, v = 36 km · h^{-1} = 10 m · s^{-1}; a) F_d = ?, b) F = ?

a) $F_d = mv^2/r$ = 1 600 N = 1,6 kN,

b) podle třetího pohybového zákona působí pneumatiky na povrch vozovky stejně velkou silou opačného směru, tj. F = 1,6 kN.

R2.151 Dostředivá síla je nepřímo úměrná poloměru křivosti zatáčky, auta tedy mohou projíždět větší rychlostí, aniž by dostala smyk.

R2.152 r = 80 m, f = 0,5, g = 10 m · s^{-2}; v_{max} = ?

Podmínka pro projetí zatáčkou bez smyku je $F_d \leq F_t$, neboli

$\dfrac{mv^2}{r} \leq fmg \Rightarrow v \leq \sqrt{frg}$.

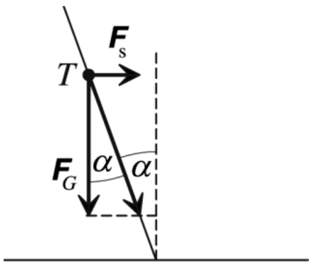
Maximální rychlost, při které ještě nedojde ke smyku, je

$v_{max} = \sqrt{fgr} = 20\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 72\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

R2.153 r = 10 m, v = 18 km · h^{-1} = 5 m · s^{-1}, g = 10 m · s^{-2}; α = ?

Úlohu můžeme řešit v neinerciální vztažné soustavě, spojené s cyklistou. V těžišti bicyklu s cyklistou působí dvě navzájem kolmé síly: svisle dolů tíhová síla o velikosti $F_G = mg$, vodorovně směrem od středu křivosti zatáčky odstředivá setrvačná síla

$F_s = \dfrac{mv^2}{r}$ (obr. R2 – 153).



Obr. R2-153

Cyklista se odkloní ve směru výslednice těchto sil. Pro úhel α, který svírá se svislým směrem, platí

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_s}{F_G} = \frac{v^2}{rg} = 0{,}25,\ \text{úhel}\ \alpha = 14°.$$

R2.154 m = 60 kg, r = 20 m, v = 5 m · s^{-1}; F_s = ?

$$F_s = \frac{mv^2}{r} = 75\ \text{N}$$

R2.155 m = 100 kg, r = 6 400 km = 6,4 · 10^6 m, ω = 7,3 · 10^{-5} rad · s^{-1}; F_s = ?

$F_s = m\omega^2 r = 3{,}4$ N

R2.156 v = 100 m · s^{-1}, r = 500 m, m = 80 kg, g = 10 m · s^{-2}; F = ?

Úlohu řešíme v neinerciální vztažné soustavě. Při pohybu letadla působí tělo pilota na sedadlo dvěmi sílami: tíhovou silou F_G o velikosti $F_G = mg$ a setrvačnou silou F_s o velikosti $F_s = mv^2/r$. V nejnižším bodě trajektorie letadla působí pilot na sedadlo tlakovou silou F_1 o velikosti

$$F_1 = F_s + F_G = m\left(\frac{v^2}{r} + g\right) = 2\,400\ \text{N},$$

v nejvyšším bodě trajektorie tlakovou silou F_2 o velikosti

$$F_2 = F_s - F_G = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right) = 800\ \text{N}.$$

R2.157 m = 50 kg, v = 12 m · s^{-1}, r = 20 m, g = 10 m · s^{-2}; a) F = ?, b) v_1 = ?

a) $F = mg - \frac{mv^2}{r} = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right) = 140\ \mathrm{N}$

b) $F = 0,\ g = \frac{v_1^2}{r},\ v_1 = \sqrt{gr} = 14\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

R2.158 r = 5 m, d = 0,6 m, g = 10 m · s^{-2}; v_{min} = ?

V nejvyšším bodě koule musí být setrvačná odstředivá síla alespoň rovna tíhové síle, $F_s \geq F_G$; těžiště motocyklu s jezdcem se pohybuje po kružnici
o poloměru $r - d$, musí tedy platit

$$\frac{mv^2}{r-d} \geq mg,$$

odtud

$$v^2 \geq g(r-d),\ v \geq \sqrt{g(r-d)}.$$

Minimální rychlost, při níž je setrvačná odstředivá síla právě rovna tíhové síle, je

$$v_{min} = \sqrt{g(r-d)} = 6{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

R2.159 v = 300 m · s^{-1}, a = 9g, g = 10 m · s^{-2}; r_{min} = ?

Nepřihlížíme-li k tíhové síle, působící svisle dolů, je

$$\frac{mv^2}{r} \leq 9mg \Rightarrow r \geq \frac{v^2}{9g},$$

nejmenší poloměr

$$r_{min} = \frac{v^2}{9g} = 1\,000\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{km}.$$

R2.160 T = 2 s, r = 6 m, g = 10 m · s^{-2}; F_s / F_G = ?

$$F_s = m\frac{v^2}{r},\quad F_G = mg$$

$$\frac{F_s}{F_G} = \frac{v^2}{rg} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 rg} = \frac{4\pi^2 r}{T^2 g} = 6$$

Přetížení je šestinásobné, tj. $F_s = 6F_G$.

2.3 Mechanická práce a energie

R2.161 F = 20 N, s = 5 km = 5 000 m; W = ?

$W = Fs = 100\,000$ J = 100 kJ

R2.162 $s = 6$ cm = 0,06 m, $F = 120$ N; $W = ?$

$W = Fs = 7{,}2$ J

R2.163 $m = 1{,}5$ t = $1{,}5 \cdot 10^3$ kg, $s = 2$ km = $2 \cdot 10^3$ m, $f = 0{,}6$, $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2}; $W = ?$

$F = F_t = fmg$

$W = Fs = fmgs = 18 \cdot 10^6$ J = 18 MJ

R2.164 $m_1 = 75$ kg, $m_2 = 25$ kg, $h = 4$ m, $n = 3$, $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2}; a) $W_1 = ?$, b) $W = ?$

$W_1 = nm_2gh = 3\,000$ J = 3 kJ

$W = n(m_1 + m_2)gh = 12\,000$ J = 12 kJ

R2.165 $m = 5$ kg, $s = 2$ m, $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2}; $W = ?$

a) Zvedáme-li závaží směrem vzhůru rovnoměrným pohybem, působíme na ně silou, která se rovná tíhové síle $F_G = mg$. Zvedneme-li je do výšky s, vykonáme práci $W = F_G s = 100$ J.

b) Držíme-li závaží, působíme na ně také silou F_G, ale protože je nepřemísťujeme, je dráha $s = 0$ a práce $W = 0$.

c) Při přemísťování závaží ve vodorovném směru svírá působící síla se směrem pohybu úhel 90°. Protože cos 90° = 0, je opět mechanická práce $W = 0$.

R2.166 $s = 100$ m, $F = 20$ N, a) $\alpha = 0°$, b) $\alpha = 30°$, c) $\alpha = 60°$; $W = ?$

$W = Fs\cos\alpha$

a) $W = 2\,000$ J

b) $W = 1\,730$ J

c) $W = 1\,000$ J

R2.167 $m = 80$ kg, $s = 1{,}5$ km = 1 500 m, $h = 2$ cm = 0,02 m, $l = 75$ cm = 0,75 m, $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2}; $W = ?$

$$W = nhmg = \frac{s}{l}hmg = 32\,000 \text{ J} = 32 \text{ kJ}$$

R2.168 $m = 5$ kg, $h = 2$ m, $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2}, a) $a = 0$, b) $a = 2$ m $\cdot$ s^{-2}; $W = ?$

a) $W = mgh = 100$ J

b) $W = mgh + mah = mh(g + a) = 120$ J

R2.169 $a = 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $F = 40$ kN $= 4 \cdot 10^4$ N, $t = 1$ min $= 60$ s; $W = ?$

$$W = Fs = F\frac{1}{2}at^2 = 36 \cdot 10^6\ \mathrm{J} = 36\ \mathrm{MJ}$$

R2.170 $m = 5$ kg, $s = 2$ m, $\alpha = 30°$, $f = 0{,}2$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $W = ?$

Na kvádr působí tíhová síla F_G, kterou rozložíme na dvě navzájem kolmé síly: sílu F_1, která je rovnoběžná s nakloněnou rovinou, a sílu F_n, kolmou k nakloněné rovině (obr. R2-170 [2-15]). Na kvádr působíme silou F_2, která při pohybu koná práci. Proti pohybu působí třecí síla F_t. Velikosti těchto sil jsou

$F_G = mg$, $F_1 = mg \sin \alpha$, $F_n = mg \cos \alpha$, $F_t = fF_n = fmg \cos \alpha$.

Má-li se kvádr pohybovat po nakloněné rovině rovnoměrným pohybem směrem vzhůru, musí platit

$F_2 = F_1 + F_t$

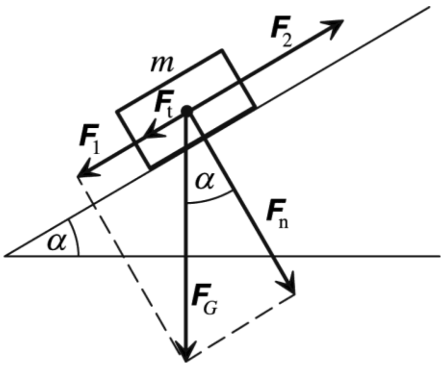
nebo po dosazení za F_1 a F_t

$F_2 = mg \sin \alpha + fmg \cos \alpha = mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)$.

Práce vykonaná silou F_2 na dráze s je pak

$W = F_2 s = mgs(\sin \alpha + f \cos \alpha) = 67$ J.

Kdybychom uvažovali pohyb kvádru bez tření, tj. na dokonale hladké rovině, kde součinitel $f = 0$, dostali bychom práci $W = mgs \sin \alpha$ a pro dané hodnoty $W = 50$ J.



Obr. R2-170

R2.171 Při konstantní síle je práce dána obsahem obdélníku o stranách F, s.

a) W = 240 J, b) W = 400 J

R2.172 Práce je dána obsahem trojúhelníku o základně s a výšce F, tj.

$$W = \frac{1}{2}Fs$$

Pro F = 40 N a s = 5 cm = 0,05 m je W = 1 J.

R2.173 F_1 = 5 N, s_1 = 1 cm = 0,01 m, s_2 = 8 cm = 0,08 m; W = ?

Síla je přímo úměrná prodloužení:

$$F_1 = ks_1, F_2 = ks_2, F_2 = \frac{F_1}{s_1}s_2$$

Práce:

$$W = \frac{1}{2}F_2 s_2 = \frac{1}{2}F_1\frac{s_2}{s_1}s_2 = 1{,}6\ \mathrm{J}$$

R2.174 m = 250 kg, h = 18 m, t = 30 s, g = 10 m · s^{-2}; a) W = ?, b) P = ?

a) $W = mgh = 45\,000\ \mathrm{J} = 45\ \mathrm{kJ}$

b) $P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = 1\,500\ \mathrm{W} = 1{,}5\ \mathrm{kW}$

R2.175 m = 150 kg, h = 2 m, t = 3 s, g = 10 m · s^{-2}; P = ?

$$P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = 1\,000\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{kW}$$

R2.176 h = 4 m, m_1 = 60 kg, t_1 = 5 s, m_2 = 72 kg, t_2 = 6 s; P_1/P_2 = ?

$$P_1 = \frac{m_1gh}{t_1}$$

$$P_2 = \frac{m_2gh}{t_2}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{t_2}{t_1} = 1,\ \text{tj. } P_1 = P_2$$

Výkony obou chlapců jsou stejné.

R2.177 m = 750 kg, h = 6 m, t = 3 min = 180 s, g = 10 m · s^{-2}; P = ?

$$P = \frac{mgh}{t} = 250\ \mathrm{W}$$

R2.178 P = 24 kW = 24 000 W, h = 12 m, t = 8 s, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; m = ?

Motor o výkonu P vykoná za dobu t práci $W = Pt$. Má-li motor dopravit rovnoměrným pohybem náklad s kabinou o hmotnosti m do výšky h, musí vykonat práci $W = mgh$. Proto $Pt = mgh$ a odtud

$$m = \frac{Pt}{gh} = 1\,600\ \mathrm{kg}.$$

R2.179 $P = 300\ \mathrm{kW} = 3 \cdot 10^5\ \mathrm{W}$, h = 180 m, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, t = 1 h = 3 600 s; m = ?

$$P = \frac{mgh}{t} \Rightarrow m = \frac{Pt}{gh} = 6 \cdot 10^5\ \mathrm{kg} = 600\ \mathrm{t}$$

Objem vyčerpané vody:

$$V = \frac{m}{\rho} = 600\ \mathrm{m^3}$$

R2.180 $v = 72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, F = 1,8 kN = 1 800 N; P = ?

$P = Fv = 36 \cdot 10^3\ \mathrm{W} = 36\ \mathrm{kW}$

R2.181 $P = 50\ \mathrm{kW} = 50 \cdot 10^3\ \mathrm{W}$, $v = 90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; a) F = ?,
b) t = 30 min = 1 800 s; W = ?

a) $F = \dfrac{P}{v} = 2\,000\ \mathrm{N} = 2\ \mathrm{kN}$

b) $W = Pt = 90 \cdot 10^6\ \mathrm{J} = 90\ \mathrm{MJ}$

R2.182 $P = 1\,500\ \mathrm{kW} = 1{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{W}$, $F = 60\ \mathrm{kN} = 6 \cdot 10^4\ \mathrm{N}$, s = 45 km =
$45 \cdot 10^3$ m; t = ?

$$v = \frac{P}{F}$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{sF}{P} = 1\,800\ \mathrm{s} = 0{,}5\ \mathrm{h}$$

R2.183 m = 900 kg, t = 18 s, $v = 72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; P = ?

$$P = Fv_{\mathrm{p}}$$

$$F = ma$$

$$a = \frac{v}{t},\ v_{\mathrm{p}} = \frac{v}{2} \Rightarrow P = m\frac{v}{t} \cdot \frac{v}{2} = \frac{mv^2}{2t} = 10\,000\ \mathrm{W} = 10\ \mathrm{kW}$$

R2.184 P = 4,8 kW = 4 800 W, m = 800 kg, f = 0,05, $v = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; a = ?, v_{max} = ?

a) Na sáně působí při pohybu tažná síla motoru, jejíž velikost při dané rychlosti je $F = P/v$. Proti této síle působí třecí síla o velikosti $F_t = fmg$. Výslednice obou sil má velikost

$$F' = F - F_t = \frac{P}{v} - fmg.$$

Podle druhého pohybového zákona je zrychlení saní

$$a = \frac{F'}{m} = \frac{\frac{P}{v} - fmg}{m} = \frac{P}{mv} - fg = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Z výsledného vztahu vyplývá, že při maximálním výkonu se velikost zrychlení s rostoucí rychlostí zmenšuje. Např. při rychlosti 3 m · s^{-1} bychom dostali hodnotu 2 m · s^{-2}, při rychlosti 4 m · s^{-1} hodnotu 1,5 m · s^{-2} a při rychlosti 6 m · s^{-1} jen 1 m · s^{-2}. Dá se proto očekávat, že při určité rychlosti v_{max} klesne hodnota zrychlení na nulu.

b) Nejvyšší rychlosti v_{max} tedy motorové sáně dosáhnou při zrychlení $a = 0$. Dosadíme-li tuto podmínku do výsledného vztahu, dostaneme

$$\frac{P}{mv_{\max}} - fg = 0$$

a odtud

$$v_{\max} = \frac{P}{fmg} = 12\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

R2.185 m = 1 t = 1 · 10^3 kg, P = 50 kW = 50 · 10^3 W, v = 72 km · h^{-1} = 20 m · s^{-1}, F_o = 400 N; a = ?

$$F = \frac{P}{v} - F_o$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{P}{vm} - \frac{F_o}{m} = \frac{P - vF_o}{vm} = 2{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

R2.186 m = 3 t = 3 · 10^3 kg, v = 15 m · s^{-1}, P = 20 kW = 20 · 10^3 W, h = 4 m, s = 100 m, g = 10 m · s^{-2};

P_1 = ?

$$P = Fv$$

$$P_1 = \left(F + mg\frac{h}{s}\right)v = \left(\frac{P}{v} + mg\frac{h}{s}\right)v = P + mg\frac{h}{s}v = 38\,000\ \mathrm{W} = 38\ \mathrm{kW}$$

R2.187 $P_0 = 20$ kW, $m = 800$ kg, $v = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\eta = ?$

Účinnost je dána vztahem $\eta = P/P_0$, kde P_0 je příkon elektromotoru a P výkon jeřábu, dopravujícího náklad požadovanou rychlostí. Výkon jeřábu určíme ze vztahu $P = Fv = mgv$. Po dosazení do vztahu pro účinnost dostáváme

$$\eta = \frac{mgv}{P_0} = 0{,}8 \text{ neboli } 80\,\%.$$

R2.188 $P_0 - P = P_0(1 - \eta) = 4$ kW,

$$\frac{P_0(1-\eta)}{P_0} = 0{,}2, \text{ tj. } 20\,\%.$$

R2.189 $P_0 = 10$ kW, $\eta = 90$ %, tj. $\eta = 0{,}9$, $t = 6$ h; $W = ?$

$W = \eta P_0 t = 54\ \mathrm{kW \cdot h}$

R2.190 $\eta = 0{,}8$, $m = 750$ kg, $h = 24$ m, $t = 0{,}5$ min $= 30$ s, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $P_0 = ?$

$$P = \frac{mgh}{t}$$

$$P_0 = \frac{P}{\eta} = \frac{mgh}{\eta t} = 7\,500\ \mathrm{W} = 7{,}5\ \mathrm{kW}$$

R2.191 $m = 800$ kg, $v_1 = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_3 = 30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $E_k = ?$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$E_{k1} = 4\,000$ J $= 40$ kJ, $E_{k2} = 160\,000$ J $= 160$ kJ, $E_{k3} = 360\,000$ J $= 360$ kJ.

R2.192 $m = 1$ kg, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s, $t_3 = 3$ s; $E_k = ?$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2$$

$E_{k1} = 50$ J, $E_{k2} = 200$ J, $E_{k3} = 450$ J.

R2.193 $v_2 = 2v_1$; $E_{k2}/E_{k1} = ?$

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m4v_1^2 = 4E_{k1}$$

Kinetická energie se zvětší čtyřikrát.

R2.194 $m_1 = 40$ kg, $v_1 = 2$ m · s^{-1}; $E_{k1} = ?$, $m_2 = 0{,}5$ kg, $v_2 = 20$ m · s^{-1}; $E_{k2} = ?$

$$E_{k1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = 80\ \text{J}$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2}m_2v_2^2 = 100\ \text{J}$$

R2.195 $v_1 = 10v_2$, $m_2 = 90m_1$; $E_{k1} : E_{k2} = ?$

$$E_{k1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 100v_2^2$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}90m_1v_2^2$$

$$E_{k1} : E_{k2} = 10 : 9$$

R2.196 $m = 20$ g $= 0{,}02$ kg, $s = 10$ cm $= 0{,}1$ m; $F = 4\,000$ N, $v = ?$

Při vniknutí střely do stromu překonává střela odporovou sílu F stromu po dráze s, přičemž vykoná mechanickou práci $W = Fs$. Tato práce se koná na úkor kinetické energie střely $E = mv^2/2$, jejíž počáteční rychlost byla v. Platí tedy

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2$$

a odtud rychlost střely

$$v = \sqrt{\frac{2Fs}{m}} = 200\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

R2.197 $m = 600$ g $= 0{,}6$ kg, $v = 5$ m · s^{-1}, $s = 3$ cm $= 0{,}03$ m; $F = ?$

$$\frac{1}{2}mv^2 = Fs$$

$$F = \frac{mv^2}{2s} = 250\ \text{N}$$

R2.198 $m = 1{,}2$ t $= 1{,}2 \cdot 10^3$ kg, $v_1 = 72$ km · h^{-1} = 20 m · s^{-1}, $v_2 = 90$ km · h^{-1} = 25 m · s^{-1}; a) $\Delta E_k = ?$, b) $W = ?$

a) $\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right) = 1{,}35 \cdot 10^5\ \text{J} = 135\ \text{kJ}$$

b) $W = \Delta E_k = 135$ kJ

R2.199

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$Ft = mv$$

$$v = \frac{Ft}{m}$$

$$E_k = \frac{F^2 t_2}{2m}$$

R2.200 m = 3 kg, a) h_1 = 50 cm = 0,5 m; E_{p1} = ?, b) h_2 = 80 cm = 0,8 m, g = 10 m · s^{-2}; E_{p2} = ?

a) $E_{p1} = mgh_1$ = 15 J

b) $E_{p2} = mg(h_1 + h_2)$ = 39 J

R2.201 m = 80 kg, h_1 = 4 m, $h = 3h_1$ = 12 m, g = 10 m · s^{-2}; a) ΔE_p = ?, b) W = ?

a) $\Delta E_p = mgh$ = 9 600 J = 9,6 kJ

b) $W = \Delta E_p$ = 9,6 kJ

R2.202 m = 20 kg, l = 5 m, g = 10 m · s^{-2}; ΔE_p = ?

Těžiště tyče, které je uprostřed tyče, se zvedne o výšku $h = l/2$, přírůstek tíhové potenciální energie je $\Delta E_p = mgh = mgl/2$ = 500 J.

R2.203 h = 7,2 m, g = 10 m · s^{-2}; v = ?

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 12\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R2.204 m = 1 kg, g = 10 m · s^{-2}, h = 45 m, t_1 = 1 s, t_2 = 2 s, t_3 = 3 s; E_p = ?

$$h_1 = h - \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$E_{p1} = mgh_1 = mg\left(h - \frac{1}{2}gt_1^2\right) = 400\ \mathrm{J}$$

$$E_{p2} = mg\left(h - \frac{1}{2}gt_2^2\right) = 250\ \mathrm{J}$$

$$E_{p3} = mg\left(h - \frac{1}{2}gt_3^2\right) = 0$$

V čase t_3 = 3 s je těleso na zemském povrchu, tj. v nulové výšce.

R2.205 m = 1 kg, h = 45 m, g = 10 m · s^{-2}; grafy $E_k = f(t)$, $E_p = f(t)$.

Vztahy pro kinetickou a potenciální energii vyjádříme jako funkce času. Do vztahu pro kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

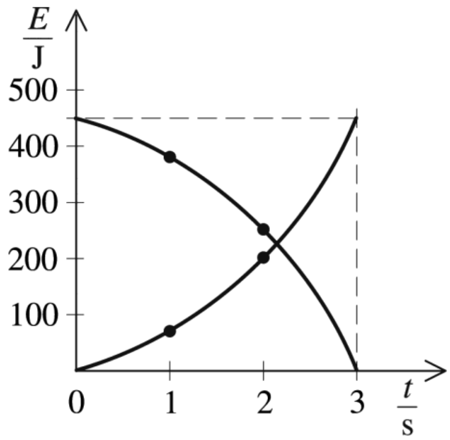
dosadíme rychlost volného pádu $v = gt$ a dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2}mg^2t^2.$$

Do vztahu pro potenciální energii $E_p = mg(h - s)$ dosadíme dráhu volného pádu

$s = \frac{1}{2}gt^2$ a dostaneme $E_p = mg\left(h - \frac{1}{2}gt^2\right)$.

Sestavíme tabulku hodnot E_k a E_p pro řadu hodnot času $t \in \langle 0, 3 \rangle$ v sekundách a příslušné hodnoty vyneseme do grafu (viz obr. R2-205 [2-18]). Graf můžeme sestrojit také pomocí jednoduchého programu na počítači.



Obr. R2-205

R2.206 Z grafu odečteme čas, v němž se obě křivky protínají: $t \approx 2{,}1$ s. Tento čas ověříme dosazením do rovnice

$$mg\left(h - \frac{1}{2}gt^2\right) = \frac{1}{2}mg^2t^2.$$

R2.207 Celková mechanická energie $E = E_p + E_k$. Pro všechny tři časy dostaneme $E = 450$ J. Platí zákon zachování mechanické energie.

R2.208 $m = 400$ kg, $s = 80$ cm $= 0{,}8$ m, $F = 12$ kN $= 12 \cdot 10^3$ N, $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2}; $h =$?

$mgh = Fs$

$$h = \frac{Fs}{mg} = 2{,}4\ \text{m}$$

R2.209 m = 60 t = 60 · 10^3 kg, h_1 = 1 000 m, h_2 = 3 000 m, v_1 = 160 m · s^{-1}, v_2 = 200 m · s^{-1}, g = 10 m · s^{-2}; W = ?

$$W = \Delta E_p + \Delta E_k = mg(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \approx 1{,}6 \cdot 10^9\ \text{J} = 1{,}6\ \text{GJ}$$

R2.210 h = 8 m, m = 0,4 kg, v = 5 m · s^{-1}, g = 10 m · s^{-2}; F = ?

Práce vykonaná odporovou silou se rovná úbytku mechanické energie,

$$W = Fh = mgh - \frac{1}{2}mv^2,$$

velikost odporové síly

$$F = mg - \frac{mv^2}{2h} = 3{,}4\ \text{J}.$$

Při působení odporových sil neplatí zákon zachování mechanické energie, část mechanické energie se přemění v jiné druhy energie, především ve vnitřní energii.

2.4 Gravitační pole

R2.211 $m_1 = m_2$ = 10 g = 0,01 kg, r = 10 cm = 0,1 m, κ = 6,67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}; F_g = ?

$$F_g = \kappa\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-13}\ \text{N}$$

R2.212 F_g = 4 mN = 0,004 N, a) $r_1 = 2r$; F_{g1} = ?, b) $r_2 = r/2$; F_{g2} = ?, c) $r_3 = r/3$; F_{g3} = ?

$$F_g = \kappa\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

a) $F_{g1} = \kappa\frac{m_1 m_2}{4r^2} = \frac{1}{4}F_g = 0{,}001\ \text{N} = 1\ \text{mN}$

b) $F_{g2} = \kappa\frac{m_1 m_2}{r^2}4 = 4F_{g1} = 0{,}016\ \text{N} = 16\ \text{mN}$

c) $F_{g3} = \kappa\frac{m_1 m_2}{r^2}9 = 9F_{g1} = 36\ \text{mN}$

R2.213 Tíhová síla působící na tělesa je mnohem větší než gravitační síla vzájemného přitahování těles.

R2.214 $R_1 = R_2 = 25$ cm = 0,25 m, $m_1 = m_2 = m = 4\,000$ kg, $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}; F_g = ?

$$r = R_1 + R_2 = 0{,}5 \text{ m}$$

$$F_g = \kappa \frac{m^2}{r^2} = 4{,}27 \cdot 10^{-3} \text{ N} = 4{,}27 \text{ mN}$$

R2.215 $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $r = 1{,}5 \cdot 10^8$ km = $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m,

$\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}; F_g = ?

$$F_g = \kappa \frac{M_Z M_\odot}{r^2} = 3{,}6 \cdot 10^{22} \text{ N}$$

Výsledek se shoduje s výsledkem úlohy 2.149, neboť dostředivá síla působící na Zemi je rovna gravitační síle.

R2.216 $R_Z = 6\,370$ km = $6{,}37 \cdot 10^6$ m, $m = 1$ kg, $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}, F_g = 9,8 N; M_Z = ?

Podle Newtonova gravitačního zákona působí Země o hmotnosti M_Z na těleso o hmotnosti m na povrchu Země gravitační silou o velikosti

$$F_g = \kappa \frac{M_Z m}{R_Z^2}.$$

Známe-li poloměr Země R_Z a velikost síly F_g, která působí na těleso o hmotnosti m, snadno určíme hmotnost Země

$$M_Z = \frac{F_g R_Z^2}{\kappa m} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

Průměrnou hustotu Země určíme ze vztahu $\rho = M_Z/V_Z$, kde V_Z je objem Země. Dosadíme-li nyní $M_Z = F_g R_Z^2/\kappa m$, $V_Z = 4\pi R_Z^3/3$, dostaneme po úpravě

$$\rho = \frac{3F_g}{4\pi m \kappa R_Z} = 5{,}5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Protože hustota povrchových vrstev Země je pouze $2{,}7 \cdot 10^3$ kg · m^{-3}, dá se usuzovat na poměrně větší hustotu zemského nitra.

R2.217 $m = 50$ kg, $F_g = 490$ N; K = ?

Intenzita gravitačního pole je definována vztahem K = F_g/m.

Velikost intenzity $K = \dfrac{F_g}{m} = 9{,}8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Intenzita gravitačního pole je číselně i rozměrově rovna velikosti gravitačního zrychlení.

R2.218 K = 9,8 N · kg^{-1}, a) $h = R_Z$; K_1 = ?, b) $h = 2R_Z$; K_2 = ?

$$K = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}$$

$$\text{a) } K_1 = \kappa \frac{M_Z}{(2R_Z)^2} = \frac{1}{4}K = 2{,}45\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$$

$$\text{b) } K_2 = \kappa \frac{M_Z}{(3R_Z)^2} = \frac{1}{9}K = 1{,}09\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$$

R2.219 $K_1 = K/100$; h = ?

$$K = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}$$

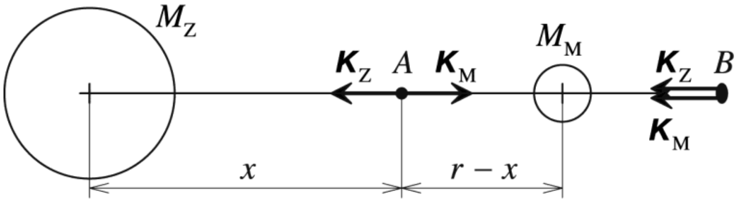
$$K_1 = \kappa \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} = \frac{K}{100} \Rightarrow (R_Z + h)^2 = 100 R_Z^2$$

$$R_Z + h = 10 R_Z$$

$$h = 9 R_Z$$

R2.220 $M_M = M_Z/81$, $r = 60R_Z$, K = 0; x = ?

Označme x vzdálenost bodu A, v němž je intenzita nulová, od středu Země (viz obr. R2-220).



Obr. R2-220

Vzdálenost středu Měsíce od tohoto bodu je $r - x$. Intenzity gravitačního pole Země a Měsíce jsou stejně velké a mají navzájem opačný směr, jejich výslednice je tedy nulová. Velikosti intenzit jsou:

$$K_Z = \kappa \frac{M_Z}{x^2}$$

$$K_M = \kappa \frac{M_M}{(r - x)^2} = \kappa \frac{M_Z}{81(r - x)^2}$$

Odtud: $81(r - x)^2 = x^2$, pro x po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $80x^2 - 162rx + 81r^2 = 0$, jejímiž kořeny jsou:

$$x_1 = \frac{9}{8}r = 67{,}5R_Z$$

$$x_2 = \frac{9}{10}r = 54R_Z$$

Intenzity gravitačního pole Země a Měsíce se vzájemně ruší v bodě *A*, který je ve vzdálenosti $54R_Z$ od středu Země. Ve vzdálenosti $67{,}5R_Z$ od Země, v bodě *B*, jsou intenzity obou těles rovněž stejně velké, ale mají stejný směr. Ve větší vzdálenosti převládá gravitační pole Země nad gravitačním polem Měsíce.

R2.221 Podle definice $K = F_g/m$, podle 2. pohybového zákona $a_g = F_g/m$, tedy $K = a_g$.

R2.222 $M_M = 7{,}4 \cdot 10^{22}$ kg, $R_M = 1{,}7 \cdot 10^6$ m, $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$; $a_g = ?$

$$a_g = \kappa \frac{M_M}{R_M^2} = 1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

R2.223 $R_Z = 6\,370$ km $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m, $a_g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$; $M_Z = ?$

$$a_g = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} \Rightarrow M_Z = a_g \frac{R_Z^2}{\kappa} = 5{,}96 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \approx 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$$

R2.224 $a_g = a_{g0}/2$, $R_Z = 6\,370$ km; $h = ?$

$$a_{g0} = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}$$

$$a_g = \kappa \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} = \frac{a_{g0}}{2} = \kappa \frac{M_Z}{2R_Z^2} \Rightarrow 2R_Z^2 = (R_Z + h)^2, R_Z\sqrt{2} = R_Z + h$$

a odtud

$$h = R_Z(\sqrt{2} - 1) \approx 2\,640\ \mathrm{km}.$$

R2.225 $R = R_Z/2$, $a_g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, a) $M = M_Z$; $a_{g1} = ?$, b) $\rho = \rho_Z$; $a_{g2} = ?$

$$a_g = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}$$

a) $a_{g1} = \kappa \dfrac{M}{R^2} = \kappa \dfrac{M_Z}{R_Z^2} 4 = 4a_g = 39{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

b) Při polovičním poloměru by objem Země byl osmkrát menší, takže při stejné hustotě by také hmotnost Země byla osmkrát menší, $M = M_Z/8$ a gravitační zrychlení

$$a_{g2} = \kappa \frac{M_Z}{8} \frac{4}{R_Z^2} = \frac{a_g}{2} = 4{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

R2.226 Tíhové zrychlení je nejmenší na rovníku, s rostoucí zeměpisnou šířkou se zvětšuje a na zemských pólech je největší.

R2.227 Největší jsou na zemských pólech, nejmenší na rovníku.

R2.228 Na zemských pólech, kde nepůsobí setrvačná odstředivá síla.

R2.229 Na zemských pólech a na rovníku.

R2.230 m = 100 kg, a) na pólu, b) na rovníku; F_G = ?

a) Na pólu je velikost tíhového zrychlení $g = 9{,}83\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $F_G = mg = 983$ N.

b) Na rovníku je velikost tíhového zrychlení $g = 9{,}78\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $F_G = mg = 978$ N.

R2.231 $v_0 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, a) t = 1 s; v = ?, b) t = 1 s; h = ?, c) h_1 = ?

a) $v = v_0 - gt = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

b) $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 15\ \mathrm{m}$

c) V nejvyšším bodě trajektorie je rychlost $v = 0$, odtud doba výstupu $t_1 = v_0/g$ a výška výstupu

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = 20\ \mathrm{m}.$$

R2.232 h = 5 m, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; v_0 = ?

Doba výstupu $t_1 = v_0/g$, dosazením do vztahu pro výšku výstupu

$$h = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

dostaneme po úpravě

$$v_0 = \sqrt{2gh} = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

R2.233 h = 20 m, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; a) v_0 = ?, b) $g_M = g/6$, h_M = ?

a) $v_0 = \sqrt{2gh} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

b) $h_M = \frac{v_0^2}{2g_M} = \frac{6v_0^2}{2g} = 6h = 120\ \mathrm{m}$

R2.234 h_0 = 20 m, $v_1 = v_0/2$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; h_1 = ?

Nejprve určíme rychlost dopadu míče padajícího z výšky h_0. Označíme-li dobu pádu t_0, je rychlost dopadu $v_0 = gt_0$. Odtud doba pádu $t_0 = v_0/g$. Po dosazení doby t_0 do vztahu pro výšku

$$h_0 = \frac{1}{2}gt_0^2$$

dostáváme $h_0 = v_0^2/2g$ a odtud rychlost dopadu

$$v_0 = \sqrt{2gh_0} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Víme, že pro rychlost odrazu platí $v_1 = v_0/2 = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, což je současně velikost počáteční rychlosti míče vrženého směrem svislým vzhůru.

Pro svislý vrh vzhůru s počáteční rychlostí v_1 platí vztahy

$$v = v_1 - gt\,, \quad h = v_1 t - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

kde v je okamžitá rychlost a h okamžitá výška výstupu v čase t. Máme-li určit výšku h_1, do které míč vystoupil, stanovíme nejprve dobu jeho výstupu t_1. Poněvadž ve výšce h_1 je rychlost míče $v = 0$, platí (po dosazení do vztahu pro okamžitou rychlost) $v_1 - gt_1 = 0$, odtud doba výstupu $t_1 = v_1/g$. Dosadíme-li tuto dobu do vztahu pro výšku výstupu, dostáváme

$$h_1 = v_1 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{v_1^2}{2g}.$$

Pro rychlost $v_1 = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ je $h_1 = 5$ m.

Chceme-li určit výšku výstupu h_1 pomocí dané výšky h_0, dosadíme rychlost

$$v_1 = \frac{v_0}{2} = \frac{\sqrt{2hg_0}}{2}$$

do vztahu $h_1 = \dfrac{v_1^2}{2g}$ a máme $h_1 = \dfrac{h_0}{4}$.

Pro danou výšku $h_0 = 20$ m je $h_1 = 5$ m.

R2.235 $h = 5$ m, $h_1 = 2$ m, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $v = ?$, $v_1 = ?$

$$v = \sqrt{2gh} = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

a dále

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = 6{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

R2.236 t = 4 s, g = 10 m · s^{-2}; h = ?

Doba výstupu je rovna polovině celkové doby, $t_1 = t/2 = 2$ s; $h = gt_1^2/2 = 20$ m.

R2.237 h = 90 m, v_0 = 15 m · s^{-1}, g = 10 m · s^{-2}; t = ?, v = ?

Platí $h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$;

pro čas t dostáváme kvadratickou rovnici

$$\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t - h = 0,$$

jejímiž kořeny jsou t_1 = 3 s, t_2 = –6 s. Záporný kořen zde nemá smysl, doba pádu kamene je tedy t = 3 s.

Velikost rychlosti dopadu je $v = v_0 + gt = 45$ m · s^{-1}.

R2.238 h = 45 m, v_x = 10 m · s^{-1}, g = 10 m · s^{-2}, t_1 = 1 s, t_2 = 2 s, t_3 = 3 s;

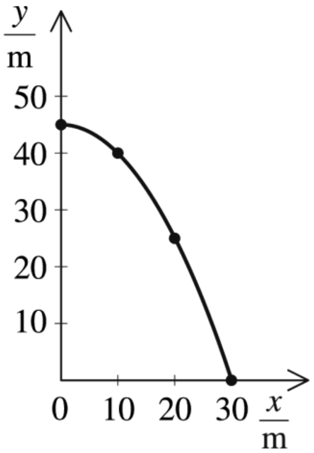
x_1 = ?, y_1 = ?, x_2 = ?, y_2 = ?, x_3 = ?, y_3 = ?

$$x_1 = v_x t_1 = 10\ \text{m}, y_1 = h - \frac{1}{2}gt_1^2 = 40\ \text{m},$$

$$x_2 = v_x t_2 = 20\ \text{m}, y_2 = h - \frac{1}{2}gt_2^2 = 25\ \text{m}$$

$$x_3 = v_x t_3 = 30\ \text{m}, y_3 = h - \frac{1}{2}gt_3^2 = 0\ \text{m}.$$

Trajektorie míče je nakreslena na obr. R2-238.



Obr. R2-238

R2.239 v_x = 10 m · s^{-1}, g = 10 m · s^{-2}, t_1 = 1 s, t_2 = 2 s, t_3 = 3 s; v_1 = ?, v_2 = ?, v_3 = ?

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\ ,$$

v_x = konst., $v_y = gt$. Po dosazení za čas a výpočtu celkové rychlosti je

$v_1 = 14\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 22\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_3 = 32\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

R2.240 $h = 20$ m, $v_0 = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; a) t_d = ?, d = ?, b) v_d = ?

a) Souřadnice polohy vodorovně vrženého tělesa z výšky h v závislosti na čase t jsou

$$x = v_0 t, \quad y = h - \frac{1}{2} g t^2,$$

souřadnice okamžité rychlosti v závislosti na čase t

$v_x = v_0$, $v_y = gt$.

V okamžiku dopadu míčku na vodorovnou rovinu, tj. za dobu t_d od počátku pohybu, jsou souřadnice polohy $x = d$, $y = 0$, tedy platí

$$h - \frac{1}{2} g t_\mathrm{d}^2 = 0.$$

Odtud doba

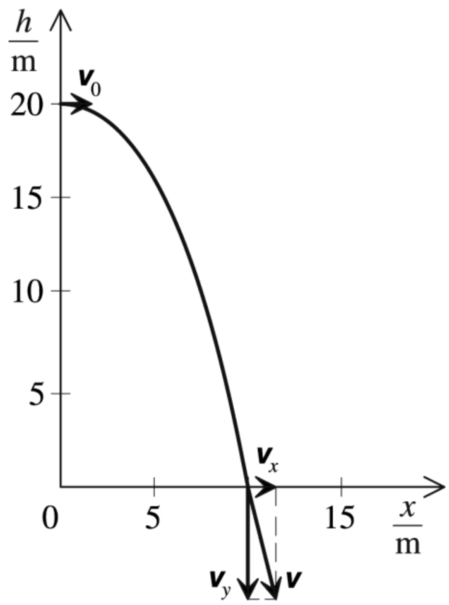
$$t_\mathrm{d} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\ \mathrm{s}$$

a vzdálenost místa dopadu míčku od domu

$$d = v_0 t_\mathrm{d} = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 10\ \mathrm{m}.$$

b) Při dopadu míčku na vodorovnou rovinu jsou souřadnice okamžité rychlosti $v_x = v_0$, $v_y = g t_\mathrm{d}$ a velikost výsledné rychlosti podle obr. R2-240 [2-19]

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (g t_\mathrm{d})^2} = 21\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$



Obr. R2-240

R2.241 $t = 3$ s, $d = 15$ m, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $h = ?$, $v_0 = ?$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = 45\ \mathrm{m}$$

$$v_0 = \frac{d}{t} = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R2.242 $h = 80$ m, $m = 10\ \mathrm{g} = 0{,}01$ kg, $v_0 = 30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; a) $t = ?$, $d = ?$, b) $E_{k0} = ?$, $E_{p0} = ?$, c) $E = ?$

a) $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 4\ \mathrm{s},\ d = v_0 t = 120\ \mathrm{m}$

b) $E_{k0} = \dfrac{1}{2}mv_0^2 = 4{,}5\ \mathrm{J},\ E_{p0} = mgh = 8\ \mathrm{J}$

c) $E = E_k + E_p = 12{,}5\ \mathrm{J}$

R2.243 a) ve vrcholu paraboly, kterou míč opisuje, b) v místě výkopu a v místě dopadu na zem.

R2.244 $\alpha = 45°$, $v_0 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; a) $h = ?$, b) $d = ?$

Vyjdeme z rovnic

$$v_x = v_0 \cos\alpha,\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$x = v_0 t \cos\alpha,\ y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

a) V nejvyšším bodě trajektorie je $v_y = 0$, odtud oba výstupu

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g};$$

dosazením tohoto času do vztahu pro souřadnici y dostaneme výšku výstupu

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 10\ \mathrm{m}.$$

b) V okamžiku dopadu na zem je $y = 0$, odtud $t_1 = 0$ (počátek vrhu),

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Dosazením času t_2 do vztahu pro souřadnici x dostaneme délku vrhu

$$d = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

a po úpravě

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 40\ \mathrm{m}.$$

R2.245 $h = d$; $\alpha = ?$

V předešlém příkladu jsme odvodili pro výšku vrhu vztah:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \text{ a pro délku vrhu vztah :}$$

$$d = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

Porovnáním obou vztahů, tj. dosazením do vztahu $h = d$, dostaneme tg $\alpha = 4$, odtud $\alpha \approx 76°$. Můžeme si všimnout, že tvar trajektorie nezávisí ani na velikosti tíhového zrychlení, ani na velikosti počáteční rychlosti.

R2.246 $h = 630$ km $= 6{,}3 \cdot 10^5$ m, $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}, $R_Z = 6\,370$ km $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $v = ?$, $T = ?$

Dostředivá síla je tvořena gravitační silou, $F_d = F_g$, tedy:

$$\frac{mv^2}{R_Z + h} = \frac{\kappa M_Z m}{(R_Z + h)^2}$$

a odtud rychlost

$$v = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z + h}} = 7{,}56 \cdot 10^3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 7{,}56\,\mathrm{km \cdot s^{-1}},$$

a oběžná doba

$$T = \frac{2\pi(R_Z + h)}{v} \approx 5\,820\ \mathrm{s} = 97\ \mathrm{min} = 1\ \mathrm{h}\ 37\ \mathrm{min}.$$

R2.247 r = 384 000 km = 3,84 · 10^8 m, M_Z = 6 · 10^{24} kg, κ = 6,67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}; v = ?

$$v = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{r}} = 1\,020\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx 1\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

R2.248 $h_1 = R_Z$, $h_2 = 2R_Z$, M_Z = 6 · 10^{24} kg, R_Z = 6 370 km = 6,37 · 10^6 m, κ = 6,67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}; v_1 = ?, v_2 = ?

$$r_1 = R_Z + h_1 = 2R_Z,\ v_1 = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{r_1}} = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{2R_Z}} = 5\,600\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 5{,}6\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

$$r_2 = R_Z + h_2 = 3R_Z,\ v_2 = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{r_2}} = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{3R_Z}} = 4\,600\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4{,}6\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

R2.249 $v_h = \frac{1}{2}v_0;\ h = ?$

$$v_0 = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z}},\ v_h = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z + h}}$$

$$v_h = \frac{1}{2}v_0,\ \text{tedy}:$$

$$\sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z + h}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z}};$$

$$R_Z + h = 4R_Z,\ \text{výška}\ h = 3R_Z.$$

R2.250 a) $r_1 = 2r$, b) $m_1 = 2m$; v = ?

a) $v = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{2r}} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$; zmenšila by se $\sqrt{2}$krát,

b) nezměnila by se, velikost kruhové rychlosti nezávisí na hmotnosti družice, pokud tuto hmotnost můžeme zanedbat vzhledem k hmotnosti Země.

R2.251 Doba oběhu stacionární družice je stejná jako perioda Země T = 24 h = 86 400 s. Označíme-li h výšku družice nad povrchem Země, pak za dobu T družice opíše dráhu $2\pi(R_Z + h)$ a její rychlost bude

$$v = \frac{2\pi(R_Z + h)}{T}.$$

Rychlost družice lze však také vyjádřit jako kruhovou rychlost

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z + h}}.$$

Porovnáme-li pravé strany obou vztahů, dostáváme rovnici

$$\frac{2\pi(R_Z + h)}{T} = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z + h}},$$

ze které postupnými úpravami vyjádříme výšku

$$h = \sqrt[3]{\frac{\kappa M_Z T^2}{4\pi^2}} - R_Z.$$

Pro známé hodnoty M_Z, R_Z a T je h = 35 900 km. Porovnáme-li tuto hodnotu s poloměrem Země, dostaneme $h = 5{,}6R_Z$.

R2.252 r = 23 500 km = 23,5 · 10^6 m, v = 1,35 km · s^{-1} = 1,35 · 10^3 m · s^{-1}, κ = 6,67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}; M = ?

Gravitační zrychlení je rovno dostředivému zrychlení, $a_g = a_d$, tedy

$$\kappa \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow M = \frac{v^2 r}{\kappa} = 6{,}42 \cdot 10^{23}\ \text{kg}.$$

R2.253 v_k = 1 km · s^{-1}; v_p = ?

$$v_p = v_k\sqrt{2} \approx 1{,}4\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$$

R2.254 a) $M = 2M_Z$, b) $R = 2R_Z$; v_{p1} = ?, v_{p2} = ?

a) $v_p = \sqrt{\dfrac{2\kappa M_Z}{R_Z}}$,

$v_{p1} = \sqrt{\dfrac{2\kappa 2 M_Z}{R_Z}} = v_p\sqrt{2}$, zvětšila by se $\sqrt{2}$krát,

b) $v_{p2} = \sqrt{\dfrac{2\kappa M_Z}{2R_Z}} = \dfrac{v_p}{\sqrt{2}}$, zmenšila by se $\sqrt{2}$krát.

R2.255 M_Z = 5,98 · 10^{24} kg, κ = 6,67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}; a) pro Mars v_p = ?, b) pro Jupiter v_p = ?

a) Hmotnost Marsu $M = 0{,}107M_Z$ = 6,40 · 10^{23} kg, poloměr R = 3,40 · 10^6 m,

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2\kappa M}{R}} = 5 \cdot 10^3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 5\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

b) Hmotnost Jupiteru $M = 318M_\mathrm{Z} = 1{,}90 \cdot 10^{27}$ kg, rovníkový poloměr $R =$ $7{,}14 \cdot 10^7$ m, úniková rychlost $v_\mathrm{p} \approx 6 \cdot 10^4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 60\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

R2.256 $v_\mathrm{p} = 11{,}2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 11{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, $R_\mathrm{Z} = 6$ 370 km $= 6{,}37 \cdot 10^6$m; $M_\mathrm{Z} = ?$

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z}} \Rightarrow M_Z = \frac{v_\mathrm{p}^2 R_Z^2}{2\kappa} = 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}.$$

R2.257 a) v periheliu, b) v aféliu.

R2.258 $T_1 = 1{,}9$ roku; $a_1 = ?$

Střední vzdálenost od Slunce vypočteme pomocí třetího Keplerova zákona. Jako srovnávací planetu použijeme Zemi, pro kterou $a_2 = 1$ AU, $T_2 = 1$ rok. Platí

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \text{ tedy pro } a_1 \text{ vypočteme :}$$

$$a_1 = a_2 \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_2^2}} = 1{,}5\,\mathrm{AU}$$

R2.259 $a_1 = 30$ AU; $T_1 = ?$

Oběžnou dobu vypočteme pomocí třetího Keplerova zákona. Jako srovnávací planetu použijeme Zemi, pro kterou $a_2 = 1$ AU, $T_2 = 1$ rok. Platí

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \text{ odtud } T_1 = T_2 \sqrt{\frac{a_1^3}{a_2^3}} = 164 \text{ roky.}$$

R2.260 $r_1 = 0{,}308$ AU, $r_2 = 0{,}466$ AU, $T_\mathrm{Z} = 1$ rok, $a_\mathrm{Z} = 1$ AU; $T = ?$

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = 0{,}387 \text{ AU a dále}$$

$$T = T_Z \sqrt{\frac{a^3}{a_Z^3}} = 0{,}24 \text{ roku} = 88 \text{ dní.}$$

2.5 Mechanika tuhého tělesa

R2.261 $F = 20$ N, $r = 0{,}4$ m; $M = ?$

$M = Fr = 8\ \mathrm{N \cdot m}$

R2.262 a) síla F_4, neboť rameno této síly je největší (polovina úhlopříčky čtverce),

b) síla F_1, jejíž rameno je nulové,

c) síly F_2 a F_3, které mají stejné rameno (polovina strany čtverce).

R2.263 a = 2 m, F_1 = 40 N, F_2 = 50 N, F_3 = 30 N; a) M_1 = ?, M_2 = ?, M_3 = ?, b) M = ?, c) F = ?

a) $M_1 = F_1a = 80\ \mathrm{N \cdot m}$, $M_2 = F_2a = 100\ \mathrm{N \cdot m}$, $M_3 = 0$ (rameno je nulové),

b) $M = M_1 + M_2 + M_3 = 180\ \mathrm{N \cdot m}$ (směřuje kolmo za nákresnu),

c) $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 64\ \mathrm{N}$.

R2.264 $l_1 : l_2 = 1 : 10$, m_2 = 5 kg; m_1 = ?

Vyvážení předmětu je založeno na rovnosti momentů tíhových sil. Platí

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2,$$

tedy

$$m_1 = m_2 \frac{l_2}{l_1} = 10 m_2 = 50\ \mathrm{kg}.$$

R2.265 a) Otáčivé účinky sil se ruší, jsou-li momenty sil stejně velké a mají navzájem opačný směr. To je v případech B a C.

b) Dvojici sil tvoří dvě stejně velké rovnoběžné síly, které mají navzájem opačný směr. To je v případě D.

c) Celkový moment sil je největší v případě D, momenty obou sil mají stejný směr.

R2.266 a = 0,4 m, $F_1 = F_1'$ = 40 N; a) M = ?, b) $F_2 = F_2'$ = ?

a) $D = F_1 a = 16\ \mathrm{N \cdot m}$

b) $F_1 a = F_2 a\sqrt{2}$, $F_2 = \dfrac{F_1}{\sqrt{2}} = 28\ \mathrm{N}$

R2.267 m_1 = 2,20 kg, m_2 = 1,75 kg; a) m = ?, b) l_1/l_2= ?

a) Označme délku levého ramena l_1, délku pravého ramena l_2. Rovnice rovnováhy jsou

$ml_1g = m_1l_2g$, $ml_2g = m_2l_1g$. Násobením levých a pravých stran těchto rovnic dostaneme

$$m^2l_1l_2 = m_1m_2l_1l_2$$

a odtud

$$m = \sqrt{m_1m_2} = 1{,}96\ \mathrm{kg}.$$

b) Dělením levých a pravých stran rovnic pro rovnováhu dostaneme

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{l_2}{l_1} \text{ a odtud } \frac{l_1}{l_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = 1{,}12.$$

R2.268 l_1 = 15 cm, l_2 = 13 cm, m = 150 g; a) m_1 = ?, m_2 = ?

a) $ml_1g = m_1l_2g \Rightarrow m_1 = m\dfrac{l_1}{l_2} = 173\ \mathrm{g}$

b) $ml_2g = m_2l_1g \Rightarrow m_2 = m\dfrac{l_2}{l_1} = 130\ \mathrm{g}$

R2.269 $F = F'$ = 30 N, a = 0,6 m; D = ?

a) $D = Fa = 18\ \mathrm{N\cdot m}$

b) $D = F\dfrac{a}{2} = 9\ \mathrm{N\cdot m}$

c) $D = Fa\sqrt{2} = 25\ \mathrm{N\cdot m}$ (nezávisí)

R2.270 l = 5 m, m = 95 kg, d_1 = 2 m; l_1 = ?

$F_1d_1 = F_2d_2$; $d_2 = l - d_1 - l_1$; $F_1 = F_2 \Rightarrow d_1 = d_2$, tedy $d_1 = l - d_1 - l_1$ a odtud

$l_1 = l - 2d_1 = 1$ m.

R2.271 F_1 = 70 N, F_2 = 40 N, d = 2,2 m; F = ?, d_1 = ?

a) Pro síly stejného směru je velikost výslednice $F = F_1 + F_2 = 110$ N, vzdálenost působiště výslednice od působiště větší síly je

$$d_1 = \frac{F_2d}{F_1 + F_2} = 0{,}8\ \mathrm{m}.$$

Působiště je na spojnici působišť obou sil blíže k větší síle.

b) Pro síly opačného směru je velikost výslednice $F = F_1 - F_2 = 30$ N, vzdálenost působiště výslednice od působiště větší síly je

$$d_1 = \frac{F_2 d}{F_1 - F_2} = 2{,}9 \text{ m.}$$

Působiště je na prodloužené spojnici působišť obou sil na straně větší síly.

R2.272 l = 20 cm, m_1 = 0,2 kg, d_1 = 8 cm, m_2 = 0,4 kg, d_2 = 6 cm, m_3 = 0,6 kg, d_3 = 2 cm, m_4 = 0,2 kg, d_4 = 4 cm, d = l/2 = 10 cm; m = ?

Z velikostí momentů sil zjistíme, že závaží je třeba zavěsit na pravém konci páky. Při rovnováze na páce platí vztah

$$m_1gd_1 + m_2gd_2 = m_3gd_3 + m_4gd_4 + mgd.$$

Odtud hledaná hmotnost

$$m = \frac{1}{d}\left(m_1d_1 + m_2d_2 - m_3d_3 - m_4d_4\right) = 0{,}2 \text{ kg.}$$

R2.273 F_1 = 50 N, F_2 = 80 N, F_3 = 30 N, a = 0,6 m, b = 0,3 m; F =?, d =?

Síly F_2 a F_3 mají stejný směr, síla F_1 má opačný směr. Velikost výslednice je $F = F_2 + F_3 - F_1$, výslednice má stejný směr jako síly F_2 a F_3. Pro dané hodnoty je F = 60 N. Polohu působiště výslednice najdeme pomocí momentů sil. Momenty všech sil budeme vztahovat k ose procházející bodem A. Vektorový součet momentů jednotlivých sil vzhledem k ose otáčení musí být rovný momentu výslednice vzhledem k téže ose. Označíme-li d vzdálenost působiště výslednice od bodu A a uvážíme-li, že moment síly F_1 vzhledem k ose procházející bodem A je nulový, momenty sil F_2 a F_3 i moment výslednice F mají stejný směr, platí

$$F_2a + F_3(a + b) = Fd$$

a odtud

$$d = \frac{F_2a + F_3(a+b)}{F} \approx 1{,}2 \text{ m.}$$

Výslednice sil má velikost 60 N, má stejný směr jako síly F_2 a F_3 a její působiště je ve vzdálenosti přibližně 1,2 m vpravo od bodu A.

R2.274 F_1 = 400 N, F_2 = 200 N, F_3 = 500 N, F_4 = 300 N, a = 0,6 m, b = 0,3 m, c = 0,6 m; F = ?, d = ?

Velikost výslednice $F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4$ = 400 N, výslednice má stejný směr jako síly F_1 a F_3. Pro určení polohy působiště výslednice sil budeme momenty sil vztahovat k ose procházející působištěm síly F_1:

$$-F_2a + F_3(a+b) - F_4(a+b+c) = Fd$$

Odtud

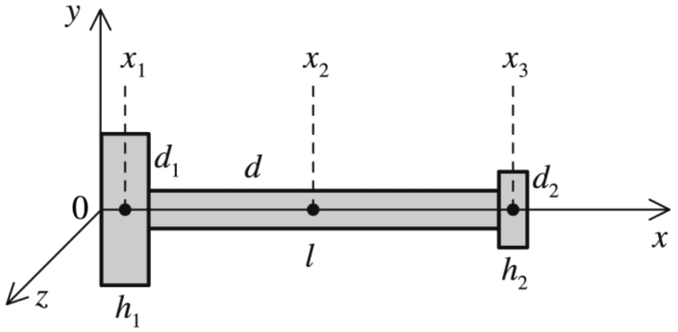
$$d = \frac{-F_2a + F_3(a+b) - F_4(a+b+c)}{F} = -0{,}3\,\text{m}.$$

Záporné znaménko znamená, že působiště je vlevo od působiště síly F_1.

R2.275 l = 30 cm, d = 1 cm, d_1 = 6 cm, h_1 = 4 cm, d_2 = 3 cm, h_2 = 2 cm; x_T = ?

Zvolíme souřadnicovou soustavu podle obr. R2-275. Těžiště je na ose souměrnosti, tedy na ose *x*. Souřadnici těžiště vypočteme podle vztahu

$$x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$



Obr. R2-275

Souřadnice těžišť jednotlivých útvarů jsou

$$x_1 = \frac{h_1}{2} = 2\,\text{cm},\ x_2 = h_1 + \frac{l}{2} = 19\,\text{cm},\ x_3 = h_1 + l + \frac{h_2}{2} = 35\,\text{cm}.$$

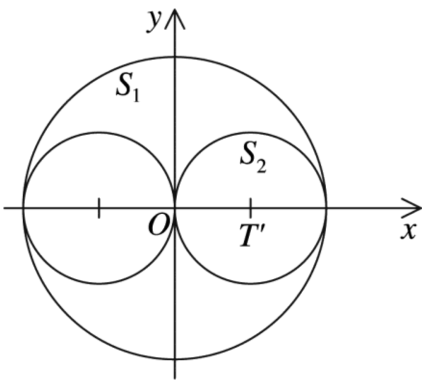
Hustota ρ všech útvarů je stejná, jejich hmotnosti jsou

$$m_1 = \frac{\pi d_1^2 h_1}{4}\rho,\ m_2 = \frac{\pi d^2 l}{4}\rho,\ m_3 = \frac{\pi d_2^2 h_2}{4}\rho.$$

Po dosazení souřadnic a hmotností do vztahu pro souřadnici těžiště a po jednoduché úpravě dostaneme

$$x_T = \frac{d_1^2h_1x_1 + d^2lx_2 + d_2^2h_2x_3}{d_1^2h_1 + d^2l + d_2^2h_2} = 7{,}75\,\text{cm}.$$

R2.276 Zavedeme souřadnicový systém s počátkem *O* ve středu desky o poloměru *R* a osu *x* zvolíme tak, aby tvořila osu symetrie (obr. R2-276 [2-29]). Útvar si představíme rozdělený na dva útvary: na desku s dvěma otvory, jejíž těžiště je vzhledem k symetrii v bodě *O*, a na desku o poloměru *R*/2 s těžištěm v bodě *T'*.



Obr. R2-276

Souřadnice těžišť útvarů jsou $x_1 = 0$, $x_2 = R/2$. Označíme-li d tloušťku desky a ρ hustotu materiálu, z něhož je zhotovena, je hmotnost desky se dvěma otvory $m_1 = S_1 d\rho$, hmotnost druhé desky $m_2 = S_2 d\rho$. Obsah plochy menší desky je $S_2 = \pi R^2/4$, obsah desky se dvěma otvory je $S_1 = \pi R^2 - 2S_2 = \pi R^2/2$. Po dosazení za obsahy ploch jsou hmotnosti $m_1 = \pi R^2 d\rho/2$ a $m_2 = \pi R^2 d\rho/4$.

Souřadnici těžiště útvaru vypočteme ze vztahu

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Po dosazení za hmotnosti a souřadnice dostáváme $x_T = R/6$.

R2.277 Zvolíme souřadnicový systém s počátkem O ve středu koule o poloměru R (viz obr. R2-277 [2-29]). Osa x je osou symetrie, těžiště tedy leží na této ose. Útvar si představíme rozdělený na kouli se dvěma symetrickými otvory, jejíž těžiště je v počátku souřadnic, tj. $x_1 = 0$, a na kouli o poloměru $R/2$ s těžištěm v jejím středu, tedy $x_2 = R/2$. Hmotnost koule se dvěma otvory je

$$m_1 = V_1\rho = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3 - 2\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{8}\right) = \pi R^3\rho,$$

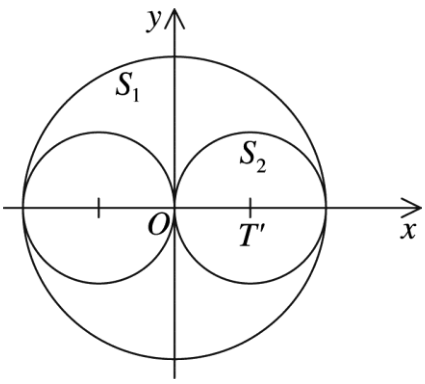
hmotnost koule o poloměru R/2 je

$$m_2 = V_2\rho = \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{8}\rho = \frac{\pi R^3}{6}\rho.$$

Dosadíme-li hmotnosti a souřadnice do vztahu pro těžiště

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

dostaneme souřadnici těžiště $x_T = R/14$.



Obr. R2-277

R2.278 Útvar rozdělíme na tři trojúhelníky. Zvolíme-li počátek souřadnic ve středu čtverce a osu *x* jako osu symetrie, jsou souřadnice těžišť trojúhelníků x_1 = 0, $x_2 = a/3$, $x_3 = 0$, hmotnosti *m* všech tří trojúhelníků jsou stejné; souřadnice těžiště útvaru je

$$x_T = \frac{mx_1 + mx_2 + mx_3}{3m} = \frac{a}{9}.$$

R2.279 $a = 1{,}4$ m, $m = 20$ kg, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $W = ?$

$$W = mg\frac{a}{2} = 140\ \mathrm{J}$$

R2.280 Větší stabilitu má železná krychle, protože má větší hmotnost.

R2.281 $m = 88$ kg, $a = 0{,}2$ m, $h = 0{,}8$ m, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $W = ?$

$$\text{a)}\, W = mg\left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{4}} - \frac{h}{2}\right) = 11\ \mathrm{J}$$

$$\text{b)}\, W = mg\left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{4}} - \frac{a}{2}\right) = 270\ \mathrm{J}$$

R2.282 $m = 5$ kg, $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $l = 4$ m, $d = 0{,}6$ m; $F = ?$

V bodě závěsu působí tíhová síla *m*g. Tuto sílu rozložíme na složky F_1 a F_2, které mají vzhledem k symetrii stejnou velikost *F*. Podle obr. R2-282 [2-32] je velikost síly

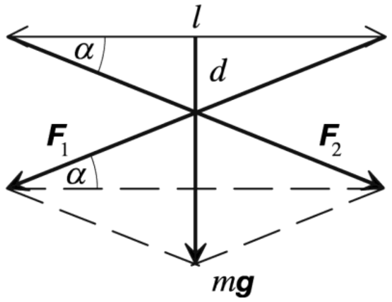
$$F = \frac{mg}{2\sin\alpha}.$$

Pro sinus úhlu *α* platí

$$\sin\alpha = \frac{d}{\sqrt{\frac{l^2}{4}+d^2}}.$$

Velikost síly je tedy po dosazení a úpravě

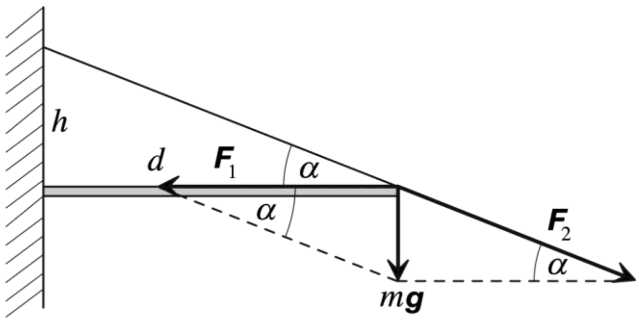
$$F = \frac{mg}{2}\sqrt{\frac{l^2}{4d^2}+1} = 85\ \text{N}.$$



Obr. R2-282

R2.283 m = 3 kg, d = 2,2 m, h = 1,2 m, g = 9,8 m · s^{-2}; F_1 = ?, F_2 = ?

Tíhovou sílu rozložíme na dvě složky podle obr. R2-283.



Obr. R2-283

$$F_1 = \frac{mg}{\operatorname{tg}\alpha} = mg\frac{d}{h} = 54\ \text{N}$$

$$F_2 = \frac{mg}{\sin\alpha} = \frac{mg\sqrt{h^2+d^2}}{h} = 61\ \text{N}$$

R2.284 m = 50 kg, g = 9,8 m · s^{-2}; F_1 = ?, F_2 = ?

Tíhovou sílu rozložíme na dvě složky podle obr. R2-284a, b, c.

a) $F_1 = \dfrac{mg}{\mathrm{tg}\,30^\circ} = mg\sqrt{3} = 850\ \mathrm{N}$

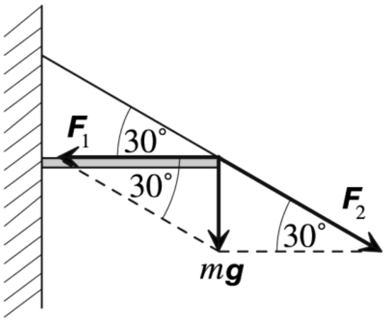
$F_2 = \dfrac{mg}{\sin 30^\circ} = 2mg = 980\ \mathrm{N}$

b) $F_1 = \dfrac{mg}{\sin 30^\circ} = 2mg = 980\ \mathrm{N}$

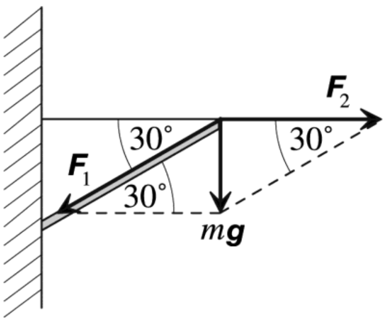
$F_2 = \dfrac{mg}{\mathrm{tg}\,30^\circ} = mg\sqrt{3} = 850\ \mathrm{N}$

c) $F_1 = mg\cos 60^\circ = \dfrac{mg}{2} = 240\ \mathrm{N}$

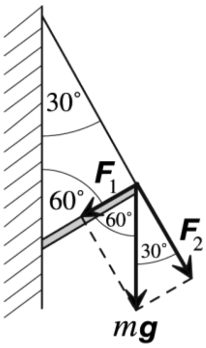
$F_2 = mg\cos 30^\circ = mg\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 420\ \mathrm{N}$



Obr. R2-284a



Obr. R2-284b



Obr.R2-284c

R2.285 $a = 0{,}2$ m, $m = 0{,}1$ kg; $J = ?$

a) Kuliček je celkem 8, každá z nich je ve vzdálenosti r od osy o_1:

$$r = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Moment setrvačnosti soustavy vzhledem k této ose je

$J = 8mr^2 = 4ma^2 = 0{,}016\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.

b) Dvě kuličky jsou na ose o_2, jejich moment setrvačnosti vzhledem k této ose je nulový. Čtyři kuličky jsou ve vzdálenosti a od osy, dvě jsou ve vzdálenosti $a\sqrt{2}$ od osy. Celkový moment setrvačnosti soustavy je

$J = 4ma^2 + 4ma^2 = 8\ ma^2 = 0{,}032\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.

R2.286 $R = 3$ m, $h = 52$ mm $= 0{,}052$ m, $\rho = 820\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $n = 10$, $m_1 = 70$ kg, $d = 80$ cm $= 0{,}8$ m; a) $J_1 = ?$, b) $J = ?$

$$\text{a) } J_1 = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}\pi R^2 h\rho R^2 = \frac{1}{2}\pi R^4 h\rho = 5\,400\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$\text{b) } J_2 = n(R-d)^2 m_1 = 3\,400\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$J = J_1 + J_2 = 8\,800\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

R2.287 $m = 2$ kg, $R = 0{,}2$ m, $f = 50$ Hz; a) $E_k = ?$, b) $f_1 = 30$ Hz, $W = ?$

$$\text{a) } E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mR^2 4\pi^2 f^2 = 3\,900\ \mathrm{J} = 3{,}9\ \mathrm{kJ}$$

$$\text{b) } W = \Delta E_k = E_1 - E_{k1} = \frac{1}{2}mR^2 4\pi^2\left(f^2 - f_1^2\right) = 2\,500\ \mathrm{J} = 2{,}5\ \mathrm{kJ}$$

R2.288 $\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6$ m, $M_Z = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg,

$v = 29{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 29{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; a) $J = ?$, b) $E_{k1} = ?$, c) $E_{k2} = ?$

$$\text{a) } J = \frac{2}{5}M_Z R_Z^2 = 9{,}71 \cdot 10^{37}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$\text{b) } E_{k1} = \frac{1}{2}J\omega^2 = 2{,}58 \cdot 10^{29}\ \mathrm{J}$$

$$\text{c) } E_{k2} = \frac{1}{2}M_Z v^2 = 2{,}66 \cdot 10^{33}\ \mathrm{J}$$

R2.289 $d = 7{,}62$ mm $= 7{,}62 \cdot 10^{-3}$ m, $m = 10$ g $= 0{,}01$ kg, $v = 800\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $f = 500$ Hz, $J = 5{,}9 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$; a) $E_{k1} = ?$, b) $E_{k2} = ?$

a) $E_{k1} = \frac{1}{2}mv^2 = 3\,200\ \mathrm{J} = 3{,}2\ \mathrm{kJ}$

b) $E_{k2} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J4\pi^2 f^2 = 0{,}29\ \mathrm{J}$

Střela se uvádí do rotačního pohybu, aby její osa zachovávala stálý směr a střela se ve vzduchu nepřevracela.

R2.290 m = 58 g = 0,058 kg, r = 3,2 cm = 0,032 m, $J = 4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, v = 90 km · h^{-1} = 25 m · s^{-1}, f = 10 Hz; a) E_{k1} = ?, b) E_{k2} = ?

a) $E_{k1} = \frac{1}{2}mv^2 = 18\ \mathrm{J}$

b) $E_{k2} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J4\pi^2 f^2 = 0{,}079\ \mathrm{J}$

R2.291 f_1 = 25 Hz; f_2 = ?

Moment setrvačnosti válce je

$$J_1 = \frac{1}{2}mR^2,$$

moment setrvačnosti koule je

$$J_2 = \frac{2}{5}mR^2.$$

Kinetické energie mají být stejné ($E_{k1} = E_{k2}$) neboli

$$\frac{1}{2}mR^2 4\pi^2 f_1^2 = \frac{2}{5}mR^2 4\pi^2 f_2^2.$$

Odtud

$$f_2 = f_1\sqrt{\frac{5}{4}} = 28\ \mathrm{Hz}.$$

R2.292 Valivý pohyb je pohyb složený z posuvného pohybu rychlostí v a z otáčivého pohybu kolem osy jdoucí těžištěm úhlovou rychlostí ω. Při valení bez prokluzování platí $\omega = v/R$. Kinetická energie posuvného pohybu je $E_{k1} = mv^2/2$, kinetická energie otáčivého pohybu je $E_{k2} = J\omega^2/2$. Dosadíme-li $J = mR^2/2$ a $\omega = v/R$, je kinetická energie otáčivého pohybu $E_{k2} = mv^2/4$ a celková energie při valivém pohybu je

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} = \frac{3}{4}mv^2.$$

Všimněte si, že tato kinetická energie nezávisí na poloměru válce.

R2.293 Nemají; obruč má větší kinetickou energii, neboť má větší moment setrvačnosti.

R2.294 m = 100 kg, J = 8 kg · m^2, ω = 200 rad · s^{-1}; a) E_k = ?, b) v = ?, c) v_1 = ?

a) $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = 160\,000\ \mathrm{J} = 160\ \mathrm{kJ}$

b) $\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2$

$v = \omega\sqrt{\frac{J}{m}} = 57\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

c) $\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{3}{4}mv_1^2$

$v_1 = \omega\sqrt{\frac{2J}{3m}} = 46\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

R2.295 h = 1,2 m, g = 9,8 m · s^{-2}; v = ?

Vyjdeme ze zákona zachování mechanické energie. Tíhová potenciální energie koule na počátku pohybu je $E_p = mgh$, kinetickou energii valící se koule na konci žlábku můžeme vyjádřit (vzhledem k momentu setrvačnosti koule $J = (2/5)mR^2$) vztahem

$E_k = \frac{7}{10}mv^2.$

Odtud

$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = 4{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$

R2.296 $J = 2 \cdot 10^{-7}$ kg · m^2, f = 100 Hz, m = 120 g = 0,120 kg; v = ?

Kinetická energie roztočeného setrvačníku se přemění na kinetickou energii posuvného pohybu autíčka:

$E_k = \frac{1}{2}J4\pi^2 f^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = 2\pi f\sqrt{\frac{J}{m}} \approx 0{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

R2.297 m = 1,2 kg, J = 0,25 kg · m^2, ω = 15 rad · s^{-1}, g = 9,8 m · s^{-2}; h = ?

Kinetická energie roztočeného kola se přemění v jeho tíhovou potenciální energii:

$\frac{1}{2}J\omega^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{J\omega^2}{2mg} = 2{,}4\ \mathrm{m}$

R2.298 Ano, dutá kulička má větší moment setrvačnosti, proto má při téže kinetické energii menší rychlost – dospěje na konec nakloněné roviny později než plná kulička.

R2.299 d = 26 cm = 0,26 m, m = 50 kg, v = 0,8 m · s^{-1}, g = 10 m · s^{-2}; a) E_k = ?, b) ξ = 65 mm = 0,065 m; F = ?

a) $E_k = \frac{3}{4}mv^2 = 24\ \mathrm{J}$

b) $\xi\frac{mg}{r} = \xi\frac{2mg}{d} = 245\ \mathrm{N}$

R2.300 m_1 = 200 g = 0,2 kg, m_2 = 20 g = 0,02 kg, n = 4, v = 0,5 m · s^{-1}; E_k = ?

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v^2 + n\frac{3}{4}m_2v^2 = 0{,}040\ \mathrm{J}$$

R2.301 R = 0,35 m, J = 0,12 kg · m^2, m = 0,4 kg, h = 2 m, g = 9,8 m · s^{-2}; ω = ?

Závaží klesne o výšku h, úbytek potenciální energie soustavy $\Delta E_p = mgh$. Tento úbytek se rovná přírůstku kinetické energie. Na počátku je soustava v klidu, přírůstek kinetické energie je

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Vzhledem k tomu, že

$\omega = v/R$ je $\Delta E_k = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$,

platí tedy

$$mgh = \frac{1}{2}\omega^2\left(mR^2 + J\right)$$

a odtud

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{J + mR^2}} = 9{,}6\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}.$$

R2.302 h = 3,5 m, g = 9,8 m · s^{-2}; v = ?

Vyjdeme ze zákona zachování mechanické energie. Stojící homogenní sloup má těžiště ve výšce $h/2$ (obr. R2-302 [2-37]) a jeho tíhová potenciální energie vzhledem k povrchu země je $E_p = mgh/2$. Pád sloupu je rotací kolem vodorovné osy procházející nejnižším bodem sloupu. Při pádu se mění tíhová potenciální energie sloupu v kinetickou energii otáčivého pohybu $E_k = J\omega^2/2$. Moment setrvačnosti sloupu vzhledem k ose otáčení je $J = mh^2/3$, kinetická energie při dopadu na zem je tedy $E_k = mh^2\omega^2/6$. Podle zákona zachování mechanické energie je $E_p = E_k$, tedy

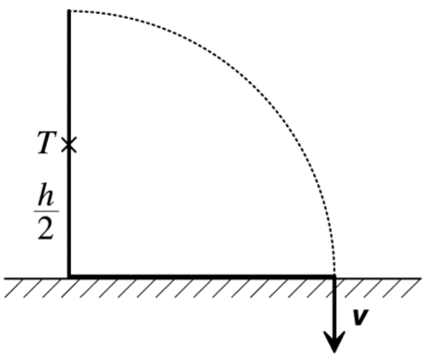
$$\frac{1}{2}mgh = \frac{1}{6}mh^2\omega^2$$

a odtud úhlová rychlost sloupu v okamžiku dopadu na zem je

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{h}}.$$

Koncový bod sloupu opisuje kružnici o poloměru h, velikost jeho rychlosti je

$$v = h\omega\sqrt{3gh} = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$



Obr. R2-302

R2.303 m = 1 kg, l = 1 m, g = 9,8 m · s^{-2}; v = ?, F = ?

Úbytek tíhové potenciální energie $\Delta E_p = mgl$, přírůstek kinetické energie je

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}J\omega^2,\ \text{kde}\ J = \frac{1}{3}ml^2.$$

Ze zákona zachování mechanické energie $\Delta E_p = \Delta E_k$ vyplývá

$$mgl = \frac{1}{6}ml^2\omega^2.$$

Úhlová rychlost je

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{l}}$$

a rychlost koncového bodu tyče

$$v = \omega l = \sqrt{6gl} = 7{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Při průchodu nejnižší polohou působí v těžišti tyče dvě síly: tíhová síla $F_G = mg$ a odstředivá setrvačná síla

$$F_S = m\omega^2 \frac{l}{2} = 3mg.$$

Osa tyče je namáhána součtem těchto sil, tedy silou o velikosti $F = 4mg = 39$ N.

R2.304 V nejvyšším bodě válcové smyčky musí být setrvačná odstředivá síla alespoň rovna tíhové síle. Těžiště disku se pohybuje po kružnici o poloměru $R - r$, pro nejmenší rychlost tedy platí

$$\frac{mv^2}{R-r} = mg.$$

Podle zákona zachování mechanické energie je úbytek tíhové potenciální energie rovný přírůstku kinetické energie valícího se disku, $\Delta E_p = \Delta E_k$; po dosazení

$$mg(h - 2R + r) = \frac{3}{4}mv^2.$$

Z rovnice pro rovnost tíhové a setrvačné síly vyjádříme

$$mv^2 = mg(R - r),$$

dosazením do zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$mg(h - 2R + r) = \frac{3}{4}mg(R - r).$$

Po úpravě dostaneme pro nejmenší výšku středu disku, z níž musí být vypuštěn,

$$h = \frac{1}{4}(11R - 7r).$$

R2.305 Aby disk zachovával svou rovinu a ve vzduchu se nepřevracel.

R2.306 K utlumení výkyvů lodi při vlnobití.

R2.307 Např. ke zvýšení rovnoměrnosti chodu strojů, ke konstrukci některých palubních leteckých přístrojů (např. tzv. umělého horizontu nebo zatáčkoměru), k pohánění některých mechanických hraček; i Hubbleův teleskop je vybaven velkými setrvačníky, které umožňují definovat jeho orientaci v kosmickém prostoru.

2.6 Mechanika tekutin

R2.308 Ideální kapalina je zcela nestlačitelná a dokonale tekutá. Reálné kapaliny jsou vždy poněkud stlačitelné a existuje v nich vnitřní tření.

R2.309 $S = 25\ \mathrm{cm}^2 = 25 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$, $F = 30$ N; $p = ?$

$$p = \frac{F}{S} = 12\,000\ \mathrm{Pa} = 12\ \mathrm{kPa}$$

R2.310 $d = 2{,}4\ \mathrm{cm} = 2{,}4 \cdot 10^{-2}$ m, $F = 20$ N; $p = ?$

$$p = \frac{F}{S} = \frac{4F}{\pi d^2} = 44 \cdot 10^3\ \mathrm{pa} = 44\ \mathrm{kPa}$$

R2.311 $S = 8\ \mathrm{cm}^2 = 8 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$, $p = 50\ \mathrm{kPa} = 50 \cdot 10^3$ Pa; $F = ?$

$F = pS = 40$ N

R2.312 $p = 500\ \mathrm{kPa} = 5 \cdot 10^5$ Pa; $F = ?$, a) $S = 1\ \mathrm{cm}^2 = 1 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$, b) $S = 1\ \mathrm{dm}^2 = 1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^2$.

$F = pS$

a) $F = 50$ N

b) $F = 5\,000\ \mathrm{N} = 5\ \mathrm{kN}$

R2.313 $p = 100\ \mathrm{kPa} = 5 \cdot 10^5$ Pa, $a = 1\ \mathrm{cm} = 1 \cdot 10^{-2}$ m; a) $F_1 = ?$, b) $F = ?$

a) $F_1 = pS = pa^2 = 10$ N, b) výslednice tlakových sil je nulová, na každé dvě protilehlé stěny působí stejně velké síly opačného směru.

R2.314 Voda vystřikuje kolmo ke stěně hadice, neboť tlaková síla je vždy kolmá ke stěně.

R2.315 Ano, neboť jde o tlak vyvolaný vnější silou.

R2.316 $S_1 = 25\ \mathrm{cm}^2 = 25 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$, $F_1 = 100$ N; a) $p = ?$, b) $S_2 = 1\,000\ \mathrm{cm}^2 = 0{,}1\ \mathrm{m}^2$, $F_2 = ?$, c) $s_1 = 8\ \mathrm{cm} = 8 \cdot 10^{-2}$ m, $s_2 = ?$

a) $p = \dfrac{F_1}{S} = 4 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa} = 40\ \mathrm{kPa}$

b) $F_2 = \dfrac{F_1}{S_1} S_2 = 4\,000\ \mathrm{N} = 4\ \mathrm{kN}$

c) $S_1 s_1 = S_2 s_2 \Rightarrow s_2 = \dfrac{S_1}{S_2} s_1 = 2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 2\ \mathrm{mm}$

R2.317 $d_1 = 3$ cm, $d_2 = 15$ cm, $m_2 = 200$ kg, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $F_1 = ?$

$$S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}, S_2 \frac{\pi d_2^2}{4}, F_2 = mg, F_1 = F_2 \frac{S_1}{S} = mg \frac{d_1^2}{d_2^2} = 78\ \mathrm{N}.$$

R2.318 $h = 10$ m, $\rho = 1\ 000$ kg · m^{-3}, $g = 10$ m · s^{-2}; p =?

$p = h\rho g = 1 \cdot 10^5$ Pa = 100 kPa

R2.319 $h = 28$ m, $\rho = 1\ 000$ kg · m^{-3}, $g = 10$ m · s^{-2}; a) p = ?, b) $S = 1$ cm^2 = $1 \cdot 10^{-4}$ m^2; F = ?

a) $p = h\rho g$ = 280 000 Pa = 280 kPa

b) $F = pS$ = 28 N

R2.320 $h = 11\ 034$ m, $\rho = 1\ 020$ kg · m^{-3}, $g = 9{,}8$ m · s^{-2}; a) p = ?, b) $S = 1$ cm^2 = $1 \cdot 10^{-4}$ m^2, F = ?

a) $p = h\rho g = 1{,}103 \cdot 10^8$ Pa = 110,3 MPa, b) $F = pS$ = 11 030 N = 11,03 kN.

R2.321 a) Ve všech nádobách působí na dno stejná tlaková síla, b) v nádobě B, která má svislé stěny.

R2.322 $h_1 = 27$ cm, $h_2 = 30$ cm, $\rho_1 = 1\ 000$ kg · m^{-3}; ρ_2 = ?

Hydrostatické tlaky v rovině společného rozhraní jsou stejné, $h_1\rho_1 g = h_2\rho_2 g$, odtud

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{h_1}{h_2} = 900\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

R2.323 $\rho_1 = 13\ 600$ kg · m^{-3}, $\rho_2 = 1\ 000$ kg · m^{-3}, $h_1 = 2$ cm; h_2 = ?

$$h_2 = h_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} = 27\ \mathrm{cm}$$

R2.324 p = 1 000 hPa = $1 \cdot 10^5$ Pa, $\rho_1 = 1\ 000$ kg · m^{-3}, $\rho_2 = 13\ 600$ kg · m^{-3}, g = 10 m · s^{-2}; h_1 = ?, h_2 = ?

$$h_1 = \frac{p}{\rho_1 g} = 10\ \mathrm{m}$$

$$h_2 = \frac{p}{\rho_2 g} = 0{,}75\ \mathrm{m} = 75\ \mathrm{cm}$$

R2.325 $p = 1{,}013\ 25 \cdot 10^5$ Pa, $g = 9{,}8$ m · s^{-2}, $\rho = 13\ 600$ kg · m^{-3}; h = ?

$$h = \frac{p}{\rho g} = 0{,}760\ \mathrm{m}$$

R2.326 h = 737 mm = 0,737 m, $\rho = 13\ 600$ kg · m^{-3}, $g = 9{,}8$ m · s^{-2}; p = ?

$p = h\rho g = 9{,}82 \cdot 10^4$ Pa = 982 hPa

R2.327 $h = 20\ \text{cm} = 0{,}2\ \text{m}$, $S = 30\ \text{cm}^2 = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$, $p_a = 10^5\ \text{Pa}$; $F = ?$

Na spodní plochu papíru působí směrem vzhůru atmosférická tlaková síla F_a o velikosti $F_a = p_a S$, na horní plochu papíru směrem dolů hydrostatická tlaková síla F_h vodního sloupce o velikosti $F_h = p_h S = \rho h g S$.

Protože po převrácení válce voda nevyteče, usuzujeme, že atmosférická tlaková síla je větší než hydrostatická tlaková síla vodního sloupce. Velikost síly F, kterou je list papíru přitlačován k válci, určíme jako výslednici obou sil

$F = F_a - F_h = p_a S - \rho h g S = (p_a - \rho h g)S.$

Pro dané hodnoty a pro $\rho = 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ jsou síly $F_a = 300\ \text{N}$, $F_h = 6\ \text{N}$ a výslednice sil $F = 294\ \text{N}$. Vidíme, že atmosférická tlaková síla je mnohem větší než hydrostatická tlaková síla vodního sloupce. Při opatrném provedení pokusu lze dokonce pozorovat prohnutí papíru směrem dovnitř válce.

R2.328 Uzavřeme-li horní otvor pipety, je kapalina uvnitř držena vlivem atmosférického tlaku, který je větší než hydrostatický tlak vody v pipetě.

R2.329 $p = 1 \cdot 10^5\ \text{Pa}$, $\rho = 1\,000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $h = ?$

$$h = \frac{p}{\rho g} \approx 10\ \text{m}$$

R2.330 $p = 1{,}013 \cdot 10^5\ \text{Pa}$, $d = 3\ \text{cm} = 0{,}03\ \text{m}$; $F = ?$

$$F = pS = p\frac{\pi d^2}{4} \approx 72\ \text{N}$$

R2.331 $a = 10\ \text{cm} = 0{,}1\ \text{m}$, $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, a) $\rho = 1\,000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, b) $\rho = 900\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$,

c) $\rho = 1\,200\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $F_{vz} = ?$

$F_{vz} = V\rho g$; a) $F_{vz} = 10\ \text{N}$, b) $F_{vz} = 9\ \text{N}$, c) $F_{vz} = 12\ \text{N}$.

R2.332 Na závaží z hliníku, které má při stejné hmotnosti větší objem než závaží z mosazi, neboť má menší hustotu. Vztlaková síla je přímo úměrná objemu ponořeného tělesa.

R2.333 Na závaží ponořené do vody, neboť voda má větší hustotu než líh. Vztlaková síla je přímo úměrná hustotě kapaliny, do níž je těleso ponořeno.

R2.334 Rovněž 20 N; vztlaková síla nezávisí na hloubce, do níž je těleso ponořeno.

R2.335 F_{vz} = 30 N, $g_M = g/6$, $g_J = 2{,}6g$; a) F_M = ?, b) F_J = ?

$F_{vz} = V\rho g$

a) $F_M = V\rho g_M = \dfrac{V\rho g}{6} = \dfrac{1}{6}F_{vz} = 5\ \text{N}$

b) $F_J = V\rho g_J = 2{,}6V\rho g = 2{,}6F_{vz} = 78\ \text{N}$

R2.336 m = 10 kg, V = 4 dm^3 = 0,004 m^3, ρ = 1 000 kg · m^{-3}, g = 10 m · s^{-2}; F = ?

$F = mg - F_{vz} = mg - V\rho g$ = 60 N; na vzduchu zvedáme kámen silou $F_G = mg$ = 100 N.

R2.337 F_1 = 32 N, F_2 = 52 N, ρ_0 = 1 000 kg · m^{-3}; ρ = ?

Na kámen ponořený ve vodě působí vztlaková síla o velikosti $F_{vz} = F_2 - F_1$.

Podle Archimedova zákona je velikost vztlakové síly působící na těleso zcela ponořené do vody o hustotě ρ_0 dána vztahem

$F_{vz} = \rho_0 V g$,

kde V je objem tělesa. Dosadíme-li za objem $V = m/\rho$, kde m je hmotnost tělesa a ρ jeho hustota, dostaneme

$$F_{vz} = mg\frac{\rho_0}{\rho} = F_2\frac{\rho_0}{\rho}.$$

Porovnáme-li oba vztahy pro velikost vztlakové síly, máme

$$F_2 - F_1 = F_2\frac{\rho_0}{\rho}.$$

Odtud po úpravě je hledaná hustota

$$\rho = \frac{F_2\rho_0}{F_2 - F_1} = 2\,600\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

R2.338 m = 26,8 g = 26,8 · 10^{-3} kg, m_1 = 16,9 g = 16,9 · 10^{-3} kg, g = 10 m · s^{-2}, ρ = 1 000 kg · m^{-3}; a) ρ_1 = ?, b) V = ?

a) $F_{vz} = V\rho g,\ V = \dfrac{m}{\rho_1}, F_{vz} = \dfrac{m}{\rho_1}\rho g, F = mg - F_{vz} = mg\left(1 - \dfrac{\rho}{\rho_1}\right).$

Sílu F můžeme také vyjádřit vztahem $F = m_1 g$. Porovnáním obou vztahů pro sílu F dostaneme

$$m_1 g = mg\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right)$$

a odtud hustota klíče:

$$\rho_1 = \frac{\rho m}{m - m_1} = 2\,700\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

b) Objem klíče $V = \dfrac{m}{\rho_1} = 9{,}9 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3 = 9{,}9\ \mathrm{cm}^3$.

R2.339 m = 10 kg, ρ = 800 kg · m^{-3}, g = 10 m · s^{-2}, F = 40 N; V = ?

$$F = mg - F_{\mathrm{vz}} = mg - V\rho g \Rightarrow V = \frac{mg - F}{\rho g} = 0{,}007\,5\ \mathrm{m}^3 = 7{,}5\ \mathrm{dm}^3$$

R2.340 m = 1 g = 1 · 10^{-3} kg, m_1 = 0,92 g = 0,92 · 10^{-3} kg, ρ = 1 000 kg · m^{-3}; ρ_1 = ?

Hustota zlata ρ_z = 19 300 kg · m^{-3}. Zjistit, zda je prsten z čistého zlata, můžeme pomocí jeho hustoty ρ_1. Při vyvážení prstenu ponořeného do vody platí

$$m_1 g = mg - mg\frac{\rho}{\rho_1}.$$

Odtud hustota prstenu

$$\rho_1 = \frac{\rho m}{m - m_1} = 12\,500\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

Prsten tedy není z čistého zlata. Můžeme to ověřit také pomocí objemů. Objem prstenu je:

$$V = \frac{m}{\rho_1} = 8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3 = 0{,}08\ \mathrm{cm}^3.$$

Kdyby byl z čistého zlata, měl by objem

$$V_z = \frac{m}{\rho_z} = 5{,}2 \cdot 10^{-5}\mathrm{m}^3 = 0{,}052\ \mathrm{cm}^3.$$

R2.341 m = 10 t = 10 · 10^3 kg, h = 5 cm = 5 · 10^{-2} m, g = 10 m · s^{-2}, ρ = 1 000 kg · m^{-3}; S = ?

$$mg = Sh\rho g \Rightarrow \frac{m}{hg} = 200\ \mathrm{m}^2$$

R2.342 m = 50 kg, h = 3 m, g = 10 m · s^{-2}, ρ = 1 000 kg · m^{-3}, a) ρ_1 = 1 050 kg · m^{-3}, b) ρ_1 = 1 000 kg · m^{-3}; F = ?

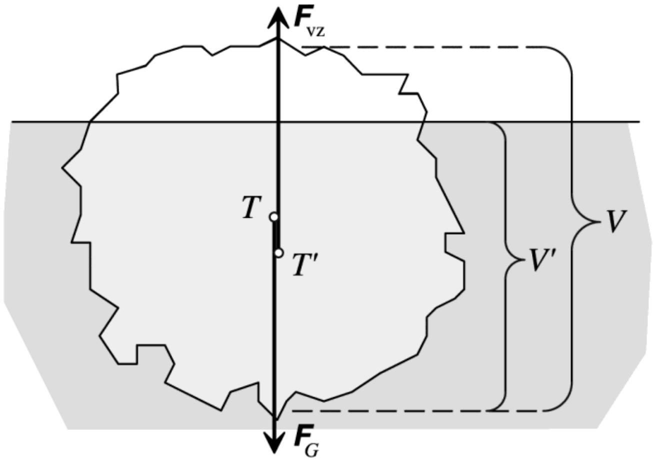
$$F = mg - F_{vz} = mg - mg\frac{\rho}{\rho_1} = mg\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right)$$

a) F = 24 N

b) F = 0 N – hustota plavce je stejná jako hustota vody. Na hloubce, do níž je plavec ponořen, tlaková síla nezávisí.

R2.343 ρ_1 = 920 kg · m^{-3}, ρ_2 = 1 020 kg · m^{-3}; V'/V = ?

Na ledovec působí dvě síly (obr. R–343 [2-41]): ve směru svislém dolů tíhová síla F_G o velikosti $F_G = \rho_1 Vg$, ve směru svislém vzhůru vztlaková síla F_{vz} o velikosti $F_{vz} = \rho_2 V'g$. Působiště tíhové síly F_G je nakresleno v těžišti T ledovce, působiště vztlakové síly F_{vz} v těžišti T' ponořené části ledovce.



Obr. R2-343

Je-li ledovec v klidu, je výslednice obou sil nulová. Proto $F_G = F_{vz}$, neboli

$$\rho_1 Vg = \rho_2 V'g\ .$$

Odtud poměr objemů ponořené části a celého ledovce

$$\frac{V'}{V} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

a pro dané hodnoty V'/V = 0,9. Pod mořskou hladinou zůstává tedy skryto 9/10 celkového objemu ledovce.

R2.344 ρ = 1 000 kg · m^{-3}, ρ_1 = 920 kg · m^{-3}, m = 96 kg, S = 4 m^2; d = ?

Předpokládáme, že horní plocha kry leží ve vodní hladině, kra je tedy celá ponořena, těleso je celé nad hladinou. Pak

$mg + Sd\rho_1 g = Sd\rho g$, odtud tloušťka kry

$$d = \frac{m}{S(\rho - \rho_1)} = 0{,}3\ \mathrm{m} = 30\ \mathrm{cm}.$$

R2.345

$V_1 = \frac{3}{5}V,\ V_2 = \frac{3}{4}V,\ \rho_1 = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; a) $\rho = ?$, b) $\rho_2 = ?$

a) $V\rho g = \frac{3}{5}V\rho_1 g, \quad \rho = \frac{3}{5}\rho_1 = 600\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

b) $V\rho g = \frac{3}{4}V\rho_2 g \quad \rho_2 = \frac{4}{3}\rho = 800\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

R2.346 $V = 15\ \mathrm{dm^3} = 15 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$, $\rho = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\rho_1 = 600\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $F = ?$

$F = V\rho g - V\rho_1 g = Vg(\rho - \rho_1) = 60\ \mathrm{N}$

R2.347 V beztížném stavu zůstane zátka na místě, v němž jsme ji uvolnili. Archimedův zákon zde neplatí, tíhová i vztlaková síla jsou nulové.

R2.348 $d = 10\ \mathrm{cm} = 0{,}1\ \mathrm{m}$, $V_1 = V/2$, $\rho = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; $m = ?$

$$mg = V_1\rho g, \quad m = \frac{V}{2}\rho$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\frac{d^3}{8} = \frac{\pi d^3}{6}$$

$$m = \frac{\pi d^3}{12}\rho = 0{,}26\ \mathrm{kg} = 260\ \mathrm{g}$$

R2.349 $d = 10\ \mathrm{cm} = 0{,}1\ \mathrm{m}$, $m = 0{,}5\ \mathrm{kg}$, $\rho_1 = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; a) $\rho = ?$, b) $m_1 = ?$

a) $\rho = \frac{m}{V} = \frac{6m}{\pi d^3} = 955\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

b) $\rho_1 = \frac{6(m + m_1)}{\pi d^3} \Rightarrow m_1 = \frac{\pi d^3 \rho_1}{6} - m = 2{,}4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg} = 24\ \mathrm{g}$

R2.350 $S = 80\ \mathrm{m^2}$, $v = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $Q_V = ?$

$Q_V = Sv = 240\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$

R2.351 $S = 30\ \text{cm}^2 = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$, $v = 0{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; a) $Q_V = ?$, b) $t = 1\ \text{min} = 60\ \text{s}$; $V = ?$

a) $Q_V = Sv = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ = 1,5 litru za sekundu,

b) $V = Q_V t = Svt = 0{,}09\ \text{m}^3$ = 90 litrů.

R2.352 $S = 50\ \text{cm}^2 = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$, $t = 5\ \text{min} = 300\ \text{s}$, V = 1 500 litrů = $1{,}5\ \text{m}^3$;
a) $Q_V = ?$, b) $v = ?$

a) $Q_V = V/t = 0{,}005\ \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ = 5 litrů za sekundu,

b) $v = V/St = 1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

R2.353 $S_1 = 120\ \text{cm}^2$, $S_2 = 20\ \text{cm}^2$, $v_1 = 0{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_2 = ?$

$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2} = 3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

R2.354 V zúžené části trubice je podle rovnice kontinuity rychlost proudící vody větší.

R2.355 $d_1 = 4\ \text{cm} = 4 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$, $d_2 = 1\ \text{cm} = 1 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$; a) $v_1 = 0{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_2 = ?$,
b) $v_2 = 20\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_1 = ?$

Rovnici kontinuity $S_1 v_1 = S_2 v_2$ zapíšeme pomocí průměrů:

$$\frac{\pi d_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2, \text{ odtud}$$

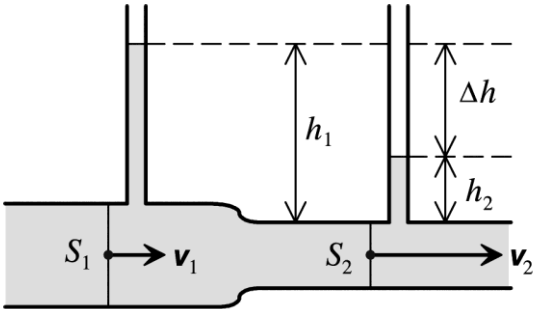
a) $v_2 = \dfrac{d_1^2}{d_2^2} v_1 = 8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,

b) $v_1 = \dfrac{d_2^2}{d_1^2} v_2 = 1{,}25\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

R2.356 $S_1 = 30\ \text{cm}^2 = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$, $S_2 = 10\ \text{cm}^2 = 10^{-3}\ \text{m}^2$, $\Delta h = 40\ \text{cm} = 0{,}4\ \text{m}$; $v_1 = ?$, $v_2 = ?$

Průřezem potrubí o obsahu S_1 proudí voda rychlostí v_1, průřezem o obsahu S_2 rychlostí v_2 (obr. R2-356 [2-42]). Při ustáleném proudění ideální kapaliny platí Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2.$$



Obr. R2-356

Odtud rozdíl tlaků v obou částech potrubí

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right),$$

kde $p_1 = \rho h_1 g$ je tlak v širší části potrubí a $p_2 = \rho h_2 g$ tlak v jeho užší části. Vyjádříme-li rozdíl tlaků vztahem

$$p_1 - p_2 = \rho g\left(h_1 - h_2\right) = \rho g \Delta h,$$

kde Δh je rozdíl hladin v manometrických trubicích, dostaneme

$$\rho g \Delta h = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right).$$

Nyní dosadíme z rovnice kontinuity rychlost $v_2 = v_1 S_1 / S_2$ a dostaneme

$$\rho g \Delta h = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right).$$

Odtud pak velikost rychlosti v širší části potrubí

$$v_1 = S_2\sqrt{\frac{2\Delta h g}{S_1^2 - S_2^2}} = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

a velikost rychlosti v užší části potrubí

$$v_2 = S_1\sqrt{\frac{2\Delta h g}{S_1^2 - S_2^2}} = 3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

R2.357 $S_1 = 50\ \mathrm{cm^2} = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^2}$, $S_2 = 15\ \mathrm{cm^2} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^2}$, $v_1 = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $p_1 = 85\ \mathrm{kPa} = 85 \cdot 10^3\ \mathrm{Pa}$;

$v_2 = ?$, $p_2 = ?$

Z rovnice kontinuity určíme rychlost

$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2} = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

z Bernoulliovy rovnice vypočteme tlak

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) = 40\,000\,\mathrm{Pa} = 40\,\mathrm{kPa}.$$

R2.358 V zúženém místě mezi loďkami proudí voda rychleji a podle Bernoulliovy rovnice má menší tlak než voda v okolí.

R2.359 Listy papíru se k sobě přiblíží. V proudícím vzduchu mezi listy papíru je menší tlak než atmosférický tlak působící na listy z vnějších stran.

R2.360 a) h = 20 cm = 0,2 m, b) h = 80 cm = 0,8 m, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; v = ?

Výtoková rychlost z otvoru v hloubce h pod hladinou vody v otevřené nádobě je

$$v = \sqrt{2hg}.$$

a) $v = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

b) $v = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

R2.361 h = 20 m, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; v = ?

$$h = \sqrt{2hg} = 20\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

R2.362 h_1 = 80 cm = 0,8 m, h_2 = 20 cm = 0,2 m, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; a) v = ?, b) x = ?

a) Výtoková rychlost vody

$$v = \sqrt{2h_1 g} = 4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

b) Voda tryská z otvoru nádoby ve vodorovném směru, jde tedy o vodorovný vrh. Délka vrhu

$$x = vt = v\sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{4h_1 h_2} = 0{,}8\,\mathrm{m} = 80\,\mathrm{cm}.$$

R2.363 $Q_V = 0{,}5\ \mathrm{l \cdot s^{-1}} = 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$, $S = 2\ \mathrm{cm^2} = 2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; h = ?

$$Q_V = Sv = S\sqrt{2hg} \Rightarrow h = \frac{Q_V^2}{2gS^2} = 0{,}31\,\mathrm{m} = 31\,\mathrm{cm}$$

R2.364 $v = 90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $C = 0{,}3$, $S = 2\ \mathrm{m^2}$, $\rho = 1{,}3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; F = ?

$$F = \frac{1}{2}C\rho S v^2 = 244\ \mathrm{N}$$

R2.365 $r = 1\ \mathrm{cm} = 0{,}01\ \mathrm{m}$, $v = 40\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $C = 0{,}48$, $\rho = 1{,}3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; $F = ?$

$$F = \frac{1}{2}C\rho S v^2 = \frac{1}{2}C\rho\pi r^2 v^2 = 0{,}16\ \mathrm{N}$$

R2.366 $m = 75\ \mathrm{kg}$, $d = 9\ \mathrm{m}$, $C = 1{,}2$, $\rho = 1{,}3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $v = ?$

Při ustálené rychlosti, tj. rovnoměrném pohybu výsadkáře, je výslednice sil, které na něho působí, nulová. Odporová síla je tedy rovna tíhové síle

$$mg = \frac{1}{2}C\rho S v^2 = \frac{1}{2}C\rho\frac{\pi d^2}{4}v^2 = \frac{1}{8}C\rho\pi d^2 v^2 \text{ a odtud } v = \sqrt{\frac{8mg}{C\rho\pi d^2}} = 3{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 MOLEKULOVÁ FYZIKA A TERMIKA

3.1 Základní poznatky

R3.1 C: $A_r = 12$, Fe: $A_r = 56{,}8$, $m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_a = ?$

$m_a = A_r m_u$. Pro uhlík $m_a = 1{,}99 \cdot 10^{-26}$ kg, pro železo $m_a = 9{,}27 \cdot 10^{-26}$ kg.

R3.2 H_2O: $M_r = 18$, CO_2: $M_r = 44$, $m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_m = ?$

$m_m = M_r m_u$, pro vodu $m_m = 2{,}99 \cdot 10^{-26}$ kg, pro oxid uhličitý $m_m = 7{,}31 \cdot 10^{-26}$ kg.

R3.3 H_2O, CO_2; $M_m = ?$

$M_m = M_r \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}; pro vodu $M_r = 18$, $M_m = 18 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1} = 18 g · mol^{-1}.

Pro oxid uhličitý $M_r = 44$, $M_m = 44 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1} = 44 g · mol^{-1}.

R3.4 $m = 1$ kg; $N = ?$

Počet molekul ve vodě H_2O o hmotnosti m je $N = m/m_m$, kde m_m je hmotnost jedné molekuly. Tu určíme ze vztahu $m_m = M_r m_u$, kde M_r je relativní molekulová hmotnost vody a m_u je atomová hmotnostní konstanta. Proto počet molekul

$$N = \frac{m}{M_r m_u}.$$

Relativní molekulová hmotnost M_r je součet relativních hmotností atomů vytvářejících molekulu. U molekuly vody H_2O je $M_r = 18$. Po dosazení číselných hodnot dostáváme

$$N = \frac{1\ \text{kg}}{18 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 3{,}35 \cdot 10^{25}.$$

R3.5 $m = 1$ kg, Fe: $A_r = 56{,}8$, $m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; $N = ?$

$$N = \frac{m}{A_r m_u} \approx 1 \cdot 10^{25}$$

R3.6 $m = 500$ g $= 0{,}5$ kg, Pb: $A_r = 207$, $m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; $N = ?$

$$N = \frac{m}{A_r m_u} = 1{,}45 \cdot 10^{24}$$

R3.7 V = 1 litr = 1 · 10^{-3} m^3, ρ = 1 000 kg · m^{-3}, N_A = 6,02 · 10^{23} mol^{-1}, H_2O: M_r = 18; n = ?

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M_r m_u N_A} = \frac{V\rho}{M_r m_u N_A} = 56\ \text{mol}$$

R3.8 CO_2: m = 1 kg, N_A = 6,02 · 10^{23} mol^{-1}; n = ?

$$n = \frac{m}{M_m}$$

Pro CO_2 je M_m = 44 · 10^{-3} kg · mol^{-1}, tedy n = 22,7 mol.

R3.9 H_2O: V = 15 cm^3 = 15 · 10^{-6} m^3, n = 1 mol.

Nemůžeme, objem jednoho molu vody je V_m = 18 · 10^{-6} m^3 = 18 cm^3.

R3.10 N = 5 · 10^{24}, N_A = 6,02 · 10^{23} mol^{-1}; n = ?

$$n = \frac{N}{N_A} = 8{,}3\ \text{mol}$$

R3.11 CO_2: M_m = 44 · 10^{-3} kg · mol^{-1}, t = 0 °C, T = 273 K, p = 1,013 25 · 10^5 Pa,

ρ = 1,951 kg · m^{-3}; V_m = ?

$$V_m = \frac{V}{n} = \frac{VM_m}{m} = \frac{M_m}{\rho} = 22{,}6\ \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$$

R3.12 n = 1 mol, t = 0 °C, p = 1 · 10^5 Pa, p_a = 1,013 25 · 10^5 Pa; V_m = ?

$$V_m = 22{,}41\ \text{l} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$V = V_m \frac{p_a}{p} = 22{,}7\ \text{l}$$

R3.13 m = 550 g = 0,55 kg, t_0 = 1 min = 60 s, N_0 = 10^{21}; t = ?

Počáteční počet molekul plynu v nádobě je $N = nN_A$, kde n je látkové množství plynu v nádobě a N_A je Avogadrova konstanta. Látkové množství plynu o dané hmotnosti m je $n = m/M_m$, kde M_m je molární hmotnost plynu, pro CO_2 je M_m = 44 · 10^{-3} kg · mol^{-1}. Po dosazení do prvního vztahu je

$$N = \frac{mN_A}{M_m}.$$

Jestliže za dobu t_0 unikne z nádoby N_0 molekul plynu, pak N všech molekul plynu unikne za dobu

$$t = \frac{N}{N_0} t_0 = \frac{m N_A t_0}{M_m N_0}.$$

Před dosazením číselných hodnot určíme jednotku výsledku

$$[t] = \frac{\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}} = \text{s}.$$

Pro dané hodnoty je doba t = 451 500 s = 125 h.

R3.14 V = 10 mm^3 = 1 · 10^{-8} m^3, t_0 = 1 s, N_0 = 1 · 10^{18}, ρ = 700 kg · m^{-3},

M_m = 108 g · mol^{-1} = 0,108 kg · mol^{-1}, N_A = 6,02 · 10^{23} mol^{-1}; t = ?

$$t = \frac{\rho V N_A}{M_m N_0} t_0 = 39 \text{ s}$$

R3.15 V = 1 mm^3 = 1 · 10^{-9} m^3, t_0 = 1 s, N_0 = 1 · 10^6, ρ = 1 000 kg · m^{-3},

M_m = 18 · 10^{-3} kg · mol^{-1}, N_A = 6,02 · 10^{23} mol^{-1}; t = ?

$$t = \frac{\rho V N_A}{M_m N_0} t_0 = 3{,}3 \cdot 10^{13} \text{ s} \approx 10^6 \text{ roků}$$

R3.16 Vlivem difuze pronikají molekuly barviva do okolní vody.

R3.17 Rychleji se rozpouští v teplé vodě. S rostoucí teplotou se zvětšuje rychlost částic kapaliny a difuze probíhá rychleji.

R3.18 Při teplotě 0 °C, tj. při teplotě tání ledu za normálního tlaku.

R3.19 N = 4, $V_1 = V_2$; p = ?

Pro čtyři molekuly může nastat $n = 2^4 = 16$ možných stavů jejich rozdělení. Pravděpodobnost, že v jedné nádobě jsou všechny čtyři molekuly, ve druhé žádná, se může realizovat jen jedním způsobem, je tedy $p = 1/n$ = 1/16 = 0,062 5, tj. 6,25 %. Pravděpodobnost, že v jedné nádobě je jedna molekula, ve druhé tři, se může realizovat čtyřmi způsoby, tedy p = 4/16 = 0,25, tj. 25 %. Největší pravděpodobnost má stav, kdy v každé nádobě jsou dvě molekuly. Může se uskutečnit šesti způsoby, je tedy p = 6/16 = 0,375, tj. 37,5 %.

R3.20 t_1 = 0 °C, t_2 = 100 °C; T_1 = ?, T_2 = ?

T = (273,15 + $\{t\}$) K; T_1 = 273,15 K, T_2 = 373,15 K.

R3.21 t = 27 °C; T = ?

$T = (273{,}15 + \{t\})\ \mathrm{K}$

$T = 300{,}15\ \mathrm{K} \approx 300\ \mathrm{K}$

R3.22 $t = 327{,}3\ °\mathrm{C}$; $T = ?$

$T = (273{,}15 + \{t\})\ \mathrm{K}$

$T = 600{,}45\ \mathrm{K}$

R3.23 $T_1 = 0\ \mathrm{K}$, $T_2 = 100\ \mathrm{K}$, $T_3 = 300\ \mathrm{K}$; $t_1 = ?$, $t_2 = ?$, $t_3 = ?$

$t = (\{T\} - 273{,}15)\ °\mathrm{C}$; $t_1 = -273{,}15\ °\mathrm{C}$, $t_2 = -173{,}15\ °\mathrm{C}$, $t_3 = 26{,}85\ °\mathrm{C} \approx 27\ °\mathrm{C}$.

R3.24 $\Delta T = 100\ \mathrm{K}$; $\Delta t = ?$

Rozdíl teplot je v obou stupnicích stejný, tedy $\Delta t = 100\ °\mathrm{C}$.

R3.25 a) $t = (\{T\} - 273{,}15)\ °\mathrm{C} = -243{,}15\ °\mathrm{C} \approx -243\ °\mathrm{C}$,

b) $\{\Delta t\} = \{\Delta T\} = 30$, $\Delta t = 30\ °\mathrm{C}$.

R3.26 Velikost teplotního stupně je v obou stupnicích stejná, jsou jen navzájem posunuty o hodnotu 273,15. Teplotní rozdíl vyjádřený v obou stupnicích je tedy stejný.

3.2 Vnitřní energie, práce a teplo

R3.27 Část mechanické energie vody se přemění ve vnitřní energii.

R3.28 $m = 0{,}1\ \mathrm{kg}$, $h = 20\ \mathrm{m}$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $\Delta U = ?$

$\Delta U = \Delta E_\mathrm{p} = mgh = 20\ \mathrm{J}$

R3.29 $m = 5\ \mathrm{kg}$, $v = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $\Delta U = ?$

$$\Delta U = \Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = 250\ \mathrm{J}$$

R3.30 $m = 400\ \mathrm{g} = 0{,}4\ \mathrm{kg}$, $h = 10\ \mathrm{m}$, $h_1 = 6\ \mathrm{m}$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $\Delta U = ?$

$\Delta U = \Delta E_\mathrm{p} = mg(h - h_1) = 16\ \mathrm{J}$

R3.31 $m = 58\ \mathrm{g} = 0{,}058\ \mathrm{kg}$, $v_1 = 90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 60\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 16{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $\Delta U = ?$

$$\Delta U = \Delta E_k = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_2^2\right) = 10\ \text{J}$$

R3.32 m = 0,5 kg, g = 9,8 m · s^{-2}, h = 20 m, v_0 = 18 m · s^{-1}, v_1 = 24 m · s^{-1}; W = ?, ΔU = ?

Celková mechanická energie kamene, který má ve výšce h rychlost v_0, je $E_1 = mgh + mv_0^2/2$. Při dopadu na zemský povrch je tíhová potenciální energie kamene nulová, jeho mechanická energie je $E_2 = mv_1^2/2$. Rozdílem počáteční a konečné mechanické energie je dána práce vykonaná při překonávání odporu vzduchu a současně přírůstek vnitřní energie kamene a okolního vzduchu. Platí tedy

$$W = \Delta U = E_1 - E_2 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = 35\ \text{J}.$$

R3.33 m = 10 g = 0,01 kg, v_1 = 400 m · s^{-1}, v_2 = 200 m · s^{-1}; ΔU = ?

$$\Delta U = \Delta E_k = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_2^2\right) = 600\ \text{J}$$

R3.34 m_1 = 3 kg, v_1 = 3 m · s^{-1}, m_2 = 2 kg, v_2 = 0; ΔU = ?

Při nepružné srážce dvou těles platí zákon zachování hybnosti, dojde však k úbytku mechanické energie – v našem případě jde o energii kinetickou. Kinetická energie před srážkou je dána kinetickou energií prvního tělesa, neboť druhé je v klidu. Je tedy

$$E_{k1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2.$$

Po srážce se obě tělesa o celkové hmotnosti $m_1 + m_2$ pohybují společnou rychlostí v, je tedy kinetická energie po srážce

$$E_{k2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2.$$

Společnou rychlost těles po srážce vypočteme ze zákona zachování hybnosti. Platí vztah $m_1v_1 = (m_1 + m_2)v$ a odtud

$$v = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2} = 1{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Úbytek mechanické energie, a tedy přírůstek vnitřní energie těles při srážce je

$$\Delta U = E_{k1} - E_{k2} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = 5{,}4\ \text{J}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu výraz pro společnou rychlost v, dostaneme po úpravách pro úbytek mechanické energie vztah

$$E_{k1} - E_{k2} = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Číselný výsledek je stejný.

R3.35 $v_1 = v_2 = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $m_1 = 4\ \mathrm{kg}$, $m_2 = 1\ \mathrm{kg}$; $v = ?$, $\Delta U = ?$

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 1{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$ ve směru pohybu koule s větší hmotností.

$$\Delta U = \Delta E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = 6{,}4\ \mathrm{J}$$

R3.36 a) Z grafů vidíme, že všechna tři tělesa přijala stejné teplo 50 kJ.

b) Největší tepelnou kapacitu má těleso, které se daným teplem ohřeje na nejmenší teplotu, tedy těleso 1, jehož tepelná kapacita

$$C = \frac{Q}{\Delta t} = 2{,}5\ \mathrm{kJ \cdot K^{-1}}.$$

R3.37 $m = 5\ \mathrm{kg}$, $t_1 = 20\ \mathrm{°C}$, $t_2 = 40\ \mathrm{°C}$; a) $Q = ?$, b) $C = ?$, c) $c = ?$

a) $Q = 60\ \mathrm{kJ} - 20\ \mathrm{kJ} = 40\ \mathrm{kJ}$

b) $C = \dfrac{Q}{t_2 - t_1} = 2\ \mathrm{kJ \cdot K^{-1}}$

c) $c = \dfrac{C}{m} = \dfrac{Q}{m(t_2 - t_1)} = 0{,}4\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$

R3.38 $c = 0{,}45\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, $m = 6\ \mathrm{kg}$, $t_1 = 25\ \mathrm{°C}$, $t_2 = 85\ \mathrm{°C}$; $Q = ?$, $C = ?$

$$Q = mc(t_2 - t_1) = 160\ \mathrm{kJ}$$
$$C = mc = 2{,}7\ \mathrm{kJ \cdot K^{-1}}$$

R3.39 Hliníkový; má větší měrnou tepelnou kapacitu, a proto má při stejné hmotnosti také větší tepelnou kapacitu.

R3.40 Ocelový; při stejném objemu má ocelový předmět větší hmotnost (neboť má větší hustotu), takže i při menší měrné tepelné kapacitě má větší tepelnou kapacitu.

R3.41 $h = 50\ \mathrm{m}$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $c = 4{,}2\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}} = 4\,200\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$; $\Delta t = ?$

$$Q = \Delta E_p = mgh = mc\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{gh}{c} = 0{,}12\ \mathrm{°C}$$

R3.42 $v = 200\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\Delta U = 0{,}6\Delta E_k$, $c = 0{,}13\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}} = 130\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$; $\Delta t = ?$

$$mc\Delta t = 0{,}6\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{0{,}3v^2}{c} = 92\ °\mathrm{C}$$

R3.43 $m_1 = 3$ kg, $t_1 = 10$ °C, $t_2 = 90$ °C, $t = 35$ °C; $m_2 = ?$

Voda o hmotnosti m_1 se ohřeje z teploty t_1 na teplotu t, voda o hmotnosti m_2 se ochladí z teploty t_2 na teplotu t. Měrnou tepelnou kapacitu vody označíme c a budeme předpokládat, že nezávisí na teplotě vody. Podle kalorimetrické rovnice je po vyrovnání teplot teplo přijaté chladnějším tělesem rovné teplu vydanému teplejším tělesem, platí tedy vztah

$m_1c(t - t_1) = m_2c(t_2 - t)$

a odtud hledaná hmotnost vody

$$m_2 = \frac{m_1(t - t_1)}{t_2 - t} = 1{,}36\ \mathrm{kg} \approx 1{,}4\ \mathrm{kg}.$$

R3.44 Aby se v kalorimetru rychleji ustálila tepelná rovnováha.

R3.45 $m_1 = 0{,}30$ kg, $t_1 = 18$ °C, $m_2 = 0{,}20$ kg, $t_2 = 60$ °C, $t = 34$ °C, $c = 4{,}18\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$; $C = ?$

$$m_1c(t - t_1) + C(t - t_1) = m_2c(t_2 - t),$$

odtud tepelná kapacita kalorimetru

$$C = \frac{m_2c(t_2 - t)}{t - t_1} \approx 0{,}1\ \mathrm{kJ \cdot K^{-1}}.$$

R3.46 $C = 0{,}10\ \mathrm{kJ \cdot K^{-1}}$, $m_1 = 0{,}47$ kg, $t_1 = 14$ °C, $c_1 = 4{,}2\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, $m_2 = 0{,}40$ kg, $t_2 = 100$ °C, $t = 20$ °C; $c_2 = ?$

$$(m_1c_1 + C)(t - t_1) = m_2c_2(t_2 - t),$$

odtud

$$c_2 = \frac{(m_1c_1 + C)(t - t_1)}{m_2(t_2 - t)} = 0{,}39\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}.$$

R3.47 $m_1 = 35$ kg, $t_1 = 30$ °C, $c_1 = 1{,}7\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, $c_2 = 0{,}45\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, $t = 58$ °C; $m_2 = ?$

$$m_1c_1(t-t_1)=m_2c_2(t_2-t)$$
$$m_2=\frac{m_1c_1(t-t_1)}{c_2(t_2-t)}=5{,}0\ \text{kg}$$

R3.48 m_1 = 0,60 kg, c_1 = 0,45 kJ · kg^{-1} · K^{-1}, t_2 = 7,2 °C, m_2 = 5,65 kg, c_2 = 4,18 kJ · kg^{-1} · K^{-1},
t = 13,2 °C; t_1 = ?

$$m_2c_2(t-t_2)=m_1c_1(t_1-t)$$
$$t_1=t+\frac{m_2c_2}{m_1c_1}(t-t_2)=538\ \text{°C}$$

R3.49 C = 0,08 kJ · K^{-1}, m_1 = 0,20 kg, t_1 = 18,0 °C, t_2 = 33,0 °C, c_1 = 4,18 kJ · kg^{-1} · K^{-1},
m_2 = 0,16 kg, t_1' = 20,0 °C, t_2' = 58,5 °C; c_2 = ?

$$Q=(m_1c_1+C)(t_2-t_1)=(m_2c_2+C)(t_2'-t_1')$$
$$c_2=\frac{(m_1c_1+C)(t_2-t_1)}{m_2(t_2'-t_1')}-\frac{C}{m_2}=1{,}73\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$$

R3.50 V = 1 litr = 1 · 10^{-3} m^3, ρ = 1 000 kg · m^{-3}, t_1 = 23 °C, t_2 = 100 °C, P_0 = 500 W, η = 0,9; τ = ?

$$\eta P_0\tau=mc(t_2-t_1)=V\rho c(t_2-t_1)$$
$$\tau=\frac{V\rho c(t_2-t_1)}{\eta P_0}=719\ \text{s}\approx 12\ \text{min}$$

R3.51 W = 2,5 kJ, Q = 1,2 kJ; ΔU = ?

Vnitřní energie vzrostla o $\Delta U = Q + W$ = 3,7 kJ.

R3.52 Q = 25 kJ, a) ΔU = 20 kJ; W = ?, b) W = 35 kJ; ΔU = ?

a) $W = Q - \Delta U$ = 5 kJ, b) $\Delta U = Q - W$ = –10 kJ, vnitřní energie se zmenší o 10 kJ.

R3.53 Q = 3,6 kJ, W = 2,9 kJ; ΔU = ?

$\Delta U = Q - W$ = 0,7 kJ

R3.54 W = 0,6 kJ; ΔU = ?

$\Delta U = -W$ = –0,6 kJ; práce se koná na úkor vnitřní energie, vnitřní energie se zmenší a zmenší se také teplota plynu.

R3.55 Vzduch se nad topným tělesem ohřívá, tím se zmenší jeho hustota a teplý vzduch stoupá vzhůru. Na jeho místo proudí zdola chladnější vzduch.

R3.56 Tepelná výměna vedením a prouděním může probíhat jen v látkovém prostředí, tepelná výměna zářením probíhá nejlépe ve vakuu.

R3.57 V nádobě s černým povrchem, neboť černý povrch vyzařuje více energie.

R3.58 Vzduch má malou tepelnou vodivost, zředěný vzduch má vodivost ještě menší.

R3.59 Sklo propouští světlo, ale absorbuje tepelné záření vlákna žárovky, proto se ohřívá.

R3.60 $S = 10\ \text{cm}^2 = 1 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$, $l = 50\ \text{cm} = 0{,}5\ \text{m}$, $\Delta t = 15\ °\text{C}$, $\lambda = 380\ \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\tau = 10\ \text{s}$; $Q = ?$

Pro teplo, které projde izolovanou tyčí při ustáleném stavu, platí vztah

$$Q = \frac{\lambda \Delta t S \tau}{l},$$

kde λ je součinitel tepelné vodivosti, Δt rozdíl teplot, S obsah průřezu a τ doba, po kterou teplo prochází. Pro zadané hodnoty je $Q = 114\ \text{J}$.

R3.61 $\tau = 1\ \text{h} = 3\,600\ \text{s}$, $S = 1\ \text{m}^2$, $d = 0{,}5\ \text{m}$, $t_1 = 18\ °\text{C}$, $t_2 = -2\ °\text{C}$, $\lambda = 0{,}84\ \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $Q = ?$

$$Q = \lambda S \tau \frac{t_1 - t_2}{d} = 1{,}2 \cdot 10^5\ \text{J} = 120\ \text{kJ}$$

R3.62 $\lambda = 0{,}65\ \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $S = 1\ \text{m}^2$, $\tau = 1\ \text{min} = 60\ \text{s}$, $d = 15\ \text{cm} = 0{,}15\ \text{m}$, $t_1 = 18\ °\text{C}$, $t_2 = -12\ °\text{C}$; $Q = ?$

$$Q = \lambda S \tau \frac{t_1 - t_2}{d} = 7\,800\ \text{J} = 7{,}8\ \text{kJ}$$

R3.63 Polystyren má asi čtyřikrát menší tepelnou vodivost než panel. Obložením panelu vrstvou polystyrenu se značně sníží ztráty tepla vedením.

3.3 Ideální plyn

R3.64 a) $t = 1\,000\ °\text{C}$, $T = 1\,273\ \text{K}$, b) $t = 0\ °\text{C}$, $T = 273\ \text{K}$, c) $t = -270\ °\text{C}$, $T = 3{,}15\ \text{K}$; $E_k = ?$

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$; $E_k = 3kT/2$; a) $E_k = 2{,}64 \cdot 10^{-20}\ \text{J}$, b) $E_k = 5{,}65 \cdot 10^{-21}\ \text{J}$,

c) $E_k = 6{,}5 \cdot 10^{-23}$ J.

R3.65 a) O_2: $t = 132$ °C, $T = 405$ K, $M_r = 32$; $v_k = ?$, b) He: $T = 10$ K, $A_r = 4$; $v_k = ?$

$$\text{a) } v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_m}} = \sqrt{\frac{3kT}{M_r m_u}} = 562\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$\text{b) } v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_a}} = \sqrt{\frac{3kT}{A_r m_u}} = 250\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R3.66 $t_1 = 19$ °C, $T_1 = 292$ K, $v_{k2} = v_{k1}/2$; $t_2 = ?$

$$\sqrt{\frac{3kT_2}{m_m}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3kT_1}{m_m}} \Rightarrow T_2 = \frac{1}{4}T_1 = 73\ \mathrm{K}$$

$$t_2 = -200\ °\mathrm{C}$$

R3.67 CO_2: $M_r = 44$, $v_k = 720\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 200\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; $t = ?$

$$T = \frac{v_k^2 M_r m_u}{3k} = 71\ \mathrm{K},\ \ t = -202\ °\mathrm{C}$$

R3.68 H_2: $M_{r1} = 2$, O_2: $M_{r2} = 32$, $t_2 = 27$ °C, $T_2 = 300$ K, $v_{k2} = v_{k1}$; $t_2 = ?$

$m_{m1} = M_{r1}m_u$, $m_{m2} = M_{r2}m_u$, $v_{k1} = v_{k2}$,

$$\sqrt{\frac{3kT_1}{m_{m1}}} = \sqrt{\frac{3kT_2}{m_{m2}}} \Rightarrow \frac{T_1}{m_{m1}} = \frac{T_2}{m_{m2}} \text{ neboli } \frac{T_1}{M_{r1}} = \frac{T_2}{M_{r2}}$$

a odtud

$$T_1 = T_2 \frac{M_{r1}}{M_{r2}} = 19\ \mathrm{K}, t_1 = -\,254\ °\mathrm{C}.$$

R3.69 Na molekuly vzduchu působí zemská gravitace. Jen nepatrná část molekul v horních vrstvách atmosféry dosahuje druhé kosmické rychlosti; jsou to především molekuly nebo atomy plynů s malou atomovou hmotností, jako je vodík a helium.

R3.70 Gravitační zrychlení na Měsíci je asi šestkrát menší než na Zemi. Úniková rychlost na Měsíci je jen $2{,}4\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Této rychlosti dosahuje mnohem větší procento molekul než na Zemi při téže teplotě, takže se předpokládá, že měl-li Měsíc kdysi atmosféru, tak se již před dávnými časy rozplynula do meziplanetárního prostoru.

R3.71 H_2: $V = 1\ \mathrm{cm^3} = 1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^3}$, $p = 2{,}6 \cdot 10^4$ Pa, $v_k = 2\,400\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $N = ?$

$$p = \frac{1}{3}N_V m_m v_k^2 = \frac{1}{3}\frac{N}{V}M_r m_u v_k^2,$$

pro H_2 je $M_r = 2$; počet molekul

$$N = \frac{3Vp}{M_r m_u v_k^2} = 4{,}1 \cdot 10^{18}.$$

R3.72 $r = 1 \cdot 10^{-8}$ m, $\rho = 1\,000$ kg · m^{-3}, $t = 17$ °C, $T = 290$ K; $v_k = ?$

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$m = V\rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}} = 1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R3.73 $V = 1$ cm^3 = $1 \cdot 10^{-6}$ m^3, $t = 27$ °C, $T = 300$ K, $p = 1{,}2$ Pa; $N = ?$

$$p = N_V kT = \frac{N}{V}kT, N = \frac{pV}{kT} = 2{,}9 \cdot 10^{14}$$

R3.74 $V = 2$ litry = $2 \cdot 10^{-3}$ m^3, $N = 6 \cdot 10^{20}$, $p = 2{,}6 \cdot 10^3$ Pa; $T = ?$

$$p = N_V kT = \frac{N}{V}kT, T = \frac{pV}{Nk} = 628\ \mathrm{K}, t = 355\ °\mathrm{C}$$

R3.75 $t = 0$ °C, tedy $T = 273{,}15$ K, $V = 100$ cm^3 = 10^{-4} m^3, $S = 9 \cdot 10^{-16}$ cm^2 = $9 \cdot 10^{-20}$ m^2; $p = ?$

Tlak kyslíku v baňce vypočteme ze vztahu

$p = N_V kT,$

kde $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J · K^{-1} je Boltzmannova konstanta, T je termodynamická teplota plynu, N_V je hustota molekul plynu.

Hustotu molekul N_V vypočteme následujícím způsobem: Označíme-li N počet molekul v celém objemu V baňky, je $N_V = N/V$. Pro objem baňky o poloměru r platí $V = 4\pi r^3/3$ a odtud poloměr baňky

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Plošný obsah vnitřního povrchu baňky je $S_0 = 4\pi r^2$, počet molekul v baňce

$$N = \frac{S_0}{S} = \frac{4\pi r^2}{S}.$$

Po dosazení za r a úpravě dostaneme

$$N = \frac{\sqrt[3]{36\pi V^2}}{S}$$

a hustota molekul

$$N_V = \frac{\sqrt[3]{36\pi/V}}{S}.$$

Po dosazení do vztahu pro tlak je

$$p = \frac{\sqrt[3]{36\pi/V}}{S} kT = 4{,}4\ \mathrm{Pa}.$$

R3.76 $p = 1 \cdot 10^5$ Pa, $\rho = 8{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; $v_k = ?$

$$p = \frac{1}{3}\rho v_k^2 \Rightarrow v_k = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 190\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R3.77 a) při izobarickém ději, b) při izochorickém dějí, c) při izotermickém ději, d) při adiabatickém ději.

R3.78 a) diagram C, b) diagram B, c) diagram A.

R3.79 a) graf D – děj je izotermický, b) graf A – děj je izobarický, c) graf B – děj je izochorický.

R3.80 $t_1 = 18$ °C, $T_1 = 291$ K, $t_2 = -23$ °C, $T_2 = 250$ K, $p_1 = 8{,}5$ MPa, $V =$ konst.; $p_2 = ?$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 7{,}3\ \mathrm{MPa}$$

R3.81 $t_0 = 0$ °C, $T_0 = 273$ K, $V = 2V_0/3$; $t = ?$

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}$$

$$\frac{2V_0}{3T} = \frac{V_0}{T_0} \Rightarrow T = \frac{2}{3}T_0 = 182\ \mathrm{K}$$

$$t = -91\ °\mathrm{C}$$

R3.82 $t_1 = 10$ °C, $T_1 = 283$ K, $p_1 = 75$ kPa, $t_2 = 30$ °C, $T_2 = 303$ K, $V =$ konst.; $p_2 =$?

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 80 \text{ kPa}$$

R3.83 O_2: $M_m = 32 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}, $m = 4$ kg, $V = 2$ m^3, $t = 27$ °C, $T = 300$ K, $R_m = 8{,}31$ J · K^{-1} · mol^{-1}; $p = ?$

$$pV = \frac{m}{M_m} R_m T \Rightarrow p = \frac{mR_m T}{VM_m} = 1{,}6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

R3.84 $l = 1$ m, $h = 0{,}2$ m, $d = 0{,}1$ m, $g = 9{,}8$ m · s^{-2}, $\rho = 13\,600$ kg · m^{-3}; $p = ?$

Je-li trubice ve vodorovné poloze, má sloupec vzduchu po obou stranách sloupce rtuti objem $V = S(l - h)/2$ (obr. R3-84a [3-6a]), kde S je plošný obsah vnitřního průřezu trubice. Tlak vzduchu v trubici označme p.

Otočíme-li trubici do svislé polohy (obr. R3-84b [3-6b]), je nad sloupcem rtuti tlak p_1, objem sloupce vzduchu je

$$V_1 = S\left(\frac{l-h}{2} + d\right).$$

Objem sloupce vzduchu pod sloupcem rtuti je

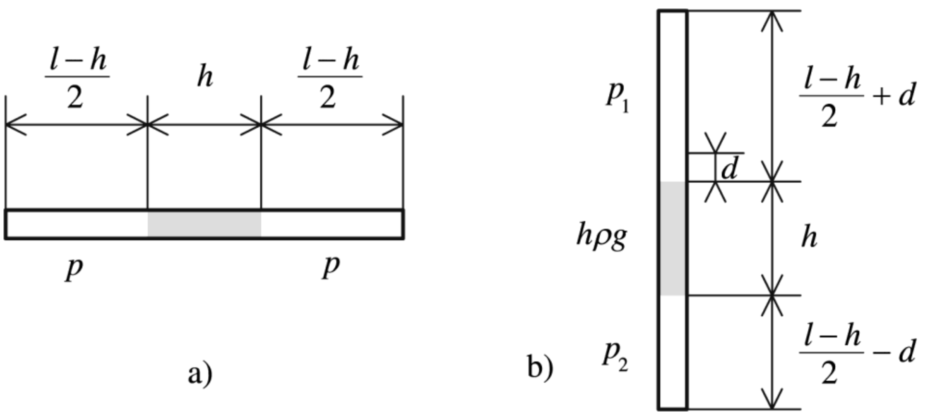
$$V_2 = S\left(\frac{l-h}{2} - d\right),$$

tlak označíme p_2. Pro izotermický děj s ideálním plynem platí
vztahy $pV = p_1V_1$, $pV = p_2V_2$. Odtud dostaneme vztahy

$$p_1 = p\frac{V}{V_1} = p\frac{l-h}{l-h+2d}, \quad p_2 = p\frac{V}{V_2} = p\frac{l-h}{l-h-2d}.$$

Současně platí vztah $p_2 = p_1 + h\rho g$. Po dosazení za p_1 a p_2 a po úpravě dostaneme pro tlak p vztah

$$p = \frac{h\rho g(l-h-2d)(l-h+2d)}{4d(l-h)} = 5 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$



Obr. R3-84

R3.85 h = 10 cm = 0,1 m, l_1 = 16 cm = 0,16 m, l_2 = 21 cm = 0,21 m, ρ = 13 600 kg · m^{-3},
g = 9,8 m · s^{-2}, T = konst.; p_a = ?

Je-li trubice postavena zataveným koncem dolů, je tlak v trubici $p_1 = p_a + h\rho g$, objem vzduchu v trubici $V_1 = h_1 S$. Je-li trubice postavena zataveným koncem nahoru, je v ní tlak $p_2 = p_a - h\rho g$, objem vzduchu v trubici $V_2 = h_2 S$. Při izotermickém ději platí $p_1V_1 = p_2V_2$, tedy

$$(p_a + h\rho g)Sl_1 = (p_a - h\rho g)Sl_2.$$

Po úpravě dostaneme

$$p_a = h\rho g \frac{l_1 + l_2}{l_2 - l_1} = 9{,}86 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

R3.86 $V = 4V_0$, t_0 = 0 °C, T_0 = 273 K, p = konst.; t = ?

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}, \frac{4V_0}{T} = \frac{V_0}{T_0} \Rightarrow T = 4T_0 = 1\,092 \text{ K}$$
$$t = 819 \text{ °C}$$

R3.87 t_1 = 15 °C, T_1 = 288 K, p_1 = 1,5 · 10^5 Pa, V_1 = 2 l, t_2 = 30 °C, T_2 = 303 K, V_2 = 1,5 l; p_2 = ?

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = p_1\frac{V_1T_2}{V_2T_1} = 2{,}1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

R3.88 H_2: M_m = 2 · 10^{-3} kg · mol^{-1}, V = 10 l = 1 · 10^{-2} m^3, t_1 = 7 °C, T_1 = 280 K, p = 5 MPa = 5 · 10^6 Pa, t_2 = 17 °C, T_2 = 290 K, p_n = 1,013 25 · 10^5 Pa, R_m = 8,31 J · K^{-1} · mol^{-1}; Δm = ?, V_n = ?

$$pV = \frac{m_1}{M_m}R_mT_1 \Rightarrow m_1 = \frac{pVM_m}{R_mT_1},$$

analogicky dostaneme hmotnost

$$m_2 = \frac{pVM_\mathrm{m}}{R_\mathrm{m}T_2}.$$

Hmotnost plynu, který unikl z nádoby, je

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{pVM_\mathrm{m}}{R_\mathrm{m}}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = \frac{pVM_\mathrm{m}}{R_\mathrm{m}} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1T_2} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} = 1{,}5\ \mathrm{g}.$$

Objem této hmotnosti vodíku za normálního tlaku vypočteme ze stavové rovnice:

$$V_\mathrm{n} = \frac{\Delta m R_\mathrm{m} T_2}{M_\mathrm{m} p_\mathrm{a}} = 0{,}018\ \mathrm{m}^3 = 18\ \mathrm{litrů}$$

R3.89 $t_1 = 27\ °\mathrm{C}$, $T_1 = 300\ \mathrm{K}$, $p_1 = 4\ \mathrm{MPa} = 4 \cdot 10^6\ \mathrm{Pa}$, $t_2 = 12\ °\mathrm{C} = 285$
K, $m_2 = m_1/2$; $p_2 = ?$

$$p_1V = \frac{m_1}{M_\mathrm{m}}R_\mathrm{m}T_1$$

$$p_2V = \frac{m_2}{M_\mathrm{m}}R_\mathrm{m}T_2 = \frac{m_1}{2M_\mathrm{m}}R_\mathrm{m}T_2$$

Dělením obou rovnic dostaneme

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2T_1}{T_2}\ \text{a odtud}\ p_2 = p_1\frac{T_2}{2T_1} = 1{,}9 \cdot 10^6\ \mathrm{Pa} = 1{,}6\ \mathrm{MPa}.$$

R3.90 O_2: $M_\mathrm{m} = 32 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$, $p = 10\ \mathrm{MPa} = 10 \cdot 10^6\ \mathrm{Pa}$, $t = 27\ °\mathrm{C}$, $T = 300$
K, $R_\mathrm{m} = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$; $\rho = ?$

$$pV = \frac{m}{M_\mathrm{m}}R_m T$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM_\mathrm{m}}{R_\mathrm{m}T} = 128\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$$

R3.91 $V_1 = 3\ \mathrm{l} = 3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$, H_2: $M_{\mathrm{m}1} = 2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$, $m_1 = 10\ \mathrm{g} = 10 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}$, $V_2 = 5\ \mathrm{l} = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$, O_2: $M_{\mathrm{m}2} = 28 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$, $m_2 = 8\ \mathrm{g} = 8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}$, $t = 20\ °\mathrm{C}$, $T = 293\ \mathrm{K}$; $p = ?$

Po smíchání zaujímá každý plyn objem $V = V_1 + V_2$, výsledný tlak je rovný součtu tlaků obou plynů:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{R_\mathrm{m}T}{V_1 + V_2}\left(\frac{m_1}{M_{\mathrm{m}1}} + \frac{m_2}{M_{\mathrm{m}2}}\right) = 1{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{Pa}$$

R3.92. $V = 4\ \mathrm{l} = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$, $m_1 = 2\ \mathrm{g} = 2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}$, $m_2 = 4\ \mathrm{g} = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}$,

$M_{m1} = 2 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}, $M_{m2} = 28 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}, $t = 27$ °C, $T = 300{,}15$ K; $p = ?$

Tlak $V = 4$ l vodíku je

$$p_1 = \frac{m_1 R_m T}{M_{m1} V},$$

tlak dusíku

$$p_2 = \frac{m_2 R_m T}{M_{m2} V},$$

kde $R_m = 8{,}314$ J · K^{-1} · mol^{-1} je molární plynová konstanta. Celkový tlak v nádobě je dán součtem obou dílčích tlaků, tedy

$$p = p_1 + p_2 = \frac{R_m T}{V}\left(\frac{m_1}{M_{m1}} + \frac{m_2}{M_{m2}}\right) = 7{,}1 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

R3.93 $V_1 = 5$ m^3, $p_1 = 1{,}5 \cdot 10^6$ Pa, $V_2 = 8$ m^3, $p_2 = 2{,}2 \cdot 10^6$ Pa, T = konst.; $p = ?$

Po promíchání zaujímá každý plyn objem $V = V_1 + V_2$, tlaky plynů se sečtou; $p = p_1' + p_2'$,

$$p = p_1 \frac{V_1}{V_1 + V_2} + p_2 \frac{V_2}{V_1 + V_2} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = 1{,}9 \cdot 10^6 \text{ Pa.}$$

R3.94 O_2: $m = 0{,}32$ kg, $t_1 = -23$ °C, $T_1 = 250$ K, $V_2 = 3V_1$, $c_p = 0{,}91$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}; $Q = ?$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$T_2 = 3T_1 = 750$ K

$T_2 - T_1 = 500$ K

Dodané teplo

$Q = mc_p(T_2 - T_1) = 146$ kJ.

R3.95 a) při izotermickém, b) při izochorickém, c) při adiabatickém.

R3.96 Ar: $M_m = 40 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}, $V_1 = 5$ l $= 5 \cdot 10^{-3}$ m^3, $V_2 = 10$ l $= 10 \cdot 10^{-3}$ m^3, $p = 2 \cdot 10^5$ Pa, $c_V = 0{,}32$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}; $\Delta U = ?$

$$\Delta U = mc_V(T_2 - T_1)$$

Rozdíl teplot určíme ze stavové rovnice:

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M_m} R_m (T_2 - T_1)$$

Tedy

$$T_2 - T_1 = \frac{p(V_2 - V_1) M_m}{m R_m}.$$

Po dosazení do vztahu pro přírůstek vnitřní energie dostaneme

$$\Delta U = \frac{p(V_2 - V_1) c_V M_m}{R_m} = 1{,}5\ \text{kJ}.$$

R3.97 H_2: $M_m = 2 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}, $m = 70$ g = 0,070 kg, $t_1 = 27$ °C, $T_1 = 300$ K, $V_2 = 2V_1$,

$p = 2 \cdot 10^5$ Pa, $c_p = 14{,}2$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}, $c_V = 10{,}1$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}; a) V_1 = ?, b) Q = ?, c) W = ?

a) $p_1 V_1 = \frac{m}{M_m} R_m T_1 \Rightarrow V_1 = \frac{m R_m T_1}{p M_m} = 0{,}44\ \text{m}^3$

b) $Q = m c_p (T_2 - T_1)$

$V_2 = 2V_1 \Rightarrow T_2 = 2T_1$, tedy $T_2 - T_1 = T_1$.

Teplo $Q = m c_p T_1 \approx 300$ kJ.

c) $W = p(V_2 - V_1) = pV_1 = \frac{m R_m T_1}{M_m} = 87 \cdot 10^3\ \text{J} = 87\ \text{kJ}$

R3.98 N_2: $M_m = 28 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}, $m = 0{,}2$ kg, $t_1 = 20$ °C, $t_2 = 100$ °C,

$c_V = 0{,}74$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}, $c_p = 1{,}04$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}, a) V = konst.; ΔU = ?, W = ?, b) p = konst.;

ΔU = ?, W = ?

a) $\Delta U = m c_V (t_2 - t_1) = 12$ kJ, $W = 0$ (při izochorickém ději se práce nekoná),

b) $\Delta U = m c_V (t_2 - t_1) = 12$ kJ, $W = Q - \Delta U = m(c_p - c_V) \cdot (t_2 - t_1) = 4{,}8$ kJ.

R3.99 $p_1 = 12 \cdot 10^5$ Pa, $V_2 = 5V_1$, a) $\kappa = c_p/c_V = 1{,}67$; p_2 = ?, b) $\kappa = c_p/c_V = 1{,}4$; p_2 = ?

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa}$$

a) $p_2 = 0{,}85 \cdot 10^5$ Pa

b) $p_2 = 1{,}26 \cdot 10^5$ Pa

R3.100 O_2: m = 0,10 kg, t_1 = 10 °C, t_2 = 60 °C, c_V = 0,65 kJ · kg^{-1} · K^{-1}, a) V = konst.; ΔU = ?,
b) p = konst.; ΔU = ?, c) Q = 0; ΔU = ?

Vnitřní energie závisí na teplotě. Ve všech případech se zvýší o $\Delta U = mc_V(t_2 - t_1)$ = 3,25 kJ.

V případě a) se spotřebuje všechno dodané teplo na zvýšení vnitřní energie, v případě b) se část tepla spotřebuje na práci, kterou plyn vykoná, v případě c) se zvýši vnitřní energie o práci, která je plynu stlačením dodána.

R3.101 Probíhá expanze blízká adiabatickému ději, při níž klesne teplota – práce se koná na úkor vnitřní energie.

R3.102 Práce dodaná plynu je při adiabatickém ději rovna přírůstku vnitřní energie, což znamená zvýšení teploty plynu.

R3.103 a) $W = p(V_2 - V_1)$ = 3,6 kJ, b) objem se nemění, práce W = 0, c) práce je dána obsahem trojúhelníku tvořeného kruhovým dějem:

$$W = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = 1{,}2 \text{ kJ}$$

R3.104 a) $W = p(V_2 - V_1)$ = 3,2 kJ, b) W = 0, neboť objem se nemění, c) práce je dána obsahem obdélníku tvořeného kruhovým dějem, $W = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$ = 2,4 kJ.

R3.105 t_1 = 177 °C, t_2 = 42 °C, T_1 = 450 K, T_2 = 315 K; η = ?

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0{,}3, \text{ tj. } 30\ \%.$$

R3.106 η = 0,21, t_1 = 200 °C, tedy T_1 = 473 K; t_2 = ?

Pro maximální účinnost parního stroje platí vztah

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

kde T_1 je termodynamická teplota ohřívače, T_2 je termodynamická teplota chladiče. Odtud

$\eta T_1 = T_1 - T_2$

a termodynamická teplota chladiče

$T_2 = T_1(1-\eta) = 374\ \mathrm{K}$, tedy $t_2 = 101\ °\mathrm{C}$.

R3.107 η = 12 %, tj. η = 0,12, $t_1 - t_2$ = 40 °C; t_1 = ?, t_2 = ?

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{T_1 - T_2}{\eta} = 333\ \mathrm{K}$$
$$t_1 = 60\ °\mathrm{C}$$
$$t_2 = t_1 - 40\ °\mathrm{C} = 20\ °\mathrm{C}$$

R3.108 t_1 = 127 °C, T_1 = 400 K, Q_1 = 20 kJ, Q_2 = 16 kJ; t_2 = ?

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$$
$$T_2 = T_1 \frac{Q_2}{Q_1} = 320\ \mathrm{K}$$
$$t_2 = 47\ °\mathrm{C}$$

R3.109 t_2 = 7 °C, T_2 = 280 K, η_1 = 40 %, tj. 0,4, η_2 = 50 %. tj. 0,5; Δt = ?

$$\eta_1 = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \eta_2 = \frac{T_1' - T_2}{T_1'};$$
$$T_1 = \frac{T_2}{1-\eta_1}, T_1' = \frac{T_2}{1-\eta_2},$$
$$\Delta T = T_1' - T_1 = T_2\left(\frac{1}{1-\eta_2} - \frac{1}{1-\eta_1}\right) = 93\ \mathrm{K}, \Delta t = 93\ °\mathrm{C}.$$

R3.110 Q_1 = 5,6 MJ, Q_2 = 4,7 MJ; W = ?, η = ?

$W = Q_1 - Q_2$ = 0,9 MJ,

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 0{,}16, \text{ tj. } \eta = 16\ \%.$$

3.4 Pevné látky

R3.111 Pevné těleso je deformovatelné, tuhé těleso je idealizované těleso, o němž se předpokládá, že se nemůže deformovat, působením libovolně velkých sil nemění tvar ani objem.

R3.112 a) Železo alfa má prostorově centrovanou mřížku, pro vytvoření modelu potřebují žáci 9 kuliček.

b) Železo gama má plošně centrovanou mřížku, pro vytvoření modelu potřebují žáci 14 kuliček.

R3.113 Sklo je amorfní látka a působením tíhové síly tzv. „teče“.

R3.114 U dokonale pružného (elastického) tělesa deformace vymizí, když přestanou působit vnější síly, u dokonale nepružného (plastického) tělesa deformace zůstává. Skutečná tělesa nejsou dokonale pružná.

R3.115 Při deformaci tahem se jednotlivé vrstvy částic tvořících těleso od sebe vzdalují, při deformaci smykem se vrstvy částic navzájem posouvají, ale jejich vzájemné vzdálenosti se nemění.

R3.116 $\sigma_\mathrm{p} = 2 \cdot 10^7$ Pa, $\rho = 11\,340$ kg · m^{-3}, $g = 9{,}8$ m · s^{-2}; $l = ?$

$$mg = S\sigma_\mathrm{p},\ m = Sl\rho,\ Sl\rho g = S\sigma_\mathrm{p}.$$

$$l = \frac{\sigma_\mathrm{p}}{\rho g} = 180\ \mathrm{m}$$

R3.117 σ_n, $\varepsilon_1 = 0{,}1$ %, tj. $\varepsilon_1 = 0{,}001$, a) $2\sigma_\mathrm{n}$; $\varepsilon_2 = ?$, b) $l_2 = 2l_1$; $\varepsilon_2 = ?$, c) $E_2 = 2E_1$; $\varepsilon_2 = ?$

$$\text{a) } \varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\sigma_1}{E_1}, \varepsilon_2 = \frac{2\sigma_1}{E_1} = 2\varepsilon_1 = 0{,}002,\ \text{tj. } 0{,}2\ \%,$$

$$\text{b) } \Delta l_2 = 2\Delta l_1, l_2 = 2l_1, \varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 0{,}001,\ \text{tj. } 0{,}1\ \%,$$

$$\text{c) } E_2 = 2E_1, \varepsilon_2 = \frac{\sigma_1}{2E_1} = \frac{1}{2}\varepsilon_1 = 0{,}000\,5,\ \text{tj. } 0{,}05\ \%.$$

R3.118 $l = 2$ m, $S = 4 \cdot 10^{-6}$ m^2, $F = 800$ N, $\Delta l = 2 \cdot 10^{-3}$ m; a) $\sigma_\mathrm{n} = ?$, b) $\varepsilon = ?$, c) $E = ?$

$$\text{a) } \sigma_\mathrm{n} = \frac{F}{S} = 2 \cdot 10^8\ \mathrm{Pa}$$

$$\text{b) } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = 0{,}001,\ \text{tj. } 0{,}1\ \%$$

$$\text{c) } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\cdot\frac{F}{S} \Rightarrow E = \frac{Fl}{\Delta l S} = 2 \cdot 10^{11}\ \mathrm{Pa}$$

R3.119 $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, $\sigma_\mathrm{n} = 5 \cdot 10^9$ Pa; $\varepsilon = ?$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_\mathrm{n}}{E} = 0{,}025,\ \text{tj. } 2{,}5\ \%$$

R3.120 $l = 2$ m, $S = 3$ mm^2 $= 3 \cdot 10^{-6}$ m^2, $F = 90$ N, $\Delta l = 0{,}5$ mm $= 5 \cdot 10^{-4}$ m; $E = ?$

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES} \Rightarrow E = \frac{Fl}{\Delta l S} = 1{,}2 \cdot 10^{11}\ \text{Pa}$$

R3.121 m = 10 t = 10 · 10^3 kg, S = 8 cm^2 = 8 · 10^{-4} m^2, l = 400 m, g = 9,8 m · s^{-2}, E = 2,2 · 10^{11} Pa; Δl = ?

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES} = \frac{mgl}{ES} = 0{,}22\ \text{m}$$

R3.122 r = 0,32 mm = 3,2 · 10^{-4} m, l = 0,65 m, Δl = 4,5 mm = 4,5 · 10^{-3} m, E = 220 GPa = 2,2 · 10^{11} Pa;
F = ?

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES} \Rightarrow F = \frac{\Delta l ES}{l} = \frac{\Delta l E \pi r^2}{l} = 490\ \text{N}$$

R3.123 V zimě při ochlazení se délka vedení zmenší, dráty napjaté v létě by mohly v zimě praskat.

R3.124 Při změně teploty dochází ke změně délky konstrukce a mohla by se poškodit.

R3.125 t_1 = –10 °C, l = 50 m, t_2 = 30 °C, α = 1,7 · 10^{-6} K^{-1}; Δl = ?

$\Delta l = \alpha l(t_2 - t_1)$ = 0,034 m = 3,4 cm

R3.126 l = 0,5 m; z grafu odečteme pro Δt = 30 °C hodnotu Δl = 0,3 mm = 3 · 10^{-4} m. Součinitel délkové roztažnosti

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l \Delta t} = 2 \cdot 10^{5}\ \text{K}^{-1}.$$

R3.127 E = 2,2 · 10^{11} Pa, α = 12 · 10^{-6} K^{-1}, t_1 = 0 °C, t_2 = 60 °C; σ_n = ?

Prodloužení Δl tyče délky l vlivem normálového napětí σ_n vyjádříme vztahem

$$\Delta l = \frac{l \sigma_\text{n}}{E}.$$

Pro prodloužení $\Delta l'$ vlivem zvýšení teploty platí vztah

$$\Delta l' = \alpha l (t_2 - t_1),$$

přičemž předpokládáme, že teplotní roztažnost je v daném teplotním intervalu lineární. Za předpokladu, že platí

$$\Delta l = \Delta l',$$

dostaneme

$$\frac{l\sigma_{\mathrm{n}}}{E} = \alpha l(t_2 - t_1)$$

a odtud normálové napětí

$$\sigma_{\mathrm{n}} = E\alpha(t_2 - t_1) = 1{,}6 \cdot 10^8 \text{ Pa.}$$

R3.128 S = 4 cm^2 = 4 · 10^{-4} m^2, Δt = 2 °C, E = 100 GPa = 1 · 10^{11} Pa, α = 19 · 10^{-6} K^{-1}; F = ?

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES} = \alpha l \Delta t \Rightarrow F = \alpha \Delta t ES \approx 1\,500 \text{ N} = 1{,}5 \text{ kN}$$

R3.129 S = 10 cm^2 = 1 · 10^{-3} m^2, Δt = 15 °C, α = 12 · 10^{-6} K^{-1}, E = 2 · 10^{11} Pa; F = ?

$$\Delta l = l\alpha \Delta t = \frac{Fl}{ES} \Rightarrow F = ES\alpha\Delta t = 36\,000 \text{ N} = 36 \text{ kN}$$

R3.130 t_1 = 15 °C, r = 0,3 m, h = 0,4 m, t_2 = 65 °C, α = 17 · 10^{-6} K^{-1}; a) ΔS = ?, b) ΔV = ?

a) $S = \pi r^2$, $S_1 = \pi r^2(1 + 2\alpha\Delta t)$; $\Delta S = S_1 - S = \pi r^2 2\alpha(t_2 - t_1)$ = 4,8 · 10^{-4} m^2,

b) $V = \pi r^2 h$, $V_1 = \pi r^2(1 + 2\alpha\Delta t)h(1 + \alpha\Delta t) = \pi r^2 h(1 + 3\alpha\Delta t)$;

$\Delta V = V_1 - V = \pi r^2 h 3\alpha(t_2 - t_1)$ = 2,9 · 10^{-4} m^3.

R3.131 t_1 = 18 °C, t_2 = 150 °C, α = 17 · 10^{-6} K^{-1}; $\Delta V/V$ = ?

$$V_1 = V(1 + 3\alpha\Delta t)$$
$$\Delta V = V_1 - V = 3V\alpha\Delta t$$
$$\frac{\Delta V}{V} = 3\alpha(t_2 - t_1) = 0{,}006\,7, \text{tj. } 0{,}67\,\%$$

R3.132 t_1 = 10 °C, l = 2,0 m, V = 5,0 · 10^{-3} m^3, ρ = 2 700 kg · m^{-3}, α = 24 · 10^{-6} K^{-1},
t_2 = 60 °C; a) Δl =?, b) ΔV = ?, ρ_1 = ?

a) $\Delta l = \alpha l(t_2 - t_1)$ = 2,4 · 10^{-3} m = 2,4 mm

b) $\Delta V = 3\alpha V(t_2 - t_1)$ = 1,8 · 10^{-5} m^3

c) $\rho_1 = \dfrac{\rho}{1 + 3\alpha\Delta t} \approx \rho(1 - 3\alpha\Delta t) = 2\,690 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

3.5 Kapaliny

R3.133 a) Štěrbinou vzlíná inkoust; b) vzlínavostí mezi vlákny knotu se petrolej dostává k místu, kde hoří; c) póry ve zdivu vzlíná voda do vyšších míst zdiva.

R3.134 Větší hmotnost mají kapky studené vody, neboť s rostoucí teplotou se zmenšuje povrchové napětí.

R3.135 $l = 6$ cm $= 0{,}06$ m, $\sigma = 0{,}04\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$; a) $F = ?$, b) $s = 5$ cm $= 0{,}05$ m, $\Delta E = ?$

a) $F = 2\sigma l = 4{,}8 \cdot 10^{-3}$ N, b) $\Delta E = W = Fs = 2\sigma ls = 2{,}4 \cdot 10^{-4}$ J.

R3.136 $\rho = 7\,900\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\sigma = 0{,}073\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $d = ?$

Jehla působí na hladinu tlakem

$$p = \frac{mg}{S} = \frac{\pi l d^2 g\rho}{4dl} = \frac{1}{4}\pi d\rho g.$$

Tento tlak může být nanejvýš rovný tlaku pod zakřiveným povrchem hladiny, který je pro válcový povrch

$$p_{\mathrm{k}} = \frac{\sigma}{r} = \frac{2\sigma}{d}.$$

Porovnáním obou tlaků,

$$\frac{1}{4}\pi g d\rho = \frac{2\sigma}{d},$$

dostaneme pro maximální možný průměr jehly

$$d = \sqrt{\frac{8\sigma}{\pi g\rho}} = 1{,}55 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 1{,}55\ \mathrm{mm}.$$

Úlohu můžeme řešit také pomocí rovnováhy sil. Jehla působí na hladinu kapaliny tíhovou silou o velikosti $mg = l\pi r^2\rho g = l\pi\rho g(d^2/4)$. Tato síla je v rovnováze se silou povrchového napětí, které působí po obou stranách jehly, tedy po délce $2l$. Velikost síly je $2l\sigma$. Porovnáním obou sil dostaneme opět stejný výsledek.

R3.137 $r_1 = 2$ mm $= 2 \,.\, 10^{-3}$ m, $\sigma = 0{,}073\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$, $r_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ m; $E_1 = ?$, $E_2/E_1 = ?$

$$E_1 = 4\pi r_1^2\sigma = 3{,}7 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}.$$

Počet kapek, které se vytvoří rozprášením kapky o poloměru r_1 na kapky o poloměru r_2, je

$$n = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \frac{r_1^3}{r_2^3},$$

povrchová energie jedné malé kapky je

$$E = 4\pi r_2^2,$$

povrchová energie všech malých kapek je $E_2 = nE$. Po dosazení za n a E dostaneme poměr energií

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{r_1}{r_2} = 1\,000.$$

R3.138 $d = 2$ cm $= 2 \cdot 10^{-2}$ m, $\sigma = 0{,}040$ N $\cdot$ m^{-1}; $p = ?$

Mýdlová bublina má dva povrchy. Přetlak uvnitř bubliny je

$$p = \frac{4\sigma}{r} = \frac{8\sigma}{d} = 16 \text{ Pa.}$$

R3.139 Vzduch z menší bubliny začne proudit do větší bubliny, takže větší bublina se zvětšuje, menší zmenšuje. V menší bublině je větší tlak než ve větší, při zmenšování bubliny se tlak dále zvětšuje.

R3.140 $r = 7$ cm $= 0{,}07$ m, $\sigma = 0{,}040$ N $\cdot$ m^{-1}; $W = ?$

Práce W vykonaná při vyfouknutí kulové bubliny je rovna povrchové energii bubliny, $W = E$. Bublina má dva povrchy, vnitřní a vnější, jejichž poloměry považujeme za stejné. Plošný obsah obou povrchů je $S = 8\pi r^2$. Povrchová energie je $E = S\sigma = 8\pi r^2\sigma$. Pro dané hodnoty je $W = E = 4{,}9 \cdot 10^{-3}$ J.

R3.141 $n_1 = 50$, $m_1 = 5$ g, $n_2 = 100$, $m_2 = 3$ g, $\sigma_1 = 0{,}072$ N $\cdot$ m^{-1}; $\sigma_2 = ?$

Kapka kapaliny odkápne v okamžiku, kdy je tíhová síla, která na ni působí, rovna síle povrchového napětí, působící na obvodu trubice, tedy $2\pi R\sigma = mg$, přičemž m je hmotnost jedné kapky. Hmotnost n_1 kapek vody je m_1, hmotnost n_2 kapek etylalkoholu je m_2. Platí tedy vztahy: $n_1 2\pi R\sigma_1 = m_1 g$, $n_2 2\pi R\sigma_2 = m_2 g$, jejichž dělením dostaneme

$$\frac{n_1\sigma_1}{n_2\sigma_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

a odtud povrchové napětí etylalkoholu

$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{n_1 m_2}{n_2 m_1} = 0{,}022\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}.$$

R3.142 d = 1,2 mm = 1,2 · 10^{-3} m, V = 3 $\mathrm{cm^3}$ = 3 · 10^{-6} $\mathrm{m^3}$, n = 220, ρ = 910 kg · $\mathrm{m^{-3}}$, g = 9,8 m · $\mathrm{s^{-2}}$; σ = ?

Kapka kapaliny odkápne v okamžiku, kdy je tíhová síla, která na ni působí, rovna síle povrchového napětí, působící na obvodu trubice, tedy $2\pi R\sigma = \pi d\sigma = m_1 g$, přičemž m_1 je hmotnost jedné kapky. Hmotnost n kapek $m = nm_1 = V\rho g$, odtud povrchové napětí

$$\sigma = \frac{V\rho g}{\pi d n} = 0{,}032\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}.$$

R3.143 h = 4 mm; a) $\rho_1 = 2\rho$, h_1 = ?, b) $r_1 = 2r$, h_1 = ?, c) $\sigma_1 = 2\sigma$, h_1 = ?

Vztah pro výšku výstupu kapaliny, dokonale smáčející stěny, je

$$h = \frac{2\sigma}{r\rho g}.$$

a) $h_1 = \dfrac{2\sigma}{r\rho_1 g} = \dfrac{2\sigma}{r2\rho g} = \dfrac{h}{2} = 2\ \mathrm{mm}$

b) $h_1 = \dfrac{2\sigma}{2r\rho g} = \dfrac{h}{2} = 2\ \mathrm{mm}$

c) $h_1 = \dfrac{2\sigma_1}{r\rho g} = \dfrac{4\sigma}{r\rho g} = 2h = 8\ \mathrm{mm}$

R3.144 r = 0,50 mm = 5 · 10^{-4} m, h = 11,4 mm = 11,4 · 10^{-3} m, ρ = 790 kg · $\mathrm{m^{-3}}$, g = 9,8 m · $\mathrm{s^{-2}}$; σ = ?

$$h\rho g = \frac{2\sigma}{r} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2} h\rho g r = 0{,}022\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

R3.145 r_1 = 0,4 mm = 4 · 10^{-4} m, r_2 = 1,0 mm = 1,0 · 10^{-3} m, $h_1 - h_2$ = 2,2 cm = 2,2 · 10^{-2} m, g = 9,8 m · $\mathrm{s^{-2}}$, ρ = 1 000 kg · $\mathrm{m^{-3}}$; σ = ?

$$h_1 = \frac{2\sigma}{r_1 \rho g},\ h_2 = \frac{2\sigma}{r_2 \rho g},$$

$$h_1 - h_2 = \frac{2\sigma}{\rho g}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow \sigma = \frac{\rho g (h_1 - h_2)}{2\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)} = 0{,}072\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

R3.146 Roztažností rtuti v teploměru, konstruovaném na teploty do 42 °C, by došlo k takovému zvětšení objemu rtuti, že by sklo v kapiláře se rtutí teploměru prasklo.

R3.147 $V = 2{,}5\ \mathrm{l} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$, $t_0 = 0\ °\mathrm{C}$, $t = 31\ °\mathrm{C}$, $\beta = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K^{-1}}$; $\Delta V = ?$

$\Delta V = V\beta\Delta t = V\beta(t - t_0) = 8{,}5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3} = 0{,}085\ \mathrm{l}$

R3.148 Ano, neboť voda při ochlazení ze 4 °C na 0 °C zvětší svůj objem (anomálie vody); navíc se při ochlazení poněkud zmenší objem skleněné nádobky.

R3.149 $t_1 = 10\ °\mathrm{C}$, $\rho_1 = 13\,570\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\rho_2 = 13\,480\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\beta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K^{-1}}$; $t_2 = ?$

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \beta(t_2 - t_1)} \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\beta\rho_2} = 47\ °\mathrm{C}$$

R3.150 $h_0 = 88{,}9\ \mathrm{cm}$, $h = 90{,}5\ \mathrm{cm}$, $t_0 = 0\ °\mathrm{C}$, $t = 100\ °\mathrm{C}$; $\beta = ?$

Jde v podstatě o spojené nádoby. Označme ρ_0 hustotu rtuti při teplotě 0 °C, ρ hustotu při teplotě t. Pro spojené nádoby platí vztah $h_0\rho_0 = h\rho$.

Hustotu ρ při teplotě t vyjádříme vztahem

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t}.$$

Po dosazení takto vyjádřené hustoty do předešlého vztahu dostaneme vztah

$$h_0\rho_0 = \frac{h\rho_0}{1 + \beta t}$$

a odtud po úpravě vyjádříme teplotní součinitel objemové roztažnosti rtuti vztahem

$$\beta = \frac{h - h_0}{h_0 t} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K^{-1}}.$$

R3.151 $V_1 = 5\ \mathrm{l} = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$, $t_1 = 20\ °\mathrm{C}$, $t_2 = 90\ °\mathrm{C}$, $\rho_{20} = 998\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\rho_{90} = 965\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; $\Delta V = ?$

$$\Delta V = V_2 - V_1$$
$$m = V_1\rho_{20}$$
$$V_2 = \frac{m}{\rho_{90}} = V_1\frac{\rho_{20}}{\rho_{90}}$$
$$\Delta V = V_1\left(1 - \frac{\rho_{20}}{\rho_{90}}\right) = 0{,}17 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3} = 0{,}17\ \mathrm{l}$$

R3.152 $m_0 = 22{,}05\ \mathrm{g}$, $t_1 = 15\ °\mathrm{C}$, $m_1 = 41{,}60\ \mathrm{g}$, $t_2 = 40\ °\mathrm{C}$, $m_2 = 41{,}05\ \mathrm{g}$, $\alpha = 9 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K^{-1}}$; $\beta = ?$

Objem kapaliny v pyknometru při teplotě t_1 můžeme vyjádřit vztahem

$$V_1 = \frac{m_1 - m_0}{\rho_1},$$

při teplotě t_2 vztahem

$$V_2 = \frac{m_2 - m_0}{\rho_2}.$$

Hustota kapaliny při teplotě t_2 je

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \beta(t_2 - t_1)}.$$

Objem

$$V_2 = \frac{1}{\rho_1}(m_2 - m_1)[1 + \beta(t_2 - t_1)]$$

Tento objem vyjádříme také pomocí roztažnosti skla, z něhož je zhotoven pyknometr: $V_2 = V_1[1 + 3\alpha(t_2 - t_1)]$. Porovnáním obou vztahů pro objem V_2 dostaneme po úpravách teplotní součinitel objemové roztažnosti kapaliny

$$\beta = \frac{m_1 - m_2}{(m_2 - m_0)(t_2 - t_1)} + 3\alpha \frac{m_1 - m_0}{m_2 - m_0} = 1{,}19 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}.$$

R3.153 $t_1 = 20\ °\mathrm{C}$, $F_{vz1} = 0{,}46\ \mathrm{N}$, $t_2 = 60\ °\mathrm{C}$, $\rho_1 = 790\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\beta = 1{,}10 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K^{-1}}$, $\alpha = 9 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K^{-1}}$;
$F_{vz2} = ?$

$$F_{vz1} = V_1\rho_1 g,\ F_{vz2} = V_2\rho_2 g$$
$$V_2 = V_1[1 + 3\alpha(t_2 - t_1)]$$
$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \beta(t_2 - t_1)}$$
$$F_{vz2} = V_2\rho_2 g = V_1\rho_1 g \frac{1 + 3\alpha(t_2 - t_1)}{1 + \beta(t_2 - t_1)} = F_{vz1} \frac{1 + 3\alpha(t_2 - t_1)}{1 + \beta(t_2 - t_1)} = 0{,}44\ \mathrm{N}$$

3.6 Změny skupenství látek

R3.154 Vodní páry kondenzují na vodní kapky nebo krystalují na sněhové vločky; tím se uvolňuje skupenské teplo tání nebo sublimační teplo.

R3.155 Krystalická látka taje za daného tlaku při určité konstantní teplotě. Amorfní látka mění skupenství postupně a nelze u ní přesně určit teplotu tání.

R3.156 Voda se z povrchu lidského těla vypařuje a odebírá skupenské teplo vypařování.

R3.157 m_1 = 5,5 kg, t_1 = 70 °C, t = 30 °C, t_2 = 0 °C, l_t = 332 kJ · kg^{-1}, c = 4,18 kJ · kg^{-1} · K^{-1}; m_2 = ?

$$m_1c(t_1 - t) = m_2c(t - t_2) + m_2l_\mathrm{t} \Rightarrow m_2 = \frac{m_1c(t_1 - t)}{c(t - t_2) + l_\mathrm{t}} = 2{,}0\ \mathrm{kg}$$

R3.158 t_1 = –10 °C, t_0 = 0 °C, m = 1,20 kg, c = 4,18 kJ · kg^{-1} · K^{-1}, l_t = 332 kJ · kg^{-1}; m_1 = ?

$$mc(t_0 - t_1) = m_1l_\mathrm{t} \Rightarrow m_1 = \frac{mc(t_0 - t_1)}{l_\mathrm{t}} = 0{,}15\ \mathrm{kg}$$

R3.159 m_1 = 200 g = 0,20 kg, t_1 = 8 °C, m_2 = 300 g = 0,30 kg, t_2 = –20 °C, t_0 = 0 °C,

c_1 = 4,18 kJ · kg^{-1} · K^{-1}, c_2 = 2,10 kJ · kg^{-1} · K^{-1}, l_t = 332 kJ · kg^{-1}; m_1' = ?, m_2' = ?

Voda se ochladí na teplotu t_0 a tím dodá teplo $Q_1 = m_1c_1(t_1 - t_0)$.

Led se ohřeje na teplotu t_0 a odebere tím teplo $Q_2 = m_2c_2(t_0 - t_2)$.

Teplo $Q_2 - Q_1$ se spotřebuje na zmrznutí části vody o hmotnosti m, platí tedy $Q_2 - Q_1 = ml_t$.

Sestavíme kalorimetrickou rovnici:

$$m_2c_2(t_0 - t_2) - m_1c_1(t_1 - t_0) = ml_\mathrm{t}$$

a odtud hmotnost

$$m = \frac{m_2c_2(t_0 - t_2) - m_1c_1(t_1 - t_0)}{l_\mathrm{t}} = 0{,}018\ \mathrm{kg}.$$

Teplota vody v kalorimetru je t_0 = 0 °C, hmotnost vody $m_1' = m_1 - m$ = 0,182 kg = 182 g, hmotnost ledu $m_2' = m_2 + m$ = 0,318 kg = 318 g.

R3.160 C = 0,12 kJ · K^{-1}, m_1 = 1,2 kg, t_1 = 25 °C, c = 4,18 kJ · kg^{-1} · K^{-1}, m_2 = 0,20 kg, t_2 = 0 °C, t = 10,4 °C; l_t = ?

$$(m_1c + C)\cdot(t_1 - t) = m_2c(t - t_2) + m_2l_\mathrm{t},$$

odtud

$$l_t = \frac{(m_1 c + C)\cdot(t_1 - t)}{m_2} - c(t - t_2) = 331\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}.$$

R3.161 m = 2,0 kg; a) L_t = ?, b) l_t = ?

a) Z grafu odečteme L_t = 250 kJ – 100 kJ = 150 kJ.

b) Měrné skupenské teplo tání

$$l_t = \frac{L_t}{m} = 75\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}.$$

R3.162 t_1 = 0 °C, t_2 = 100 °C, τ_1 = 15 min, τ_2 = 81 min, c = 4,2 kJ · kg^{-1} · K^{-1}; l_v = ?

Označme Q teplo, které vařič dodá vodě za 1 minutu. Pak k ohřátí vody na teplotu varu se spotřebuje teplo $Q_1 = mc(t_2 - t_1) = \tau_1 Q$, k jejímu vypaření teplo $Q_2 = ml_v = \tau_2 Q$. Měrné skupenské teplo varu

$$l_v = \frac{\tau_2}{\tau_1} c(t_2 - t_1) = 2\,260\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}.$$

R3.163 m_k = 130 g = 0,13 kg, c_k = 0,39 kJ · kg^{-1} · K^{-1}, m_1 = 200 g = 0,20 kg, t_1 = 18 °C, m_2 = 20 g = 0,020 kg, t_2 = 100 °C, c = 4,18 kJ · kg^{-1} · K^{-1}, t = 72 °C; l_v = ?

$$(m_1 c + m_k c_k)(t - t_1) = m_2 c(t_2 - t) + m_2 l_v,$$

odtud měrné skupenské teplo varu vody

$$l_v = \frac{(m_1 c + m_k c_k)(t - t_1)}{m_2} - c(t_2 - t) = 2\,280\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}.$$

R3.164 m_1 = 70 kg, t_1 = 25 °C, c_1 = 4,18 kJ · kg^{-1} · K^{-1}, m_2 = 100 kg, t_2 = 680 °C, c_2 = 0,46 kJ · kg^{-1} · K^{-1}, l_v = 2 260 kJ · kg^{-1}; m = ?

$$m_1 c_1 (t - t_1) + m l_v = m_2 c_2 (t_2 - t),$$

odtud

$$m = \frac{m_2 c_2 (t_2 - t) - m_1 c_1 (t - t_1)}{l_v} = 2{,}1\ \mathrm{kg}.$$

R3.165 C = 0,10 kJ · K^{-1}, m_1 = 0,30 kg, t_1 = 14 °C, m_2 = 0,020 kg, t_2 = 100 °C, m_3 = 0,050 kg, t_3 = 0 °C, c = 4,18 kJ · kg^{-1} · K^{-1}, l_t = 332 kJ · kg^{-1}, l_v = 2 260 kJ · kg^{-1}; t = ?

$$(m_1 c + C)(t - t_1) + m_3 l_t + m_3 c(t - t_3) = m_2 c(t_2 - t) + m_2 l_v,$$

odtud po úpravách výsledná teplota v kalorimetru

$$t = \frac{(m_1 c + C)t_1 + m_2 c t_2 + m_3 c t_3 + m_2 l_v - m_3 l_t}{(m_1 + m_2 + m_3)c + C} = 34\ °\mathrm{C}.$$

R3.166 Ano, s rostoucí nadmořskou výškou klesá atmosférický tlak a teplota varu se snižuje.

R3.167 V Papinově hrnci je větší tlak, než je tlak atmosférický, takže se v něm voda vaří při teplotě vyšší než 100 °C, a proto se v něm rychleji tepelně zpracují potraviny.

R3.168 a) $p = 8{,}45 \cdot 10^4$ Pa; t_v = ?, b) $p = 2{,}7 \cdot 10^5$ Pa; t_v = ?

a) $t_v = 95$ °C

b) $t_v = 130$ °C

R3.169 $m = 1{,}0$ kg, $t_1 = -10$ °C, $t_0 = 0$ °C, $t_2 = 100$ °C, $c_1 = 2{,}1$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}, $l_t = 332$ kJ · K^{-1}, $c_2 = 4{,}18$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}, $l_v = 2\,260$ kJ · kg^{-1}; Q = ?

$Q = mc_1(t_0 - t_1) + ml_t + mc_2(t_2 - t_0) + ml_v = 3{,}03 \cdot 10^3$ kJ ≈ 3 MJ

R3.170 $t_0 = 27$ °C, $t_t = 327$ °C, $l_t = 22{,}6$ kJ · kg^{-1}, $c = 0{,}129$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}; v = ?

Při nárazu střely na desku se kinetická energie střely přemění na vnitřní energii; předpokládáme, že náraz je dokonale nepružný. Kinetická energie střely je $E_k = mv^2/2$, kde m je hmotnost střely, v její rychlost.

Teplo potřebné k tomu, aby se střela ohřála na teplotu tání a při této teplotě roztála, je

$Q = mc(t_t - t_0) + ml_t$.

Nepřebírá-li ocelová deska teplo, pak platí $E_k = Q$, tedy

$mv^2/2 = mc(t_t - t_0) + ml_t$.

Odtud minimální rychlost střely

$$v = \sqrt{2[c(t_1 - t_0) + l_t]} = 350\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

R3.171 Ano, je nulové v kritickém stavu látky (viz bod K na obr. 3-173 [3-14]).

R3.172 a) Teplota tání i teplota varu se zvýší, b) teplota tání se sníží, teplota varu se zvýší.

R3.173 a) v pevném, b) v kapalném, c) v plynném, d) tání, e) vypařování.

4 MECHANICKÉ KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

4.1 Kmitání mechanického oscilátoru

R4.1 $f = 440\ \text{Hz} = 4{,}4 \cdot 10^2\ \text{Hz}$; $T = ?$

$$T = \frac{1}{f} = 2{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{s} = 2{,}3\ \text{ms}$$

R4.2 $f = 10^3\ \text{Hz}$, $t_1 = 0{,}1\ \text{s}$, $t_2 = 0{,}5\ \text{s}$; $n_1 = ?$, $n_2 = ?$

$$n_1 = ft_1 = 100,\quad n_2 = ft_2 = 500$$

R4.3 $f = ?$, $T = ?$

$f = 5\ \text{Hz}$, $T = 0{,}2\ \text{s}$

R4.4 $v = 2\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1} = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $l = 8\ \text{mm} = 8 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$; $f = ?$

$$T = \frac{l}{v} = 40\ \text{s}$$

$$f = \frac{v}{l} = 2{,}5\ \text{Hz}$$

R4.5 $v = 20\ \text{mm} \cdot \text{s}^{-1} = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $f = 72\ \text{min}^{-1} = 1{,}2\ \text{Hz}$; $l = ?$

$$l = vT = \frac{v}{f} = 1{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 17\ \text{mm}$$

R4.6 Konstantní jsou amplituda výchylky, perioda a frekvence, ostatní se mění.

R4.7 Kmitání na obr. 4-7a, b [4-2a, b] se liší periodou, kmitání na obr. b, c se liší amplitudou, kmitání na obr. a, c se liší periodou a amplitudou.

a) $\{y_1\} = 5 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi\{t\})$
b) $\{y_1\} = 5 \cdot 10^{-3} \sin(\pi\{t\})$
c) $\{y_1\} = 1 \cdot 10^{-2} \sin(\pi\{t\})$

R4.8 $y_m = 0{,}2\ \text{m}$

$y = y_{\mathrm{m}} \sin \frac{2\pi}{T} t$

$\{y\} = 0{,}2 \sin \frac{\pi}{2} = 0{,}2; \;\; y = 0{,}2 \text{ m}$

$\{y\} = 0{,}2 \sin \frac{2\pi}{3} = 0{,}2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}17; \;\; y = 0{,}17 \text{ m}$

$\{y\} = 0{,}2 \sin \pi = 0; \;\; y = 0$

R4.9 Rovnici

$$\{y\} = 0{,}2 \sin \frac{5}{2} \pi \{t\}$$

porovnáme s rovnicí pro okamžitou výchylku harmonického kmitání $y = y_{\mathrm{m}} \sin (\omega t + \varphi_0)$. Porovnáním určíme $y_{\mathrm{m}} = 0{,}2$ m, $\omega = 5/2 \text{ s}^{-1}$, $\varphi_0 = 0$. Protože $\omega = 2\pi/T$, platí

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{5\pi}{2} \text{ s}^{-1} \Rightarrow T = \frac{4}{5} \text{ s}, \;\; f = \frac{1}{T} = \frac{5}{4} \text{ Hz.}$$

R4.10 $y_{\mathrm{m}} = 5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2}$ m, $T = 0{,}5$ s, $\varphi_0 = 0$

$$\{y\} = 5 \cdot 10^{-2} \sin \frac{2\pi}{T} \{t\} = 5 \cdot 10^{-2} \sin 4\pi \{t\}$$

R4.11 a) $\varphi_{01} = 0$, b) $\varphi_{02} = \pi/2$, c) $\varphi_{03} = \pm\pi$, d) $\varphi_{04} = -\pi/2$

a) $y_1 = 5 \sin 2\pi t$

b) $y_2 = 5 \sin (2\pi t + \pi/2)$

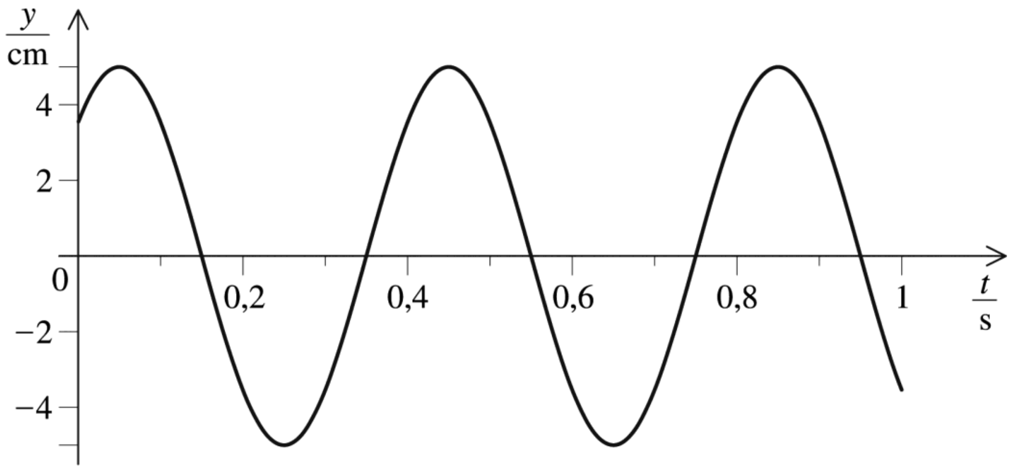
c) $y_3 = 5 \sin (2\pi t \pm \pi)$

d) $y_4 = 5 \sin (2\pi t - \pi/2)$

R4.12 $t = 1$ min $= 60$ s, $n = 150$, $y_{\mathrm{m}} = 5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2}$ m, $\varphi_0 = 45° = \pi/4$; $y = ?$

$T = \frac{t}{n} = 0{,}4 \text{ s}$

$\{y\} = 5 \cdot 10^{-2} \sin \left(5\pi \{t\} + \frac{\pi}{4} \right)$



Obr. R4-12 [V4-1]

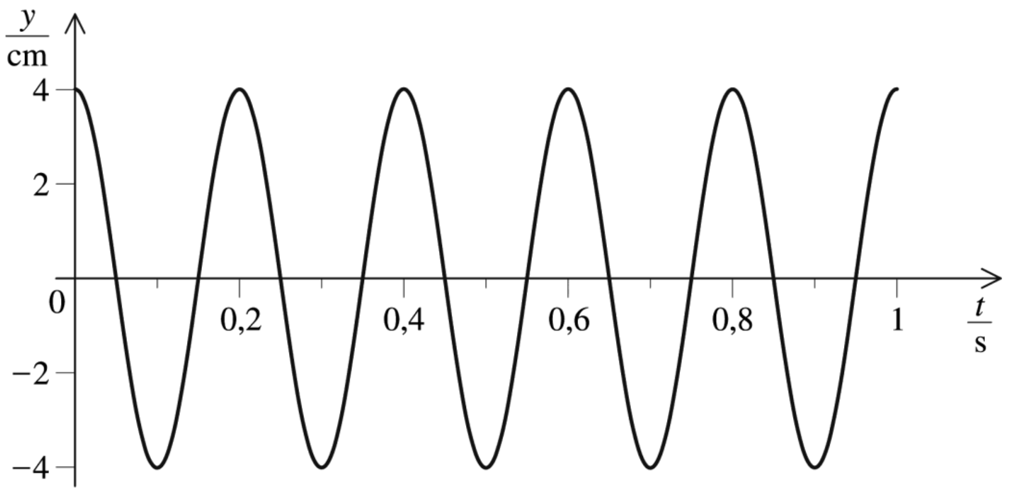
R4.13 $t = 0$, $T/4$, $T/3$, $T/2$; $y = ?$

a) $\{y_1\} = 0{,}04 \sin \frac{\pi}{2} = 0{,}04;\ y_1 = 0{,}04\ \mathrm{m}$

b) $\{y_2\} = 0{,}04 \sin\left(\frac{10}{4}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}04 \sin 3\pi = 0;\ y_2 = 0$

c) $\{y_3\} = 0{,}04 \sin\left(\frac{10}{3}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}04 \sin\left(\frac{23}{6}\pi\right) = -0{,}02;\ y_3 = -0{,}02\ \mathrm{m}$

d) $\{y_4\} = 0{,}04 \sin\left(\frac{10}{2}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}04 \sin\left(\frac{11}{2}\pi\right) = -0{,}04;\ y_4 = -0{,}04\ \mathrm{m}$



Obr. R4-13 [V4-2]

R4.14 $f = 400$ Hz, $y_m = 2$ mm $= 2 \cdot 10^{-3}$ m, $\varphi_0 = 30° = \pi/6$; $y = ?$, $t = ?$, $v = ?$

Pro kmitání platí rovnice $\{y\} = 2 \cdot 10^{-3} \sin (800\pi\{t\} + \pi/6)$:

a) $\{y\} = 2 \cdot 10^{-3} \sin \frac{\pi}{6} = 10^{-3}$

$y = 10^{-3}$ m = 1 mm

b) Počáteční fáze odpovídá 1/12 periody kmitání. To znamená, že hmotný bod byl v rovnovážné poloze v čase $-t_0 = -T/12 = -1/12f$ a v rovnovážné poloze se bude nacházet opět v čase:

$$t = -t_0 + \frac{kT}{2} = -\frac{1}{12f} + \frac{k}{2f} \approx \left(-0{,}21 + k \cdot 1{,}25\right) \text{ ms, kde } k = 1, 2, 3, \ldots$$

c) $v = \omega y_\mathrm{m} = 2\pi f y_\mathrm{m} \approx 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

R4.15

a) V počátečním okamžiku $t = 0$, a proto

$$\{y_1\} = 2 \cdot 10^{-2} \sin\frac{\pi}{4} = 1{,}4 \cdot 10^{-2},$$

$$y_1 = 1{,}4 \text{ cm},$$

$$\{y_2\} = 10^{-2} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -10^{-2},$$

$$y_2 = -1 \text{ cm}.$$

b) Bod M_2 má okamžitou výchylku nulovou, když

$$\sin\left(4\pi\{t\} - \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

a tedy pro čas první nulové výchylky platí

$$4\pi\{\mathrm{t}\} = \frac{\pi}{2}.$$

Odtud

$$t = \frac{1}{8} \text{ s}.$$

Pro okamžitou výchylku bodu M_1 pak vychází

$$\{y_1\} = 2 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot 10^{-2},$$

$$y_1 = 2 \text{ cm}.$$

c) Hmotný bod M_1 má nulovou okamžitou výchylku, když

$$\sin\left(2\pi\{t_1\} + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

a tedy

$$2\pi\{t_1\} = -\frac{\pi}{2},$$

takže t_1 = – 1/8 s. Poněvadž hmotný bod prochází rovnovážnou polohou v každé půlperiodě, platí t_1 = – 1/8 s + k_1T_1/2, kde k_1 = 0, 1, 2, ... Podobně platí pro bod M_2 (viz b) t_2 = 1/8 s + k_2T_2/2. Z rovnic pro okamžitou výchylku vyplývá, že bod M_1 kmitá s periodou T_1 = 1 s a bod M_2 kmitá s periodou T_2 = 0,5 s. Oba body budou mít současně nulovou výchylku v čase $t = t_1 = t_2$, tzn. když

$$-\frac{1}{8}\,\mathrm{s} + k_1\frac{T_1}{2} = \frac{1}{8}\,\mathrm{s} + k_2\frac{T_2}{2}\,.$$

Odtud po dosazení za T_1 a T_2 vychází podmínka $2k_1 = k_2 + 1$, čili při všech lichých hodnotách k_2. Poprvé od počátečního okamžiku projdou oba hmotné body rovnovážnou polohou při k_1 = 1 a k_2 = 1, čili za dobu

$$t = -\frac{1}{8}\,\mathrm{s} + \frac{T_1}{2} = \frac{3}{8}\,\mathrm{s}\,.$$

R4.16 f = 150 min^{-1} = 2,5 s^{-1}, t = 0,3 s, $y = y_\mathrm{m}$; φ_0 = ?

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2{,}5}\,\mathrm{s} = 0{,}4\,\mathrm{s}$$

$$\frac{t}{T} = \frac{0{,}3}{0{,}4} \Rightarrow t = \frac{3}{4}T$$

Kmitání hmotného bodu vyjadřuje rovnice $y = y_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi_0)$. Poněvadž $y = y_\mathrm{m}$, platí

$$\sin(\omega t + \varphi_0) = 1,$$

$$(\omega t + \varphi_0) = \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi_0 = \left(\frac{\pi}{2} - 2\pi\frac{0{,}3}{0{,}4}\right) = -\pi.$$

R4.17 y = 2,6 cm = 2,6 · 10^{-2} m, $\varphi_0 = -\pi/3$, t = 0; y_m = ?

$y = y_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi_0)$

Pro t = 0:

$$y_\mathrm{m} = \frac{y}{\sin\varphi_0} = -3\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$$

$$|y_\mathrm{m}| = 3\,\mathrm{cm}$$

R4.18 $y_m = 50\ \text{mm} = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$, $T = 4\ \text{s}$, $\varphi_0 = \pi/4$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1{,}5\ \text{s}$; $y_1 = ?$, $y_2 = ?$

$$y = y_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\{y_1\} = 5 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 3{,}5 \cdot 10^{-2},\ y_1 = 35\ \text{mm}$$

$$\{y_2\} = 5 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{2\pi}{4} 1{,}5 + \frac{\pi}{4}\right) = 0;\ y_2 = 0$$

R4.19 $y_m = 4\ \text{cm} = 4 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$, $\omega t = \pi/3$, $\varphi_0 = \pi/2$; $y = ?$

$$y = y_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\{y\} = 4 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 10^{-2}$$

$$y = 2\ \text{cm}$$

R4.20 $y_m = 1{,}2\ \text{cm} = 1{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$, $T = 0{,}25\ \text{s}$; $v_m = ?$, $a_m = ?$

$$v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m} = \frac{2\pi}{T} y_\mathrm{m} = 3{,}0 \cdot 10^{-1}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a_\mathrm{m} = -\omega^2 y_\mathrm{m} = -\frac{4\pi^2}{T^2} y_\mathrm{m} = -7{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2};\ |a_\mathrm{m}| = 7{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

R4.21 $y_m = 0{,}02\ \text{m} = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$; $T = ?$, $v_m = ?$, $a_m = ?$

Vztah $\{y\} = \{y_\mathrm{m}\} \sin\left(\frac{\pi}{2}\{t\} + \frac{\pi}{2}\right)$

srovnáme s rovnicí $y = y_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi_0)$ a dostaneme:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = 4\ \text{s}$$

$$v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m} = 0{,}03\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a_\mathrm{m} = -\omega^2 y_\mathrm{m} = -0{,}05\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$|a_\mathrm{m}| = 5\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$$

R4.22 $t = ?$ pro v_m a a_m maximální

$$v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m} \cos \omega t$$

$$a_\mathrm{m} = -\omega^2 y_\mathrm{m} \sin \omega t$$

Z rovnice $y = y_\mathrm{m} \sin\left(\frac{\pi}{6}\{t\}\right)$ najdeme $\omega = \pi/6$.

$|v| = v_m$ pro $\cos \pi/6\ \{t\} = k\pi$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$. Odtud $t = 0$, 6 s, 12 s, ...

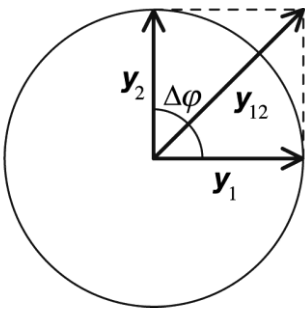
$|a| = a_m$, když $\sin \pi/6 \{t\} = 1$, tj. když $t = (2k + 1) \cdot 3$ s. Odtud t = 3 s, 9 s, 15 s, ...

R4.23 $y_m = 5$ cm $= 5 \cdot 10^{-2}$ m, $T = 2$ s, $\varphi_0 = 0$, $y = 2{,}5$ cm; $v = ?$

$$\{y\} = y_m \sin \omega\{t\} = 5 \cdot 10^{-2} \sin \omega\{t\} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$$
$$\sin \omega\{t\} = 0{,}5 \;\Rightarrow\; \omega t = \pi/6$$
$$t = 1/6 \text{ s}$$
$$\{v\} = \{\omega\}\{y_m\} \cos \omega\{t\} = \pi \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cos(\pi/6)$$
$$v = 0{,}14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

R4.24 $f_1 = f_2 = 4$ Hz, $y_{m1} = y_{m2} = y_m = 2{,}0$ cm, $\varphi_{01} = 0$, $\Delta\varphi = \pi/2$; $y_{12} = ?$

Složky výsledného kmitání můžeme symbolicky znázornit fázory y_1 a y_2 (obr. R4-24a [4-4a]).



Obr. R4-24a

Z fázorového diagramu je zřejmé, že amplituda výchylky výsledného kmitání je $y_{m12} = y_m\sqrt{2} = 2{,}8$ cm.

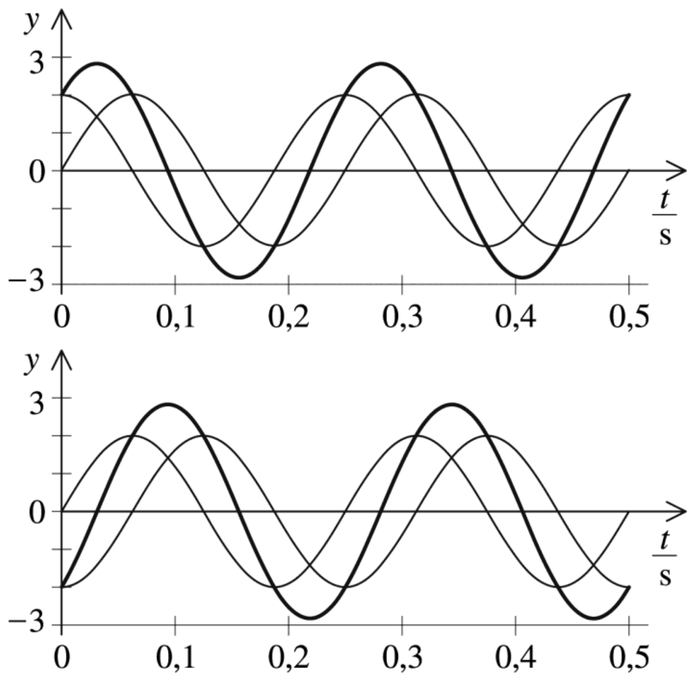
Počáteční fáze výsledného kmitání $\varphi_{012} = \Delta\varphi/2 = \pi/4$.

Protože $\varphi_{01} = 0$, je rovnice výsledného kmitání

$$\{y_{12}\} = 2{,}8 \cdot 10^{-2} \sin\left(8\pi\{t\} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Řešením je i případ, kdy $\varphi_{012} = -\pi/4$.

Časové diagramy obou řešení jsou na obr. R4-24b [4-4b].



Obr. R4-24b

R4.25 $y_{m1} = 3\ \text{cm} = 3 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$, $y_{m2} = 5\ \text{cm} = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$; $y_{12} = ?$

a) $\{y_{12}\} = \{y_1 + y_2\} = 0{,}08 \sin \omega \{t\}$

b) $\{y_{12}\} = \{y_1 - y_2\} = 0{,}02 \sin(\omega\{t\} + \pi)$

R4.26 $f = 8\ \text{Hz}$, $y_{m1} = y_{m2} = y_m = 2\ \text{cm} = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$, $\Delta\varphi = \varphi_{01} - \varphi_{02} = \pi/4$

$$y_{12} = y_m \sin(\omega t + \varphi_{01}) + y_m \sin(\omega t + \varphi_{02})$$

Použijeme vztah

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

a dostaneme:

$$y_{12} = 2 y_m \cos\frac{\Delta\varphi}{2} \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}\right)$$

$$\{y_{12}\} = 0{,}04 \sin(16\pi\{t\} + \pi/8)$$

R4.27 $\{y_{12}\} = 0{,}14 \sin(10\pi\{t\} + \pi/4)$; $y_{m1} = y_{m2} = y_m = ?$, $f = ?$, $\Delta\varphi_0 = ?$

Pro součet dvou izochronních kmitání o stejné amplitudě platí vztah (viz úlohu 4.26)

$$y_{12} = 2 y_m \cos\frac{\Delta\varphi}{2} \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}\right).$$

Jestliže bude $\varphi_{01} = 0$, pak $\varphi_{02} = \Delta\varphi_0 + \varphi_{01} = \Delta\varphi_0$. Poněvadž

$$\frac{\varphi_{01}+\varphi_{02}}{2} = \frac{\Delta\varphi_0}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Z obecně vyjádřené rovnice dále vyplývá:

$$y_{m12} = 2y_m \cos\frac{\Delta\varphi_0}{2} \quad \Rightarrow \quad y_m = \frac{y_{m12}}{2\cos\frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{0{,}14}{2\cos\frac{\pi}{4}}\ \mathrm{m} = 9{,}9\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} \approx 10\ \mathrm{cm}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5\ \mathrm{Hz}$$

R4.28 $y_{m12} = ?$, $\varphi_{012} = ?$

Z rovnic najdeme:

$$\varphi_{01} = \frac{\pi}{2}, \varphi_{02} = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi_{012} = \frac{\varphi_{01}+\varphi_{02}}{2} = \frac{3\pi}{8} = 67^\circ 30'$$

$$y_{m12} = 2y_{m1}\cos\frac{\varphi_{01}-\varphi_{02}}{2} = 3{,}7\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} = 3{,}7\ \mathrm{cm}$$

R4.29 $k = 10\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$, $m = 100\ \mathrm{g} = 0{,}1\ \mathrm{kg}$; $T = ?$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}1}{10}}\ \mathrm{s} \approx 0{,}63\ \mathrm{s}$$

R4.30 $m = 5\ \mathrm{kg}$, $f = 45\ \mathrm{min^{-1}} = 0{,}75\ \mathrm{Hz}$; $k = ?$

$$T^2 = \frac{1}{f^2} = 4\pi^2\frac{m}{k} \Rightarrow k = 4\pi^2 m f^2 \approx 10^2\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$$

R4.31 $k = 250\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$, $t = 16\ \mathrm{s}$, $n = 20$; $m = ?$

$$T = \frac{t}{n} = 0{,}8\ \mathrm{s}$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k} \Rightarrow m = \frac{kT^2}{4\pi^2} \approx 4{,}1\ \mathrm{kg}$$

R4.32 $T_1 = T$, $\Delta l = 0{,}75 l_1$; $T_2 = ?$

Tuhost k pružného vlákna je nepřímo úměrná jeho délce, tedy

$$k_1 \sim \frac{1}{l_1}, k_2 \sim \frac{1}{l_2} = \frac{1}{l_1 - \Delta l}.$$

Vzhledem k $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1}} \sim \sqrt{l_1}$ a podobně $T_2 = \sqrt{l_2}$ platí

$$T_2 = T_1\sqrt{\frac{l_1 - 0{,}75l_1}{l_1}} = T_1\sqrt{0{,}25} = 0{,}5T_1.$$

R4.33 Δl = 2,5 cm = 2,5 · 10^{-2} m; f = ?

$$k = \frac{F_G}{\Delta l} = \frac{mg}{\Delta l}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{mg}{\Delta l}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = 3{,}2\ \text{Hz}$$

R4.34 T = 0,5 s; Δl = ?

$$k = \frac{mg}{\Delta l}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{\Delta l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}} \Rightarrow \Delta l = \frac{T^2}{4\pi^2}g = 0{,}06\ \text{m} = 6\ \text{cm}$$

R4.35 T_1 = 0,50 s, T_2 = 0,60 s; l = ?

Před přidáním závaží oscilátor kmital s periodou

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

a po zvětšení hmotnosti závaží o Δm bude perioda oscilátoru

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m + \Delta m}{k}}.$$

Pro druhé mocniny period platí vztahy

$$T_1^2 = 4\pi^2\frac{m}{k},\ T_2^2 = 4\pi^2\frac{m + \Delta m}{k}$$

a pro jejich rozdíl dostaneme

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2\frac{\Delta m}{k}.$$

Tuhost pružiny

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{\Delta mg}{\Delta l},$$

kde F je velikost síly, která způsobila prodloužení pružiny o Δl. Dosazením do vztahu pro rozdíl druhých mocnin period dostaneme

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{\Delta l}{g}$$

a odtud

$$\Delta l = \frac{g}{4\pi^2}\left(T_2^2 - T_1^2\right) = 2{,}7\ \text{cm}\,.$$

Přidáním závaží se pružina prodloužila o 2,7 cm.

R4.36 a) Poněvadž při stejném prodloužení l pružin

$$k_1 = \frac{m_1 g}{l} \text{ a } k_2 = \frac{m_2 g}{l} \text{ je } T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

b) $E_\text{c} = \dfrac{1}{2} m y_\text{m} \omega^2$,

takže při $y_{\text{m}1} = y_{\text{m}2}$ a $\omega_1 = \omega_2$ je vzhledem k $m_1 > m_2$, $E_{\text{c}1} > E_{\text{c}2}$.

R4.37 $m = 1$ kg, $k = 160\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$; $y_\text{m} = ?$

Kmitání bude harmonické jen v případě, že se vzdálenost AB nebude měnit, tzn. že nit bude stále napjatá. Tak tomu bude v případě, že amplituda zrychlení kmitavého pohybu $a_\text{m} \le g$, čili když platí

$$\omega^2 y_\text{m} \le g.$$

Poněvadž

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \text{ platí } y_\text{m} \le \frac{mg}{k} = \frac{0{,}1 \cdot 9{,}8}{160}\ \text{m} \approx 0{,}6\ \text{cm}.$$

R4.38 $\omega_0 = ?$

a) Výchylka x obou oscilátorů je stejná, takže platí:

$$F_1 = -k_1 x,\ F_2 = -k_2 x$$
$$ma = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x$$
$$a = -\omega_0^2 x = \frac{k_1 + k_2}{m} x$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

b) Oba oscilátory jsou napínány stejnou silou, takže platí:

$$F = -k_1 y_1 = -k_2 y_2$$

$$y = y_1 + y_2 = -F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = -F\,\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

R4.39 f = ?

Příčinou harmonického kmitání tyčinky je síla pružnosti o velikosti $F_p = k_1\, y_1$, kde k_1 je konstanta závislá na vlastnostech tyčinky. Kmitání tyčinky odpovídá kmitání pružiny o tuhosti k_1, takže pro frekvenci tyčinky platí

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}\,.$$

Ve druhém případě platí při stejné hmotnosti kuličky $F_p = k_2 y_2$, a tedy

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2}{m}}\,.$$

Soustavu na obr. 4-39c [4-7c] lze považovat za dvě navzájem spojené pružiny o tuhostech k_1a k_2. Poněvadž výchylka y kuličky je rovna součtu výchylek konce tyčinky (y_1) a konce pružiny (y_2), platí

$$y = y_1 + y_2 = \frac{F_p}{k_1} + \frac{F_p}{k_2} = \frac{F_p}{k}\,,$$

kde k je celková tuhost soustavy. Po úpravě dostaneme

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

a pro frekvenci f vlastního kmitání soustavy dostaneme

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}\,.$$

Vyjádříme-li k_1 a k_2 pomocí vztahů pro frekvence f_1 a f_2, dostaneme

$$f = \frac{f_1 f_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}\,.$$

R4.40 l = 20 cm = 0,2 m; T = ?

Síla působící na sloupec rtuti $F = \rho g \Delta V = 2\rho g S y$, kde S je obsah plochy průřezu trubice. Tuhost soustavy je dána vztahem $k = F/y = 2\rho g S$ a její hmotnost $m = \rho S l$. Odtud

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho S l}{2\rho g S}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}} \approx 0{,}63\ \mathrm{s}.$$

R4.41 $V = (10 \times 20 \times 20)$ cm, $\rho = 900\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; $T = ?$

Vztlaková síla $F = \rho_0 g S x$, kde ρ_0 je hustota vody a x je dodatečné ponoření hranolu. Hranol o výšce h kmitá s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho h}{\rho_0 g}} = 0{,}6\ \mathrm{s}.$$

R4.42 a) Nezmění se (uvažujeme, že těžiště těl obou dětí je ve stejné poloze), poněvadž perioda kyvadla je jen funkcí jeho délky a nezávisí na hmotnosti.

b) Zkrátí se, poněvadž změna polohy těžiště odpovídá zmenšení délky kyvadla.

R4.43 Nezmění se, poněvadž perioda kyvadla na jeho hmotnosti nezávisí.

R4.44 Při posunutí závaží nahoru se perioda chodu zkrátila a naopak, poněvadž perioda kyvadla závisí na délce kyvadla. Při vyšší teplotě se perioda chodu hodin prodloužila (hodiny se opožďovaly), poněvadž délka kyvadla se zvětšila.

R4.45 a) Zpomalil by se, b) zrychlil by se. Příčinou je změna tíhového zrychlení, které je na vysoké hoře menší a na pólu větší.

R4.46 $g_M = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $t_M = ?$

Budeme-li předpokládat, že pro periodu kyvadla hodin platí na Zemi vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

a minutová ručička vykoná jeden oběh za dobu $t = nT = 1$ h, kde n je počet period kyvadla, pak na Měsíci vykoná ručička jeden oběh za stejný počet period a potřebuje k tomu čas

$$t_M = nT_M = \frac{t}{T}T_M = t\sqrt{\frac{g}{g_M}} = 2{,}5\ \mathrm{h}.$$

R4.47 $M_M = M_Z/81$, $R_M = R_Z/3{,}7$; $T_M = ?$

$$T_Z = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},\ T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_M}}$$

$$g = \kappa\frac{M_Z}{R_Z^2},\ g_M = \kappa\frac{M_M}{R_M^2}$$

$$T_M = T_Z\frac{R_M}{R_Z}\sqrt{\frac{M_Z}{M_M}} = T_Z\frac{\sqrt{81}}{3,7} \approx 2,4T_Z$$

R4.48 $T_1 : T_2 = 3 : 2$; $l_1/l_2 = ?$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{l_1}{l_2} = 2,25$$

R4.49 $f_2 = 2f_1$; $l_2 = ?$

$$f \sim \frac{1}{\sqrt{l}}$$

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = 2 \ \Rightarrow\ l_2 = \frac{l_1}{4}$$

R4.50 $l = 150$ cm $= 1,5$ m, $t = 300$ s, $n = 125$; $g = ?$

$$T = \frac{t}{n} = 2,4\ \mathrm{s}$$

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}l = 10,3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

R4.51 $50T_1 = 30T_2$, $\Delta l = 32$ cm $= 0,32$ m; $l = ?$

$$50\cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 30\cdot 2\pi\sqrt{\frac{l+\Delta l}{g}}$$

$$50^2 l = 30^2 l + 30^2\Delta l \Rightarrow l = \frac{30^2\Delta l}{50^2 - 30^2} = 0,18\ \mathrm{m} = 18\ \mathrm{cm}$$

$l_1 = l = 18$ cm, $l_2 = l + \Delta l = 50$ cm

R4.52 $T_0 = 1,0$ s, $a = 3,0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $T = ?$

Na kyvadlo v raketě působí kromě tíhové síly o velikosti $F_G = mg$ ještě setrvačná síla, která má stejný směr a velikost $F_s = ma$, takže celková síla má velikost $F = mg + ma = m(g + a)$ a pro periodu kyvadla platí vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}\ .$$

Jestliže

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1{,}0\ \text{s},$$

pak

$$T = T_0\sqrt{\frac{g}{g+a}} = 0{,}88\ \text{s}.$$

R4.53 T_1 = 1 s, T_2 = 1,2 s; a = ?

Poněvadž $T_1 < T_2$, je výsledné zrychlení kabiny menší než g, takže platí:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\frac{l}{g-a}}{\frac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{g-a}} = 1{,}2$$

$$a = \frac{1{,}2^2 - 1}{1{,}2^2} g \approx 0{,}3g = 3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Výtah se pohybuje ve směru tíhového zrychlení, tzn. směrem dolů.

R4.54 $a_1 = a_2 = a = 0{,}5g$, $t_1 = t_2$ = 10 s, l = 0,50 m; n = ?

$$n_1 = \frac{t_1}{T_1} = \frac{t_1}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}} = \frac{t_1\sqrt{g+a}}{2\pi\sqrt{l}} = \frac{t_1\sqrt{1{,}5g}}{2\pi\sqrt{l}}$$

$$n_2 = \frac{t_2\sqrt{g-a}}{2\pi\sqrt{l}} = \frac{t_2\sqrt{0{,}5g}}{2\pi\sqrt{l}}$$

$$n = n_1 + n_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{l}}\left(t_1\sqrt{1{,}5g} + t_2\sqrt{0{,}5g}\right) = 14$$

R4.55 $a = 3g$, l = 1,0 m, h = 1 480 m; n = ?

Raketa se pohybuje vzhůru rovnoměrně zrychleným pohybem po dobu t se zrychlením $3g$ a pro výšku h platí vztah

$$h = \frac{1}{2}3gt^2 \text{ a odtud } t = \sqrt{\frac{2h}{3g}}\ .$$

Za dobu t vykoná kyvadlo v raketě n kmitů:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8h}{3l}} = 10$$

R4.56 E_p/E_k = ?

$$E_p = \frac{1}{2}ky_m^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi),\ E_k = \frac{1}{2}mv_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 y_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Poněvadž $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ platí :

$$\frac{E_p}{E_k} = \frac{\frac{1}{2}ky_m^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{\frac{1}{2}ky_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)} = \mathrm{tg}^2(\omega_0 t + \varphi)$$

R4.57 $\varphi = 0$, $t = T/12$, $T/8$, $T/6$; E_p/E_k = ?

Využijeme výsledek úlohy 56:

$$\frac{E_p}{E_k} = \mathrm{tg}^2(\omega_0 t + \varphi) = \mathrm{tg}^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

a) $\dfrac{E_p}{E_k} = \mathrm{tg}^2\left(\dfrac{2\pi}{T}\dfrac{T}{12}\right) = \mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{E_p}{E_k} = \mathrm{tg}^2\left(\dfrac{2\pi}{T}\dfrac{T}{8}\right) = \mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{4} = 1$

c) $\dfrac{E_p}{E_k} = \mathrm{tg}^2\left(\dfrac{2\pi}{T}\dfrac{T}{6}\right) = \mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{3} = 3$

R4.58 $y = y_m/4$, $y_m/2$, y_m

a) $y = \dfrac{y_m}{4} = y_m \sin\omega t \Rightarrow \sin\omega t = \dfrac{1}{4}$

$$\frac{E_k}{E_p} = \mathrm{cotg}^2\omega t = \frac{1-\sin^2\omega t}{\sin^2\omega t} = 15$$

b) $\sin\omega t = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{E_k}{E_p} = 3$$

c) $\sin\omega t = 1$

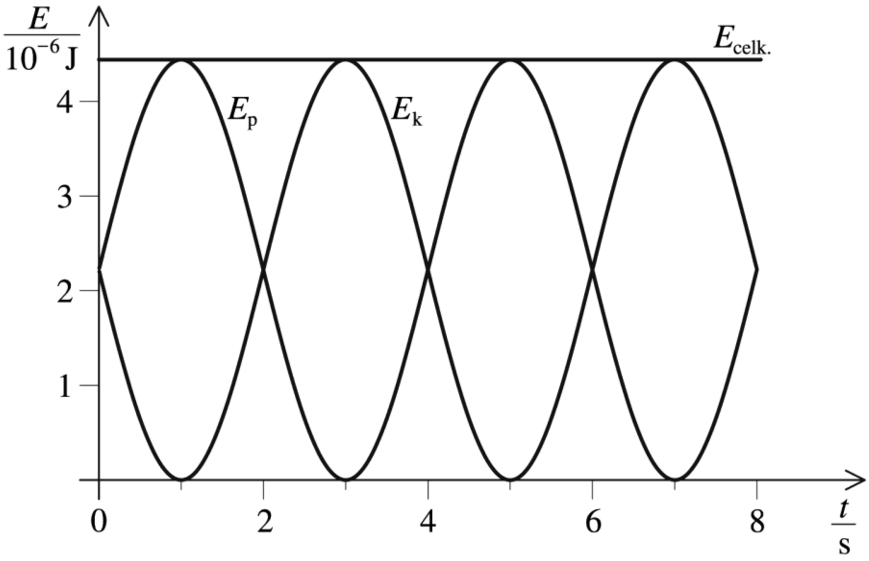
$$\frac{E_k}{E_p} = 0$$

R4.59 $y = y_m \sin(2\pi\{t\} + \pi/6)$, $E_p/E_k = 1$; t = ?

$$\frac{E_p}{E_k} = \mathrm{tg}^2\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow \mathrm{tg}\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{24}\ \mathrm{s}$$

R4.60 Obr. R4-60 [V4-3]



Obr. R4-60

R4.61 E = 3.10^{-5} J, $F_m = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ N, T = 2 s, $\varphi = \pi/3$; y = ?

Největší síla F_m působí na oscilátor v okamžiku, kdy oscilátor dosahuje amplitudy výchylky. Pro velikost síly F_m platí $F_m = ky_m$. V tomto okamžiku má oscilátor také největší potenciální energii, která je rovna energii celkové:

$$E_p = E = \frac{1}{2}ky_m^2$$

Poněvadž $k = F_m/y_m$, je $E = F_m y_m/2$ a odtud $y_m = 2E/F_m = 4 \cdot 10^{-2}$ m. Úhlová frekvence oscilátoru $\omega = 2\pi/T = \pi\ \mathrm{s}^{-1}$ a pro okamžitou výchylku platí rovnice:

$$\{y\} = 4 \cdot 10^{-2} \sin\left(\pi\{\mathrm{t}\} + \pi/3\right)$$

R4.62 y_m = 2 cm = $2 \cdot 10^{-2}$ m, $E = 3 \cdot 10^{-7}$ J, $F = 2{,}25 \cdot 10^{-5}$ N; y = ?

$$E = \frac{1}{2}ky_m^2 \Rightarrow k = \frac{2E}{y_m^2}$$

$$F = ky \Rightarrow y = \frac{F}{k} = \frac{Fy_m^2}{2E} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} = 1{,}5\ \mathrm{cm}$$

R4.63 Závaží se rozkmitá periodickým kmitáním s periodou vlastního kmitání závaží. Při rezonanci lze soustavu oscilátoru rozkmitat i malými silovými impulzy. Periodické působení musí trvat dostatečně dlouhou dobu.

R4.64 Prázdný automobil se rozkmitá při větší rychlosti než plný, poněvadž jeho rezonanční frekvence je větší.

R4.65 f_{rez} = 4,5 Hz = 4,5 · 60 ot/min = 270 ot/min

R4.66 T_0 = 0,8 s, l = 60 cm = 0,6 m; v = ?

$$v = \frac{l}{T_0} = 0{,}75\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx 3\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

R4.67

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{G/g}{F/h}} = 2\pi\sqrt{\frac{Gh}{Fg}}$$

$$v = \frac{l}{T_0} = \frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{Fg}{Gh}}$$

R4.68 T_0 = 1,25 s, l = 25 m; v = ?

$$v = \frac{l}{nT_0} = \frac{20}{n}\mathrm{m \cdot s^{-1}} = \frac{72}{n}\mathrm{km \cdot h^{-1}},$$

kde n = 1, 2, 3, … .

R4.69 h = ?

Destička kmitá s maximální amplitudou, jestliže kapky na ni dopadají s periodou T_0 vlastního kmitání oscilátoru, pro kterou platí $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

$$h = \frac{1}{2}gT_0^2 = \frac{1}{2}g\frac{4\pi^2}{\omega_0^2} = \frac{2\pi^2 g}{\omega_0^2}$$

4.2 Mechanické vlnění

R4.70 v_2 = ?

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2} \Rightarrow v_2 = v_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

R4.71 T_v = 2,0 ms = 2,0 · 10^{-3} s, λ_v = 2,9 m; v_v = ?

$$v_v = \frac{\lambda_v}{T_v} = 1{,}45 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

R4.72 f = 200 Hz, v_v =1,45 · 10^3 m · s^{-1}; λ_v = ?

$$\lambda_v = \frac{v_v}{f} = 7{,}25 \text{ m}$$

R4.73 f = 10 MHz, v_{Al} = 5,1 · 10^3 m · s^{-1}; λ = ?

$$\lambda = \frac{v_{Al}}{f} = 5{,}1 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0{,}51 \text{ mm}$$

R4.74 x = 4 cm, $t = T/6$, $y = y_m/2$; λ = ?

$$y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\sin 2\pi\left(\frac{1}{6} - \frac{4}{\{\lambda\}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2\pi\left(\frac{1}{6} - \frac{4}{\{\lambda\}}\right) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \lambda = 48 \text{ cm} \approx 0{,}5 \text{ m}$$

R4.75 $\{y\} = 0{,}03 \sin 20\pi\{t\}$; v = 200 m · s^{-1}, x = 5,0 m, t = 0,10 s; T = ?, y = ?

a) $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 20\pi \Rightarrow T = 0{,}1 \text{ s}$

b) $y = y_m \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{vT}\right)$

$\{y\} = 0{,}03 \sin 1{,}5\pi = -0{,}03$

$y = 0{,}03 \text{ m}$

R4.76 f = 450 Hz, v = 360 m · s^{-1}, Δx = 20 cm = 0,2 m; $\Delta\varphi$ = ?

$$\lambda = \frac{v}{f} = 0{,}8 \text{ m}$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\frac{0{,}2}{0{,}8} = \frac{\pi}{2}$$

R4.77 T = 0,010 s, v = 340 m · s^{-1}, x_a = 3,4 m, x_b = 1,7 m, x_c = 0,85 m; φ = ?

$$\lambda = vT = 3{,}4 \text{ m}$$

$$\varphi_a = 2\pi\frac{x_a}{\lambda} = 2\pi, \quad \varphi_b = 2\pi\frac{x_b}{\lambda} = \pi, \quad \varphi_c = 2\pi\frac{x_c}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

R4.78 f = 100 Hz, v = 5 · 10^3 m · s^{-1}; λ = ?

$$\lambda = \frac{v}{f} = 50 \text{ m}$$

R4.79 T = 1,0 ms, x_1 = 12,0 m, x_2 = 14,7 m, φ = 3π/2; v = ?

$$\Delta\varphi = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\Delta\varphi} = 3{,}6 \text{ m}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = 3\,600 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

R4.80 T = 0,04 s, v_x = 300 m · s^{-1}, A(10 m, 3 m, 0), B(16 m, 0, 0); $\Delta\varphi$ = ?

$$\lambda = v_x T = 12 \text{ m}$$

$$\Delta x = x_B - x_A = 6 \text{ m}$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = \pi$$

R4.81 f = 725 Hz, v = 1 450 m · s^{-1}, $\Delta\varphi$ = π; Δx = ?

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta\varphi\lambda}{2\pi} = \frac{\Delta\varphi v}{2\pi f} = 1 \text{ m}$$

R4.82 x = 0,025 m, $\Delta\varphi$ = π/6; λ = ?

Kmity bodů můžeme popsat rovnicemi

$$y_1 = y_m \sin\omega t,$$

$$y_2 = y_m \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = y_m \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}\right),$$

kde v je velikost fázové rychlosti vlnění, $\Delta\varphi = \omega x/v$ je fázový rozdíl obou vlnění. Platí tedy:

$$\Delta\varphi = \frac{\omega x}{v} = \frac{2\pi x}{vT} = \frac{2\pi x}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2\pi x}{\Delta\varphi} = 0{,}30 \text{ m}$$

R4.83 a) $\Delta\varphi$ = 0, b) $\Delta\varphi$ = π

R4.84 T = 1,2 s, y_m = 0,2 m, v = 15 m · s^{-1}, x = 45 m, t = 4,0 s; y = ?

$$y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right)$$

$$\{y\} = 0{,}2 \sin 2\pi\left(\frac{4{,}0}{1{,}2} - \frac{45}{15 \cdot 1{,}2}\right) = -0{,}17$$

$$y = -0{,}17 \text{ m} = -17 \text{ cm}$$

R4.85 T = 0,25 s, v = 68 m · s^{-1}, t = 10 s, x_1 = 43 m, y_1 = 3,0 cm = 0,03 m, x_2 = 45 m; y_2 = ?, $\Delta\varphi$ = ?

$$y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\{y_m\} = \frac{\{y_1\}}{\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{vT}\right)} = 0{,}16,\ y_m = 0{,}16 \text{ m}$$

$$\{y_2\} = 0{,}16 \sin 2\pi\left(\frac{10}{0{,}25} - \frac{45}{68 \cdot 0{,}25}\right) = 0{,}13,\ y_2 = 0{,}13 \text{ m} = 13 \text{ cm}$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 0{,}24\pi = 0{,}74 \text{ rad}$$

R4.86 t = 0,50T, $x = \lambda/3$, y = 5,0 cm = 5,0 · 10^{-2} m; y_m = ?

$$y_m = \frac{y}{\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)} = \frac{5{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{\sin 2\pi\left(\frac{0{,}5T}{T} - \frac{\lambda}{3\lambda}\right)} = 5{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 5{,}8 \text{ cm}$$

R4.87 v = 300 m · s^{-1}, x = 60 cm = 0,6 m, t = 0,01 s; y = ?

Z rovnice $\{y\} = 0{,}05 \sin 500\pi\{t\}$ najdeme:

$$y_m = 0{,}05 \text{ m},\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 500\pi \Rightarrow T = \frac{2}{500} \text{ s} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\{y\} = 0{,}05 \sin 2\pi\left(\frac{10^{-2}}{4 \cdot 10^{-3}} - \frac{0{,}6}{300 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}\right) = 0$$

R4.88 f = 3,0 Hz, v = 2,4 m · s^{-1}, Δx = 20 cm = 0,2 m; $\Delta\varphi$ = ?

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\frac{\Delta x f}{v} = 2\pi\frac{0{,}2 \cdot 3}{2{,}4} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}6 \text{ rad}$$

R4.89 $y_1 = y_2 = y_0 \sin\omega t$

$$y_1 = y_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}\right)$$
$$y_2 = y_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$
$$y = y_1 + y_2 = 2y_0 \cos \pi \frac{d}{\lambda} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d+2x}{2\lambda}\right)$$

R4.90 $T = 2{,}1 \cdot 10^{-3}$ s, $\Delta x = 1{,}5$ m; $v = ?$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} = 1{,}5\ \mathrm{m} \Rightarrow \lambda = 3{,}0\ \mathrm{m}$$
$$v = \frac{\lambda}{T} = 1{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R4.91 $T = 0{,}1$ s, $v = 1\,000\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $\Delta x = ?$

a) $x_{\max} = k\lambda = kvT = k \cdot 10^2$ m, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$

b) $x_{\min} = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} = (2k+1) \cdot 50$ m

R4.92 $f = 475$ Hz, $\lambda/2 = 1{,}5$ m; $v = ?$

$$v = \lambda f = 1\,425\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R4.93 $x = 4 \cdot 10^3$ m, $t = 12{,}0$ s; $v = ?$

$$v = \frac{x}{t} = 330\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R4.94 $v = 5{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\Delta t = t_2 - t_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-5}$ s; $s = ?$

$$2s = v\Delta t \Rightarrow s = \frac{v\Delta t}{2} = 2{,}6 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} = 2{,}6\ \mathrm{cm}$$

R4.95 $v = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\Delta t = 0{,}15$ s, $\tau = 26$ °C; $\Delta t' = ?$

$$v_z = (331{,}82 + 0{,}61\tau) \approx 348\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$
$$s = 2x + v\Delta t = v_z \Delta t$$
$$x = \frac{v_z - v}{2}\Delta t \approx 25\ \mathrm{m}$$
$$\Delta t' = \frac{x}{v} \approx 2{,}5\ \mathrm{s}$$

R4.96 $v = 18\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_z = 1\,400\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\Delta t = 50$ ms $= 5 \cdot 10^{-2}$ s, $t = 5$ s

$$s = 2x + v\Delta t = v_z \Delta t$$

$$x = \frac{v_z - v}{2}\Delta t = v\Delta t' \Rightarrow \Delta t' = \frac{v_z - v}{2v}\Delta t = 7\ \mathrm{s}$$

Ponorka nenarazí, doba plavby je větší, než je doba potřebná ke změně směru.

R4.97 u = 36 km · h^{-1} = 10 m · s^{-1}, α = 90°; v = ?

Z rozboru situace znázorněné na obr. 4-97 [4-12] vyplývá, že úhel α, který svírají vlnoplochy, závisí na poměru rychlostí u, v vztahem

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u}.$$

Odtud hledaná rychlost:

$$v = u\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$v = 10\sin 45^\circ\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 7{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

5 ELEKTŘINA A MAGNETISMUS

5.1 Elektrické pole

V úlohách této kapitoly dosazujte $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, $k = 9 \cdot 10^{9}$ N · m^{2} · C^{-2}, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ C^{2} · N^{-1} · m^{-2}.

R5.1 Tělesa zelektrovaná a tělesa elektricky neutrální se navzájem přitahují.

R5.2 Po dotyku získá kulička elektrický náboj souhlasný s nábojem tyče, proto se od tyče odpuzuje.

R5.3 Ano, jeden konec tyče třeme srstí, druhý amalgamovanou kůží.

R5.4. Deska se při utírání obyčejnou látkou zelektruje a přitahuje další prach ze svého okolí.

R5.5 Použijeme např. kuličku z izolantu zavěšenou na niti. Kuličku nabijeme nábojem určité polarity. Pokud je její náboj souhlasný s nábojem tělesa, odpuzuje se. Pokud má opačný náboj než těleso, přitahuje se.

R5.6 $Q = 1$ μC $= 10^{-6}$ C, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $n = ?$

$$n = \frac{Q}{e} = 6{,}2 \cdot 10^{12}$$

R5.7 $Q = -80$ μC $= -8{,}0 \cdot 10^{-5}$ C, $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $n = ?$

$$n = \frac{Q}{e} = 5 \cdot 10^{14}$$

R5.8 a) $r_1 = 2r$, b) $r_2 = 3r$; $F = ?$

$$F \sim \frac{1}{r^2},\ F_1 = \frac{F}{4},\ F_2 = \frac{F}{9}$$

R5.9 $F = 1$ N, a) $r_1 = r/2$, b) $r_2 = r/3$; $F = ?$

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

a) $F_1 = 4$ N

b) $F_2 = 9$ N

R5.10 $r = 10$ cm $= 0{,}1$ m, $Q_1 = Q_2 = 1$ μC $= 10^{-6}$ C; $F = ?$

$$F = k\frac{Q_1Q_2}{r^2} = 0{,}9\ \mathrm{N}$$

R5.11 $Q_1 = Q_2 = 10\ \mu\mathrm{C} = 10^{-5}\ \mathrm{C}$, $F = 10\ \mathrm{N}$; $r = ?$

$$r = \sqrt{\frac{kQ_1Q_2}{F}} = 3\cdot 10^{-1}\ \mathrm{m} = 30\ \mathrm{cm}$$

R5.12 $F = 3{,}6\ \mathrm{N}$, $r = 10\ \mathrm{cm} = 10^{-1}\ \mathrm{m}$; $Q = ?$

$$Q = r\sqrt{\frac{F}{k}} = 2\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} = 2\ \mu\mathrm{C}$$

Poněvadž se náboje navzájem přitahují, mají náboje opačné znaménko: $Q_1 =$
$+2\ \mu\mathrm{C}$, $Q_2 = -2\ \mu\mathrm{C}$.

R5.13 $r = 10^{-14}\ \mathrm{m}$, $Q_\mathrm{p} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$; $F = ?$

$$F = k\frac{Q_\mathrm{p}^2}{r^2} = 2{,}3\ \mathrm{N}$$

R5.14 $Q_1 = 1\ \mu\mathrm{F} = 10^{-6}\ \mathrm{C}$, $r = 3\ \mathrm{cm} = 3\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$, $F = 1\ \mathrm{N}$, a) $\varepsilon_\mathrm{r} = 1$, b) $\varepsilon_\mathrm{r} = 2$; $Q_2 =$
?

a) $Q_2 = \dfrac{Fr^2}{kQ_1} = 10^{-7}\ \mathrm{C} = 0{,}1\ \mu\mathrm{C}$

b) $Q_2' = \dfrac{\varepsilon_\mathrm{r}Fr^2}{kQ_1} = \varepsilon_\mathrm{r}Q_2 = 2\cdot 10^{-7}\ \mathrm{C} = 0{,}2\ \mu\mathrm{C}$

R5.15 $Q_1 = 6\ \mu\mathrm{C} = 6\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$, $Q_2 = -4\ \mu\mathrm{C} = -4\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$, $r = 6\ \mathrm{cm} = 6\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$;
a) $F = ?$, b) $F' = ?$, $Q' = ?$

a) $F = k\dfrac{Q_1Q_2}{r^2} = 60\ \mathrm{N}$

b) $Q' = \dfrac{Q_1 + Q_2}{2} = 10^{-6}\ \mathrm{C} = 1\ \mu\mathrm{C}$

$F' = k\dfrac{Q'^2}{r^2} = 2{,}5\ \mathrm{N}$

R5.16 $Q = 20\ \mu\mathrm{C} = 2\cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}$, $F = 1\ \mathrm{N}$; $E = ?$

$$E = \frac{F}{Q} = 5\cdot 10^{4}\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$$

R5.17 $E = 4\cdot 10^{5}\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$, $Q = 25\ \mu\mathrm{C} = 2{,}5\cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}$; $F = ?$

$F = QE = 10$ N

R5.18 $r = 30$ cm $= 0{,}3$ m, $Q = 1$ μC $= 10^{-6}$ C; $E = ?$

$$E = k\frac{Q}{r^2} = 10^5\ \mathrm{N \cdot C^{-1}}$$

R5.19 $Q = 10^{-2}$ μC $= 10^{-8}$ C, $r_1 = 1$ m, $r_2 = 5$ m; $f(E) = ?$

Závislost velikost intenzity elektrického pole E bodového náboje Q na vzdálenosti r je dána vztahem

$$E = k\frac{Q}{r^2}.$$

Dosadíme $k = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}$, $Q = 10^{-8}$ C a dostaneme

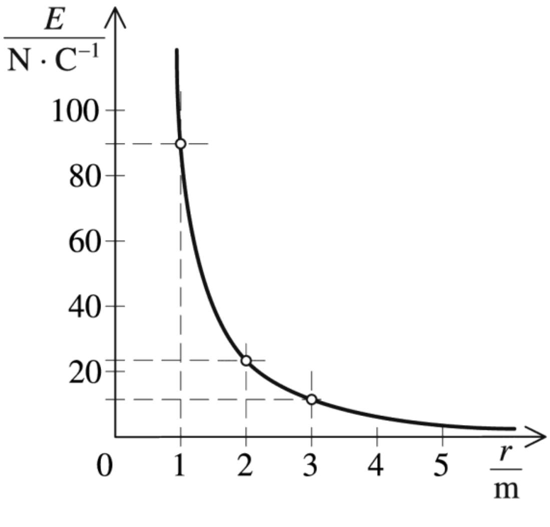
$$E = \frac{90\ \mathrm{N \cdot C^{-1} \cdot m^2}}{r^2},$$

kde r je v metrech a intenzita E elektrického pole je v jednotkách $\mathrm{N \cdot C^{-1}}$.

Číselné hodnoty intenzity E pro vzdálenost $r \in \langle 1\ \mathrm{m}, 5\ \mathrm{m}\rangle$ zapíšeme do tabulky

$\frac{r}{\mathrm{m}}$	1	2	3	4	5
$\frac{E}{\mathrm{N \cdot C^{-1}}}$	90	22,5	10	5,6	3,6

a sestrojíme graf závislosti velikosti intenzity E bodového náboje na vzdálenosti r (viz obr. R5-19 [5-1]).



Obr. R5-19

R5.20 Q_1 = 1 μC = 10^{-6} C, Q_2 = 5 μC = 5 · 10^{-6} C, r = 20 cm = 0,2 m; E = ?

$$E_1 = k\frac{Q_1}{\left(\frac{r}{2}\right)^2},\ E_2 = -k\frac{Q_2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

$$E = E_1 - E_2 = k\frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}(Q_1 - Q_2) = 3{,}6\cdot 10^6\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$$

R5.21 $|AB| = 2r$, a) $Q_1 = -Q_2$, b) $Q_1 = Q_2$; E = ?

a) $E_1 = k\frac{1}{r^2}(Q_1 + Q_2) = k\frac{2Q}{r^2}$

b) $E_2 = 0$

R5.22 Vzhledem ke konstantní vzdálenosti středu od nabitého kruhového prstence jsou zde elektrické síly, které by působily na kladný jednotkový náboj, navzájem vykompenzovány a intenzita elektrického pole E = 0.

R5.23 Q_A = 8 · 10^{-8} C, Q_B = – 8 · 10^{-8} C, r = 0,4 m, c = 0,3 m; E_C = ?, E_D = ?

a) Ve středu C úsečky AB jsou intenzity E elektrického pole nábojů Q_A a Q_B stejně velké a stejného směru (viz obr. 5-23a [5-2a]). Velikost výsledné intenzity pole je proto

$$E_C = \frac{2kQ}{r^2},$$

kde $Q = Q_A = |Q_B|$. Pro dané veličiny je E_C = 9 · 10^3 N · $\mathrm{C^{-1}}$.

b) V bodě D ležícím na ose úsečky AB jsou intenzity E elektrického pole od nábojů Q_A a Q_B opět stejné velké, ale různého směru (viz obr. 5-23b [5-2b]).

Velikost intenzity od každého náboje je $E = kQ/d^2$, kde

$$d = \sqrt{r^2 + c^2} = 0{,}5\ \mathrm{m}.$$

Velikost výsledné intenzity je pak

$$E_D = 2E\cos\alpha,$$

kde cos $\alpha = r/d$. Po dosazení $E = kQ/d^2$ dostáváme

$$E_D = \frac{2kQr}{d^3}.$$

Pro příslušné číselné hodnoty $E_D = 4{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{N \cdot C^{-1}}$.

Velikost intenzity elektrického pole ve středu C dané úsečky je $9 \cdot 10^3\ \mathrm{N \cdot C^{-1}}$, v bodě D je $4{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{N \cdot C^{-1}}$.

R5.24 $Q_1 = 1\ \mu\mathrm{C} = 10^{-6}\ \mathrm{C}$, $E_C = 0$; $Q_2 = ?$, $Q_3 = ?$

Intenzita elektrického pole v bodě C bude nulová, když budou
náboje Q_1 a Q_2 souhlasné a stejně velké, tzn. když $Q_2 = 1\ \mu\mathrm{C}$, a když náboj Q_3 bude nulový ($Q_3 = 0$).

R5.25 $Q = 10\ \mu\mathrm{C} = 10^{-5}\ \mathrm{C}$, $E = 10^4\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$, $s = 10\ \mathrm{cm} = 0{,}1\ \mathrm{m}$; $W_\mathrm{e} = ?$

a) $W_\mathrm{e} = Fs = QEs = 10^{-2}\ \mathrm{J}$

b) Jestliže elektrická síla působí ve směru kolmém k intenzitě elektrického pole, práce se nekoná, $W_\mathrm{e} = 0$.

R5.26 $Q = 5\ \mu\mathrm{C} = 5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$, $W_\mathrm{e} = 1\ \mathrm{J}$, $d = 20\ \mathrm{cm} = 0{,}2\ \mathrm{m}$; $E = ?$

Vektor E je kolmý k deskám a má směr od kladné desky k desce uzemněné.

$$|E| = \frac{W_\mathrm{e}}{Qd} = 10^6\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$$

R5.27 $Q = 50\ \mu\mathrm{C} = 5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}$, $W_\mathrm{e} = 0{,}2\ \mathrm{J}$; $\varphi = ?$

$$\varphi = \frac{W_\mathrm{e}}{Q} = 4 \cdot 10^3\ \mathrm{V} = 4\ \mathrm{kV}$$

R5.28 $Q = 12\ \mu\mathrm{C} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}$, $\Delta\varphi = 500\ \mathrm{V}$; $W_\mathrm{e} = ?$

$W_\mathrm{e} = Q\Delta\varphi = 6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}$

R5.29 $\varphi_\mathrm{A} = +120\ \mathrm{V}$, $\varphi_\mathrm{B} = -80\ \mathrm{V}$, $W_\mathrm{e} = 2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}$; $Q = ?$

$$\Delta\varphi = \varphi_\mathrm{A} - \varphi_\mathrm{B} = 200\ \mathrm{V}$$

$$Q = \frac{W_\mathrm{e}}{\Delta\varphi} = 10^{-6}\ \mathrm{C} = 1\ \mu\mathrm{C}$$

R5.30 $Q = 1\ \mu\mathrm{C} = 10^{-6}\ \mathrm{C}$, $\varphi_1 = 300\ \mathrm{V}$, $\varphi_2 = 800\ \mathrm{V}$; $W_\mathrm{e} = ?$, a) $A \rightarrow B$, b) $A \rightarrow C$

a) $W_\mathrm{e} = Q\Delta\varphi = 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}$

b) $W_\mathrm{e} = 0$

R5.31 Q = 0,25μC = 2,5 · 10^{-4} C, $W_e = 10^{-3}$ J; U = ?

$$U = \frac{W_e}{Q} = 4 \cdot 10^3 \text{ V} = 4 \text{ kV}$$

R5.32 U = 1 000 V, d = 0,1 m, $q = 10^{-6}$ C; E = ?, W = ?

a) Vztah mezi napětím U a intenzitou elektrického pole E mezi dvěma rovnoběžnými vodivými deskami je $U = Ed$. Odtud

$$E = \frac{U}{d}.$$

Pro dané hodnoty je velikost intenzity $E = 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

b) Vztah mezi napětím U a prací W, která se vykoná při přenesení náboje q mezi deskami, je $U = W/q$. Odtud

$W = qU$.

Pro dané hodnoty je práce $W = 10^{-3}$ J.

Velikost intenzity elektrického pole je $10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, práce vykonaná při přenesení náboje je 10^{-3} J.

R5.33 d = 3 cm = 3 · 10^{-2} m, E = 10 kV · m^{-1} = 10^4 V · m^{-1}, d' = 15 cm = 0,15 m; a) U = ?, b) E = ?

a) $U = Ed = 300 \text{ V}$

b) $E = \dfrac{U}{d'} = 2 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} = 2 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$

R5.34 d = 5 cm = 5 · 10^{-2} m, Q = 10 μC = 10^{-5} C, F_e = 1 N; U = ?

$$U = \frac{F_e d}{Q} = 5 \cdot 10^3 \text{ V} = 5 \text{ kV}$$

R5.35 d = 12 cm = 0,12 m, U = 600 V; E = ?

$$E = \frac{U}{d} = 5 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} = 5 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$$

R5.36 U = 220 V, E = 50 kV · m^{-1} = 5 · 10^4 V · m^{-1}; d = ?

$$d = \frac{U}{E} = 4{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4{,}4 \text{ mm}$$

R5.37 r = 10 cm = 0,1 m, Q = 1 μC = 10^{-6} C; σ = ?

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi r^2} = 8 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C \cdot m^{-2}} = 8\ \mathrm{\mu C \cdot m^{-2}}$$

R5.38 $\sigma = 4\ \mu\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-2} = 4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-2}$, $\varepsilon_r = 2$; a) $E_0 = ?$ pro $\varepsilon_r = 1$, b) $E = ?$ pro $\varepsilon_r = 2$

$$E = k\frac{Q}{r^2},\ \ \sigma = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

a) $E_0 = k4\pi\sigma = 4{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$

b) $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r} = 2{,}3 \cdot 10^5\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$

R5.39 $r = 5\ \mathrm{cm} = 5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$, $Q = 10^{-8}\ \mathrm{C}$; $E = ?$, $\varphi = ?$

$$E = k\frac{Q}{r^2} = 3{,}6 \cdot 10^4\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$$

$$\varphi = \frac{kQ}{r} = 1{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{V} = 1{,}8\ \mathrm{kV}$$

R5.40 $Q = 1\ \mu\mathrm{C} = 10^{-6}\ \mathrm{C}$, $r = 5\ \mathrm{cm} = 5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$; $E = ?$, $\varphi = ?$

Uvnitř kovové koule není elektrické pole, takže $E = 0$.

$$\varphi = k\frac{Q}{r} = 1{,}8 \cdot 10^5\ \mathrm{V} = 180\ \mathrm{kV}$$

R5.41 Přiblížíme-li ke kotouči nabitého elektroskopu dlaň ruky, jeho kapacita C se zvětšuje, ale náboj Q se nemění. Proto se potenciál φ zmenšuje ($\varphi = Q/C$) a to se projeví poklesem lístků elektroskopu.

R5.42 Přiblížíme k vodiči jiný vodič spojený se zemí.

R5.43 $C = 100\ \mathrm{pF} = 10^{-10}\ \mathrm{F}$, $Q = 1\ \mu\mathrm{C} = 10^{-6}\ \mathrm{C}$; $\varphi = ?$

$$C = \frac{Q}{\varphi} \Rightarrow \varphi = \frac{Q}{C} = 10^4\ \mathrm{V} = 10\ \mathrm{kV}$$

R5.44 $Q = 1\ \mu\mathrm{C} = 10^{-6}\ \mathrm{C}$, $\varphi = 5\ \mathrm{kV} = 5 \cdot 10^3\ \mathrm{V}$; $C = ?$

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 2 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{F} = 0{,}2\ \mathrm{nF}$$

R5.45 $C = 5\ \mathrm{nF} = 5 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{F}$, $U = 200\ \mathrm{V}$; $Q = ?$

$Q = C\varphi = 10^{-6}\ \mathrm{C} = 1\ \mu\mathrm{C}$

R5.46 C_A = 20 pF = 2 · 10^{-11} F, Q_A = 3 · 10^{-9} C, C_B = 30 pF = 3 · 10^{-11} F, Q_B = 4,5 · 10^{-9} C

$$\varphi_A = \frac{Q_A}{C_A} = 1{,}5 \cdot 10^2 \text{ V}$$

$$\varphi_B = \frac{Q_B}{C_B} = 1{,}5 \cdot 10^2 \text{ V}$$

Poněvadž jsou potenciály obou vodičů stejné, náboj se přemísťovat nebude.

R5.47 r = 9 cm = 9 · 10^{-2} m, Q = 1 μC = 10^{-6} C; C = ?, φ = ?

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{Q}{k\dfrac{Q}{r}} = \frac{r}{k} = 10^{-11} \text{ F} = 10 \text{ pF}$$

$$\varphi = k\frac{Q}{r} = 10^5 \text{ V} = 100 \text{ kV}$$

R5.48 a = 20 cm = 0,2 m, b = 30 cm = 0,3 m, d = 6 mm = 6 · 10^{-3} m; C = ?

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = \varepsilon_0 \frac{ab}{d} = 9 \cdot 10^{-11} \text{ F} \approx 90 \text{ pF}$$

R5.49 S = 200 cm^2 = 2 · 10^{-2} m, d = 3 mm = 3 · 10^{-3} m, ε_r = 6; C = ?

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = 3{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 350 \text{ pF}$$

R5.50 b) $\varepsilon_r > 1$

a) Poněvadž $C \sim 1/d$, kapacita deskového kondenzátoru se zmenší.

b) Poněvadž $C \sim \varepsilon_r$, kapacita deskového kondenzátoru se zvětší.

R5.51 $S = 10^{-2}$ m^2, d = 5 · 10^{-3} m, ε_r = 6, Q = 3,2 · 10^{-6} C; U = ?

Kapacita deskového kondenzátoru je dána vztahem

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d},$$

kde ε_0 je permitivita vakua, ε_r relativní permitivita dielektrika, S obsah účinné plochy desek, d vzdálenost desek.

Napětí mezi deskami kondenzátoru určíme ze vztahu $Q = CU$, tedy $U = Q/C$, a po dosazení za kapacitu C je

$$U = \frac{Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}.$$

Pro dané hodnoty U = 30 kV.

Mezi deskami kondenzátoru je napětí 30 kV.

R5.52 C_0 = 500 pF = 5 · 10^{-10} F, U_0 = 100 V, ε_r = 2; a) C = ?, b) U = ?

a) $C = \varepsilon_r C_0 = 10^{-9}\ \text{F} = 1\ \text{nF}$

b) $U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\varepsilon_r C_0} = \frac{U_0}{\varepsilon_r} = 50\ \text{V}$

R5.53 C = 50 μF = 5 · 10^{-5} F, U = 400 V; W_e = ?

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = 4\ \text{J}$$

R5.54 C_0 = 500 pF

a) spojení paralelně: $C_1 = 2C_0$ = 1 nF

b) spojení do série: $C_2 = C_0/2$ = 250 pF

R5.55 a) paralelně, b) do série.

R5.56 C_1 = 2 nF = 2 · 10^{-9} F, C_2 = 3 nF = 3 · 10^{-9} F, C_3 = 6 nF = 6 · 10^{-9} F, U_0 = 300 V; a) C = ?, b) $U_{1,2,3}$ = ?

a) $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

$$C = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2} = 10^{9}\ \text{F} = 1\ \text{nF}$$

b) Všechny kondenzátory mají stejný náboj, takže $U \sim 1/C$.

$$U_1 : U_2 : U_3 = \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2} : \frac{1}{C_3}$$

$$U_1 = 150\ \text{V}, U_2 = 100\ \text{V}, U_3 = 50\ \text{V}$$

R5.57 C_1 = 1 pF, C_2 = 4 pF, C_3 = 3 pF; C = ?

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4}{5}\ \text{pF}$$

$$C = C_{12} + C_3 = 3{,}8\ \text{pF}$$

5.2 Elektrický proud v pevných látkách

R5.58 t = 1 min = 60 s, a) Q = 150 C, b) Q = 30 C; I = ?

a) $I = \frac{Q}{t} = 2{,}5\ \mathrm{A}$

b) $I = \frac{Q}{t} = 0{,}5\ \mathrm{A}$

R5.59 t = 30 min = 1 800 s, Q = 1 800 C, Q' = 600 C; I = ?, t = ?

$I = \frac{Q}{t} = 1\ \mathrm{A}$

$t = \frac{Q'}{I} = 600\ \mathrm{s} = 10\ \mathrm{min}$

R5.60 a) Δt = 5 s, $I_{\max}$ = 12 A, I_{p} = 6 A; Q = ?

$Q = I_{\mathrm{p}} \Delta t = 30\ \mathrm{C}$

b) Δt = 7,5 s, $I_{\max}$ = 8 A, I_{p} = 4 A; Q = ?

$Q = I_{\mathrm{p}} \Delta t = 30\ \mathrm{C}$

R5.61 C = 5 μF = $5 \cdot 10^{-6}$ C, U = 200 V, $t = 10^{-3}$ s; I = ?

$I = \frac{Q}{t} = \frac{CU}{t} = 1\ \mathrm{A}$

R5.62 t = 3 s, I = 150 A, I' = 4,5 A; t' = ?

$Q = It = I't' \Rightarrow t' = \frac{I}{I'} t = 100\ \mathrm{s}$

R5.63 a) Q = 30 A · h, I = 5 A, b) Q = 45 A · h, I = 9 A; t = ?

a) $t = \frac{Q}{I} = 6\ \mathrm{h}$

b) $t = \frac{Q}{I} = 5\ \mathrm{h}$

R5.64 t_1 = 2 s, t_2 = 6 s; Q = ?, I = ?

Dosadíme-li do rovnice $\{I\} = 4 + 2\{t\}$ zadané hodnoty času, dostaneme I_1 = 8 A a I_2 = 16 A. Střední hodnota proudu ve vodiči I_s = (8 A + 16 A)/2 = 12 A. Vodičem prošel za dobu $t_2 - t_1$ = (6 – 2) s = 4 s celkový náboj $Q = I_s t$ = 48 C.

Proud I_s současně určuje hodnotu ustáleného proudu, který by vodičem musel procházet, aby za stejnou dobu prošel vodičem stejně velký náboj.

R5.65 $U = 100$ V, $\Delta C = 10$ nF $= 10^{-8}$ F, $\Delta t = 1$ s; $I = ?$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{U\Delta C}{\Delta t} = 10^{-6}\ \mathrm{A} = 1\ \mu\mathrm{A}$$

R5.66 $l' = l/2$, $S' = 2S$; $R' = ?$

$$R = \rho\frac{l}{S}$$
$$R' = \rho\frac{l'}{S'} = \rho\frac{l/2}{2S} = \frac{R}{4}$$

R5.67 $\rho_{\mathrm{Cu}} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$, a) $l = 3$ km $= 3 \cdot 10^3$ m, $d = 1{,}6$ mm $= 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ m, b) $l = 5$ km $= 5 \cdot 10^3$ m, $d = 1{,}4$ mm $= 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ m; $R = ?$

$$\text{a) } R = \rho_{\mathrm{Cu}}\frac{l}{\pi d^2/4} = 1{,}7\cdot 10^{-8}\frac{3\cdot 10^3}{\pi\left(1{,}6\cdot 10^{-3}\right)^2/4} = 25\ \Omega$$
$$\text{b) } R = \rho_{\mathrm{Cu}}\frac{l}{\pi d^2/4} = 1{,}7\cdot 10^{-8}\frac{5\cdot 10^3}{\pi\left(1{,}4\cdot 10^{-3}\right)^2/4} = 55\ \Omega$$

R5.68 $l = 65$ cm $= 0{,}65$ m, $d = 0{,}05$ mm $= 5 \cdot 10^{-5}$ m, $R = 18{,}5\ \Omega$; $\rho_{\mathrm{W}} = ?$

$$\rho_{\mathrm{W}} = \frac{R\pi d^2/4}{l} = 5{,}6\cdot 10^{-8}\ \Omega\cdot\mathrm{m}$$

R5.69 $d = 3{,}2$ mm $= 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ m, $R = 51\ \Omega$; $l = ?$

$$R = \rho_{\mathrm{Cu}}\frac{2l}{\pi d^2/4} \Rightarrow l = \frac{R\pi d^2}{8\rho_{\mathrm{Cu}}} = 1{,}2\cdot 10^4\ \mathrm{m} = 12\ \mathrm{km}$$

R5.70 $R = 10{,}8\ \Omega$, $m = 3{,}4$ kg, $\rho = 8{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\rho_{\mathrm{Cu}} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$; $l = ?$, $d = ?$

Odpor R vodiče délky l je určen vztahem

$$R = \rho_{\mathrm{Cu}}\frac{l}{S}, \quad (1)$$

kde S je obsah průřezu vodiče. Pro hmotnost m vodiče platí vztah

$m = \rho V = \rho l S$, (2)

kde $V = lS$ je objem vodiče. Z rovnic (l) a (2) najdeme

$$R = \rho\rho_{Cu}\frac{l^2}{m}$$

a odtud

$$l = \sqrt{\frac{mR}{\rho\rho_{Cu}}} \approx 510 \text{ m.}$$

Poněvadž S = $\pi d^2/4$, kde d je průměr vodiče, bude z rovnice (1):

$$S = \frac{\rho_{Cu} l}{R}$$

a po dosazení dostaneme

$$d = \sqrt{\frac{4\rho_{Cu} l}{\pi R}} = 1{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 1 \text{ mm.}$$

R5.71 d = 1 cm = 10^{-2} m, m = 1 kg, $\rho_{Fe} = 8{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ω · m, $\rho = 7{,}6 \cdot 10^3$ kg · m^{-3}; R = ?

$$m = \rho\pi(d/2)^2 l \Rightarrow l = \frac{m}{\rho\pi(d/2)^2}$$

$$R = \rho_{Fe}\frac{l}{\pi(d/2)^2} = \frac{16\rho_{Fe} m}{\rho\pi^2 d^4} = 1{,}9 \cdot 10^{-3}\ \Omega$$

R5.72 Aby se zmenšily ztráty způsobené odporem přívodního vodiče.

R5.73 S_1 = 1 cm^2, S_2 = 1 dm^2

Tloušťku plechu označíme d.

$$R \sim \frac{l}{d \cdot l} = \frac{1\text{ cm}}{d \cdot 1\text{ cm}} = \frac{1\text{ dm}}{d \cdot 1\text{ dm}} = \frac{1}{d} = \text{konst.}$$

R5.74 t_1 = 20 °C, R_1 = 20 Ω, t_2 = 500 °C, R_2 = 59 Ω; α_{Pt} = ?

$$R_2 = R_1[1 + \alpha_{Pt}(t_2 - t_1)]$$

$$\alpha_{Pt} = \frac{R_2 - R_1}{R_1(t_2 - t_1)} = 4{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$$

R5.75 t_1 = 0 °C, R_1 = 4,25 Ω, t_2 = 200 °C, $\alpha_{Al} = 4{,}0 \cdot 10^{-3}$ K^{-1}; R_2 = ?

$$R_2 = R_1[1 + \alpha(t_2 - t_1)] = 7{,}7\ \Omega$$

R5.76 R_1 = 60 Ω, R_2 = 636 Ω, $\alpha = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ K^{-1}; Δt = ?

$$\Delta t = \frac{R_2 - R_1}{\alpha R_1} \approx 1\,900\ °\text{C}$$

R5.77 t_1 = 15 °C, R_1 = 58 Ω, t_2 = –30 °C, t_3 = 30 °C, $\alpha_{Cu} = 4 \cdot 10^{-3}\ K^{-1}$; R_2 = ?, R_3 = ?

$$R_2 = R_1(1 - \alpha_{Cu}\Delta t) = 48\ \Omega$$
$$R_3 = R_1(1 + \alpha_{Cu}\Delta t) = 61\ \Omega$$

R5.78 t_1 = 14 °C, R_1 = 10 Ω, R_2 = 12,2 Ω, $\alpha_{Cu} = 4 \cdot 10^{-3}\ K^{-1}$; t_2 = ?

$$R_2 = R_1 + R_1\alpha_{Cu}(t_2 - t_1)$$
$$t_2 = \frac{R_2 - R_1 + R_1 t_1 \alpha_{Cu}}{R_1\alpha_{Cu}} = 69\ °\text{C}$$

R5.79 Vlákno nerozsvícené žárovky má malý odpor a při zapnutí obvodu vzniká značný proud.

R5.80 $R' = 2R$; Δt = ?

$$R' = 2R = R + R\alpha\Delta t$$
$$\Delta t = \frac{2R - R}{R\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

R5.81 N = 3 000, d = 1,5 cm = $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ m, $r = d_{Cu}/2 = 3 \cdot 10^{-4}$ m, t_1 = 20 °C, t_2 = 60 °C, $\alpha_{Cu} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$; R = ?

Odpor R_1 cívky při nižší teplotě je určen vztahem

$$R_1 = \rho_{Cu}\frac{l}{S} = \rho_{Cu}\frac{N\pi d}{\pi r^2}.$$

Po dosazení dostaneme R_1 = 8,5 Ω. Odpor R_2 při vyšší teplotě vypočítáme podle vztahu

$$R_2 = R_1[1 + \alpha(t_2 - t_1)] = 9{,}9\ \Omega.$$

R5.82 t_1 = 20 °C, R_1 = 9 Ω, R_2 = 11 Ω, $\alpha_{Cu} = 4 \cdot 10^{-3}\ K^{-1}$; t_2 = ?

$$R_2 = R_1 + R_1\alpha t_2 - R_1\alpha t_1$$
$$t_2 = \frac{R_2 - R_1 + R_1\alpha t_1}{R_1\alpha} \approx 76\ °\text{C}$$

R5.83 t_1 = 2 000 °C, R_1 = 204 Ω, t_2 = 20 °C, $\alpha_W = 4{,}4 \cdot 10^{-3}\ K^{-1}$; R_2 = ?

$R_1 = R_0(1 + \alpha_W t_1)$

$R_2 = R_0(1 + \alpha_W t_2) = R_1 \dfrac{1 + \alpha_W t_2}{1 + \alpha_W t_1} = 23\ \Omega$

R5.84 R = 7,5 Ω, t = 1,5 min = 90 s, Q = 54 C; U = ?

$U = RI = R\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = 4{,}5\ \mathrm{V}$

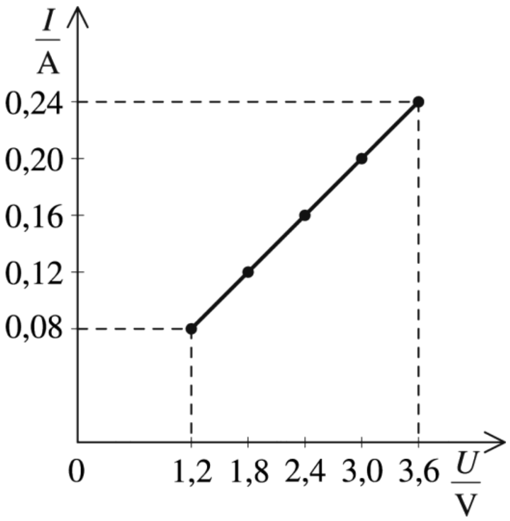
R5.85 U = 4,5 V, t = 3 min = 180 s, Q = 15 C; R = ?

$R = \dfrac{U\Delta t}{\Delta Q} = 54\ \Omega$

R5.86 R = 10 Ω, U = 12 V, t = 20 s; Q = ?

$Q = \dfrac{Ut}{R} = 24\ \mathrm{C}$

R5.87 Závislost proudu na napětí je lineární. Grafem je část přímky (obr. R5-87).



Obr. R5-87

$R = \dfrac{\Delta U}{\Delta I} = 15\ \Omega$

R5.88 R_1 = ?, R_2 = ?

$R_1 = \dfrac{\Delta U_1}{\Delta I_1} = 5\ \Omega$

$R_2 = \dfrac{\Delta U_2}{\Delta I_2} = 20\ \Omega$

$R_2 > R_1$

R5.89 U = 3,5 V, I = 0,2 A; R = ?

$$R = \frac{U}{I} = 18\ \Omega$$

R5.90 U = 220 V, I = 0,4 A; R = ?

$$R = \frac{U}{I} = 550\ \Omega$$

R5.91 U = 220 V, I = 3,6 A; R = ?

$$R = \frac{U}{I} \approx 61\ \Omega$$

Vzduch odvádí teplo hůře než voda, proto by se topné těleso přepálilo.

R5.92 R = 20 Ω, I = 90 mA = $9 \cdot 10^{-2}$ A; U_{min} = ?

$$U_{\mathrm{min}} = RI = 1{,}8\ \mathrm{V}$$

R5.93 I = 5 mA = $5 \cdot 10^{-3}$ A, R = 6,8 kΩ = $6{,}8 \cdot 10^{3}$ Ω, tolerance ΔR =
0,1R; $U \in \langle U_1, U_2\rangle$?

$$U_1 = (R - 0{,}1R)I = 31\ \mathrm{V}$$
$$U_2 = (R + 0{,}1R)I = 37\ \mathrm{V}$$
$$U \in \langle 31\ \mathrm{V}, 37\ \mathrm{V}\rangle$$

R5.94 R = 20 kΩ · V^{-1}, U = 6 V; I = ?

$$R_{\mathrm{v}} = RU = 1{,}2 \cdot 10^{5}\ \Omega$$
$$I = \frac{U}{R_{\mathrm{v}}} = 5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{A} = 50\ \mu\mathrm{A}$$

R5.95 I = 1,2 A, R = 0,75 Ω; U = ?

$$U = RI = 0{,}9\ \mathrm{V}$$

R5.96 U_{e} = 1,5 V, R_{i} = 0,5 Ω, R = 3,5 Ω; I = ?

$$I = \frac{U_{\mathrm{e}}}{R + R_{\mathrm{i}}} = 0{,}38\ \mathrm{A}$$

R5.97 U_{e} = 4,5 V, U = 4,0 V, I = 0,1 A; R = ?, R_{i} = ?

Celkový odpor R' obvodu určíme z Ohmova zákona pro celý
obvod: $R' = R + R_{\mathrm{i}} = U_{\mathrm{e}}/I$, kde R je odpor rezistoru, R_{i} je vnitřní odpor baterie, U_{e} je

elektromotorické napětí a I je proud v obvodu. Po dosazení získáme $R' = 45\ \Omega$. Napětí na rezistoru je svorkové napětí U a pro odpor R rezistoru platí:

$$R = \frac{U}{I} = 40\ \Omega$$

To znamená, že vnitřní odpor baterie $R_i = R' - R = 5\ \Omega$.

R5.98 a) $U_e = 3$ V, $R_i = 1{,}8\ \Omega$, $I = 150$ mA $= 0{,}15$ A; $R = ?$

$$I = \frac{U_e}{R + R_i}$$

$$R = \frac{U_e}{I} - R_i = 18\ \Omega$$

b) $U_e = 9$ V, $R_i = 5{,}4\ \Omega$, $I = 250$ mA $= 0{,}25$ A; $R = ?$

$$R = \frac{U_e}{I} - R_i = 31\ \Omega$$

R5.99 $U_e = 6$ V, $R_i = 10\ \Omega$, $R_V = 240\ \Omega$; $U_V = ?$

$$I = \frac{U_e}{R_i + R_V}$$

$$U_V = R_V I = R_V \frac{U_e}{R_i + R_V} = 5{,}8\ \text{V}$$

R5.100 a) $U_e = 2$ V, $R_i = 0{,}5\ \Omega$, $R = 1{,}5\ \Omega$; $U = ?$

$$I = \frac{U_e}{R_i + R}$$

$$U = R\frac{U_e}{R_i + R} = 1{,}5\ \text{V}$$

b) $U_e = 6$ V, $R_i = 1{,}5\ \Omega$, $R = 2{,}5\ \Omega$; $U = ?$

$$U = R\frac{U_e}{R + R_i} = 3{,}8\ \text{V}$$

R5.101 $I_1 = 1{,}2$ A, $U_1 = 9{,}0$ V, $I_2 = 2{,}0$ A, $U_2 = 8{,}6$ V; $R = ?$, $U_e = ?$, $I_k = ?$

a) V prvním případě prochází obvodem proud I_1 při svorkovém napětí U_1 a odporu vnějšího obvodu

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = 7{,}5\ \Omega.$$

Podobně ve druhém případě

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = 4{,}3\ \Omega.$$

b) Pro svorkové napětí U_1 a U_2 platí rovnice

$$U_1 = U_e - I_1 R_i, U_2 = U_e - I_2 R_i.$$

Odtud

$$U_e = \frac{U_1 I_2 - U_2 I_1}{I_2 - I_1} = 9{,}6\ \mathrm{V}.$$

c) Z rovnice pro svorkové napětí určíme vnitřní odpor zdroje

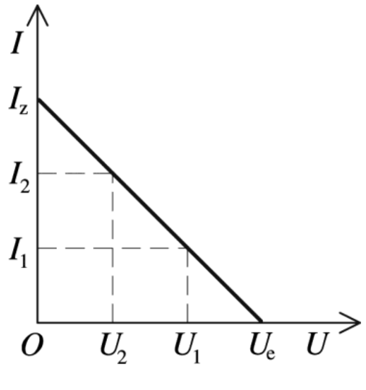
$$R_i = \frac{U_e - U_1}{I_1} = 0{,}5\ \Omega.$$

Ke zkratu dochází, je-li odpor vnějšího obvodu $R = 0$, takže zkratový proud

$$I_k = \frac{U_e}{R_i} = 19\ \mathrm{A}.$$

Úkoly b) a c) lze řešit také graficky.

V grafu závislosti proudu na napětí [$I = f(U)$] vyznačíme body odpovídající U_1, I_1 a U_2, I_2 (obr. R5-101 [5-7]). Body spojíme přímkou (tzv. *zatěžovací charakteristikou* zdroje napětí) a najdeme její průsečíky s osami U a I. Průsečík s osou U určuje elektromotorické napětí U_e a průsečík s osou I určuje zkratový proud I_k.



Obr. R5-101

R5.102 Poněvadž jsou žárovky spojeny paralelně, zmenší se po sepnutí spínače celkový odpor obvodu. Výchylka ručky ampérmetru se zvětší. Jestliže vnitřní odpor zdroje napětí $R_i > 0$, svorkové napětí se zmenší a výchylka ručky voltmetru se zmenší.

R5.103 $U_e = 1{,}5$ V, $R = 2\ \Omega$, $I = 0{,}5$ A; $I_k = ?$

$$I_k = \frac{U_e}{R_i}$$

$$R_i = \frac{U_e - RI}{I}$$

$$I_k = \frac{U_e I}{U_e - RI} = 1{,}5\ \text{A}$$

R5.104 $U_e = 1{,}5$ V, $R_i = 0{,}5\ \Omega$, a) $R = 0{,}5\ \Omega$, b) $R = 1{,}0\ \Omega$, c) $R = 2{,}0\ \Omega$; $I_{max} = ?$, $I = ?$

$$I_{max} = I_k = \frac{U_e}{R_i} = 3{,}0\ \text{A}$$

$$I = \frac{U_e}{R + R_i}$$

a) $I = 1{,}5$ A

b) $I = 1{,}0$ A

c) $I = 0{,}6$ A

R5.105 $R_1 = 5{,}0\ \Omega$, $I_1 = 1{,}0$ A, $R_2 = 15\ \Omega$, $I_2 = 0{,}5$ A; $U_e = ?$, $R_i = ?$

$$U_e = R_1 I_1 + R_i I_1$$

$$U_e = R_2 I_2 + R_i I_2$$

$$R_i = \frac{R_2 I_2 - R_1 I_1}{I_1 - I_2} = 5\ \Omega$$

$$U_e = \frac{I_1 I_2 (R_2 - R_1)}{I_1 - I_2} = 10\ \text{V}$$

R5.106 $R = kR_i$, $\Delta U \leq 0{,}01 U_e$; $k = ?$

$$\frac{U_e}{R + R_i} = 0{,}99 \frac{U_e}{R}$$

$$0{,}01R = 0{,}99R_i$$

$$k = 99$$

R5.107 $U_e = 4{,}5$ V, $U = 3{,}5$ V, $I = 0{,}2$ A; $R_i = ?$

Jmenovité napětí U je menší než elektromotorické napětí U_e baterie o úbytek napětí na vnitřním odporu baterie.

$$R_i = \frac{U_e - U}{I} = 5\ \Omega$$

R5.108 U_e = 4,5 V, I_{max} = 0,5 A, R_i = 5 Ω; R_{min} = ?, U = ?

$$U_e = I_{max}R_{min} + I_{max}R_i$$

$$R_{min} = \frac{U_e}{I_{max}} - R_i = 4\ \Omega$$

$$U = R_{min}I_{max} = 2\ \text{V}$$

R5.109 U_e = 15 V, I = 1,5 A, U = 9,0 V; R = ?, R_i = ?

$$R = \frac{U}{I} = 6\ \Omega$$

$$R_i = \frac{U_e - U}{I} = 4\ \Omega$$

R5.110 U_e = 2,0 V, R_i = 0,8 Ω, l = 2,0 m, S = 0,21 mm^2 = 2,1 · 10^{-7} m^2, ρ_{Ni} = 4,2 · 10^{-7} Ω · m; U = ?

$$I = \frac{U_e}{R + R_i}$$

$$U = RI = R\frac{U_e}{R + R_i} = \frac{\rho l U_e}{\rho l + R_i S} = 1{,}7\ \text{V}$$

R5.111 S = 0,20 mm^2 = 2,0 · 10^{-7} m^2, U_e = 2 V, R_i = 1,2 Ω, I = 250 mA = 0,25 A,

ρ_{Fe} = 1,2 · 10^{-7} Ω · m; l = ?

$$R = \frac{U_e}{I} - R_i$$

$$\rho\frac{l}{S} = \frac{U_e}{I} - R_i$$

$$l = \frac{S}{\rho}\left(\frac{U_e}{I} - R_i\right) \approx 11\ \text{m}$$

R5.112 U_e = 40 V, R_i = 0,04 Ω, l = 50 m, S = 170 mm^2 = 1,7 · 10^{-4} m^2, I = 200 A, ρ_{Cu} = 1,7 · 10^{-8} Ω · m; U = ?, U' = ?

$$U = U_e - R_i I = 32\ \text{V}$$

$$U' = U - \rho\frac{2l}{S}I = 30\ \text{V}$$

R5.113 U_1 = 4 V, I_1 = 0,5 A, U_2 = 3,6 V, I_2 = 0,9 A; U_e = ?, R_i = ?

$$U_e = U_1 + R_i I_1$$
$$U_e = U_2 + R_i I_2$$
$$R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = 1\ \Omega$$
$$U_e = \frac{U_1 I_2 - U_2 I_1}{I_2 - I_1} = 4{,}5\ \text{V}$$

R5.114 R_1 = 4,5 Ω, R_2 = 10 Ω, I_1 = 0,2 A, I_2 = 0,1 A; U_e = ?, R_i = ?

$$I_1 = \frac{U_e}{R_1 + R_i}$$
$$I_2 = \frac{U_e}{R_2 + R_i}$$
$$R_i = \frac{R_2 I_2 - R_1 I_1}{I_1 - I_2} = 1{,}0\ \Omega$$
$$U_e = I_1 (R_1 + R_i) = \frac{I_1 I_2}{I_1 - I_2}(R_2 - R_1) = 1{,}1\ \text{V}$$

R5.115 R_1 = 1,0 Ω, U_1 = 1,5 V, R_2 = 2,0 Ω, U_2 = 2,0 V; U_e = ?, R_i =?

$$U_e = U_1 + R_i \frac{U_1}{R_1}$$
$$U_e = U_2 + R_i \frac{U_2}{R_2}$$
$$R_i = \frac{R_1 R_2 (U_2 - U_1)}{R_2 U_1 - R_1 U_2} = 1\ \Omega$$
$$U_e = \frac{U_1 U_2 (R_1 - R_2)}{U_2 R_1 - U_1 R_2} = 3\ \text{V}$$

R5.116 U_e = 3,0 V, R_i = 1,2 Ω, R = 8,0 Ω, U_z = 2,4 V; R_v = ?

Zdroj se žárovkou a přívodními vodiči tvoří sériový obvod, pro který platí

$$U_e = (R_i + R_z + R_v) I,$$

kde R_z je odpor žárovky, R_v je odpor vodičů. Pro proud I v obvodu současně platí

$$I = \frac{U_z}{R_z} = 0{,}3\ \text{A}.$$

Potom

$$R_v = \frac{U_e - (R_i I + U_z)}{I} = 0{,}8\ \Omega.$$

R5.117 $U_e = 250$ V, $R_i = 0{,}1\ \Omega$, $l = 100$ m, $U = 220$ V, $I = 100$ A, $\rho =$ $2{,}7 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\rho_{Al} = 2{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$; $m = ?$

$$U_e = U_s + U_v + R_i I$$
$$U_v = U_e - U_s - R_i I$$
$$\rho_{Al} \frac{2l}{S} I = U_e - U_s - R_i I$$
$$S = \frac{\rho_{Al} 2lI}{U_e - U_s - R_i I}$$
$$m = \rho 2lS$$
$$m = \rho \frac{\rho_{Al} 4l^2 I}{U_e - U_s - R_i I} = 15\ \mathrm{kg}$$

R5.118 $U_1 = 5$ V, $R_i = 2\ \Omega$; $R = ?$

Sériové spojení

$$I = \frac{3U_e}{3R_i + R}$$

Paralelní spojení

$$I = \frac{U_e}{\frac{R_i}{3} + R}$$

Podmínka, aby obvodem v obou případech protékal stejný proud, bude splněna, když $R = R_i = 2\ \Omega$.

R5.119 $I = 2{,}5$ A, $U = 12{,}5$ V, $U_e = 12{,}0$ V; $R_i = ?$

Při nabíjení akumulátoru má nabíjecí zdroj opačnou polaritu (kladný pól zdroje je připojen k zápornému pólu baterie). Proto platí $U - U_e = IR_i$, kde U je napětí zdroje, U_e je elektromotorické napětí baterie, R_i je vnitřní odpor akumulátoru a I je nabíjecí proud. Odtud

$$R_i = \frac{U - U_e}{I} = 0{,}2\ \Omega.$$

R5.120 $I = 2$ A, $U_z = 12$ V, $R_i = 0{,}25\ \Omega$; $U_e = ?$

$$U_z - U_e = R_i I$$
$$U_e = U_z - R_i I = 11{,}5\ \mathrm{V}$$

R5.121 $U_e = 6{,}0$ V, $R_i = 0{,}15\ \Omega$, $I = 4$ A; $U_z = ?$

$$U_z - U_e = R_i I$$
$$U_z = U_e + R_i I = 6{,}6\ \mathrm{V}$$

R5.122 $R_i = 5{,}0\ \Omega$, $R = 15\ \Omega$; $R_x = ?$

Sériové spojení (obr. R5-122):

$$I = \frac{U_e}{R + R_i + R_x}$$

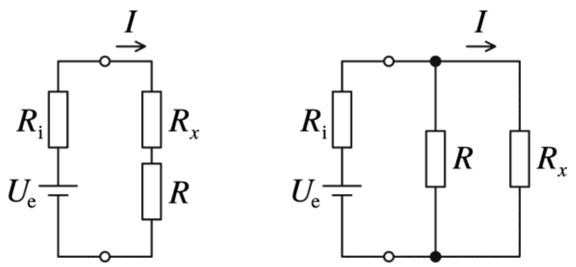
Paralelní spojení (obr. R5-122):

$$I_x = \frac{U_x}{R_x}$$

$$U_x = U_e - R_i I = U_e - R_i \frac{U_e}{R_i + \frac{R_x R}{R + R_x}} = U_e \left(\frac{R_x R}{R_i R + R_i R_x + R_x R} \right)$$

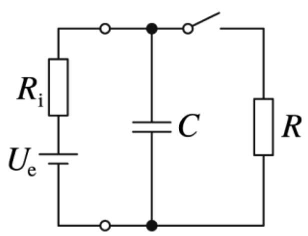
$$\frac{U_e}{R + R_i + R_x} = \frac{U_e \left(\frac{R_x R}{R_i R + R_i R_x + R_x R} \right)}{R_x}$$

$$R_x = \frac{R^2}{R_i} = 45\Omega$$



Obr. R5-122

R5.123 $R = 15\ \Omega$, $Q_2 = 0{,}8Q_1$; $R_i = ?$



Obr. R5-123

Pokud je ke zdroji připojen jen kondenzátor (spínač na obr. R5-123 je rozpojen), je na kondenzátoru elektromotorické napětí U_e. Když je paralelně ke kondenzátoru připojen rezistor (spínač na obr. R5-123 je spojen), je na kondenzátoru svorkové napětí U.

$$Q_1 = CU_\mathrm{e}$$

$$Q_2 = CU = CRI = CR\frac{U_\mathrm{e}}{R+R_\mathrm{i}} = 0{,}8Q_1 = 0{,}8CU_\mathrm{e}$$

$$\frac{R}{R+R_\mathrm{i}} = 0{,}8$$

$$R_\mathrm{i} = \frac{1}{4}R \approx 3{,}8\ \Omega$$

R5.124 $C = 1\ \mu\mathrm{F} = 10^{-6}\ \mathrm{F}$, $U_\mathrm{e} = 6\ \mathrm{V}$, $R = R_\mathrm{i} = 20\ \Omega$; $Q = ?$

Větví s kondenzátorem stejnosměrný elektrický proud neprochází, takže celkový proud v obvodu:

$$I = \frac{U_\mathrm{e}}{R_\mathrm{i} + \frac{R}{2}} = \frac{2U_\mathrm{e}}{2R_\mathrm{i} + R}$$

$$Q = CU = C\frac{R}{2}I = CR\frac{U_\mathrm{e}}{2R_\mathrm{i}+R} = 2\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} = 2\ \mu\mathrm{C}$$

R5.125 $R_1 = 2{,}0\ \Omega$, $R_2 = 2{,}5\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $U = 6\ \mathrm{V}$; $U = ?$

$$U_1 : U_2 : U_3 = 2{,}0\ \mathrm{V} : 2{,}5\ \mathrm{V} : 3{,}0\ \mathrm{V}$$
$$U_1 + U_2 + U_3 = 6\ \mathrm{V}$$
$$U_1 = 1{,}6\ \mathrm{V}$$
$$U_2 = 2{,}0\ \mathrm{V}$$
$$U_3 = 2{,}4\ \mathrm{V}$$

R5.126 a) $U_\mathrm{j} = 3{,}5\ \mathrm{V}$, $I_\mathrm{j} = 0{,}2\ \mathrm{V}$, $U = 6{,}0\ \mathrm{V}$; $R = ?$

$$U_R = U - U_\mathrm{j}$$

$$R = \frac{U - U_\mathrm{j}}{I_\mathrm{j}} \approx 12\ \Omega$$

b) $U_\mathrm{j} = 2{,}5\ \mathrm{V}$, $I_\mathrm{j} = 0{,}1\ \mathrm{A}$, $U = 4{,}5\ \mathrm{V}$; $R = ?$

$$U_R = U - U_\mathrm{j}$$

$$R = \frac{U - U_\mathrm{j}}{I_\mathrm{j}} = 20\ \Omega$$

R5.127 $U_\mathrm{ž} = 14\ \mathrm{V}$, $U = 220\ \mathrm{V}$; $n = ?$

$U = nU_ž$

$n = \frac{U}{U_ž} \approx 16$

Když vyšroubujeme jednu žárovku, žárovky přestanou svítit a na kontaktech v objímce vyšroubované žárovky bude plné síťové napětí. Proto je nebezpečné vypínat žárovky tímto způsobem.

R5.128 $U_e = 15$ V, $R_i = 3\ \Omega$, $R_ž = 8\ \Omega$, $n = 5$; $U_ž = ?$

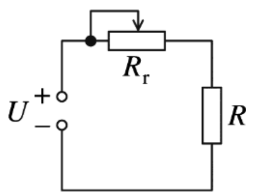
$U_e = nU_ž + R_i I$

$U_ž = \frac{U_e - R_i I}{n} = \frac{U_e - R_i \frac{U_e}{nR_ž + R_i}}{n} = 2{,}8\ \mathrm{V}$

R5.129 $U_1 : U_2 : U_3 = 1 : 2 : 3 \Rightarrow R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 2 : 3$

R5.130 $R = 20\ \Omega$, $U = 30$ V, $U_z = 45$ V, a) $R_1 = 6\ \Omega$, $I_1 = 2$ A, b) $R_2 = 30\ \Omega$, $I_2 = 4$ A, c) $R_3 = 800\ \Omega$, $I_3 = 0{,}6$ A

Ohřívačem má procházet jmenovitý proud $I = U/R = 1{,}5$ A. Na reostatu musí vzniknout úbytek napětí $\Delta U = U_z - U = 15$ V. Odpor reostatu tedy musí být $R_r = \Delta U/I \approx 22\ \Omega$. Zvolíme reostat b). Zapojení je na obr. R5-130.



Obr. R5-130

R5.131 $\rho_{Fe} = 8{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$, $\alpha_{Fe} = 6{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$, $\rho_C = 4{,}0 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$, $\alpha_C = -0{,}8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$, $S_{Fe} = S_C$; $\frac{l_{Fe}}{l_C} = ?$

$\Delta R_{Fe} = \Delta R_C$

$\rho_{Fe} \frac{\Delta l_{Fe}}{S} = \rho_C \frac{\Delta l_C}{S}$

$\rho_{Fe} \frac{l_{Fe}\alpha_{Fe}\Delta t}{S} = \rho_C \frac{l_C \alpha_C \Delta t}{S}$

$\frac{l_{Fe}}{l_C} = \frac{\rho_C \alpha_C}{\rho_{Fe}\alpha_{Fe}} \approx 6$

$l_{Fe} \approx 6 l_C$

R5.132 Napětí mezi body *A*, *B* a *B*, *C* je stejné ($U_{AB} = U_{BC}$). Po sepnutí vypínače je celkový odpor paralelně spojených žárovek poloviční ($R_{BC} = R/2$) a $U_{BC} = U_{AB}/2$.

R5.133 $R_\mathrm{s} = 50\ \Omega$, $R_\mathrm{p} = 12\ \Omega$; $R = ?$

Odpory označíme R_A, R_B. Celkový odpor R_s při sériovém spojení

$R_\mathrm{s} = R_\mathrm{A} + R_\mathrm{B}$. (1)

Při paralelním spojení pro celkový odpor R_p platí

$$\frac{1}{R_\mathrm{p}} = \frac{1}{R_\mathrm{A}} + \frac{1}{R_\mathrm{B}} \text{ a odtud } R_\mathrm{p} = \frac{R_\mathrm{A} R_\mathrm{B}}{R_\mathrm{A} + R_\mathrm{B}}. \quad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici

$$R_\mathrm{A}^2 - R_\mathrm{s} R_\mathrm{B} + R_\mathrm{s} R_\mathrm{p} = 0$$

a po dosazení

$$R_\mathrm{A}^2 - 50 R_\mathrm{A} + 600 = 0.$$

Řešením této rovnice najdeme:

$$R_{\mathrm{A}1,2} = \left(25 \pm \sqrt{25^2 - 600}\right)\Omega = <\begin{matrix} 30\ \Omega \\ 20\ \Omega \end{matrix}$$

Dosazením do rovnice (1) určíme R_B. Zvolíme-li $R_{\mathrm{A}1} = 30\ \Omega$, pak $R_{\mathrm{B}1} = 20\ \Omega$ a při $R_{\mathrm{A}2} = 20\ \Omega$ je $\mathrm{R}_{\mathrm{B}2} = 30\ \Omega$.

R5.134 $U = 24$ V, $I_\mathrm{s} = 0{,}6$ A, $I_\mathrm{p} = 3{,}2$ A; $R_1 = ?$, $R_2 = ?$

$$\frac{U}{I_\mathrm{s}} = R_1 + R_2$$

$$\frac{U}{I_\mathrm{p}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_2^2 - \frac{U}{I_\mathrm{s}} R_2 + \frac{U^2}{I_\mathrm{s} I_\mathrm{p}} = 0$$

$R_2 = 30\ \Omega$, $R_1 = 10\ \Omega$, popř. $R_2 = 10\ \Omega$, $R_1 = 30\ \Omega$

R5.135 $U_\mathrm{e} = 48$ V, $R = 4\ \mathrm{k\Omega} = 4 \cdot 10^3\ \Omega$, $R_\mathrm{v} = 10\ \mathrm{k\Omega} = 10^4\ \Omega$; $U_\mathrm{v} = ?$

$$U_{\mathrm{v}} = U_{\mathrm{e}} - U_{R/2} = U_{\mathrm{e}} - RI/2$$

$$I = \frac{U_{\mathrm{e}}}{\frac{RR_{\mathrm{v}}}{2R_{\mathrm{v}} + R} + \frac{R}{2}}$$

$$U_{\mathrm{v}} = U_{\mathrm{e}}\left(\frac{2R_{\mathrm{v}}}{4R_{\mathrm{v}} + R}\right) \approx 22\ \mathrm{V}$$

R5.136 $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$; $R = ?$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$R = \frac{R_1R_2R_3R_4}{R_2R_3R_4 + R_1R_3R_4 + R_1R_2R_4 + R_1R_2R_3} = 0{,}48\ \Omega$$

R5.137 $R_{\check{z}} = 350\ \Omega$, $n = 1, 2, \ldots 5$; $R_{1\text{-}5} = ?$

$$\frac{1}{R} = n\frac{1}{R_{\check{z}}}$$

$$R = \frac{R_{\check{z}}}{n}$$

$R_1 = 350\ \Omega$

$R_2 = 350\ \Omega/2 \approx 180\ \Omega$

$R_3 = 350\ \Omega/3 \approx 120\ \Omega$

$R_4 = 350\ \Omega/4 \approx 88\ \Omega$

$R_5 = 350\ \Omega/5 = 70\ \Omega$

R5.138 $R_{\mathrm{s}} = 100\ \Omega$, $R_{\mathrm{p}} = 1\ \Omega$; $n = ?$

Vodič můžeme považovat za sériové spojení n stejných částí o odporu R, takže celkový odpor vodiče $R_{\mathrm{s}} = nR$. Při paralelním spojení pro celkový odpor vodiče R_{p} platí

$$\frac{1}{R_{\mathrm{p}}} = n\frac{1}{R} = n\frac{1}{\frac{R_{\mathrm{s}}}{n}} = \frac{n^2}{R_{\mathrm{s}}}.$$

Odtud

$$n = \sqrt{\frac{R_{\mathrm{s}}}{R_{\mathrm{p}}}} = 10.$$

R5.139

a) $R' = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$

b) $\frac{1}{R'} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R}$

$R' = \frac{2}{3}R$

R5.140

a) $R' = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$

b) $\frac{1}{R'} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \Rightarrow R' = R$

R5.141 Obr. 5-141a [5-16].

a) $R_a = \frac{5}{2}R$

b) $R_b = \frac{2}{3}R + R = \frac{5}{3}R$

$R_a > R_b$

Obr. 5-141b [5-17].

a) $\frac{1}{R_a} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R}$

$R_a = \frac{2}{5}R$

b) $\frac{1}{R_b} = \frac{1}{\frac{3}{2}R} + \frac{1}{R}$

$R_b = \frac{3}{5}R$

$R_a < R_b$

R5.142 $U_e = 4{,}5$ V, $R_i = 0{,}5\ \Omega$, $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$; $I_3 = ?$

Celkový odpor obvodu $R = R_i + R_1 + R_p$, kde R_i je vnitřní odpor zdroje a R_p je celkový odpor paralelně spojených rezistorů R_2 a R_3. Platí:

$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$, odtud $R_p = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 1{,}5\ \Omega$ a $R = 5\ \Omega$.

Proud procházející obvodem $I = U_e/R = 0{,}9$ A se rozdělí do paralelně spojených odporů v poměru

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{I_3}{I_2} = \frac{I_3}{I - I_3} \text{ a po úpravě } I_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I = 0{,}22 \text{ A.}$$

Při řešení můžeme postupovat také tak, že nejprve určíme napětí U_p na paralelně spojených vodičích:

$$\frac{U_p}{U_e} = \frac{R_p}{R_i + R_1 + R_p}$$

Proud I_3 určíme pomocí Ohmova zákona:

$$I_3 = \frac{U_p}{R_3} = \frac{R_p U_e}{(R_i + R_1 + R_p)R_3} = 0{,}22 \text{ A}$$

R5.143 $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$; $R = ?$

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = 6\ \Omega$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R \approx 0{,}55\ \Omega$$

$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \Rightarrow R = 2{,}2\ \Omega,\ R = 2{,}8\ \Omega,\ R = 3{,}7\ \Omega$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R = 1{,}5\ \Omega,\ R = 1{,}3\ \Omega,\ R = 0{,}83\ \Omega$$

Lze vytvořit 8 spojení.

R5.144 $R = 10\ \Omega$, $n = 3$; $R = ?$

$$R_1 = \frac{R}{3} = 3{,}3\ \Omega$$

$$R_2 = 3R = 30\ \Omega$$

$$R_3 = \frac{3}{2} R = 15\ \Omega$$

$$R_4 = \frac{2}{3} R = 6{,}7\ \Omega$$

$$R_5 = R = 10\ \Omega$$

$$R_6 = 2R = 20\ \Omega$$

$$R_7 = \frac{1}{2} R = 5\ \Omega$$

R5.145 $R_a = 2\ \Omega$, $R_b = 3\ \Omega$, $R = 1\ \Omega, 2\ \Omega, ..., 10\ \Omega$; $n_{min} = ?$

$R_1 = 1\ \Omega$ ($2R_a$ paralelně)

$R_2 = 2\ \Omega$ (R_a)

$R_3 = 3\ \Omega$ (R_b)

$R_4 = 4\ \Omega$ ($2R_a$ sériově)

$R_5 = 5\ \Omega$ (R_a, R_b sériově)

$R_6 = 6\ \Omega$ ($2R_b$ sériově)

$R_7 = 7\ \Omega$ ($2R_a$, R_b sériově)

$R_8 = 8\ \Omega$ (R_a, $2R_b$ sériově)

$R_9 = 9\ \Omega$ ($3R_b$ sériově)

$R_{10} = 10\ \Omega$ ($2R_a$, $2R_b$ sériově)

Potřebujeme dva rezistory R_a a tři rezistory R_b.

R5.146 $U_e = 55$ V, $R = 2\ \Omega$; $I_{1\text{-}6} = ?$, $U_{AB} = ?$

$$I_1 = I_2 = \frac{U_e}{R_c}$$
$$R_c = R_1 + R_2 + R'$$
$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} \Rightarrow R' = \frac{3}{4}R$$
$$R_c = \frac{11}{4}R$$
$$I_1 = I_2 = \frac{4U_e}{11R} = 10\ \text{A}$$
$$\frac{I_3}{I_{456}} = \frac{3R}{R}$$
$$I_3 + I_{456} = I_1$$
$$I_3 = 7{,}5\ \text{A}$$
$$I_{456} = 2{,}5\ \text{A}$$
$$U_{AB} = RI_3 = 3RI_{456} = 15\ \text{V}$$

R5.147 Poněvadž je síť symetrická, je v bodech C, D, E, F stejný potenciál a vodorovným kroužkem proud neprochází. Odpor tohoto kroužku neovlivňuje celkový odpor sítě. Ostatní kroužky můžeme považovat za čtyři paralelně spojené vodiče délky $l = \pi r$ (polovina kružnice). Celkový odpor

$$R=\frac{1}{4}\rho\frac{\pi r}{\frac{1}{4}\pi d^2}=\rho\frac{r}{d^2}.$$

R5.148 U_0; U = ?

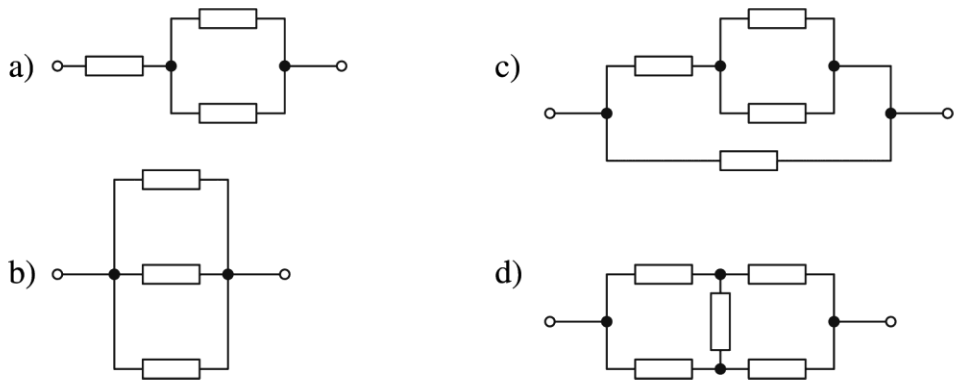
$$\frac{1}{R_{CD}}=\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}=\frac{1}{R}\ \Rightarrow\ R_{CD}=R$$

Podobně dostaneme, že $R_{AB}=R$, takže pro napětí platí:

$$U_{AB}=\frac{U_0}{2},\ U_{CD}=\frac{U_{AB}}{2}=\frac{U_0}{4}$$

$$U=\frac{U_{CD}}{2}=\frac{U_0}{8}$$

R5.149 Schémata obvodů nakreslíme v upravené podobě na obr. R5-149.



Obr. R5-149

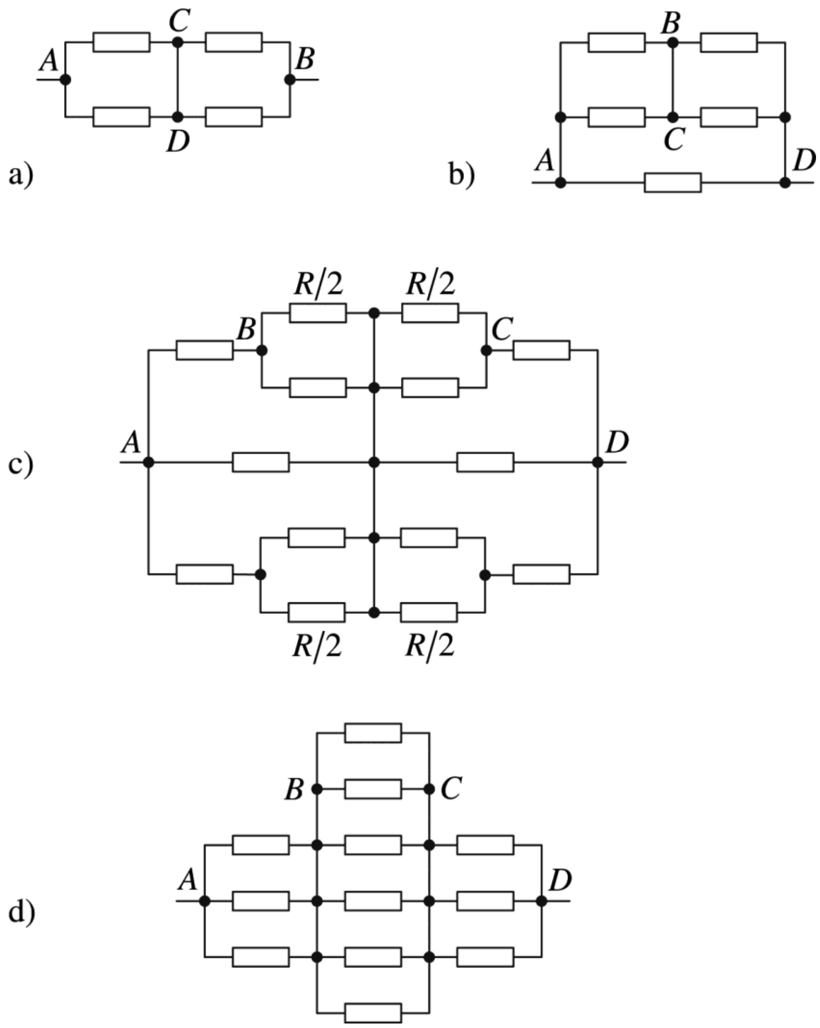
a) $R_c=R+\frac{R}{2}=\frac{3}{2}R$

b) $\frac{1}{R_c}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\ \Rightarrow\ R_c=\frac{R}{3}$

c) $\frac{1}{R_c}=\frac{1}{R}+\frac{1}{\frac{R}{2}+R}\ \Rightarrow\ R_c=\frac{3}{5}R$

d) $R_c=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}=R$

R5.150 Sítě nakreslíme jako náhradní elektrické obvody. Obr. R5-150 [V5-1].



Obr. R5-150

a) $R_c = \dfrac{R}{2} + \dfrac{R}{2} = R$

b) $\dfrac{1}{R_c} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R'}$

$R' = R$

$R_c = \dfrac{R}{2}$

c) $\dfrac{1}{R_c} = \dfrac{1}{\frac{8}{3}R} + \dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{\frac{8}{3}R} \;\Rightarrow\; R_c = \dfrac{4}{5}R$

d) $R_c = \dfrac{R}{3} + \dfrac{R}{6} + \dfrac{R}{3} = \dfrac{5}{6}R$

R5.151 U = 15 V, R_1 = 5 Ω, R_2 = 10 Ω, R_3 = 10 Ω, R_4 = 5 Ω; I_A = ?

(U_3 – napětí na rezistoru R_3, R_{23} – odpor paralelně spojených rezistorů R_2 a R_3, R_c – celkový odpor obvodu)

$$I_A = \frac{U_3}{R_2}$$

$$\frac{U_3}{U_e} = \frac{R_{23}}{R_c} = \frac{\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}}{R_1+R_4+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}}$$

$$U_3 = U_e\frac{R_2R_3}{(R_1+R_4)(R_2+R_3)+R_2R_3}$$

$$I_A = \frac{U_eR_3}{(R_1+R_4)(R_2+R_3)+R_2R_3} = 0{,}5\ \text{A}$$

R5.152 $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$, $I_A = 6$ A; $U_1 = ?$, $U_2 = ?$, $U_3 = ?$

$$U_1 = R_1I_A = 18\ \text{V}$$

$$U_2 = U_3 = \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}I_A = 8\ \text{V}$$

R5.153 $U = 24$ V; $U' = ?$, $U'' = ?$

$$R_c = R + \frac{R}{3} = \frac{4}{3}R$$

$$I = \frac{U}{R_c} = \frac{3U}{4R}$$

$$U' = RI = \frac{3}{4}U = 18\ \text{V}$$

$$U'' = U - U' = 6\ \text{V}$$

Aby voltmetry ukazovaly stejné napětí, musejí mít rezistory v paralelním spojení odpor 3*R*.

R5.154 Vzniká úbytek napětí na odporu měřicích přístrojů, který ovlivňuje přesnost měření. V obvodu na obr. 5-154a [5-27a] je proud procházející voltmetrem zanedbatelný ve srovnání s proudem, který prochází rezistorem. V obvodu na obr. 5-154b [5-27b] je zanedbatelné napětí na ampérmetru.

R5.155 $I = 0{,}20$ A, $U = 12$ V, $R_V = 3{,}0\ \text{k}\Omega = 3{,}0 \cdot 10^3\ \Omega$; $\Delta R = ?$

Jestliže voltmetr neuvažujeme, předpokládáme, že $R_V \to \infty$, a odpor *R* rezistoru vypočítáme podle Ohmova zákona

$$R = \frac{U}{I} = 60\ \Omega\,.$$

Ve skutečnosti však voltmetrem prochází proud $I_V = U/R_V$, takže rezistorem prochází proud $I_r = I - I_V$ a jeho odpor

$$R = \frac{U}{I - I_V} = \frac{U}{I - \frac{U}{R_V}} = \frac{UR_V}{IR_V - U} = 61{,}2\ \Omega\,.$$

Skutečný odpor rezistoru je asi o 1,2 Ω větší než odpor vypočítaný bez přihlédnutí k odporu voltmetru.

R5.156 $U_V = 30$ V, $I = 1{,}5$ A, $R_A = 0{,}3\ \Omega$; $R = ?$

Označíme napětí na rezistoru U a napětí na ampérmetru U_A.

$$U = U_V - U_A$$

$$RI = U_V - R_A I$$

$$R = \frac{U_V}{I} - R_A = 19{,}7\ \Omega \approx 20\ \Omega$$

R5.157 Aby na něm vznikal co nejmenší úbytek napětí.

R5.158 Rezistorem i ampérmetrem prochází stejný proud, a tedy odpor rezistoru je roven odporu ampérmetru.

R5.159 R_0, n; $R_r = ?$

$$U = R_0 I = (R_0 + R_r)\frac{I}{n}$$

$$R_r = (n-1)R_0$$

R5.160 $R_A = 2{,}7\ \Omega$, $I_A = 6$ mA $= 6 \cdot 10^{-3}$ A; $R_b = ?$

Poněvadž ampérmetr a bočník tvoří paralelní spojení, rozdělí se celkový proud I v poměru

$$\frac{I_A}{I_b} = \frac{R_b}{R_A}\,,$$

kde R_b je odpor bočníku, R_A je odpor ampérmetru, I_A je proud procházející ampérmetrem a I_b je proud procházející bočníkem. Současně platí $I = I_A + I_b$, takže

$$\frac{R_b}{R_A} = \frac{I_A}{I - I_A}\,;$$

odtud

$$R_b = \frac{I_A}{I - I_A} R_A = 0{,}3\ \Omega\,.$$

R5.161 $R_G = 20\ \Omega$, $I_G = 5$ mA $= 5 \cdot 10^{-3}$ A, $I_1 = 1$ A, $I_2 = 10$ A; $R_{b1} = ?$, $R_{b2} = ?$

$$R_b = \frac{I_G}{I - I_G} R_G$$

$$R_{b1} = 0{,}1\ \Omega$$

$$R_{b2} = 0{,}01\ \Omega$$

R5.162 R_A = 0,03 Ω, l = 1,0 m, d = 1,5 mm = $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ m, $\rho_{Cu} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m, I_A = 0,40 A; I = ?

(R_v – odpor vodiče, R_c – celkový odpor obvodu)

$$R_v = \rho \frac{4l}{\pi d^2} \approx 0{,}01\ \mathrm{A}$$

$$R_c = \frac{R_v R_A}{R_A + R_v} = 0{,}01\ \Omega$$

$$\frac{I}{I_A} = \frac{R_A}{R_c} = \frac{R_A + R_v}{R_v}$$

$$I = \frac{R_A + R_v}{R_v} I_A = 1{,}6\ \mathrm{A}$$

R5.163 I_A = 5 A, R_b = 0,2 Ω, I = 6 A; R_A = ?

$$R_A = \frac{I - I_A}{I_A} R_b = 0{,}04\ \Omega$$

R5.164 R_V = 200 Ω, U_V = 6 V, U = 60 V; R_p = ?

Poněvadž předřadný odpor je spojen s voltmetrem sériově, rozdělí se celkové napětí U_v v poměru

$$\frac{U_p}{U_V} = \frac{R_p}{R_V},$$

kde U_p a U_V jsou napětí na předřadném odporu a na voltmetru, R_p a R_V jsou hodnoty předřadného odporu a odporu voltmetru. Současně platí $U = U_p + U_V$, takže

$$\frac{R_p}{R_V} = \frac{U - U_V}{U_V}\text{; odtud } R_p = \frac{U - U_V}{U_V} R_V = 1\,800\ \Omega.$$

R5.165 R_V = 50 Ω, U_V = 0,25 V, U_{max} = 200 V; R_p = ?

Do obvodu voltmetru zařadíme předřadný rezistor o odporu R_p:

$$R_p = \frac{U_{max} - U_V}{U_V} R_V = 4{,}0 \cdot 10^4\ \Omega = 40\ \mathrm{k\Omega}$$

R5.166 $R_V = 1\ \text{k}\Omega = 10^3\ \Omega$, $I = 12\ \text{mA} = 1{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{A}$, $U_{max} = 300\ \text{V}$; $R_p = ?$

$$R_p = \frac{U_{max} - U_V}{U_V} R_V = \frac{U_{max} - R_V I}{I} = 2{,}4 \cdot 10^4\ \Omega = 24\ \text{k}\Omega$$

R5.167 $U_{min} = 0{,}3\ \text{V}$, $U_{max} = 600\ \text{V}$, $R_{max} = 30\ \text{M}\Omega = 3 \cdot 10^7\ \Omega$; $R_{min} = ?$, $I = ?$

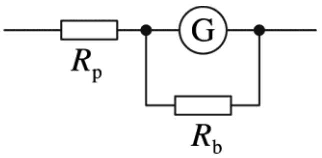
Při nejmenším napěťovém rozsahu probíhá měření bez použití předřadného odporu, při největším napěťovém rozsahu je použit předřadný odpor. V obou případech však měřicím přístrojem prochází stejný proud, takže platí:

$$I = \frac{U_{min}}{R_{min}} = \frac{U_{max}}{R_{max}}$$

$$R_{min} = R_{max} \frac{U_{min}}{U_{max}} = 1{,}5 \cdot 10^4\ \Omega = 15\ \text{k}\Omega$$

$$I = \frac{U_{max}}{R_{max}} = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{A} = 20\ \mu\text{A}$$

R5.168 $U_G = 75\ \text{mV} = 7{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{V}$, $I_G = 15\ \text{mA} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{A}$, $U_{max} = 150\ \text{V}$, $I_{max} = 150\ \text{mA} = 0{,}15\ \text{A}$; $R_p = ?$, $R_b = ?$



Obr. R5-168

$$R_G = \frac{U_G}{I_G} = 5\ \Omega$$

$$R_p = \frac{U_{max} - U_G}{I_G} = 10^3\ \Omega = 1\ \text{k}\Omega$$

$$R_b = R_G \frac{I_G}{I_{max} - I_G} = 0{,}56\ \Omega$$

R5.169 $R = 70\ \Omega$, $U_V = 100\ \text{V}$, $U_z = 240\ \text{V}$, $R' = 35\ \text{k}\Omega = 3{,}5 \cdot 10^4\ \Omega$; $U'_V = ?$

$$R_V = R \frac{U_V}{U_z - U_V} = 50\ \Omega$$

$$U'_V = U_z \frac{R_V}{R' - R_V} \approx U_z \frac{R_V}{R'} = 0{,}34\ \text{V}$$

R5.170 a) $U = 6\ \text{V}$, $I = 0{,}2\ \text{A}$, b) $U = 12\ \text{V}$, $I = 0{,}1\ \text{A}$; $P = ?$

a) $P = UI = 1{,}2\ \text{W}$

b) $P = UI = 1{,}2$ W

R5.171 $U = 220$ V a) $I_a = 6$ A, b) $I_b = 25$ A; $P = ?$

a) $P_a = UI_a = 1\,300$ W $= 1{,}3$ kW

b) $P_b = UI_b = 5\,500$ W $= 5{,}5$ kW

R5.172 a) $U = 220$ V, $P = 100$ W, b) $U = 120$ V, $P = 400$ W; $I = ?$

a) $I_a = \frac{P}{U} = 0{,}45 \text{ A}$

b) $I_b = \frac{P}{U} = 3{,}3 \text{ A}$

R5.173 a) $U = 220$ V, $P = 60$ W, b) $U = 220$ V, $P = 40$ W; $R = ?$

$$P = UI = \frac{U^2}{R}$$

a) $R_a = \frac{U^2}{P} = 810\ \Omega$

b) $R_b = \frac{U^2}{P} = 1\,200\ \Omega$

R5.174 a) $R = 10\ \Omega$, $U = 5$ V, b) $R = 5$ k$\Omega = 5 \cdot 10^3\ \Omega$, $U = 200$ mV$= 0{,}2$ V; $P = ?$

a) $P = \frac{U^2}{R} = 2{,}5 \text{ W}$

b) $P = \frac{U^2}{R} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ W}$

R5.175 a) $R = 5{,}6$ k$\Omega = 5{,}6 \cdot 10^3\ \Omega$, $I = 10$ mA $= 10^{-2}$ A, b) $R = 1{,}2$ MΩ =
$1{,}2 \cdot 10^6\ \Omega$,
$I = 100\ \mu$A $= 10^{-4}$ A; $P = ?$

a) $P = I^2R = 0{,}56$ W $\rightarrow$ zvolí rezistor na zatížení 1 W

b) $P = I^2R = 0{,}012$ W $\rightarrow$ zvolí rezistor na zatížení 0,05 W

R5.176 a) $R = 150\ \Omega$, $P = 2$ W, b) $R = 10$ k$\Omega = 10^4\ \Omega$, $P = 0{,}25$ W; $U_{max} = ?$

$$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow U = \sqrt{PR}$$

a) $U = 17$ V

b) $U = 50$ V

R5.177 U = 220 V, a) P_0 = 60 W, I = 6 A, b) P_0 = 200 W, I = 10 A; n = ?

$$n = \frac{P}{P_0} = \frac{UI}{P_0}$$

a) $n = 22$

b) $n = 11$

R5.178 U_1 = 12 V, P_1 = 40 W, U_2 = 12 V, P_2 = 5 W, Q =30 A · h; I = ?, t = ?

Žárovky jsou zapojeny do obvodu paralelně.

$$I = 2\frac{P_1}{U_1} + 2\frac{P_2}{U_2} = 2\frac{P_1 + P_2}{U}$$

$I = 7{,}5\ \mathrm{A}$

$$t = \frac{Q}{I} = 4\ \mathrm{h}$$

R5.179 P_1 = 1,2 kW = 1,2 · 10^3 W, P_2 = 5 · 10^2 W, P = 0,9 kW = 9 · 10^2 W, U = 220 V; I = ?

$$I = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{U} = 12\ \mathrm{A}$$

R5.180 U_e = 12 V, R_i = 2 Ω, R = 18 Ω; P_0 = ?, P = ?, η = ?

Celkový výkon

$$P_0 = U_e I = \frac{U_e^2}{R + R_i} = 7{,}2\ \mathrm{W}.$$

Užitečný výkon (příkon rezistoru)

$$P = UI = RI^2 = \frac{RU_e^2}{(R + R_i)^2} = \frac{P_0}{1 + \frac{R_i}{R}} \approx 6{,}5\ \mathrm{W}.$$

Účinnost přenosu

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{\frac{RU_e^2}{(R + R_i)^2}}{\frac{U_e^2}{R + R_i}} = \frac{R}{R + R_i} = 0{,}9.$$

R5.181 R = 5 Ω, U = 1,5 V, R_i = 1 Ω; U_e = ?, P_0 = ?, η = ?

$$U_\mathrm{e} = U + R_\mathrm{i} I = U + R_\mathrm{i}\frac{U}{R} = U\left(1 + \frac{R_\mathrm{i}}{R}\right) = 1{,}8\ \mathrm{V}$$

$$P_0 = \frac{U_\mathrm{e}}{R + R_\mathrm{i}} = 0{,}54\ \mathrm{W}$$

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = 0{,}45\ \mathrm{W}$$

$$\eta = \frac{P}{P_0} = 0{,}83$$

R5.182 R_1 = 800 Ω, R_2 = 480 Ω; P_1/P_2 = ?

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1^2 R_1}{I_2^2 R_2} = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 \frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$P_2 = \frac{R_1}{R_2} = 1{,}7 P_1$$

R5.183 U_1 = 220 V, U_2 = 120 V, $P_1 = P_2$; R = ?

$$P_1 = P_2$$

$$\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = \frac{R_1}{R_2}$$

$$R_1 = R_2\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2$$

$$R_1 \approx 3{,}4 R_2$$

R5.184 Zvětšuje se odpor vlákna žárovky a příkon žárovky se zmenšuje ($P = U^2/R$).

R5.185 U_1 = 220 V, U_2 = 110 V; P_1/P_2 = ?

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R},\ P_2 = \frac{U_2^2}{R}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = 4$$

$$P_1 = 4P_2$$

R5.186 U_1 = 220 V, P_1 = 40 W, U_2 = 220 V, P_2 = 100 W; P_1' = ?, P_2' = ?

$$I=\frac{U}{R_1+R_2}=\frac{U}{\frac{U^2}{P_1}+\frac{U^2}{P_2}}=\frac{P_1P_2}{U(P_1+P_2)}$$

$$P_1'=RI^2=\frac{U^2}{P_1}\left(\frac{P_1P_2}{U(P_1+P_2)}\right)^2=\frac{P_1P_2^2}{(P_1+P_2)^2}=20\ \mathrm{W}$$

$$P_2'=\frac{P_1^2P_2}{(P_1+P_2)^2}=8{,}2\ \mathrm{W}$$

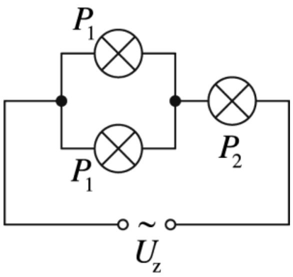
R5.187 U = 120 V, P = 40 W, U_z = 220 V; R = ?, P_R = ?

$$R=\frac{U_R}{I}=\frac{U_z-U}{\frac{P}{U}}=\frac{U(U_z-U)}{P}=300\ \Omega$$

$$P_R=U_RI=(U_z-U)\frac{P}{U}=33\ \mathrm{W}$$

R5.188 U_1 = 110 V, P_1 = 40 W, P_2 = 80 W, U_2 = 220 V; I = ?

Dvě žárovky s příkonem P_1 spojíme paralelně a připojíme je k žárovce s příkonem P_2 do série (obr. R5-188).



Obr. R5-188

$$R_1=\frac{U_1^2}{P_1},\ \text{odpor sériového spojení}:\ R'=\frac{R_1}{2}=\frac{U_1^2}{2P_1}$$

$$\text{Celkový odpor spojení}:\ R=R_2+R'=\frac{U_2^2}{P_2+2P_1}$$

$$\text{Celkový proud}:\ I=\frac{U_2}{R}=\frac{P_2+2P_1}{U_2}=0{,}73\ \mathrm{A}$$

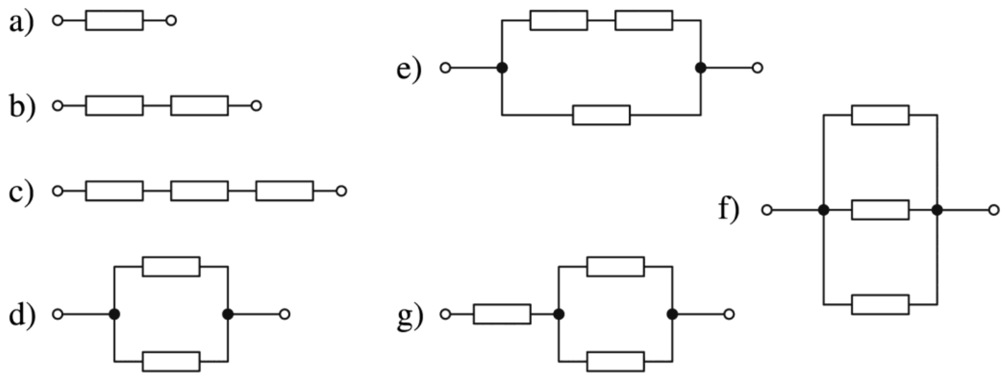
$$I_1=I/2=0{,}36\ \mathrm{A}$$
$$I_2=I=0{,}73\ \mathrm{A}$$

R5.189 P = 300 W, l' = 3/4 l; P' = ?

$$\frac{P'}{P}=\frac{R}{R'}=\frac{\rho\frac{l}{S}}{\rho\frac{l'}{S}}=\frac{l}{\frac{3}{4}l}=\frac{4}{3}$$

$$P'=\frac{4}{3}P=400\ \mathrm{W}$$

R5.190 R = 120 Ω, U = 220 V; P = ?



Obr. R5-190

$$P_1=\frac{U^2}{R}=403\ \mathrm{W}$$
$$P_2=P_1/2=202\ \mathrm{W}$$
$$P_3=P_1/3=134\ \mathrm{W}$$
$$P_4=2P_1=807\ \mathrm{W}$$
$$P_5=P_1/2+P_1=3/2\ P_1=605\ \mathrm{W}$$
$$P_6=3P_1=1\,210\ \mathrm{W}$$
$$P_7=P_1+2P_1=269\,\mathrm{W}$$

R5.191 U_e = 2 V, R_i = 1 Ω, P = 0,75 W; I = ?, R = ?

Pro celkový výkon zdroje napětí platí $U_eI = R_iI^2 + P$, kde P je výkon ve vnější části obvodu. Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $R_iI^2 - U_eI + P = 0$, která má řešení

$$I_{1,2}=\frac{U_e\pm\sqrt{U_e^2-4R_iP}}{2R_i}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 0{,}75}}{2}\ \mathrm{A}\,,$$

takže proud může mít hodnoty I_1 = 0,5 A, I_2 = 1,5 A. Těmto proudům odpovídají dvě hodnoty odporu, které určíme ze vztahu

$$R_1=P/I_1^2=3\,\Omega\,.$$

Podobně určíme R_2 = 0,33 Ω.

R5.192 R_1 = 5 Ω, R_2 = 0,2 Ω, $P_1 = P_2$; R_i = ?

$$\frac{U_e^2}{(R_1+R_i)^2}R_1=\frac{U_e^2}{(R_2+R_i)^2}R_2$$
$$R_1\left(R_2^2+2R_2R_i+R_i^2\right)=R_2\left(R_1^2+2R_1R_i+R_i^2\right)$$
$$R_i^2=R_1R_2$$
$$R_i=\sqrt{R_1R_2}=1\ \Omega$$

R5.193 R = 5 Ω, I_1 = 2 A, $P_1 = P_2$, U = 220 V; I_2 = ?

$$UI_1=RI_1^2+P_1$$
$$UI_2=RI_2^2+P_2$$
$$UI_1-RI_1^2=UI_2-RI_2^2$$
$$RI_2^2-UI_2-RI_1^2+UI_1=0$$
$$I_{2(1,2)}=\frac{U\pm\sqrt{U^2-4R\left(UI_1-RI_1^2\right)}}{2R}$$
$$I_2=42\ \text{A}$$

Druhý kořen vyhovuje podmínce I_1 = 2 A.

R5.194 U_e = 3 V, R_i = 1 Ω, P = 2 W; I = ?

$$U_e=R_iI+U$$
$$U_eI=R_iI^2+UI$$
$$U_eI=R_iI^2+P$$
$$R_iI^2-U_eI+P=0$$
$$I_{1,2}=\frac{U_e\pm\sqrt{U_e^2-4R_iP}}{2R_i}$$
$$I_1=1\ \text{A},\ I_2=2\ \text{A}$$

R5.195 I_1 = 1,2 A, I_2 = 2,4 A, $P_1 = P_2$; I_{max} = ?, I_z = ?

$$U_eI=R_iI^2+P$$
$$P=-R_iI^2+U_eI$$
$$P=-R_i\left(I-\frac{U_e}{2R_i}\right)^2+\frac{U_e^2}{4R_i}$$

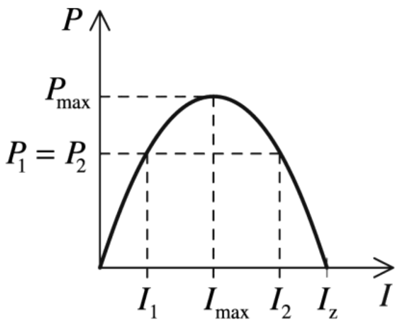
Grafem funkce $P=f(I)$ je parabola procházející počátkem s vrcholem

$V\left[\frac{U_e}{2R_i},\frac{U_e^2}{4R_i}\right]$ (obr. R5-195).

Vrcholu paraboly odpovídá střed intervalu (I_1, I_2), tzn.

$$I_{max} = \frac{I_1 + I_2}{2} = 1{,}3 \text{ A}.$$

Při zkratu obvodem prochází proud $I_z = 2I_{max} = I_1 + I_2 = 2{,}6$ A.



Obr. R5-195

R5.196 $R = 10\ \Omega$, $U = 3$ V, $P_p = P_s$; $I_s = ?$, $I_p = ?$

Sériové spojení (obr. R5-196a)

$$P_s = U_R I = RI^2 = R\frac{U_e^2}{(2R + R_i)^2}$$

Paralelní spojení (obr. R5-196b)

$$P_p = R\left(\frac{I}{2}\right)^2 = R\frac{U_e^2}{(R + 2R_i)^2}$$

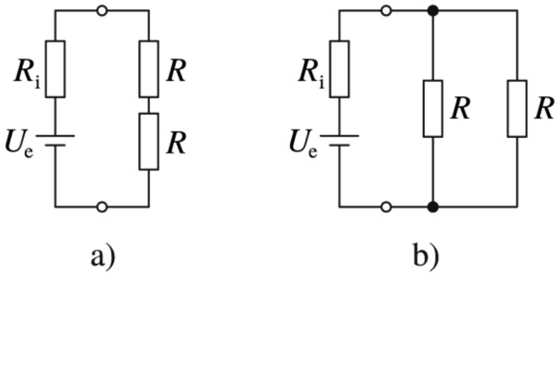
$$P_s = P_p$$

$$R\frac{U_e^2}{(2R + R_i)^2} = R\frac{U_e^2}{(R + 2R_i)^2}$$

$$R_i = R$$

$$I_s = \frac{U_e}{3R} = 0{,}1 \text{ A}$$

$$I_p = \frac{U_e}{\frac{3}{2}R} = 0{,}2 \text{ A}$$



Obr. R5-196

R5.197 U = 380 V, m = 10^3 kg, h = 19 m, t = 50 s, I = 20 A, g = 10 m · s^{-2}; η = ?

Při zvedání břemena se koná práce $W = Gh$, kde $G = mg$ je tíha, kterou břemeno působí na lano jeřábu, a h je výška, do níž bylo zvednuto. Příkon elektromotoru $P_1 = UI$ a jeho výkon

$$P_2 = \frac{Gh}{t},$$

kde t je doba, za kterou bylo břemeno zvednuto do výšky h.

Účinnost zařízení

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{mgh}{UIt} = 0{,}5.$$

R5.198 m = 0,5 t = 500 kg, h = 3 m, U = 220 V, I = 60 A, η = 0,8; t = ?

$$\eta = \frac{mgh}{UIt} \Rightarrow t = \frac{mgh}{UI\eta} = 1{,}4\ \mathrm{s}$$

R5.199 m = 1,2 t = 1 200 kg, U = 220 V, η = 0,9, h = 15 m, t = 30 s; P = ?, I = ?, W = ?

$$P = \frac{mgh}{t} = 5\,900\ \mathrm{W}$$

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{P}{UI} \Rightarrow I = \frac{P}{U\eta} = 30\ \mathrm{A}$$

$$W = UIt = 1{,}96 \cdot 10^5\ \mathrm{W \cdot s} = 5{,}4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kW \cdot h}$$

R5.200 P = 3,8 kW = 3,8 · 10^3 W, η = 0,75, t = 8 h; P_0 = ?, W = ?

$$\eta = \frac{P}{P_0}$$

$$P_0 = \frac{P}{\eta} = 5{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{W} = 5{,}1\ \mathrm{kW}$$

$$W = P_0 t = 41\ \mathrm{kW \cdot h}$$

R5.201 U = 220 V, P = 400 W, t = 1 800 s; Q = ?

$Q = W = Pt = 7{,}2 \cdot 10^5$ J

R5.202 U = 220 V, V = 0,5 l ~ m = 0,5 kg, t_1 = 20 °C, t_2 = 100 °C, τ = 480 s, c = 4 200 J · kg^{-1} · K^{-1}, η = 1; P_0 = ?

$$P_0 = \frac{mc\Delta t}{\tau} = 350\ \mathrm{W}$$

R5.203 $V = 1{,}5\ \mathrm{l} \sim m = 1{,}5\ \mathrm{kg}$, $t_1 = 20\ °\mathrm{C}$, $t_2 = 100\ °\mathrm{C}$, $P_0 = 600\ \mathrm{W}$, $\eta = 0{,}8$, $c = 4\,200\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$; $\tau = ?$

$$\eta = \frac{\frac{mc\Delta t}{\tau}}{P_0} \Rightarrow \tau = \frac{mc\Delta t}{\eta P_0} = 1\,050\ \mathrm{s} = 17\ \mathrm{min}\ 30\ \mathrm{s}$$

R5.204 $P_0 = 850\ \mathrm{W}$, $m = 2\ \mathrm{kg}$, $t_1 = 15\ °\mathrm{C}$, $t_2 = 100\ °\mathrm{C}$, $\tau = 1\,200\ \mathrm{s}$, $c = 4\,200\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$; $\eta = ?$

$$\eta = \frac{\frac{mc\Delta t}{\tau}}{P_0} = \frac{mc\Delta t}{\tau P_0} = 0{,}7$$

R5.205 Nemůžeme. Vznikají ztráty elektrické energie způsobené vnitřním odporem akumulátoru, přívodních vodičů apod.

R5.206 Vlákno žárovky má mnohem větší odpor než přívodní vodiče.

R5.207 $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 23\ \Omega$, $U = 100\ \mathrm{V}$, $t = 1\ \mathrm{s}$; $Q_1 = ?$, $Q_2 = ?$

a) sériové spojení

$$P_1 = I^2 R_1 = \frac{U^2}{(R_1 + R_2)^2} R_1 \approx 92\ \mathrm{W} \sim Q_1 = P_1 t = 92\ \mathrm{J}$$

$$P_2 = I^2 R_2 = \frac{U^2}{(R_1 + R_2)^2} R_2 \approx 210\ \mathrm{W} \sim Q_2 = P_2 t = 210\ \mathrm{J}$$

b) paralelní spojení

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} = 1\,000\ \mathrm{W} \sim Q_1 = P_1 t = 1\,000\ \mathrm{J}$$

$$P_2 = \frac{U^2}{R_2} = 430\ \mathrm{W} \sim Q_2 = P_2 t = 430\ \mathrm{J}$$

R5.208 $U = 220\ \mathrm{V}$, $P_0 = 600\ \mathrm{W}$, $j = 10\ \mathrm{A \cdot mm^{-2}} = 10^7\ \mathrm{A \cdot m^{-2}}$, $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$; $l = ?$, $d = ?$

$$P_0 = UI = UjS \;\Rightarrow\; S = \frac{P_0}{Uj} = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$d = \sqrt{\frac{4P_0}{\pi Uj}} \approx 6\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m} = 0{,}6\ \mathrm{mm}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{jS} = \rho\frac{l}{S} \;\Rightarrow\; l = \frac{U}{j\rho} = 20\ \mathrm{m}$$

R5.209 $l_1 = l_2$, $S_1 = S_2$, $\rho_{\mathrm{Cu}} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$, $\rho_{\mathrm{Fe}} = 1{,}1 \cdot 10^{-7}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$; $Q_1 : Q_2 =$?, $U_1 : U_2 =$?, $t_1 =$?, $t_2 =$?

a) sériové spojení

$$P_1 = I^2 R_1 = \frac{U^2}{(R_1 + R_2)^2} R_1$$

$$P_2 = I^2 R_2 = \frac{U^2}{(R_1 + R_2)^2} R_2$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_{\mathrm{Cu}}\frac{l}{S}}{\rho_{\mathrm{Fe}}\frac{l}{S}} = \frac{\rho_{\mathrm{Cu}}}{\rho_{\mathrm{Fe}}} = 0{,}15$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} = 0{,}15$$

$$t_{\mathrm{Cu}} < t_{\mathrm{Fe}}$$

b) paralelní spojení

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1}$$

$$P_2 = \frac{U^2}{R_2}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_{\mathrm{Fe}}}{\rho_{\mathrm{Cu}}} = 6{,}5$$

$$\frac{U_1}{U_2} = 1$$

$$t_{\mathrm{Cu}} > t_{\mathrm{Fe}}$$

R5.210 $U_e = 4\ \mathrm{V}$, $R_i = 1\ \Omega$; $P = f(I)$, $\eta = f(I)$

Při průchodu proudu I obvodem je na svorkách zdroje napětí $U = U_e - R_i I$ a výkon P proudu ve vnější části obvodu $P = UI = (U_e - R_i I)I = U_e I - R_i I^2$, $\{P\} = 4\{I\} - \{I^2\}$. Účinnost přeměny energie v obvodu

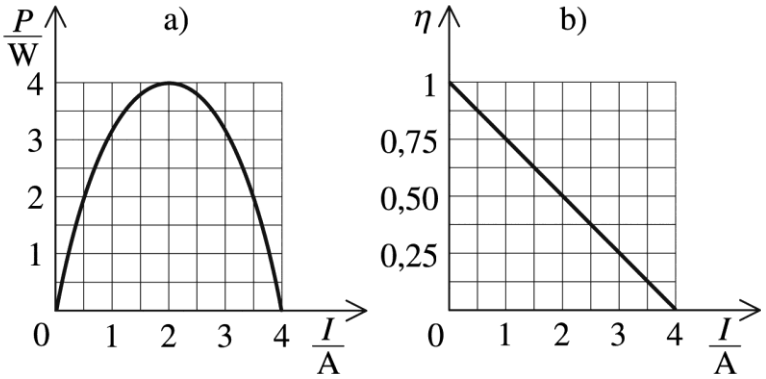
$$\eta = \frac{UI}{U_e I} = \frac{U_e - R_i I}{U_e},$$

$$\{\eta\} = 1 - 0{,}25\,\{I\}.$$

Pro zvolenou řadu hodnot proudu jsou hodnoty P a η uvedeny v tabulce:

$\frac{I}{\text{A}}$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$\frac{P}{\text{W}}$	1,75	3,0	3,75	4,0	3,75	3,0	1,75	0
η	0,875	0,75	0,625	0,5	0,375	0,25	0,125	0

Graf $P = f(I)$ je na obr. R5-210a [5-29a] a graf $\eta = f(I)$ je na obr. R5-210b [5-29b]. Z grafů je zřejmé, že účinnost přeměny energie se s rostoucím proudem v obvodu zmenšuje, ale výkon dosahuje maxima při poloviční hodnotě zkratového proudu. Tento případ nastává, je-li odpor R vnější části obvodu roven vnitřnímu odporu zdroje ($R = R_i$).



Obr. R5-210

R5.211 Zahříváním polovodiče se uvolňují další nosiče náboje.

R5.212 Je to izolant.

R5.213 Bor a indium jsou ve třetím sloupci periodické soustavy prvků a jsou příměsovými prvky polovodičů typu P. Fosfor a arsen jsou v pátém sloupci a jsou příměsovými prvky polovodičů typu N.

R5.214 Proudící voda ochlazuje termistor více při větší rychlosti proudění. Odpor termistoru se s rostoucí rychlostí proudění zvětšuje a měřením odporu se určuje rychlost proudění.

R5.215 $t_1 = 20$ °C, $R_1 = 50$ kΩ $= 5{,}0 \cdot 10^4$ Ω, $t_2 = 25$ °C, $R_2 = 42{,}5$ kΩ $=$ $4{,}25 \cdot 10^4$ Ω; $\alpha = ?$

$\Delta R = R_1 \alpha \Delta t$

$\alpha = \dfrac{R_2 - R_1}{R_1 \Delta t} = -0{,}03\ \mathrm{K}^{-1}$

R5.216 Při zapojení obvodu má termistor značný odpor a žhavicí vlákno má malý odpor. Za provozu se odpor termistoru po zahřátí procházejícím proudem zmenšuje a odpor vlákna se zvětšuje. To má za následek zmenšení napětí na termistoru a zvětšení napětí na žárovce.

R5.217 $\Delta R = -\,0{,}2R_1$, U = konst.; ΔI = ?

$\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{\frac{4}{5}R_1}{R_1} = \dfrac{4}{5}$

$I_2 = \dfrac{5}{4} I_1$

$\Delta I = I_2 - I_1 = 0{,}25 I_1$

Proud se zvětšil o 25 %.

R5.218 $\alpha = -0{,}05\ \mathrm{K}^{-1}$, $R_2 = R_1/2$; Δt = ?

$\Delta R = R_1 \alpha \Delta t$

$\dfrac{R_1}{2} - R_1 = R_1 \alpha \Delta t$

$\Delta t = -\dfrac{1}{2\alpha} = 10\ °\mathrm{C}$

R5.219 $R = 10^3\ \Omega$, $t_1 = 20\ °\mathrm{C}$, $I_1 = 5\ \mathrm{mA} = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}$, $I_2 = 10\ \mathrm{mA} = 10^{-2}\ \mathrm{A}$, $\alpha = -$ $0{,}04\ \mathrm{K}^{-1}$, $U = 20\ \mathrm{V}$; t_2 = ?

$R_1 = \dfrac{U}{I_1} - R = 3 \cdot 10^3\ \Omega,\ \ R_2 = \dfrac{U}{I_2} - R = 10^3\ \Omega$

$\Delta R = R_2 - R_1 = R_1 \alpha \Delta t$

$\Delta t = \dfrac{\Delta R}{R_1 \alpha} \approx 17\ °\mathrm{C}$

$t_2 = 37\ °\mathrm{C}$

R5.220 $U = 20\ \mathrm{V}$, $I_1 = 20\ \mathrm{mA} = 2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{A}$, $I_2 = 5\ \mathrm{mA} = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}$, $I_3 = 2\ \mathrm{mA} =$ $2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}$; t = ?

$$I_A = \frac{U}{R_{min}} = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{A} = 20\ \text{mA}$$

$$R_1 = \frac{U}{I_1} = 10^3\ \Omega\ \sim\ t_1 = 100\ °\text{C}$$

$$R_2 = \frac{U}{I_2} = 4 \cdot 10^3\ \Omega\ \sim\ t_2 = 50\ °\text{C}$$

$$R_3 = \frac{U}{I_3} = 10^4\ \Omega\ \sim\ t_3 = 20\ °\text{C}$$

R5.221 Osvětlený fotorezistor – 1, neosvětlený rezistor – 2

$$R_1 = \frac{U}{I_1},\ R_2 = \frac{U}{I_2}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{4}$$

V osvětleném fotorezistoru je více volných nosičů náboje, takže jeho odpor je menší. Odpor osvětleného fotorezistoru je 4krát menší než neosvětleného.

R5.222 Při osvětlení fotorezistoru se jeho odpor zmenší, zmenší se také napětí U_f na fotorezistoru a zvětší se výstupní napětí U_2 ($U_2 = U_1 - U_f$).

R5.223 $R_f = 25\ \text{k}\Omega = 2{,}5 \cdot 10^4\ \Omega$, $R = 5\ \text{k}\Omega = 5 \cdot 10^3\ \Omega$, $I_1 = 0{,}3\ \text{mA} = 3 \cdot 10^{-4}\ \text{A}$, $I_2 = 1{,}2\ \text{mA} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{A}$; $U = ?$, $R_{fo} = ?$

a) bez osvětlení $U_2 = RI_1 = 1{,}5\ \text{V}$

b) při osvětlení $U_2 = RI_2 = 6{,}0\ \text{V}$

$$I_2(R_{fo} + R) = I_1(R_f + R)$$

$$R_{fo} = \frac{I_1}{I_2}(R_f + R) - R = 2{,}5 \cdot 10^3\ \Omega = 2{,}5\ \text{k}\Omega$$

R5.224 Žárovky budou svítit střídavě: + pól zdroje je vlevo – svítí žárovka B, + pól zdroje vpravo – svítí žárovka A.

R5.225 $R = 1\ \text{k}\Omega$; $R_c = ?$

a) Diody jsou spojeny v propustném směru a rezistory jsou spojeny paralelně:

$$R_a = \frac{R}{3} = 0{,}33\ \text{k}\Omega$$

b) Diody jsou spojeny v závěrném směru a rezistory jsou spojeny sériově:

$R_b = 3R = 3\ \mathrm{k\Omega}$

R5.226 Proud obvodem nebude procházet. Přechod mezi bází a kolektorem je zapojen v závěrném směru.

R5.227 Napětí báze se zvětší, takže tranzistorem prochází větší proud báze a proud kolektorový se rovněž zvětší.

R5.228. a) Cu ($M_m = 63{,}54 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$), $\nu = 2$, b) Ag ($M_m = 108{,}87 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$), $\nu = 1$, c) Al ($M_m = 26{,}98 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$), $\nu = 3$, d) Zn ($M_m = 65{,}37 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$), $\nu = 2$; $A = ?$

$$A = \frac{M_m}{F\nu}$$

a) $A_{Au} = 3{,}3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{kg \cdot C^{-1}}$, b) $A_{Ag} = 1{,}1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg \cdot C^{-1}}$, c) $A_{Al} = 0{,}93 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{kg \cdot C^{-1}}$, d) $A_{Zn} = 3{,}4 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{kg \cdot C^{-1}}$.

R5.229 $Q = 2 \cdot 10^4$ C; $m = ?$

$$m = AQ = \frac{M_m}{F\nu} Q = 6{,}6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} = 6{,}6\ \mathrm{g}$$

R5.230 $m = 13{,}2\ \mathrm{g} = 13{,}2 \cdot 10^{-3}$ kg; $Q = ?$

$$Q = \frac{m}{A} = \frac{mF\nu}{M_m} = 1{,}2 \cdot 10^4\ \mathrm{C}$$

R5.231 $I = 1$ A, $t = 1$ s; $n = ?$

Látkové množství 1 molu libovolné látky má hmotnost M_m (molární hmotnost) a obsahuje $N_A = 6{,}022\,17 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$ částic (Avogadrova konstanta). Při elektrolýze se vyloučí měď o hmotnosti m, která obsahuje N atomů. Platí $N = mN_A/M_m$ a po dosazení do Faradayova zákona pro elektrolýzu

$$m = \frac{NM_m}{N_A} = \frac{1}{F}\frac{M_m}{\nu} It\,,$$

v němž F je Faradayova konstanta ($F = 9{,}65 \cdot 10^4\ \mathrm{C \cdot mol^{-1}}$) a ν je oxidační číslo mědi ($\nu = 2$), dostaneme $N = N_A It/F\nu = 3{,}1 \cdot 10^{18}$.

R5.232 Přidáním soli se zvětší obsah iontů v roztoku, jeho odpor se zmenší a žárovka bude svítit více.

R5.233 a) Sériové spojení. Poněvadž proud procházející oběma nádobami je stejný, vyloučí se stejné množství mědi.

b) Paralelní spojení. Poněvadž je v nádobě A větší koncentrace iontů, je odpor elektrolytu menší, prochází jím větší proud a vyloučí se více mědi než v nádobě B.

R5.234 $AgNO_3$ ($A_{Ag} = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ kg · mol^{-1}), t = 10 min = 600 s, m = 0,67 g = 6,7 · 10^{-4} kg,
I = 0,9 A; I_A = ?

$$m = A_{Ag} I t$$

$$I = \frac{m}{A_{Ag} t} = 1{,}0\ \text{A}$$

Ampérmetr neukazuje správnou hodnotu.

R5.235 $ZnSO_4$ ($A_{Zn} = 3{,}4 \cdot 10^{-7}$ kg · C^{-1}), t = 1 h = 3 600 s, m = 2,45 g = 2,45 · 10^{-3} kg, U = 6 V; R = ?

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\dfrac{m}{A_{Zn} t}} = \frac{U A_{Zn} t}{m} = 3\ \Omega$$

R5.236 m_H = 1 g = 10^{-3} kg; m_{Cl} = ?

$$\frac{m_{Cl}}{m_H} = \frac{A_{Cl} Q}{A_H Q} = \frac{M_{mCl}}{M_{mH}}$$

$$m_{Cl} = \frac{M_{mCl}}{M_{mH}} m_H = 3{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{kg} = 35\ \text{g}$$

R5.237 $m_H : m_O$ = ?, $V_H : V_O$ = ?

Pro poměr hmotností vodíku a kyslíku vyloučených při elektrolýze vody platí podle Faradayova zákona

$$\frac{m_H}{m_O} = \frac{A_H}{A_O} = \frac{\dfrac{M_{mH}}{F \nu_H}}{\dfrac{M_{mO}}{F \nu_O}} = \frac{M_{mH} \nu_O}{M_{mO} \nu_H} = \frac{1}{8}\,.$$

Poněvadž vodík i kyslík jsou plyny tvořené dvojatomovými molekulami, zaujímají plyny o molární hmotnosti M_m stejný molární objem V_m. Pro objem V plynu o hmotnosti m platí

$$V = \frac{m V_m}{M_m}$$

a pro poměr objemů vyloučeného vodíku a kyslíku dostaneme po úpravě

$$\frac{V_H}{V_O} = \frac{m_H M_{mO}}{m_O M_{mH}} = \frac{\nu_O}{\nu_H} = \frac{2}{1}.$$

R5.238 $\nu_{Ag} = 1$, $\nu_{Al} = 3$; $m_{Ag} : m_{Al} = ?$

$$\frac{m_{Ag}}{m_{Al}} = \frac{A_{Ag}}{A_{Al}} = \frac{\dfrac{M_{mAg}}{F\nu_{Ag}}}{\dfrac{M_{mAl}}{F\nu_{Al}}} = \frac{M_{mAg}\nu_{Al}}{M_{mAl}\nu_{Ag}} \approx 12$$

$$m_{Ag} : m_{Al} \approx 12 : 1$$

R5.239 m_1 = 70,40 g = 7,040 · 10^{-2} kg, m_2 = 70,58 g = 7,058 · 10^{-2} kg, I = 0,5 A, t = 20 min = 1 200 s; A_{Cu} = ?

$$m = AIt$$

$$A = \frac{m_2 - m_1}{It} = 3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{kg \cdot C^{-1}}$$

R5.240 S = 25 cm^2 = 2,5 · 10^{-3} m^2, I = 0,4 A, Δm = 132 mg = 1,32 · 10^{-4} kg, ρ_{Cu} = 8 600 kg · m^{-3}, A_{Cu} = 3 · 10^{-7} kg · C^{-1}; a) t = ?, b) d = ?

a) $\Delta m = A_{Cu} I t$

$$t = \frac{\Delta m}{A_{Cu} I} = 1\,100\ \mathrm{s} \approx 18\ \mathrm{min}$$

b) $\Delta m = \rho V = \rho S d$

$$d = \frac{\Delta m}{\rho S} = 6{,}1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = 6{,}1\ \mu\mathrm{m}$$

R5.241 t = 2 h, ν = 3, j = 120 A · m^{-2}, A_{Ni} = 2,03 · 10^{-7} kg · C^{-1}, ρ_{Ni} = 8 900 kg · m^{-3}; d = ?

Při dané hustotě proudu prochází plochou o obsahu 1 m^2 proud 120 A a na ploše se vytvoří vrstva kovu o hmotnosti

$$m = A_{Ni} I t = \frac{M_m I t}{\nu F} = 0{,}18\ \mathrm{kg}.$$

Pro hmotnost kovu platí $m = \rho_{Ni} S d$, kde ρ_{Ni} je hustota niklu, S je obsah plochy, d je tloušťka vyloučené vrstvy niklu. Odtud

$$d = \frac{m}{S\rho_{Ni}} = 2{,}0 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m} = 20\ \mu\mathrm{m}.$$

R5.242 d = 50 μm = 5,0 · 10^{-5} m, ν_{Cr} = 3, j = 2 kA · m^{-2} = 2,0 · 10^3 A · m^{-2}, ρ_{Cr} = 7,1 · 10^3 kg · m^{-3}, A_{Cr} = 1,8 · 10^{-7} kg · C^{-1}; t = ?

$t = \frac{\rho_{Cr} d}{A_{Cr} j} = 986\ \text{s} \approx 16\ \text{min}$

R5.243 Za nízkého tlaku uplyne delší doba mezi dvěma srážkami iontů. Iont je elektrickým polem urychlován delší dobu a získá tak energii potřebnou k ionizaci nárazem již při nižším napětí.

R5.244 Ionizace nastává vlivem vysoké teploty výboje.

R5.245 V blízkosti hrotů má elektrické pole velkou intenzitu.

R5.246 Q = 20 C, $\Delta\varphi = 10^6$ V; E = ?

$E = Q\Delta\varphi = 2 \cdot 10^7$ J = 20 MJ

R5.247 S = 1 dm^2 = 10^2 cm^2, d = 5 mm = 0,5 cm, $I = 2 \cdot 10^{-10}$ A; n = ?

Předpokládejme, že při ionizaci vznikají páry iontů nesoucí po jednom elementárním náboji o velikosti $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Jestliže v objemu 1 cm^3 vzniká ionizací náboj $Q = ne$, kde n je počet iontů, pro nasycený proud I platí

$I = \frac{QV}{t} = \frac{neSd}{t}$

a odtud

$n = \frac{It}{eSd} = 2{,}5 \cdot 10^7\ \text{cm}^{-3}.$

R5.248 a) Elektrickým polem, jehož intenzita má opačný směr než rychlost elektronu.

b) Elektrickým polem, jehož intenzita je kolmá ke směru rychlosti.

c) Elektrickým polem, jehož intenzita má stejný směr jako rychlost elektronu.

R5.249 V trubici A jsou elektrony z kovu katody uvolňovány vysokým napětím.

V trubici B jsou elektrony z kovu katody uvolňovány termoemisí.

R5.250 $v_0 = 6 \cdot 10^7$ m $\cdot$ s^{-1}, d = 1 cm = 10^{-2} m, l = 5 cm = $5 \cdot 10^{-2}$ m, U = 600 V, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; y = ?

Pohyb elektronu je obdobný jako pohyb při vodorovném vrhu. V souřadnicové soustavě Oxy platí:

$$x = v_x t,\ \ y = \frac{1}{2}at^2$$

$$v_x = v_0,\ \ a = \frac{F_e}{m_e} = \frac{eE}{m_e}$$

$$E = \frac{U}{d}$$

$$x = v_0 t$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{eU}{m_e d}t^2$$

Vyloučíme *t* a dosadíme *x* = *l*:

$$y = \frac{eUx^2}{2m_e v_0^2 d} = \frac{eUl^2}{2m_e v_0^2 d} = 3{,}7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

5.3 Magnetické pole

R5.251 Proud teče vpravo. Severní (tmavé) konce magnetek ukazují orientaci magnetické indukční čáry.

R5.252 Severní konec magnetky se vychýlí za nákresnu.

R5.253 Vpravo, poněvadž magnetické indukční čáry kroužku i magnetu jsou orientovány souhlasně.

R5.254 Kladný pól zdroje je vpravo.

R5.255 Do svislé polohy. Vodič spojený s pólem + bude nahoře, takže magnetické indukční čáry magnetu i smyčky jsou orientovány souhlasně.

R5.256 a) Váleček se přitáhne k cívce; b) výchylka válečku se zvětší, c) váleček se rovněž přitáhne. Při použití magnetu bude výchylka záviset na směru proudu.

R5.257 l = 20 cm = 0,2 m, I = 10 A, B = 15 mT = 1,5 · 10^{-2} T; F_m = ?

$$F_m = BIl = 0{,}03\ \mathrm{N} = 30\ \mathrm{mN}$$

R5.258 B = 2 T, l = 20 cm = 0,2 m, F_m = 1,2 N; I = ?

$$I = \frac{F_m}{Bl} = 3\ \mathrm{A}$$

R5.259 I = 20 A, F_m = 1,5 N, l = 15 cm = 0,15 m; B = ?

$$B = \frac{F_m}{Il} = 0{,}6\ \mathrm{T}$$

R5.260 Rotor elektromotoru se pohybuje proti směru pohybu hodinových ručiček.

R5.261 a = 0,1 m, b = 0,05 m, N = 200, B = 0,05 T, I = 2 A; M = ?

Uvažujme, že cívka je otáčivá kolem delší strany a je umístěna v magnetickém poli tak, že její vodiče jsou kolmé k indukčním čárám. Pro velikost momentu M_0 magnetické síly F_m, která působí na jeden závit, platí vztah

$M_0 = F_m b = BIab.$

Poněvadž cívka má N závitů, je velikost celkového momentu magnetické síly

$M = NM_0 = BNIab = 0{,}1\ \mathrm{N \cdot m}.$

Snadno dokážeme, že ke stejnému výsledku dospějeme i v případě, že by se cívka otáčela kolem kratší strany, popř. kolem osy umístěné v libovolném místě v rovině cívky.

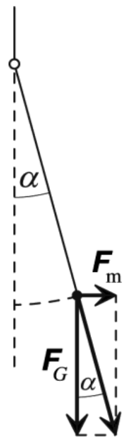
R5.262 I = 3 A, B = 20 mT = $2 \cdot 10^{-2}$ T, l = 10 cm = 0,1 m, α = 45°; F_m = ?

$$F_m = BIl \sin\alpha = 4{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}$$

R5.263 B = 10 mT = $1{,}0 \cdot 10^{-2}$ T, l = 10 cm = 0,1 m, I = 10 A; ΔF_t = ?

$$\Delta F_t = \frac{BIl}{2} = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N} = 5\ \mathrm{mN}$$

R5.264 l = 5 cm = $5 \cdot 10^{-2}$ m, I = 10 A, m = 50 g = $5 \cdot 10^{-2}$ kg, α = 14°, g = 10 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$; B = ?



Obr. R5-264

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{\mathrm{m}}}{F_{\mathrm{G}}} = \frac{BIl}{mg}$$

$$B = \frac{mg\operatorname{tg}\alpha}{Il} = 0{,}25\ \mathrm{T}$$

R5.265 l = 50 cm = 0,5 m, I = 2 A, B = 0,1 T; F_{m} = 0,05 N; α = ?

$$\sin\alpha = \frac{F_{\mathrm{m}}}{BIl} = 0{,}5$$

$$\alpha = 30°$$

R5.266 l = 30 cm = 0,3 m, I = 20 A, B = 0,4 T, α = 30°, s = 25 cm = 0,25 m; W = ?

$$W = F_{\mathrm{m}}s = BIls\sin\alpha = 0{,}3\ \mathrm{J}$$

R5.267 Vodiče se a) odpuzují; b) přitahují.

R5.268 Vodiče se odpuzují, poněvadž jimi prochází proud opačným směrem.

R5.269 a) Poloha se nezmění, b) vodiče budou ležet vedle sebe ve společné rovině tak, že nejbližšími body vodičů bude proud procházet souhlasným směrem.

R5.270 $I_1 = I_2$ = 300 A, d = 5 cm = $5 \cdot 10^{-2}$ m, l = 50 m; F_{m} = ?

$$F_{\mathrm{m}} = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}l = 18\ \mathrm{N}$$

R5.271 d = 10 cm = 0,1 m, l = 1 m, F_{m} = 0,2 N; I = ?

$$I = \sqrt{\frac{2\pi F_{\mathrm{m}} d}{\mu l}} = 320\ \mathrm{A}$$

R5.272 Poněvadž elektron má záporný náboj, působí na něj magnetická síla opačného směru, než je směr určený Flemingovým pravidlem levé ruky. Trajektorie se zakřiví vpravo.

R5.273 Katodové záření je tvořeno zápornými elektrony. Proto je směr magnetické síly, která na částice působí, opačný než směr určený Flemingovým pravidlem levé ruky. Záření se vychýlí dolů.

R5.274 Vodiče na sebe působí magnetickou silou, kdežto v elektronovém paprsku je větší elektrická síla, kterou se elektrony navzájem odpuzují.

R5.275 Kladný pól zdroje proudu je na horní svorce cívky.

R5.276 Náboj částice: 1 – kladný, 2 – záporný, 3 – žádný, 4 – záporný.

R5.277 $v = 3 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $B = 0{,}1\ \mathrm{T}$; $F_\mathrm{m} = ?$

$$F_\mathrm{m} = Bev = 4{,}8 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{N}$$

R5.278 $v = 10^4\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $B = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}$; $r = ?$

Při pohybu elektronu po kružnicové trajektorii je magnetická síla $F_\mathrm{m} = Bev$ silou dostředivou $F_\mathrm{d} = mv^2/r$:

$$Bev = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{Be} = 1{,}1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$$

R5.279 Pomalejší, poněvadž jejich trajektorie má menší poloměr.

R5.280 $B = 10\ \mathrm{mT} = 10^{-2}\ \mathrm{T}$, $E_\mathrm{k} = 30\ \mathrm{keV} = 3{,}0 \cdot 10^2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 4{,}8 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{J}$; $r = ?$

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow mv = \sqrt{2mE_\mathrm{k}}$$

$$r = \frac{mv}{Be} = \frac{\sqrt{2mE_\mathrm{k}}}{Be} = 5{,}8 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} = 5{,}8\ \mathrm{cm}$$

R5.281 $r = 5\ \mathrm{cm} = 5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$, $B = 20\ \mathrm{mT} = 2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{T}$, $m_\mathrm{p} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$; $v = ?$

$$Bev = \frac{m_\mathrm{p}v^2}{r}$$

$$v = \frac{Ber}{m_\mathrm{p}} = 9{,}6 \cdot 10^4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 96\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

R5.282 $\Delta U = 600\ \mathrm{V}$, $B = 0{,}33\ \mathrm{T}$; $r = ?$

Proton má kladný náboj e a v elektrickém poli s potenciálním rozdílem ΔU získá kinetickou energii:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_\mathrm{p}v^2 = e\Delta U$$

$$r = \frac{mv}{Be} = \frac{\sqrt{2m_\mathrm{p}e\Delta U}}{Be} = \sqrt{\frac{2m_\mathrm{p}\Delta U}{B^2e}} = 1{,}1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} = 1{,}1\ \mathrm{cm}$$

Energie protonu se při pohybu v magnetickém poli nezmění.

R5.283 $Q_\alpha = 2e$, $m_\alpha = 4m_\mathrm{p}$

a) $v = \frac{Ber_p}{m_p} = \frac{B2er_\alpha}{4m_p} \Rightarrow r_\alpha = 2r_p$

b) $E_k = \frac{r_p^2 B^2 e^2}{2m_p} = \frac{r_p^2 B^2 4e^2}{2 \cdot 4m_p} \Rightarrow r_p = r_\alpha$

R5.284 ΔU = 220 V, B = 5 mT = 5 · 10^{-3} T, r = 1 cm = 10^{-2} m; m_e = ?

$$Bev = m_e \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{B^2 e^2 r^2}{m_e^2}$$

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2 e^2 r^2}{m_e} = e\Delta U$$

$$m_e = \frac{B^2 e r^2}{2\Delta U} = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

R5.285 $\Delta\varphi = U$ = 250 kV = 2,5 · 10^5 V, B = 0,51 T, d = 10 cm = 0,1 m; α = ?

Částice α o hmotnosti $m_\alpha = 4m_p$ a s nábojem $Q_\alpha = 2e$ získá v elektrickém poli o rozdílu potenciálů U kinetickou energii:

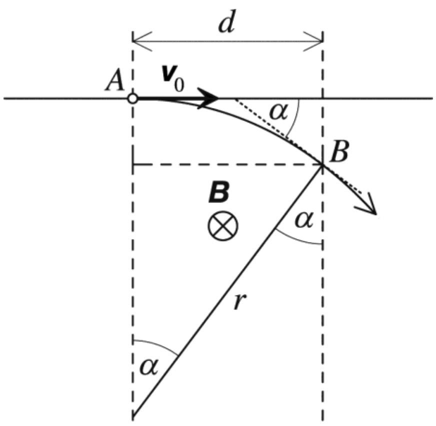
$$E_k = \frac{1}{2} m_\alpha v^2 = Q_\alpha U$$

$$r = \frac{m_\alpha v}{BQ_\alpha} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_\alpha U}{Q_\alpha}} = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{m_p U}{e}}$$

Do magnetického pole elektron vstupuje v bodě A a opouští ho v bodě B. Z obr. R5-285 je patrné, že pro úhel α platí:

$$\sin\alpha = \frac{d}{r} = \frac{dB}{2}\sqrt{\frac{e}{m_p U}} = 0{,}5$$

$$\alpha = \arcsin\alpha = 30°$$



Obr. R5-285

R5.286 $B = 1$ mT $= 10^{-3}$ T, $E = 0{,}5$ kV · m^{-1} = 500 V · m^{-1}; v = ?

$F_m = F_e$

$$Bev = Ee \Rightarrow v = \frac{E}{B} = 5 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Elektron se musí pohybovat ve směru kolmém k magnetickým indukčním čárám i k elektrickým siločarám.

R5.287 Při vyšší teplotě kovy ztrácejí feromagnetismus.

R5.288 Tvrdá ocel zůstává po zmagnetování magnetická, kdežto magnetické pole měkké oceli rychle zaniká.

R5.289 Změnou směru proudu v elektromagnetu.

R5.290 a) Relé je zapojeno paralelně; b) relé sepne a k žárovce je připojen ochranný rezistor; c) žárovka je spojena se zdrojem napětí přes rezistor.

R5.291 Podle Lenzova zákona je pól + indukovaného napětí vlevo.

R5.292 Proud má směr: a) před nákresnu; b) za nákresnu; c) za nákresnu. d) Proud se neindukuje.

R5.293 Kroužek se vychýlí vpravo. Indukovaný proud v kroužku vytváří magnetické pole a jeho působením se kroužek od magnetu odpuzuje. Na směru proudu v cívce nezáleží.

R5.294 Proud má směr proti pohybu hodinových ručiček. (Podle Lenzova zákona opačný směr než ve vnějším kroužku.)

R5.295 Ne. V cívce vzniká indukovaný proud, který svými účinky působí proti pohybu magnetu.

R5.296 $\Delta t = 0{,}3$ s, $\Delta\Phi = 0{,}06$ Wb; U_i = ?

$$|U_i| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0{,}2 \text{ V}$$

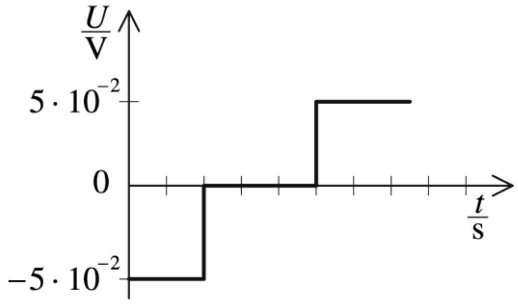
R5.297 $\Delta\Phi_1 = -1$Wb, $\Delta\Phi_2 = 1$ Wb, $\Delta t_1 = 0{,}5$ s, $\Delta t_2 = 0{,}1$ s

$$U_{i1} = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t_1} = +2 \text{ V}, U_{i2} = -\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t_2} = -10 \text{ V}$$

R5.298 $n = 80$, $\Delta t = 5$ s, $\Phi_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ Wb, $\Phi_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Wb; U_i = ?

$$U_i = -\frac{n(\Phi_2 - \Phi_1)}{\Delta t} = 2{,}4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{V} = 24\ \mathrm{mV}$$

R5.299 Obr. R5-299 [V5-2].



Obr. R5-299

R5.300 B = 0,25 T, v = 0,5 m · s^{-1}, l = 1,2 m; U_i = ?

Při pohybu působí na elektrony ve vodiči magnetická síla o velikosti $F_m = Bev$ a ta je příčinou vzniku indukovaného elektrického pole ve vodiči, jehož intenzita $E_i = F_m/e$. Pro velikost indukovaného napětí U_i pak platí

$U_i = E_i l = Bvl$ = 0,15 V.

R5.301 l = 1,8 m, v = 6,0 m · s^{-1}, U_i = 1,44 V; B = ?

$$U_i = Blv$$

$$B = \frac{U_i}{lv} = 0{,}13\ \mathrm{T}$$

R5.302 Při pohybu cívky měřicího systému se indukuje napětí a druhý galvanometr se rozkmitá.

R5.303 Galvanometrem pochází indukovaný proud, který svými účinky působí proti mechanickému pohybu.

R5.304 Při pohybu kmitací cívky se v ní indukuje napětí, které odpovídá průběhu kmitání.

R5.305 l = 1 m, R = 2 Ω, B = 0,1 T, U = 1 V; I = ?

a) $I = \dfrac{U}{R} = 0{,}5\ \mathrm{A}$

b) $v = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\Delta\Phi > 0$

$I = \dfrac{U + U_\mathrm{i}}{R} = \dfrac{U + Blv}{R} = 0{,}7\ \mathrm{A}$

c) $v = -4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\Delta\Phi < 0$

$I = \dfrac{U - Blv}{R} = 0{,}3\ \mathrm{A}$

Aby vodičem procházel stejný proud jako v klidu (I = 0,5 A), musí se pohybovat vlevo takovou rychlostí, že $RI = U_\mathrm{i} = Blv$. Odtud

$$v = \frac{RI}{Bl} = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

R5.306 l = 0,08 m, R = 4 Ω, r = 1 Ω, $\Delta B/\Delta t$ = 0,2 T · s^{-1}; I = ?

Rovnoměrná změna magnetické indukce má za následek vznik indukovaného napětí a uzavřenými částmi obvodu procházejí indukované proudy I_1 a I_2, které mají ve středním vodiči opačný směr, takže pro proud ve středním vodiči platí:

$I = I_1 - I_2$

Indukovaný proud I_1 vypočítáme ze vztahu

$$I_1 = \frac{U_{\mathrm{i}1}}{R_1} = \frac{S_1 \dfrac{\Delta B}{\Delta t}}{R_1} = \frac{\dfrac{3l^2}{4}\dfrac{\Delta B}{\Delta t}}{R + \dfrac{3R}{2} + r} = \frac{3l^2 \dfrac{\Delta B}{\Delta t}}{2(5R + 2r)}.$$

Podobně najdeme pro proud I_2 vztah:

$$I_2 = \frac{l^2 \dfrac{\Delta B}{\Delta t}}{2(3R + 2r)}$$

Pro výsledný proud po úpravě a dosazení zadaných hodnot dostaneme:

$$I = \frac{2(R + r)l^2}{(5R + 2r)(3R + 2r)}\frac{\Delta B}{\Delta t} = 4{,}2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{A} = 42\ \mu\mathrm{A}$$

R5.307 l = 20 cm = 0,2 m, B = 10 mT = 0,01 T, v = 1 m · s^{-1}, α = 30°; U_i = ?

$$v' = v\cos\beta = v\cos(90° - \alpha)$$
$$U_\mathrm{i} = Blv' = Blv\cos(90° - \alpha) = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{V} = 1{,}0\ \mathrm{mV}$$

R5.308 F_m = ?

$U_i = Blv$

$F_m = BIl = B\frac{U_i}{R}l = \frac{B^2l^2}{R}v$

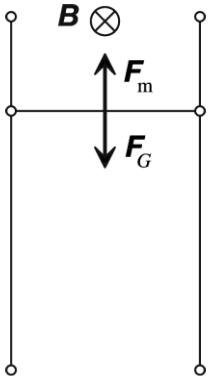
R5.309 $B = 2 \cdot 10^{-5}$ T, $l = 2$ m, $R = 1$ Ω; $Q = ?$

$\Delta S = \frac{l^2}{16} = 0{,}25\ \mathrm{m}^2$

$|U_i| = \frac{B\Delta S}{\Delta t}$

$Q = I\Delta t = \frac{U_i}{R}\Delta t = \frac{B\Delta S}{R} = 5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} = 5\ \mu\mathrm{C}$

R5.310 Obr. R5-310.



Obr. R5-310

a) Aby se příčka pohybovala rovnoměrným pohybem, musí být $F_m = F_g$.

$F_m = BIl = B\frac{U_i}{R}l = \frac{B^2l^2}{R}v_1$

$F_g = mg$

$v_1 = \frac{mgR}{B^2l^2}$

Tato situace není reálná, poněvadž nelze vytvořit tak rozměrné magnetické pole s dostatečně velkou hodnotou magnetické indukce.

b) Při šikmé poloze konstrukce určuje velikost indukovaného napětí rychlost v_2, která je svislou složkou rychlosti v_1 pohybu příčky:

$v_2 = \frac{v_1}{\sin\alpha} = \frac{mgR}{B^2l^2\sin\alpha}$

R5.311 Ručka ampérmetru A_2 se vychýlí později vlivem indukčnosti cívky.

R5.312 Elektrická energie proudu v obvodu se mění v energii magnetického pole uzavřeného jádra.

R5.313 Mezi kontakty vypínače by vzniklo jiskření v důsledku indukce velkého napětí na vinutí motoru.

R5.314 $\Delta I = 2$ A, $\Delta t = 0{,}25$ s, $U_\mathrm{i} = 20$ mV $= 2 \cdot 10^{-2}$ V; L =?

$$|U_\mathrm{i}| = L\frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow L = \frac{U_\mathrm{i}\Delta t}{\Delta I} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H} = 2{,}5\ \mathrm{mH}$$

R5.315 $L = 0{,}44$ H, $\Delta t = 0{,}02$ s, $\Delta I = 5$ A; U_i = ?

$$|U_\mathrm{i}| = L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 110\ \mathrm{V}$$

R5.316 $\Delta t = 0{,}6$ s, $L = 0{,}12$ H, $U_\mathrm{i} = 0{,}3$ V; ΔI = ?

$$\Delta I = \frac{U_\mathrm{i}\Delta t}{L} = 1{,}5\ \mathrm{A}$$

R5.317 $L = 0{,}4$ mH, $S = 10\ \mathrm{cm}^2 = 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$, $n = 100$, $I = 0{,}5$ A; B = ?

$$\Phi = LI = BSn \Rightarrow B = \frac{LI}{Sn} = 2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T} = 2\ \mathrm{mT}$$

R5.318 $L = 0{,}3$ H, $U_\mathrm{e} = 4$ V, $R_\mathrm{i} = 2\ \Omega$; E = ?

V případě, že odpor cívky můžeme zanedbat, je zdroj elektrického proudu zkratován a cívkou prochází zkratový proud $I_\mathrm{z} = U_\mathrm{e}/R_\mathrm{i}$. Poněvadž svorkové napětí je nulové, neprochází rezistorem paralelně připojeným k cívce žádný proud. Po odpojení zdroje je celková energie soustavy cívka – rezistor určena jen energií E_m magnetického pole v okamžiku odpojení zdroje. Pro výpočet energie magnetického pole cívky o indukčnosti L platí vztah

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}LI^2.$$

Po dosazení hodnoty zkratového proudu dostaneme

$$E_\mathrm{m} = \frac{LU_\mathrm{e}^2}{2R_\mathrm{i}^2} = 0{,}6\ \mathrm{J}.$$

5.4 Střídavý proud

R5.319 Periodicky se mění polarita napětí.

R5.320 50 V; 0,4 s; 2,5 Hz; $\{u\} = 50 \sin 5\pi\{t\}$

R5.321 f = 50 Hz, U_m = 200 V, t_1 = 2,5 ms = 2,5 · 10^{-3} s, t_2 = 4,0 ms = 4,0 · 10^{-3} s, t_3 = 5,0 ms = 5,0 · 10^{-3} s; u = ?

$$u = U_m \sin \omega t$$
$$\{u_1\} = 200 \sin 100\pi\{t_1\} = 200 \sin \pi/4 = 140, \quad u_1 = 140\ \mathrm{V}$$
$$\{u_2\} = 200 \sin 100\pi\{t_2\} = 200 \sin 2\pi/5 = 190, \quad u_2 = 190\ \mathrm{V}$$
$$\{u_3\} = 200 \sin 100\pi\{t_3\} = 200 \sin \pi/2 = 200, \quad u_3 = 200\ \mathrm{V}$$

R5.322 $t = T/12$, u = 10 V, T = 10 ms = 10^{-2} s; U_m = ?, ω = ?, f = ?

Pro okamžitou hodnotu střídavého napětí platí:

$$u = U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{6}\right) = U_m \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}U_m$$

Odtud:

$$U_m = \frac{2u}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}}\ \mathrm{V} = 11{,}5\ \mathrm{V}$$

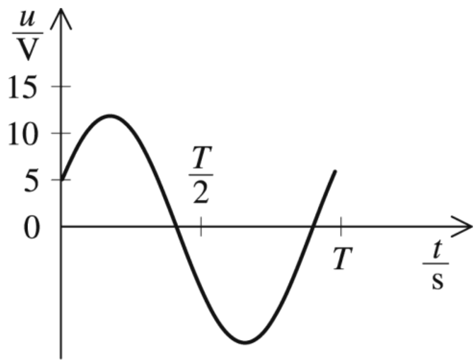
Frekvence střídavého napětí

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-2}}\ \mathrm{Hz} = 100\ \mathrm{Hz}$$

a úhlová frekvence

$\omega = 2\pi f = 6{,}3 \cdot 10^2\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

Časový diagram střídavého napětí je na obr. R5-322 [5-67].



Obr. R5-322

R5.323 $\{i\} = 5{,}0 \sin 200\pi\{t\}$, t = 1,25 ms = 1,25 · 10^{-3} s; I_m = ?, T = ?, f = ?, i = ?

Porovnáním s rovnicí pro okamžitou hodnotu střídavého proudu $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ určíme:

$I_m = 5{,}0\ \text{A}$

$\dfrac{2\pi}{T} = 200\pi \Rightarrow T = 0{,}01\ \text{s}$

$f = \dfrac{1}{T} = 100\ \text{Hz}$

$\{i\} = 5{,}0 \sin \pi/4 = 3{,}5, \quad i = 3{,}5\ \text{A}$

R5.324 $R = 80\ \Omega$, $U_m = 240$ V, $f = 50$ Hz; i = ?

$i = \dfrac{U_m}{R} \sin 2\pi f t$

$\{i\} = 3 \sin 100\pi \{t\}$

R5.325 $f = 50$ Hz; u = ?, i = ?

$\{u\} = 150 \sin 100\pi\{t\}$; $\{i\} = 2 \sin(100\pi\{t\} - \pi/4)$

Střídavý proud je vzhledem ke střídavému napětí posunut o fázi $-\pi/4$.

R5.326 $I_m = 20\ \text{mA} = 0{,}02\ \text{A}$, $f = 1\ \text{kHz} = 10^3\ \text{Hz}$, $t = 0{,}10\ \text{ms} = 10^{-4}\ \text{s}$; i = ?

$\{i\} = 0{,}02 \sin 2\pi \cdot 10^3 \{t\}$, $i = 0{,}012\ \text{A} = 12\ \text{mA}$

R5.327 $I_m = 100\ \text{mA} = 0{,}1\ \text{A}$, $f = 2\ \text{MHz} = 2 \cdot 10^6\ \text{Hz}$, $i = 25\ \text{mA} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{A}$; t = ?

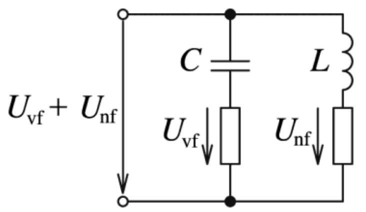
$i = I_m \sin 2\pi f t$

$\sin 2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \{t\} = \dfrac{i}{I_m} = 0{,}25$

$4 \cdot 180° \cdot 10^6 \{t\} = 14{,}5° \Rightarrow \{t\} = 2 \cdot 10^{-8}$

$t = 2 \cdot 10^{-8}\ \text{s}$

R5.328 Zapojením kondenzátoru sériově s rezistorem se oddělí vysokofrekvenční složka a cívkou projde do paralelního obvodu nízkofrekvenční signál, obr. R5-328 [V5-3].



Obr. R5-328

R5.329 Svítivost žárovky se bude zmenšovat, poněvadž se zvětšuje indukčnost cívky, a tím i její induktance.

R5.330 f = 50 Hz, U = 24 V, I = 0,5 A; L = ?

$$X_L = \frac{U}{I} = \omega L$$

$$L = \frac{U}{I \cdot 2\pi f} = 0{,}15\ \mathrm{H}$$

R5.331 Uzavřením magnetického obvodu jádra se mění indukčnost snímače, což ovlivňuje proud v obvodu cívky snímače.

R5.332 L = 200 mH = 0,2 H, f_1 = 50 Hz, f_2 = 400 Hz; X_L = ?

$$X_{L1} = \omega_1 L = 2\pi f_1 L = 63\ \Omega$$

$$X_{L2} = \omega_2 L = 2\pi f_2 L = 500\ \Omega$$

R5.333 f = 500 Hz, X_L = 35 Ω; L = ?

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = 1{,}1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{H} = 11\ \mathrm{mH}$$

R5.334 L_1 = 1,6 H, L_2 = 0,63 mH = 6,3 · 10^{-4} H, X_L = 1 kΩ = 10^3 Ω; f = ?

$$f_1 = \frac{X_L}{2\pi L_1} = 100\ \mathrm{Hz}$$

$$f_2 = \frac{X_L}{2\pi L_2} = 2{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{Hz} = 0{,}25\ \mathrm{MHz}$$

R5.335 Kondenzátor se periodicky nabíjí a vybíjí a obvodem prochází nabíjecí a vybíjecí proud.

R5.336 C = 4,0 μF = 4,0 · 10^{-6} F, f = 50 Hz; L = ?

$$X_L = X_C$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = 2{,}5\ \mathrm{H}$$

R5.337 C = 2,0 μF = 2,0 · 10^{-6} F, f = 500 Hz; f_1 = ?, f_2 = ?

a) $C_1 = 2C$

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi f_1 2C} \Rightarrow f_1 = \frac{f}{2} = 250\ \text{Hz}$$

b) $C_2 = C/2$

$$X_{C2} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi f_2 C/2} \Rightarrow f_2 = 2f = 1\,000\ \text{Hz}$$

R5.338 U = 220 V, f = 50 Hz, I = 2,5 A; C = ?

$$X_C = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi fC}$$

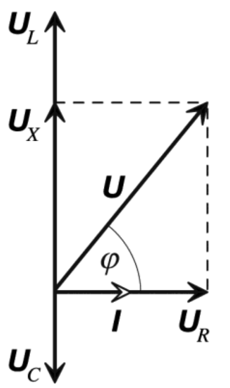
$$C = \frac{I}{2\pi fU} = 3{,}6 \cdot 10^{-5}\ \text{F} = 36\ \mu\text{F}$$

R5.339 U_m = 24 V, T = 2,0 ms = 2,0 · 10^{-3} s, C = 16 μF = 1,6 · 10^{-5} F; I_m = ?

$$X_C = \frac{U_\text{m}}{I_\text{m}} = \frac{1}{\frac{2\pi}{T}C}$$

$$I_\text{m} = \frac{2\pi U_\text{m} C}{T} = 1{,}2\ \text{A}$$

R5.340 Obr. R5-340.



Obr. R5-340

Z obr. 5-325 [5-68] najdeme U_m = 80 V, I_m = 2 A a fázový posun střídavého napětí vzhledem k proudu v obvodu $\varphi = \pi/4$:

$$Z = \frac{U_\text{m}}{I_\text{m}} = 40\ \Omega$$

$$R = X = \frac{U_R}{I_\text{m}} = \frac{U_\text{m} \sin\varphi}{I_\text{m}} \approx 0{,}7Z = 28\ \Omega$$

R5.341 Po připojení ke zdroji stejnosměrného napětí svítí žárovka v obvodu s rezistorem a v obvodu s cívkou. Po připojení ke zdroji střídavého napětí svítí žárovka v obvodu s rezistorem a v obvodu s kondenzátorem: A – kondenzátor, B – rezistor, C – cívka.

R5.342 Více svítí žárovka ve větvi a) s C, b) s L.

R5.343 $R = 40\ \Omega$, $L = 0{,}40$ H, $C = 16\ \mu\text{F} = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ F, $U_\text{m} = 12$ V, $f = 50$ Hz; $I_\text{m} = ?$, $\varphi = ?$

Pro impedanci obvodu platí vztah:

$$Z = \frac{U_\text{m}}{I_\text{m}} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$I_\text{m} = \frac{U_\text{m}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = 0{,}14\ \text{A}$$

Amplitudy napětí na obvodových prvcích mají hodnoty:

$U_R = I_\text{m} R = 5{,}6$ V

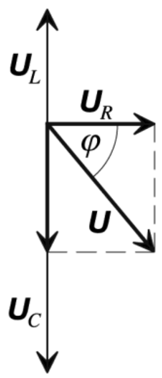
$U_L = I_\text{m} \omega L = 18$ V

$$U_C = \frac{I_\text{m}}{\omega C} = 28\ \text{V}$$

Z těchto hodnot sestrojíme fázorový diagram (obr. R5-343 [5-71]) a určíme fázový rozdíl:

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \approx -1{,}8$$

$$\varphi \approx -61°$$



Obr. 5-343

Amplituda proudu v obvodu je 0,14 A a celkové napětí na obvodu se za proudem opožďuje o 61°. To znamená, že obvod jako celek má vlastnost kapacitance.

R5.344 L = 50 mH = 5,0 · 10^{-2} H, R = 10 Ω, C = 2,0 μF = 2,0 · 10^{-6} F, I_m = 100 mA = 0,1 A, f = 0,5 kHz = 5 · 10^2 Hz; Z = ?, U_m = ?

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \approx 10\ \Omega$$
$$U_\mathrm{m} = ZI_\mathrm{m} = 1\ \mathrm{V}$$

R5.345 R = 90 Ω, L = 1,3 H, C = 10 μF = 10^{-5} F, U_m = 100 V, f = 50 Hz; u = ?, i = ?

$$u = U_\mathrm{m}\sin(2\pi ft + \varphi)$$
$$i = I_\mathrm{m}\sin 2\pi ft$$
$$Z = \frac{U_\mathrm{m}}{I_\mathrm{m}} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow I_\mathrm{m} = \frac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \approx 0{,}8\ \mathrm{A}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = 1,\ \ \varphi = \pi/4$$
$$\{u\} = 10^2 \sin(100\pi\{t\} + \pi/4)$$
$$\{i\} = 0{,}8 \sin 100\pi\{t\}$$

R5.346 R = 1,0 kΩ = 10^3 Ω, L = 0,50 H, C = 1,0 μF = 1,0 · 10^{-6} F, f_1 = 50 Hz, f_2 = 10 kHz = 10^4 Hz; X_L = ?, X_C = ?, Z = ?

a) $f_1 = 50\ \mathrm{Hz}$

$$X_L = \omega L = 160\ \Omega$$
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 3{,}2\cdot 10^3\ \Omega = 3{,}2\ \mathrm{k}\Omega$$
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 3{,}2\cdot 10^3\ \Omega = 3{,}2\ \mathrm{k}\Omega$$

b) $f_2 = 10^4\ \mathrm{Hz}$

$$X_L = 31\ \mathrm{k}\Omega;\ X_C = 16\ \Omega;\ Z = 31\ \mathrm{k}\Omega$$

R5.347 R = 21 Ω, L = 70 mH = 7,0 · 10^{-2} H, C = 82 μF = 8,2 · 10^{-5} F, f = 50 Hz, U_{mC} = 310 V; a) I_m = ?, b) U_{mR} = ?, c) U_{mL} = ?, d) U_m = ?

a) $I_m = \frac{U_{mC}}{X_C} = U_{mC}\omega C = U_{mC} \cdot 2\pi f C = 8\ \text{A}$

b) $U_{mR} = RI_m = 170\ \text{V}$

c) $U_{mL} = X_L I_m = \omega L I_m = 180\ \text{V}$

d) $U_m = \sqrt{U_{mR}^2 + (U_{mL} - U_{mC})^2} = 210\ \text{V}$

R5.348 $f = 50$ Hz, $U_1 : U_2 = 1 : 2$, $U = 300$ V; C = ?, I = ?

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{U_1^2}{U_2^2} = \frac{R^2\omega^2C^2 + \omega^4L^2C^2}{R^2\omega^2C^2 + 1} = \frac{1}{4}$$

$$C = \frac{1}{\omega\sqrt{3R^2 + 4\omega^2L^2}} = 3{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{F} = 30\ \mu\text{F}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \approx 3{,}3\ \text{A}$$

R5.349 $R_1 = 3{,}0\ \Omega$, $X_{L1} = 4{,}0\ \Omega$, $R_2 = 6{,}0\ \Omega$, $X_{C2} = 8{,}0\ \Omega$, $R_3 = 12\ \Omega$, $X_{C3} = 8{,}0\ \Omega$, $X_{L3} = 20\ \Omega$; Z = ?

a) $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2} = 5\ \Omega$

b) $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{C2}^2} = 10\ \Omega$

c) $Z_3 = \sqrt{R_3^2 + (X_{L3} - X_{C3})^2} = 17\ \Omega$

R5.350 f =50 Hz, $X_L = 2X_C$; f_1 = ?

$$X_L = 2X_C$$

$$2\pi f L = \frac{2}{2\pi f C} \Rightarrow LC = \frac{2}{(2\pi f)^2}$$

Při rezonanci $X_L = X_C$, takže:

$$(2\pi f_1)^2 = \frac{1}{LC} = \frac{(2\pi f)^2}{2}$$

$$f_1 = \sqrt{\frac{4\pi^2 f^2}{2 \cdot 4\pi^2}} = \frac{f}{\sqrt{2}} = 35\ \text{Hz}$$

R5.351 $f = 50$ Hz, $C = 15\ \mu\text{F} = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ F; L = ?

Napětí na části obvodu LC je nulové při rezonanci, tzn. když $X_L = X_C$. Pak platí:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = 0{,}68\ \mathrm{H}$$

R5.352 $f = 20\ \mathrm{kHz} = 2{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{Hz}$, $X_L = 5{,}0\ \mathrm{k\Omega} = 5{,}0 \cdot 10^3\ \Omega$; $C = ?$

Při rezonanci $X_L = X_C$, tedy

$$X_L = \frac{1}{2\pi f C} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi f X_L} = 1{,}6 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{F} = 1{,}6\ \mathrm{nF}.$$

R5.353 $f = 50\ \mathrm{Hz}$; $LC = ?$

$$\omega^2 = 4\pi^2 f^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow LC = \frac{1}{4\pi^2 f^2} = 1{,}0 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-2}$$

R5.354 $C = 1{,}6\ \mu\mathrm{F} = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}$, $f = 400\ \mathrm{Hz}$; $L = ?$

$$\omega^2 = 4\pi^2 f^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = 0{,}1\ \mathrm{H}$$

R5.355 $C = 20\ \mu\mathrm{F} = 2{,}0 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{F}$, $L_1 = 0{,}1\ \mathrm{H}$, $L_2 = 1\ \mathrm{H}$, $f = 50\ \mathrm{Hz}$; $L = ?$

Při zasouvání jádra se mění impedance obvodu a podle její velikosti se mění proud v obvodu, a tedy i svítivost vlákna žárovky. Největší je při rezonanci, tzn. když $X_L = X_C$. Tedy když

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = 0{,}5\ \mathrm{H}.$$

R5.356 $L = 3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{H}$, $S = 10^{-2}\ \mathrm{m}^2$, $d = 10^{-4}\ \mathrm{m}$, $f_0 = 400\ \mathrm{kHz} = 4 \cdot 10^5\ \mathrm{Hz}$; $\varepsilon_r = ?$

Při rezonanci platí pro sériový obvod

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Protože kapacita deskového kondenzátoru je

$$C = \frac{\varepsilon S}{d},$$

kde $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ (permitivita vakua je $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$), platí

$$\varepsilon_r = \frac{d}{4\pi^2 f_0^2 \varepsilon_0 S L} \approx 6.$$

Látka mezi deskami kondenzátoru má relativní permitivitu 6 (např. porcelán, slída).

R5.357 $L = 4{,}8 \cdot 10^{-2}$ H, $R = 8{,}0\ \Omega$, $U_3 = 34$ V, $f = 50$ Hz; U_1 = ?, U_2 = ?, I = ?, φ = ?

Obvod na obr. 5-357 [5-74a] je obvod střídavého proudu s *RL* v sérii, který má impedanci o velikosti

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

a ampérmetr ukazuje velikost proudu v obvodu

$$I = \frac{U_3}{Z} = \frac{U_3}{\sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2}} = 2\ \text{A}.$$

Napětí U_2 na rezistoru má stejnou fázi jako proud a má velikost $U_2 = RI = 16$ V.

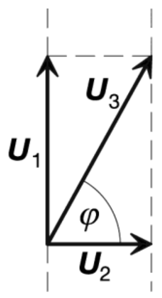
Velikost napětí U_1 na cívce určíme pomocí fázorového diagramu na obr. R5-357 [5-74b], podle kterého platí

$$U_1 = \sqrt{U_3^2 - U_2^2} \approx 30\ \text{V}.$$

Z fázorového diagramu také určíme fázový rozdíl φ mezi napětím U_3 a proudem I v obvodu, který má stejnou počáteční fázi jako napětí U_2 na rezistoru. Platí

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{U_1}{U_2} = 1{,}875,$$

a tedy $\varphi \approx 62°$.



Obr. R5-357

R5.358 $I = 1{,}0$ A, $U_1 = 160$ V, $U_2 = 120$ V, $f = 50$ Hz, $R = 8\ \Omega$; C = ?, U_3 = ?

$$U_3 = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = 200\ \text{V}$$

Poněvadž jde o sériový obvod, platí:

$$X_C = \frac{U_1}{I} = \frac{1}{2\pi f} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{I}{2\pi f U_1} = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{F} = 16\ \mu\mathrm{F}$$

R5.359 f = 50 Hz, R_1 = 240 Ω, C = 16 μF = 1,6 · 10^{-5} F; I = ?, R_2 = ?

$$C_1 = 2C, C_2 = C$$

$$X_1 = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{2\omega C}, X_2 = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad X_1 = 0{,}5X_2$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_1^2}}, \quad I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_2^2}}$$

$$I_1 = I_2\sqrt{\frac{R_1^2 + X_2^2}{R_1^2 + 0{,}25X_2^2}} = 1{,}2I_2$$

Proud v obvodu se zmenší 1,2krát.

Proud v obvodu se nezmění, když $Z_1 = Z_2$:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = \sqrt{R_1^2 + \left(\frac{1}{\omega 2C}\right)^2}, Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2} = \sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{R_1^2 + \frac{1}{4\omega^2 C^2} - \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \sqrt{R_1^2 - \frac{3}{4\omega^2 C^2}} = 170\ \ \Omega \sim 0{,}7R_1$$

Aby se proud v obvodu nezměnil, je třeba vyřadit 30 % reostatu.

R5.360 U = 220 V, f = 50 Hz, U_1 = 55 V, I = 0,50 A; C = ?

$$X_C = \frac{U_2}{I} = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{I} = \frac{1}{\omega C}$$

$$C = \frac{I}{\omega\sqrt{U^2 - U_1^2}} = 7{,}5 \cdot 10^{-6} = 7{,}5\ \mu\mathrm{F}$$

R5.361 U' = 4,0 V, I' = 0,50 A, U = 9,0 V, I = 180 mA, f = 50 Hz; L = ?

Skutečnou cívku považujeme za sériový obvod RL, pro který platí

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\ .$$

Odpor cívky určíme pomocí hodnot napětí U' a proudu I' v obvodu stejnosměrného proudu, takže

$$\frac{U}{I} = \sqrt{\left(\frac{U'}{I'}\right)^2 + \omega^2 L^2}\ .$$

Odtud

$$L=\frac{1}{2\pi f}\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2-\left(\frac{U'}{I'}\right)^2}=0{,}16\ \mathrm{H}.$$

R5.362 L = 2 H, R = 20 Ω, U_{ss} = 20 V, U_{st} = 20 V, f = 50 Hz; I = ?

a) $I_{ss}=\dfrac{U_{ss}}{R}=1\ \mathrm{A}$

b) $I_{st}=\dfrac{U_{st}}{Z}=\dfrac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}=3{,}2\cdot 10^{-2}\ \mathrm{A}=32\ \mathrm{mA}$

R5.363 f = 50 Hz, L = 1,5 H, R = 150 Ω, I = 0,45 A; U = ?, φ = ?

$$U=IZ=I\sqrt{R^2+(\omega L)^2}=220\ \mathrm{V}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{X_L}{R}=\frac{\omega L}{R}=3{,}1$$

$$\varphi=72°$$

R5.364 U = 120 V, L = 1,50 H, R = 150 Ω, f = 50 Hz; C = ?, I = ?

Fázový rozdíl napětí φ = 0 při rezonanci, tzn. když $X_L = X_C$ a $Z = R$:

$$\omega^2=\frac{1}{LC}\Rightarrow C=\frac{1}{\omega^2 L}=\frac{1}{4\pi^2 f^2 L}=6{,}8\cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}=6{,}8\ \mu\mathrm{F}$$

$$I=\frac{U}{Z}=\frac{U}{R}=0{,}8\ \mathrm{A}$$

R5.365 L = 60 mH = 6,0 · 10^{-2} H, R_1 = 10 Ω, Z = 26 Ω, f = 50 Hz; R = ?

$$Z^2=(R_1+R_2)^2+X_L^2$$

$$R_2^2+2R_1R_2+\left(R_1^2-Z^2+X_L^2\right)=0$$

Kvadratická rovnice má dvě řešení R_{21} = 28 Ω, R_{22} = 8 Ω. Poněvadž $R_{21} > Z$, má fyzikální význam jen druhé řešení: R_2 = 8 Ω.

R5.366 $U_ž$ = 55 V, $I_ž$ = 0,15 A, U = 220 V, f = 50 Hz; L = ?

Pro napětí v obvodu platí

$$U^2=U_ž^2+U_t^2,$$

kde U_t je napětí na tlumivce. Induktance tlumivky

$$X_L = 2\pi f L = \frac{U_t}{I_ž} = \frac{\sqrt{U^2 - U_ž^2}}{I_ž}.$$

Odtud

$$L = \frac{\sqrt{U^2 - U_ž^2}}{2\pi f I_ž} = 4{,}5\ \mathrm{H}.$$

R5.367 Vařič bude hřát v obou případech stejně; cos $\varphi = 1$.

R5.368 $U_1 = 380$ V, $U_2 = 220$ V, $U_3 = 120$ V; $U_m = ?$

$$U_m = U\sqrt{2} \approx 1{,}41U$$
$$U_{m1} = 537\ \mathrm{V}, U_{m2} = 311\ \mathrm{V}, U_{m3} = 170\ \mathrm{V}$$

R5.369 $U = 156$ V; $U_m = ?$, $t = ?$

$$U_m = U\sqrt{2} = 220\ \mathrm{V}$$
$$u = U_m \sin \omega t$$
$$\{u\} = 220 \sin 100\pi\{t\} = 156$$
$$\sin 100\pi t = \frac{U}{U\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 100\pi t = \frac{\pi}{4}$$
$$t = \frac{1}{400}\ \mathrm{s} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s} = 2{,}5\ \mathrm{ms}$$

R5.370 $U = 220$ V, $U_{max} = 250$ V

Ne, napětí v obvodu dosahuje hodnoty $U_m = U\sqrt{2} = 311$ V > U_{max}.

R5.371 $U = 6{,}0$ kV $= 6{,}0 \cdot 10^3$ V

$$U_m = U\sqrt{2} = 8{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{V} = 8{,}5\ \mathrm{kV}$$

R5.372 $R = 20\ \Omega$, $U = 24$ V, $f = 50$ Hz; $I = ?$

$$i = I_m \sin \omega t = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = \frac{U\sqrt{2}}{R} \sin \omega t$$
$$\{i\} = 1{,}7 \sin 100\pi\{t\}$$

R5.373 $U = 120$ V, $U_z = 85$ V, $f = 50$ Hz; $t = ?$

Amplituda střídavého napětí $U_m = U\sqrt{2} = 170\ \mathrm{V}$ a jeho perioda $T = 1/50$ s $= 0{,}02$ s. V časovém diagramu na obr. R5-373 [5-75] je vyznačen časový interval, v němž doutnavka svítí. Protože napětí U_z, při kterém se doutnavka zapálí, resp. zhasne, je rovno polovině napětí U_m, platí pro okamžik zapálení doutnavky

$$\frac{U_z}{U_m} = \sin \omega t = \frac{1}{2}.$$

V průběhu první půlperiody je tato rovnice splněna v případech

$$\frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{6} \text{ a } \frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{5}{6}\pi .$$

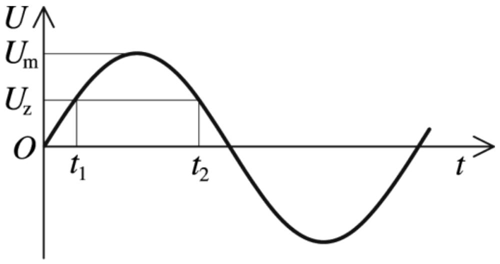
Odtud

$$t_1 = \frac{T}{12} \text{ a } t_2 = \frac{5}{12} T,$$

takže doutnavka svítí v časovém intervalu $\Delta t = t_2 - t_1 = T/3$.

Po dosazení periody střídavého napětí dostaneme $\Delta t = 1/150$ s.

V průběhu jedné půlperiody svítí doutnavka po dobu 6,6 ms.



Obr. R5-373

R5.374 $\{i\} = 5{,}0 \sin \omega\{t\}$, $\{u\} = 100 \sin (\omega\{t\} + \pi/6)$

Z rovnic vyplývá:

$I_m = 5{,}0$ A, $U_m = 100$ V, $\varphi = \frac{\pi}{6} = 30°$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 3{,}5 \text{ A}, U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 71 \text{ V}$$

$$\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{6} = 0{,}87$$

$$P = UI\cos\varphi = 220 \text{ W}$$

Spotřebič má vlastnosti induktance, napětí předbíhá proud.

R5.375 $U = 220$ V, $I = 10$ A, $P = 2{,}0$ kW $= 2{,}0 \cdot 10^3$ W; $\cos\varphi = ?$, $\varphi = ?$

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = 0{,}91$$
$$\varphi = 24°\ 30' \approx 25°$$

R5.376 U = 220 V, P = 2,2 kW = 2,2 · 10^3 W, cos φ = 0,80; I = ?

$$I = \frac{P}{U\cos\varphi} = 12{,}5\ \text{A}$$

R5.377 f se zvětšuje, a) X_L, b) X_C; P = ?

a) $P = UI\cos\varphi = UI\dfrac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$

Jestliže se zvětšuje frekvence, činný výkon střídavého proudu se zmenšuje.

b) $P = UI\cos\varphi = UI\dfrac{R}{\sqrt{R^2+\dfrac{1}{\omega^2C^2}}} = \dfrac{R\omega C}{\sqrt{(R\omega C)^2+1}}$

Jestliže se zvětšuje frekvence, zvětšuje se také činný výkon střídavého proudu.

R5.378 f = 50 Hz, Z = 10 Ω, cos φ = 0,6; R = ?, L = ?

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \Rightarrow R = Z\cos\varphi = 6{,}0\ \Omega$$
$$Z^2 = R^2 + X_L^2 = Z^2\cos^2\varphi + \omega^2L^2$$
$$L = \sqrt{\frac{Z^2\left(1-\cos^2\varphi\right)}{\omega^2}} \approx 2{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{H} = 25\ \text{mH}$$

R5.379 U = 220 V, t = 1 h = 3 600 s, I = 10 A, W = 1,5 kW · h = 1,5 · 10^3 W · h;
cos φ = ?

$$W = Pt \Rightarrow P = \frac{W}{t}$$
$$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{W}{UIt} = 0{,}68$$

R5.380 U_1 = 220 V, I = 2,0 A, cos φ_1 = 0,50, U_2 = 120 V; C = ?, cos φ_2 = ?, U_3= ?

Činný výkon elektromotoru je

$P = UI$ cos φ = 220 W,

jeho rezistance má hodnotu

$$R = \frac{P}{I^2} = 55\ \Omega$$

a impedance

$$Z_1 = \frac{R}{\cos\varphi} = 110\ \Omega\,.$$

Ze vztahu pro impedanci

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

určíme induktanci elektromotoru

$X_L = \omega L \approx 95\ \Omega$.

Jestliže elektromotor spojíme do série s kondenzátorem, je impedance

$$Z_2 = \frac{U_2}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 60\ \Omega$$

a pro kapacitu kondenzátoru platí

$$C = \frac{1}{\omega\left(\omega L - \sqrt{Z_2^2 - R^2}\right)} \approx 45\ \mu\text{F}.$$

Účiník obvodu

$$\cos\varphi_2 = \frac{R}{Z_2} \approx 0{,}92\,.$$

Z rovnice

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{Z_2^2 - R^2}$$

vyplývá, že pro reálnou kapacitu musí mít také výraz pod odmocninou reálnou hodnotu, tzn. že mezní hodnota napětí je určena vztahem

$$\frac{U_3}{I} = R \text{ a odtud } U_3 = 110\ \text{V}.$$

Připojením elektromotoru přes kondenzátor o kapacitě 45 μF se zvýší účiník na 0,92. Zdroj střídavého napětí musí mít hodnotu napětí nejméně 110 V.

R5.381 $S = 100\ \text{cm}^2 = 10^{-2}\ \text{m}^2$, $B = 0{,}050\ \text{T} = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{T}$, $f = 300\ \text{Hz}$; a) $u = ?$

a) $u = -\dfrac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\dfrac{BS\cos \omega t}{\Delta t} = \omega BS \sin \omega t$

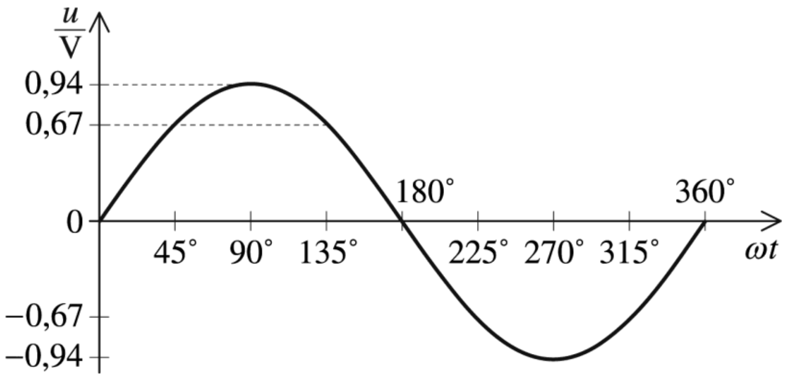
$U_m = \omega BS = 2\pi f BS = 0{,}94\ \mathrm{V}$

$u = U_m \sin \omega t$

$\{u\} = 0{,}94 \sin(2\pi \cdot 300\{t\})$

úhel ωt	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$\dfrac{u}{\mathrm{V}}$	0	0,67	0,94	0,67	0	–0,67	–0,94	–0,67	0

b) graf (obr. R5-381)



Obr. R5-381

R5.382 U = 220 V, N = 400, U_A = 6,0 V, $I_A = 2I_Z$ = 2 · 0,50 A = 1,0 A, U_B = 12 V, P_B = 24 W, N_C = 64, I_C = 2,0 A; N_A = ?, N_B = ?, U_C = ?, I = ?

Jestliže předpokládáme, že transformátor pracuje se 100% účinností, můžeme napětí indukované na každém jeho závitu vyjádřit vztahem

$$U_0 = \frac{U}{N}.$$

A. Protože na cívce A s N_A závity je známé napětí U_A, platí:

$$U_A = N_A U_0;\ \ N_A = \frac{U_A}{U_0} = \frac{U_A}{U}N$$

$$N_A = \frac{6}{220}400 = 10{,}9 \approx 11$$

Cívka A má 11 závitů.

B. Na cívce B s N_B závity je známé napětí U_B:

$$U_B = N_B U_0;\; N_B = \frac{U_B}{U_0} = \frac{U_B}{U} N$$

$$N_B = \frac{12}{220} \cdot 400 = 21{,}8 \approx 22$$

Cívka B má 22 závitů.

C. Na cívce C se známým počtem závitů N_C je napětí U_C:

$$U_C = N_C U_0 = N_C \frac{U}{N}$$

$$U_C = 6{,}4 \cdot \frac{220}{440}\ \mathrm{V} = 35{,}2\ \mathrm{V} \approx 35\ \mathrm{V}$$

Na cívce C je napětí 35 V.

Protože ztráty považujeme za zanedbatelně malé, bude

$$P = P_A + P_B + P_C,\; UI = P = P_A + P_B + P_C,$$

$$I = \frac{P_A + P_B + P_C}{U},$$

$$I = \frac{6 \cdot 1{,}0 + 24 + 35 \cdot 2{,}0}{220}\ \mathrm{A} \approx 0{,}45\ \mathrm{A}.$$

Primární cívkou prochází proud 0,45 A.

R5.383 Je-li zdroj napětí připojen k cívce A, prochází cívkou B 1/2 magnetického indukčního toku. Ten vytvoří napětí U připojené k cívce B, ale cívkou A pak prochází 1/4 původního magnetického toku a na cívce A je napětí 10 V.

R5.384 U_B = 13,3 V, U_A = 120 V; k = ?

$$U = kU_B = \frac{U_A}{k}$$

$$k = \sqrt{\frac{U_A}{U_B}} = 3$$

R5.385 N_1 = 880, N_2 = 1 200, U_1 = 220 V; U_2 = ?

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow U_2 = U_1 \frac{N_2}{N_1} = 300\ \mathrm{V}$$

R5.386 U = 120 V; U_m = ?

$$U_m = U\sqrt{2} = 170\ \mathrm{V}$$

R5.387 I_2 = 200 mA = 0,2 A, U_2 = 4 V, U_1 = 220 V; a) I_1 = ?, b) η = 0,9, I_1' = ?

a) $\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} \Rightarrow I_1 = I_2 \frac{U_2}{U_1} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A} \approx 4\ \mathrm{mA}$

b) Výsledek se nezmění: 10 % z hodnoty výsledku je 0,4 mA. Výsledek však můžeme vyjádřit jen jednou platnou číslicí; pro 4 mA + 0,4 mA = 4,4 mA ≈ 4 mA.

R5.388 $n = 400$, $S = (15 \times 20)\ \mathrm{cm}^2 = 3 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^2$, $f = 3\,000\ \mathrm{min}^{-1} = 50\ \mathrm{s}^{-1}$, $B = 5\ \mathrm{mT} = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}$; $U_\mathrm{m} = ?$

$U_\mathrm{m} = 2\pi fBS = 2\pi \cdot 50 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 12 = 19\ \mathrm{V}$

R5.389 $f = 50\ \mathrm{Hz}$, $U = 0{,}25\ \mathrm{V}$; $\Phi_\mathrm{m} = ?$

Jestliže pro magnetický indukční tok cívkou platí $\Phi = \Phi_\mathrm{m} \cos \omega t$, pak

$$u_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \omega\Phi_\mathrm{m} \sin \omega t = U_\mathrm{m} \sin \omega t\ .$$

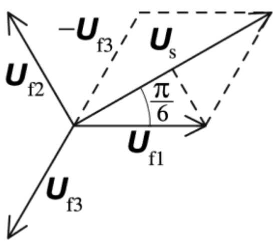
Odtud

$$U_\mathrm{m} = \omega\Phi_\mathrm{m} \ \Rightarrow\ \Phi_\mathrm{m} = \frac{U_\mathrm{m}}{\omega} = \frac{U\sqrt{2}}{2\pi f} = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Wb} = 1{,}1\ \ \mathrm{mWb}$$

R5.390 $f = 50\ \mathrm{Hz}$, $\Phi_\mathrm{m} = 2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Wb}$, $n = 100$; $U = ?$

$$U = \frac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} = \frac{\omega n\Phi_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi fn\Phi_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} = 44\ \mathrm{V}$$

R5.391 a) Obr. R5-391 [V5-4]



Obr. R5-391

b) $U_\mathrm{s} = 2U_\mathrm{f} \cos(\pi/6) = \sqrt{3}U_\mathrm{f}$

R5.392 $U = 220\ \mathrm{V}$, $\cos \varphi = 0{,}80$, $P = 6{,}0\ \mathrm{kW} = 6{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{W}$, $\eta = 0{,}82$; $I = ?$

$$\eta = \frac{P}{P'}$$
$$P' = UI\cos\varphi$$
$$I = \frac{P}{\eta U\cos\varphi} = 42\text{ A}$$

R5.393 U_{min} = 210 V, l = 1 000 m, d = 6,0 mm = 6,0 · 10^{-3} m; a) R = ?, b) d_{minCu} = ?

a) ρ_{Al} = 2,7 · 10^{-8} Ω · m, ρ_{Cu} = 1,8 · 10^{-8} Ω · m

$$R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{2l}{\pi(d/2)^2} = 1{,}9\text{ V}$$
$$\Delta U = IR \approx 80\text{ V}$$
$$U' = U - \Delta U \approx 140\text{ V}$$

Ne, napětí na svorkách elektromotoru by bylo přibližně jen 140 V.

b) ΔU = 10 V

$$R_{Cu} = \frac{\Delta U}{I} = 0{,}24\ \Omega$$
$$d = \sqrt{\frac{\rho_{Cu}8l}{\pi R_{Cu}}} = 1{,}4\cdot10^{-2}\text{ m} = 14\text{ mm}$$

c) Elektromotor je třeba připojit pomocí dvou transformátorů.

R5.394 U_1 = 2,0 kV = 2 · 10^3 V, I_1 = 2,0 A, cos φ = 0,82, U_2 = 220 V; I_2 = ?, P_2 = ?

$$U_1I_1 = U_2I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{U_1I_1}{U_2} = 18\text{ A}$$
$$P_2 = U_1I_1\cos\varphi = 3\,300\text{ W} = 3{,}3\text{ kW}$$

R5.395 U_1 = 2,2 kV = 2 200 V, P = 4,0 kV = 4,0 · 10^3 V, U_2 = 220 V, cos φ = 0,88; I_2 = ?

Spotřebiče připojíme k sekundární cívce transformátoru s transformačním poměrem 1 : 10.

$$\cos\varphi = \frac{P}{U_2I_2} \Rightarrow I_2 = \frac{P}{U_2\cos\varphi} = 21\text{ A}$$

R5.396 U = 22 kV = 2,2 · 10^4 V, I_1 = 8,0 A, cos φ_1 = 0,98, cos φ_2 = 0,86; I_2 = ?, P' = ?

$$P = UI_1 \cos\varphi_1$$

$$5P = UI_2 \cos\varphi_2 \Rightarrow I_2 = \frac{5P}{UI_2 \cos\varphi_2} = \frac{5I_1 \cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} \approx 46 \text{ A}$$

$$P' = UI_2 \cos\varphi_2 = 8{,}6 \cdot 10^5 \text{ W} = 0{,}86 \text{ MW}$$

5.5 Elektromagnetické kmitání a vlnění

R5.397 $E_\mathrm{e} = E_\mathrm{m}$; $t = ?$

$$E_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q_\mathrm{m}^2 \sin^2 \omega t}{C}$$

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LQ_\mathrm{m}^2\omega^2 \cos^2 \omega t$$

Poněvadž $\omega^2 = 1/LC$, bude $E_\mathrm{e} = E_\mathrm{m}$, když $\sin \omega t = \cos \omega t$. To je splněno pro $\omega t = \pi/4$, takže platí:

$$\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{T}{8}$$

R5.398 Kapacita kondenzátoru se bude zvětšovat, a tedy frekvence elektromagnetického kmitání se bude zmenšovat ($f \sim 1/\sqrt{C}$).

R5.399 $C = 100$ pF $= 10^{-12}$ F, $L = 64$ μH $= 6{,}4 \cdot 10^{-5}$ H; $T = ?$, $f = ?$

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 0{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = 2 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 2 \text{ MHz}$$

R5.400 $C_1 = 450$ pF, $L_1 = 2$ μH, $C_2 = 1{,}2$ nF, $L_2 = 7{,}5 \cdot 10^{-7}$ H; $f = ?$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}} = 5{,}3 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 5{,}3 \text{ MHz}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C_2}} = 5{,}3 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 5{,}3 \text{ MHz}$$

$$f_1 = f_2 = 5{,}3 \text{ MHz}$$

R5.401 $C_1 = 1{,}0$ μF $= 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ F, $f_1 = 1{,}0$ kHz $= 1{,}0 \cdot 10^3$ Hz, $f_2 = 0{,}5f_1$; $L = ?$, $C_2 = ?$

Indukčnost oscilačního obvodu

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_1^2 C_1} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}} \text{ H} \approx 25 \text{ mH}.$$

Při paralelním zapojení kondenzátorů

$$f_2 = \frac{f_1}{2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}} .$$

Odtud

$$\sqrt{\frac{C_2}{C_1} + 1} = 2$$

a $C_2 = 3C_1 = 3{,}0 \cdot 10^{-6}$ F = 3,0 μF.

R5.402 C = 50 pF = $5{,}0 \cdot 10^{-11}$ F, f = 1,0 MHz = $1{,}0 \cdot 10^6$ Hz; C = ?

$$\omega^2 = 4\pi^2 f^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = 5{,}1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H} = 5{,}1\ \mu\mathrm{H}$$

R5.403 L = 0,50 mH = $5{,}0 \cdot 10^{-4}$ H, f = 1,0 MHz = $1{,}0 \cdot 10^6$ Hz; C = ?

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} = 5{,}1 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{F} = 51\ \mathrm{pF}$$

R5.404 L = 3,0 mH = $3{,}0 \cdot 10^{-3}$ H, r = 1,2 cm = $1{,}2 \cdot 10^{-2}$ m, d = 0,30 mm = $3{,}0 \cdot 10^{-4}$ m, ε_r = 4,0; T_0 = ?, ΔT = ?

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\pi r^2}{d}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{L\frac{\varepsilon_0 S}{d}} = 2\pi r\sqrt{L\frac{\varepsilon_0 \pi}{d}} = 1{,}3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s} = 1{,}3\ \mu\mathrm{s}$$

$$C = \varepsilon_r C_0$$

$$\frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{LC_0}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \Rightarrow T = T_0\sqrt{\varepsilon_r} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s} = 2{,}5\ \mu\mathrm{s}$$

R5.405 C = 10 μF = $1{,}0 \cdot 10^{-5}$ F, f_1 = 400 Hz, f_2 = 500 Hz; L = ?

$$L_1 = \frac{1}{4\pi^2 f_1^2 C} = 1{,}6 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{H} = 16\ \mathrm{mH}$$

$$L_2 = \frac{1}{4\pi^2 f_2^2 C} = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{H} = 10\ \mathrm{mH}$$

R5.406 C = 24 nF = $2{,}4 \cdot 10^{-8}$ F, L = 0,60 H, U_m = 50 V; q = ?, i = ?

Je-li napětí kondenzátoru oscilačního obvodu v počátečním okamžiku U_m, platí

$q = CU_m \cos \omega t$,

kde $\omega = 1/\sqrt{LC}$ je úhlová frekvence vlastního kmitání obvodu. Dosazením číselných hodnot dostaneme

$\{q\} = 1{,}2 \cdot 10^{-6} \cos 8{,}3 \cdot 10^{3}\{t\}$.

Pro okamžitou hodnotu proudu v obvodu platí vztah

$i = I_\mathrm{m} \sin \omega t$.

Amplitudu proudu I_m určíme pomocí zákona zachování energie ve tvaru

$$\frac{1}{2}CU_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}LI_\mathrm{m}^2 .$$

Odtud

$$I_\mathrm{m} = U_\mathrm{m}\sqrt{\frac{C}{L}} = 10^{-2}\ \mathrm{A} ,$$

takže

$\{i\} = 10^{-2} \sin 8{,}3 \cdot 10^{3}\ \{t\}$.

R5.407 C = 24 nF = $2{,}4 \cdot 10^{-8}$ F, L = 0,60 H, U_m = 50 V, $t = T/8$, $T/4$, $T/2$; a) u_C = ?, b) U_e = ?, c) E_m = ?

a) $u_C = U_m \cos\frac{2\pi}{T}t$

$\{u_{C1}\} = 50\cos\frac{\pi}{4} = 35$, $u_{C1} = 35$ V

$\{u_{C2}\} = 50\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $u_{C2} = 0$

$\{u_{C3}\} = 50\cos\pi = 50$, $u_{C3} = -50$ V

b) $E_e = \frac{1}{2}Cu_C^2$

$E_{e1} = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ J

$E_{e2} = 0$

$E_{e3} = 3{,}0 \cdot 10^{-5}$ J

c) $\{i\} = 10^{-2}\sin\frac{2\pi}{\{T\}}\{t\}$, $i_1 = 7{,}0 \cdot 10^{-3}$ A, $i_2 = 10^{-2}$ A, $i_3 = 0$

$E_m = \frac{1}{2}Li^2$

$E_{m1} = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ J

$E_{m2} = 3{,}0 \cdot 10^{-5}$ J

$E_{m3} = 0$

R5.408 $\{u\} = 50\cos 1{,}0 \cdot 10^4\pi\{t\}$, $C = 0{,}10\ \mu\text{F} = 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ F; a) T = ?, b) L = ?, c) i = ?

a) $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1{,}0 \cdot 10^4 \pi\ \text{s}^{-1} \Rightarrow T = 2{,}0 \cdot 10^{-4}\text{s} = 0{,}2$ ms

b) $\omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega^2 C} = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ H $= 0{,}01$ H

c) $i = U_m C\omega \sin\omega t$

$\{i\} = 0{,}16 \sin 10^4 \pi\{t\}$

R5.409 I_m = ?, U_m = ?

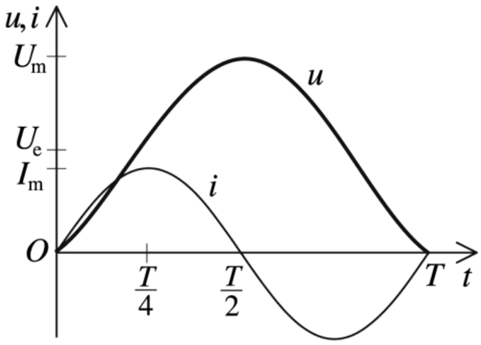
Po sepnutí vypínače začne probíhat periodický děj, jehož průběh je znázorněn časovým diagramem na obr. R5-409 [5-80]. Proud v obvodu se vlivem indukčnosti cívky postupně zvětšuje až na největší hodnotu I_m. Tímto proudem se nabíjí kondenzátor a v libovolném okamžiku platí podle zákona zachování energie

$$\frac{Li^2}{2} + \frac{Cu^2}{2} = qU_e = CuU_e.$$

V okamžiku, kdy proud dosáhne své největší hodnoty, bude časová změna $\Delta i/\Delta t$ = 0 a indukované napětí na cívce $U_i = -L\Delta i/\Delta t = 0$. Napětí na kondenzátoru tedy bude rovno napětí zdroje U_e. Od tohoto okamžiku se kondenzátor začne nabíjet na úkor energie magnetického pole cívky a proud se začne zmenšovat. Ze zákona zachování energie pro $u = U_e$ vyplývá, že

$$I_m = U_e\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Nabíjení pokračuje po tu dobu, dokud obvodem prochází proud. Z podmínky $i = 0$ vyplývá podle zákona zachování energie pro $u = U_m$, že $U_m = 2U_e$.



Obr. R5-409

R5.410 $U_e = 10$ V, $C = 20\ \mu F = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$ F, $L = 20$ mH $= 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ H, $I_1 = 2$ A, $I_2 = 1$ A; $Q = ?$

V počátečním okamžiku prochází cívkou proud I_1 a na kondenzátoru je napětí U_e. Celková energie obvodu:

$$E_c = \frac{1}{2}LI_1^2 + \frac{1}{2}CU_e^2$$

Podle zákona zachování energie je celková energie obvodu v okamžiku, kdy cívkou prochází proud I_2,

$$E_c = \frac{1}{2}LI_2^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}.$$

Odtud

$$Q = C\sqrt{U_e^2 + \frac{L}{C}\left(I_1^2 - I_2^2\right)} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{C}.$$

R5.411 Napětí na cívkách je stejné, ale $U_{L1} = L_1\Delta I_1/\Delta t$, $U_{L2} = L_2\Delta I_2/\Delta t$. V počátečním okamžiku jsou proudy nulové, takže vzhledem k tomu, že $U_{L1} = U_{L2}$, platí $L_1\Delta I_1 = L_2\Delta I_2$ a proudy dosáhnou hodnoty amplitudy proudu v témž okamžiku. To bude tehdy, až napětí na kondenzátoru bude nulové. Podle zákona zachování energie platí

$$\frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}L_1 I_{m1}^2 + \frac{1}{2}L_2 I_{m2}^2$$

a odtud

$$I_{m1} = U\sqrt{\frac{CL_2}{L_1(L_1 + L_2)}} \text{ a } I_{m2} = U\sqrt{\frac{CL_1}{L_2(L_1 + L_2)}}.$$

R5.412 f_0, $L' = 4L$, $Q = Q'$; $f_0' = ?$, $E = ?$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0' = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{L'C}} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{4LC}} = \frac{f_0}{2}$$

Poněvadž kondenzátory mají stejné maximální náboje, je stejná také celková energie obvodů.

R5.413 $L_1 = 3$ mH $= 3 \cdot 10^{-3}$ H, $C_1 = 2$ μF $= 2 \cdot 10^{-6}$ F, $L_2 = 4$ mH $=$ $4 \cdot 10^{-3}$ H, $C_2 = 1$ μF $= 10^{-6}$ F; $\omega_1 = ?$, $\omega_2 = ?$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = 1{,}7 \cdot 10^8 \text{ s}^{-2}$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2} = 2{,}5 \cdot 10^8 \text{ s}^{-2}$$

Obvody nejsou v rezonanci. Rezonance nastane při zvětšení indukčnosti L_2 nebo kapacity C_2 oscilačního obvodu 1,5krát.

R5.414 $C_1 = 1{,}0$ μF $= 10^{-6}$ F, $f_1 = 400$ Hz, $f_2 = 100$ Hz; $C_2 = ?$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC_1}}, \quad f_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}$$

$$\frac{f_1^2}{f_2^2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1} = 1 + \frac{C_2}{C_1}$$

$$C_2 = C_1\left(\frac{f_1^2}{f_2^2} - 1\right) = 1{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 15\ \mu\text{F}$$

R5.415 $f_{min} = 88$ MHz $= 8{,}8 \cdot 10^7$ Hz, $f_{max} = 103$ MHz $= 10{,}3 \cdot 10^7$ Hz; $\lambda_{max} =$?, $\lambda_{min} = ?$

$$\lambda_{max} = \frac{c}{f_{min}} = 3{,}4 \text{ m}$$

$$\lambda_{min} = \frac{c}{f_{max}} = 2{,}9 \text{ m}$$

R5.416 λ = 600 m; f = ?

$$f = \frac{c}{\lambda} = 5 \cdot 10^5 \text{ Hz} = 0{,}5 \text{ MHz}$$

R5.417 f = 50 MHz = 5 · 10^7 Hz; l = ?

$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f} = 3 \text{ m}$$

R5.418 l = 0,9 m; f = ?

$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f} \;\Rightarrow\; f = \frac{c}{2l} = 1{,}7 \cdot 10^8 \text{ Hz} = 170 \text{ MHz}$$

R5.419 λ = 5,0 m, C = 20 pF = 2,0 · 10^{-11} F; L = ?

Oscilační obvod je naladěn na rezonanční frekvenci

$$f_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,.$$

Odtud

$$L = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 C c^2} = 3{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ H.}$$

Cívka oscilačního obvodu má indukčnost 0,35 μH.

R5.420 L = 2,0 mH = 2,0 · 10^{-3} H, d = 1,0 cm = 10^{-2} m, S = 800 cm^2 = 8,0 · 10^{-2} m, ε_r = 11; λ = ?

$$\lambda = cT = c2\pi\sqrt{LC}$$

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{\frac{L\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d}} \approx 2{,}4 \cdot 10^3 \text{ m}$$

R5.421 L = 50 μH = 5,0 · 10^{-5} H, λ = 300 m; C = ?

$$\lambda = cT = c2\pi\sqrt{LC}$$

$$C = \frac{(\lambda/2\pi c)^2}{L} \approx 5{,}1 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 0{,}51 \text{ nF}$$

R5.422 L = 50 μH = 5,0 · 10^{-5} H, C_1 = 60 pF = 6,0 · 10^{-11} F, C_2 = 2,4 · 10^{-10} F; λ_1 = ?, λ_2 = ?

$$\lambda_1 = cT_1 = c2\pi\sqrt{LC_1} \approx 100\ \text{m}$$
$$\lambda_2 = cT_2 = c2\pi\sqrt{LC_2} \approx 210\ \text{m}$$

R5.423 Přeladěním na signál o větší vlnové délce je třeba zvětšit kapacitu kondenzátoru $(\lambda \sim \sqrt{C})$, a tedy zvětšit obsah plochy mezi rotorem a statorem.

R5.424 $C_2 = 9C_1$, $f_1 = 100$ MHz = 10^8 Hz; $\lambda_1 = ?$, $\lambda_2 = ?$

$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = c2\pi\sqrt{LC_1} = 3\ \text{m}$$
$$\lambda_2 = \frac{c}{f_2} = c2\pi\sqrt{LC_2} = c2\pi\sqrt{L9C_1} = 3\lambda_1 = 9\ \text{m}$$

R5.425 $U_m = 1{,}0$ V, $f = 75$ MHz = $7{,}5 \cdot 10^7$ Hz, $x = 5{,}5$ m; $u = ?$

Vedením se šíří postupná elektromagnetická vlna o vlnové délce

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{7{,}5 \cdot 10^7}\ \text{m} = 4\ \text{m}.$$

Je-li v počátečním okamžiku ($t = 0$) napětí zdroje nulové, je mezi vodiči ve vzdálenosti x od zdroje okamžité napětí

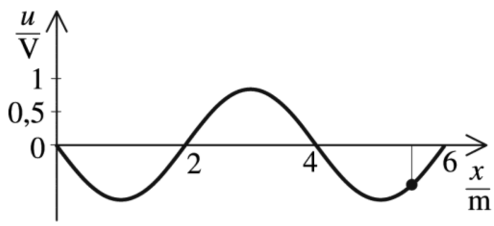
$$u_1 = U_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 1{,}0 \sin 2\pi\left(-\frac{5{,}5}{4}\right)\ \text{V} = -\sin 2{,}75\pi\ \text{V} \approx 0{,}71\ \text{V}.$$

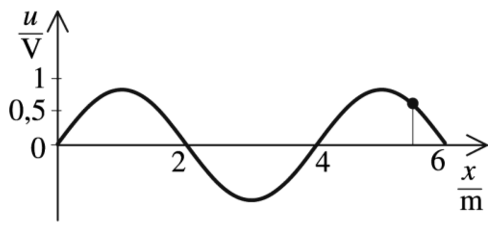
Napětí zdroje má však nulovou hodnotu i v okamžiku $t = T/2$.

V tomto okamžiku je v uvažované vzdálenosti od zdroje napětí

$$u_2 = 1{,}0 \sin 2\pi\left(0{,}5 - \frac{5{,}5}{4}\right)\ \text{V} = -\sin 1{,}75\pi\ \text{V} \approx 0{,}71\ \text{V}.$$

Ve vzdálenosti 5,5 m od zdroje elektromagnetického vlnění je mezi vodiči napětí – 0,71 V nebo + 0,71 V. Oba případy jsou znázorněny na obr. R5-425 [5-83]. Hodnoty napětí se s periodou T opakují.





Obr. R5-425

R5.426 $U_m = 2{,}0$ V, $f = 150$ MHz $= 1{,}5 \cdot 10^8$ Hz, $u_z = 2{,}0$ V, $u = 1{,}0$ V; $x = ?$

$$\lambda = \frac{c}{f} = 2{,}0 \text{ m}$$

Jestliže je v čase $t = 0$ napětí zdroje $u_z = U_m$, je okamžité napětí podél vedení popsáno vztahem

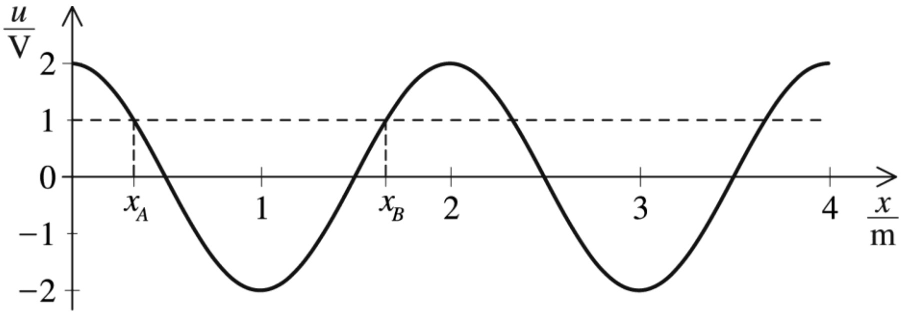
$$u = U_m \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Hodnotu $u = U_m/2 = +1{,}0$ V má napětí mezi vodiči vedení současně v bodě A ve vzdálenosti x_A od zdroje a v bodě B ve vzdálenosti x_B (obr. R5-426) a také ve všech bodech vzdálených $k\lambda$ od těchto bodů ($k = 1, 2, \ldots$). Platí:

$$\cos 2\pi \frac{x_1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$2\pi \frac{x_A}{\lambda} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda}{6} + k\lambda = 0{,}33 \text{ m} + k\lambda$$

$$2\pi \frac{x_B}{\lambda} = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{5\lambda}{6} + k\lambda = 1{,}7 \text{ m} + k\lambda$$



Obr. R5-426

R5.427 Protože rovnoběžnými vodiči procházejí v každém okamžiku proudy opačného směru. Jejich magnetická pole v okolí se navzájem ruší a zesilují se jen v prostoru mezi vodiči.

R5.428

$$i = i_1 + i_2 = I_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) - I_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 2I_m \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos 2\pi \frac{t}{T}$$

Amplituda stojaté vlny:

$$I_0 = 2I_m \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Proud má kmitny ve vzdálenostech $x_k = (2k + 1)\lambda/4$, kde $k = 0, 1, 2, ...$, a uzly jsou ve vzdálenostech $x_u = k\lambda/2$.

R5.429 Při odrazu na konci vedení se fáze napětí mění v opačnou a napětí v postupné a odražené vlně jsou popsána rovnicemi:

$$u_1 = U_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right),\ u_2 = -U_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$u = u_1 + u_2 = 2U_m \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos\frac{2\pi t}{T}$$

Fáze proudu se při odrazu nemění a proudy v postupné a odražené vlně popisují rovnice:

$$i_1 = I_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right), i_2 = I_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$i = i_1 + i_2 = 2I_m \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\sin\frac{2\pi t}{T}$$

R5.430 $l = 12$ m, $x = 5{,}0$ m, $\lambda = 2l$; $U_0/U_x = ?$, $I_0/I_x = ?$

Protože $\lambda = 2l$, je amplituda napětí ve stojaté vlně $U_x = 2U_m \cos(\pi x/l)$. Pro poměr napětí platí

$$\frac{U_0}{U_x} = \frac{1}{\cos(5\pi/12)} \approx 3{,}9.$$

Podobně amplituda proudu ve stojaté vlně $I_x = 2I_m \sin(\pi x/l)$, takže

$$\frac{I_0}{I_x} = \frac{1}{\sin(5\pi/12)} \approx 1{,}03.$$

R5.431 $l = 12$ m, $x = 5$ m, $\lambda = 4l$; $U_0/U_x = ?$, $I_0/I_x = ?$

Poněvadž $\lambda = 4l$, je $U_x = 2U_m \sin(\pi x/2l)$ a $I_x = 2I_m \cos(\pi x/2l)$.

Odtud $\dfrac{U_0}{U_x} = 1{,}6,\ \dfrac{I_0}{I_x} = 1{,}3.$

R5.432 $f = 400$ MHz $= 4{,}0 \cdot 10^8$ Hz, $n = 4$, $u_z = U_m$; $l = ?$

Na konci dvouvodičového vedení naprázdno vzniká kmitna napětí. Poněvadž na začátku vedení je také kmitna napětí, budou na vedení 4 uzly v případě, že délka vedení $l = 2\lambda$.

$$l = 2\lambda = 2\frac{c}{f} = 1{,}5\ \text{m}$$

R5.433 l = 15 cm = 0,15 m; f = ?

Kmitny jsou ve vzájemné vzdálenosti $\lambda/2$.

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l} = 1{,}0 \cdot 10^9\ \text{Hz} = 1{,}0\ \text{GHz}$$

R5.434 f = 375 MHz; l = ?

Stojatá elektromagnetická vlna má kmitnu ve vzdálenosti $\lambda/4$ od odrazné plochy.

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f} = 0{,}2\ \text{m}$$

R5.435 f = 428 MHz = $4{,}28 \cdot 10^8$ Hz, l = 3,7 m

Vlnová délka elektromagnetického vlnění $\lambda = c/f$ = 0,7 m. Kmitny, popř. uzly stojatého elektromagnetického vlnění jsou ve vzájemných vzdálenostech $\lambda/2$. Signál se zesílí při přechodu kmitnou. Tato situace nastane n-krát:

$$n = \frac{l}{\lambda/2} = \frac{2lf}{c} = 10$$

R5.436 Protože při nepřetržitém vysílání by nebylo možné určit časový rozdíl mezi vyslaným a přijatým signálem.

R5.437 n = 2 000 s^{-1}; s = ?

Doba mezi dvěma impulzy $t = 1/n$ a této době odpovídá největší vzdálenost, kterou signál urazí od radiolokátoru k objektu a zpět:

$$s = \frac{ct}{2} = \frac{c}{2n} = 7{,}5 \cdot 10^4\ \text{m} = 75\ \text{km}$$

R5.438 t = 4 ms = $4 \cdot 10^{-3}$ s; s = ?

$$s = \frac{ct}{2} = 6 \cdot 10^5\ \text{m} = 600\ \text{km}$$

R5.439 Stupnice odpovídá vzdálenostem od 0 do 600 km; měřítko 1 cm ~ 30 km.

R5.440 $t = 2 \cdot 10^{-4}$ s; s = ?, f = ?

Vzdálenost sledovaného objektu

$$s = \frac{ct}{2} = 3 \cdot 10^4 \text{ m} = 30 \text{ km}.$$

Frekvence impulzů radiolokátoru může být maximálně taková, aby se signál vrátil právě v okamžiku, kdy je vyslán nový impulz. To znamená, že

$$f = \frac{1}{t} = 5 \cdot 10^3 \text{ Hz} = 5 \text{ kHz}.$$

R5.441 $n = 5\,000 \text{ s}^{-1} = 5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$, $\lambda = 20 \text{ cm} = 0{,}2 \text{ m}$, $n' = 60$; $s = ?$, $t = ?$

$$s = \frac{c}{2n} = 3 \cdot 10^4 \text{ m} = 30 \text{ km}$$

$$t = n'T = n'\frac{\lambda}{c} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ s} = 0{,}04 \text{ µs}$$

R5.442 $l = 180 \text{ cm} = 1{,}8 \text{ m}$, $\varepsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$; $l' = ?$

$$l' = \frac{\lambda'}{2} = \frac{v}{2f} = \frac{c}{2f\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{l}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = 0{,}2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

R5.443 $\lambda = 90 \text{ cm} = 0{,}9 \text{ m}$, $v = 2{,}4 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $l' = ?$

$$l' = \frac{\lambda'}{2} = \frac{v}{2f} = \frac{v}{2\frac{c}{\lambda}} = \frac{v\lambda}{2c} = 0{,}36 \text{ m} = 36 \text{ cm}$$

R5.444 $l = 1{,}5 \text{ m}$, $\varepsilon_r = 2$, $\mu_r = 1$; $f = ?$

$$\lambda = 2l = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$$

$$f = \frac{c}{2l\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \approx 7{,}1 \cdot 10^7 \text{ Hz} = 71 \text{ MHz}$$

R5.445 $v = 0{,}8c$; $\varepsilon_r = ?$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 0{,}8c$$

$$\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{1}{0{,}8}$$

$$\varepsilon_r \approx 1{,}6$$

6 OPTIKA

6.1 Základní pojmy optiky

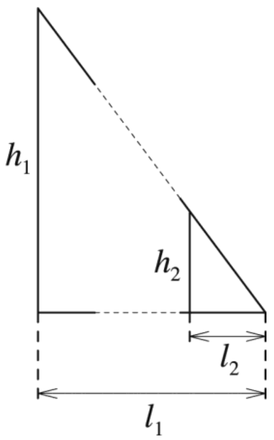
R6.1 t = 2,6 s, $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}; r = ?

Světlo urazí celkovou vzdálenost $s = ct$. Vzdálenost Měsíce $r = ct/2 \approx 3{,}9 \cdot 10^8$ m.

R6.2 l_1 = 370 m, l_2 = 208 cm = 2,08 m, h_2 = 180 cm = 1,80 m; h_1 = ?

Obr. R6-2. Eiffelova věž a její stín tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, který je podobný trojúhelníku vytvořeného postavou turisty a jeho stínem. Platí:

$$\frac{h_1}{l_1} = \frac{h_2}{l_2} \Rightarrow h_1 = h_2 \frac{l_1}{l_2} = 320 \text{ m}$$



Obr. R6-2

R6.3 h = 1,7 m, v = 1 m · s^{-1}, l_1 = 1,8 m, t = 2,0 s, l_2 = 1,3 m; H = ?

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{l_1} = \frac{H}{l_1 + x}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{l_2} = \frac{H}{l_2 + x - vt}$$

Řešením těchto rovnic vypočítáme H:

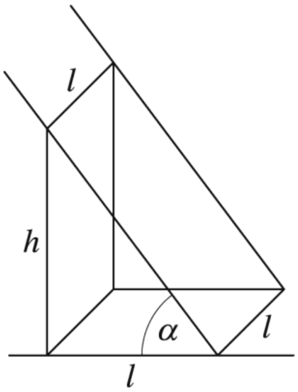
$$H = h\frac{vt + l_1 - l_2}{l_1 - l_2} = 8{,}5 \text{ m}$$

R6.4 h = 2,0 m, l = 1,2 m; α = ?

Aby vznikl čtverec, musí být průmět výšky okna na podlaze roven šířce okna (obr. R6-4).

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}\frac{h}{l} = 59°$$

Slunce se musí nacházet v rovině rovnoběžné s plochou okna a v úhlové výšce nad obzorem 59°.



Obr. R6-4

R6.5 r_M = 380 000 km = 3,8 · 10^8 m; d_M = ?

Pravítko podržíme v napjaté ruce a zjistíme průměr měsíčního kotouče v mm. Při vzdálenosti pravítka l = 55 cm od oka je průměr Měsíce přibližně d = 5 mm.

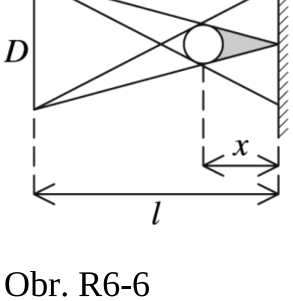
$$\frac{d_\mathrm{M}}{r_\mathrm{M}} = \frac{d}{l}$$

$$d_\mathrm{M} = \frac{5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m}}{0{,}55\ \mathrm{m}} \approx 3{,}5 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m} = 3\,500\ \mathrm{km}$$

R6.6 D = 20 cm = 0,2 m, l = 2 m, d = 8 cm = 0,08 m; x = ?

Plný stín nevznikne při poloze míčku patrné z obr. R6-6 [V6-1]:

$$\frac{D}{l} = \frac{d}{x} \Rightarrow x = \frac{dl}{D} = 0{,}8\ \mathrm{m}$$

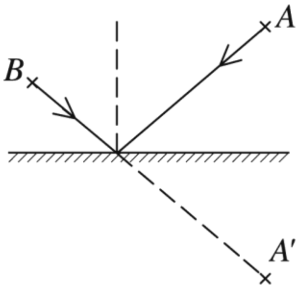


Obr. R6-6

R6.7 Obě rychlosti jsou stejné.

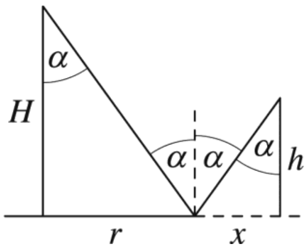
R6.8 Astronaut by pozoroval zatmění Slunce.

R6.9 Obr. R6-9 [V6-2]. Zkonstruujeme bod A', souměrně sdružený podle přímky rozhraní. Bod odrazu je průnikem přímky $A'B$ a rozhraní.



Obr. R6-9

R6.10 r = 5 m, H = 3 m, h = 1,8 m; x = ?



Obr. R6-10

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{r}{H} = \frac{x}{h} \Rightarrow x = r\frac{h}{H} = 3\ \mathrm{m}$$

R6.11 α = 52°; β = ?

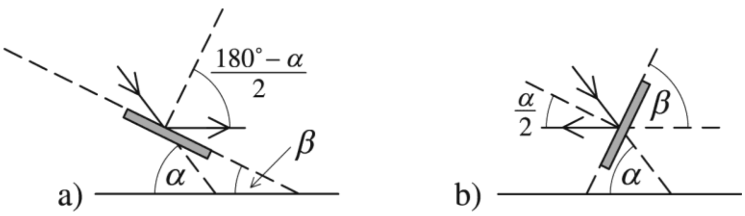
Obr. R6-11 [V6-3]. Poněvadž je odražený paprsek vodorovný, svírá zrcadlo s vodorovnou rovinou úhel β = 90° – γ (γ je úhel dopadu světelného paprsku na zrcadlo, popř. odrazu od zrcadla):

a) $\gamma = \dfrac{180° - \alpha}{2}$

$$\beta = 90° - \gamma = \frac{\alpha}{2} = 26°$$

b) $\gamma = \dfrac{\alpha}{2}$

$$\beta = 90° - \gamma = 64°$$



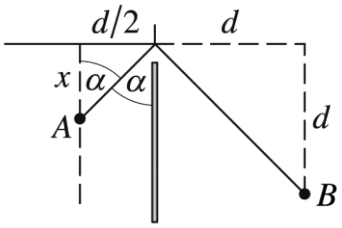
Obr. R6-11

R6.12 d = 3 m; x = ?

Pozorovatel v bodě A uvidí osobu v bodě B v okamžiku, kdy úhel dopadu α světelného paprsku bude 45° (obr. R6-12).

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{x}{d/2}$$

$$x = \frac{d \cdot \mathrm{tg}\alpha}{2} = 1{,}5\ \mathrm{m}$$



Obr. R6-12

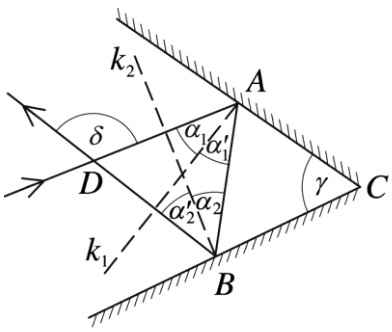
R6.13 Podle zákona odrazu platí (R6-13 [obr. 6-3]):

$$\alpha_1 = \alpha_1',\ \alpha_2 = \alpha_2'$$

Z trojúhelníku ABC je zřejmé, že $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$. Podobně z trojúhelníku ABD najdeme pro odchylku paprsků vztah:

$$\delta = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\gamma$$

Odchylka paprsků po odrazu od zrcadel je 2γ.



Obr. R6-13

R6.14 v = 1,5 cm · s^{-1}; v' = ?

Zdroj se musí pohybovat dvojnásobnou rychlostí, tzn. 3 cm · s^{-1}, ve stejném směru jako zrcadlo.

R6.15 v_Z = 2,0 cm · s^{-1}, v_S = 3,0 m · s^{-1}; v = ?

$$v = \sqrt{(2v_Z)^2 + v_S^2} = 5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{2v_Z}{v_S} \;\Rightarrow\; \alpha = 53°$$

R6.16 Světelné paprsky mohou být křivočaré v opticky nestejnorodém prostředí, kde je v různých místech různý index lomu.

R6.17 $n_l < n_v$

$$n_l = \frac{c}{v_l},\; n_v = \frac{c}{v_v} \;\Rightarrow\; v_l > v_v$$

Rychlost světla v ledu je větší než ve vodě.

R6.18. $n_č$ = 1,331, n_f = 1,343, c = 3 · 10^8 m · s^{-1}; $v_č$ = ?, v_f = ?

$$n_č = \frac{c}{v_č} \;\Rightarrow\; v_č = \frac{c}{n_č} = 225\,400 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$n_f = \frac{c}{v_f} \;\Rightarrow\; v_f = \frac{c}{n_f} = 223\,400 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

R6.19 $\lambda_č$ = 760 nm = 7,6 · 10^{-7} m, $n_č$ = 1,329, λ_f = 400 nm = 4,0 · 10^{-7} m, n_f = 1,343; v_f = ?, $v_č$ = ?

$$v_f = \frac{c}{n_f} = 223\,400 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_č = \frac{c}{n_č} = 225\,700 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

R6.20 $n_č$ = 1,510, n_f = 1,531, α = 60°; $\Delta\beta$ = ?

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_č} = n_č \;\Rightarrow\; \beta_č = \arcsin\frac{\sin\alpha}{n_č} = 35{,}0°$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_f} = n_f \;\Rightarrow\; \beta_f = \arcsin\frac{\sin\alpha}{n_f} = 34{,}4°$$

$$\Delta\beta = \beta_č - \beta_f = 0{,}55° \approx 33'$$

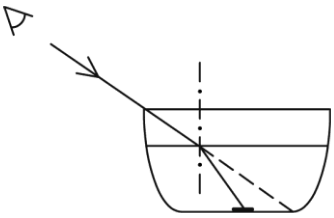
R6.21 Změny teploty vzduchu mají za následek změnu indexu lomu vzduchu a to má vliv na směr, ve kterém předměty vidíme.

R6.22 Poněvadž index lomu vzduchu je poněkud větší než 1, nastává lom světelného paprsku, který přechází z vakua ve vesmíru do vzdušného obalu Země.

R6.23 $\alpha = 40°$, $\beta = 25°$; n = ?

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{0{,}643}{0{,}423} \approx 1{,}5$$

R6.24 Nastává lom světelného paprsku podle obr. R6-24 [V6-4].



Obr. R6-24

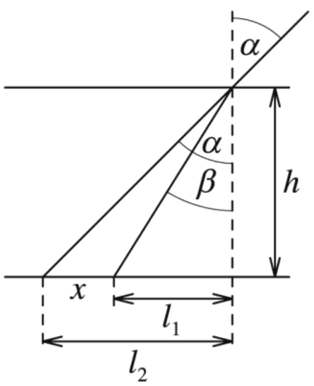
R6.25 $\alpha = 45°$, $n_{\mathrm{v}} = 1{,}33$, $h = 0{,}40$ m; x = ?

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{\mathrm{v}} \;\Rightarrow\; \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n_{\mathrm{v}}}$$

$$\beta \approx 32°$$

$$x = l_2 - l_1 = h(\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta) \approx 0{,}15\ \mathrm{m} = 15\ \mathrm{cm}$$

Obr. R6-25.



Obr. R6-25

R6.26 $n_{\mathrm{v}} = 1{,}33$, $\alpha_{\mathrm{v}} = 40°$, $n_{\mathrm{s}} = 1{,}50$, $\beta_{\mathrm{v}} = \beta_{\mathrm{s}}$; α_{s} = ?

$$\frac{\sin\alpha_v}{\sin\beta} = n_v, \frac{\sin\alpha_s}{\sin\beta} = n_s$$

$$\frac{\sin\alpha_v}{n_v} = \frac{\sin\alpha_s}{n_s} \Rightarrow \alpha_s = \arcsin\frac{n_s}{n_v}\sin\alpha_v \approx 46°\ 30'$$

R6.27 $\alpha = 35°$, $n_V = 1{,}33$, $n_S = 1{,}50$; $\beta = ?$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_S}{n_V} \Rightarrow \beta = \arcsin\frac{n_V}{n_S}\sin\alpha \approx 30°\ 30'$$

R6.28 $n = 1{,}7$, $\beta = \alpha/2$; $\alpha = ?$

Poněvadž úhel dopadu β musí splňovat podmínku $\beta = \alpha/2$, napíšeme zákon lomu ve tvaru

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha/2} = n.$$

Použijeme vzorec pro funkci dvojnásobného argumentu $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ a vztah pro zákon lomu upravíme na tvar

$$\frac{2\sin\alpha/2\cos\alpha/2}{\sin\alpha/2} = n.$$

Odtud dostaneme

$$\cos\alpha/2 = n/2 = 0{,}85$$

a úhel dopadu

$$\alpha \approx 63°\ 30'.$$

R6.29 $n = 1{,}33$, $\beta = \alpha - 10°$; $\alpha = ?$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - 10°)} = n$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos 10° - \cos\alpha\sin 10°} = \frac{1}{\cos 10° - \operatorname{cotg}\alpha\sin 10°} = n$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos 10° - \frac{1}{n}}{\sin 10°} = \operatorname{cotg} 10° - \frac{1}{n\sin 10°} = 1{,}34$$

$$\alpha \approx 36°\ 40'$$

R6.30 $\alpha = 53°$, $90° - \alpha + 90° - \beta = 90° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$; $n = ?$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = n = 1{,}33$$

R6.31 $n_v = 1{,}33$, $n_s = 1{,}5$, $\alpha + \beta = 60°$; $\alpha = ?$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(60° - \alpha)} = \frac{n_s}{n_v}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 60° \cos\alpha - \cos\ 60° \sin\alpha} = \frac{1}{\sin 60° \operatorname{cotg}\alpha - \cos 60°} = \frac{n_s}{n_v}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{n_v}{n_s \sin 60°} + \operatorname{cotg} 60° = 1{,}6$$

$$\alpha = 32°$$

R6.32 $\beta_1 = 36°$, $\beta_2 = 20°$, $\alpha_2 = 90° - \alpha_1$; $n = ?$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{\sin(90° - \alpha_1)}{\sin\beta_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = 1{,}72,\ \ \alpha_1 \approx 60°$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n \approx 1{,}5$$

R6.33 $n = 1{,}6$, $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 60°$; $\beta = ?$

a) $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta} = \dfrac{1}{n} \ \Rightarrow\ \sin\beta = n\sin\alpha_1 = 0{,}8$

$\beta \approx 53°$

b) Úhel dopadu je větší než mezní úhel ($\sin\alpha_m = 1/1{,}6 = 0{,}63$, $\alpha_m \approx 39° < \alpha_2$). Nastává úplný odraz světla pod úhlem 60°.

R6.34 $a = 8$ m, $b = 6$ m, $h = 2$ m; $a' = ?$, $b' = ?$

Paprsky rozptýleného světla dopadají na hladinu jezera pod nejrůznějšími úhly. Přitom paprskům dopadajícím do protilehlých bodů A a B okraje voru pod úhly blízkými 90° odpovídají největší úhly lomu β a paprsky dopadají na dno jezera v bodech A', B'. Vzdálenost $a' = |A'B'|$ odpovídá šířce plného stínu. Z obr. R6-34 [6-7] je patrné, že

$a' = a - 2h\operatorname{tg}\beta.$ (1)

Poněvadž úhel dopadu $\alpha = 90°$, platí:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\beta} = n$$

Vyjádříme-li $\operatorname{tg}\beta$ pomocí funkce sinus, dostaneme:

$$\text{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

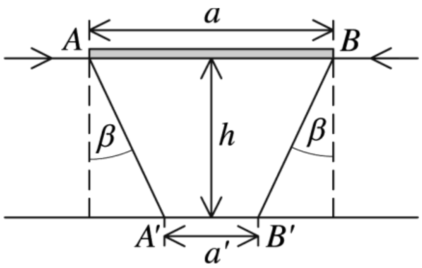
Dosazením výsledku do vztahu (1) dostaneme:

$$a' = a - \frac{2h}{\sqrt{n^2-1}} = 3{,}4\ \text{m}$$

Obdobně vypočítáme druhý rozměr plného stínu a dostaneme:

$$b' = b - \frac{2h}{\sqrt{n^2-1}} \approx 1{,}4\ \text{m}$$

Plný stín má rozměr přibližně 3,4 m × 1,4 m.



Obr. R6-34

R6.35 h = 90 cm = 0,9 m, a = 1,10 m; n = ?

Z obr. 6-35 [6-8] vyplývá:

$$\text{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{a}{h}$$

$$\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}$$

$$n = \frac{\sin 90°}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{h^2+a^2}}{a} = 1{,}3$$

R6.36 Jestliže úhel dopadu α je malý, pak sin $\alpha \approx \alpha$ a sin $\beta \approx \beta$. Podle obr. 6-36 [6-9] platí:

$$\alpha = \frac{l_1}{d},\ \beta = \frac{l_2}{d}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} = n$$

$$a = l_1 - l_2 = d(\alpha-\beta) = d\left(\alpha - \frac{\alpha}{n}\right) = \alpha d\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

R6.37 Povrch malých bublinek je více zakřiven než u větších bublin, takže převážná část paprsků dopadá na povrch bublinky pod větším úhlem, než je mezní úhel pro dané rozhraní.

R6.38 $n_d = 2{,}40$, $n_v = 1{,}33$; $\alpha_m = ?$

Pro mezní úhel platí:

$$\sin\alpha_m = \frac{1}{n}$$

$$\sin\alpha_{md} = 0{,}42 \sim \alpha_{md} = 24°\ 40'$$

$$\sin\alpha_{mv} = 0{,}75 \sim \alpha_{mv} = 48°\ 50'$$

$$\sin\alpha_{mdv} = \frac{n_v}{n_d} = 0{,}55 \sim \alpha_{mdv} = 33°\ 40'$$

R6.39 $\alpha = 45°$; $n = ?$

Musí být splněna podmínka $\alpha \geq \alpha_m$.

$$\sin\alpha \geq \frac{1}{n} \Rightarrow n \geq \frac{1}{\sin 45°} = 1{,}41$$

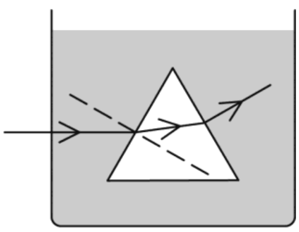
R6.40 $n = 1{,}52$, $n_1 = 1{,}0$, $n_2 = 1{,}33$; $\varphi = ?$

Úhel dopadu paprsku na vnitřní lámavou hranu je roven lámavému úhlu φ.

$$\text{a)}\ \sin\varphi_1 = \frac{n_1}{n} = 0{,}66 \Rightarrow \varphi_1 \approx 41°$$

$$\text{b)}\ \sin\varphi_2 = \frac{n_2}{n} = 0{,}87 \Rightarrow \varphi_2 \approx 61°$$

R6.41 Obr. R6-41 [V6-5].



Obr. R6-41

R6.42 $n = 1{,}4$, $\varphi = 30°$; $\varphi_m = ?$

Úhel dopadu paprsku v bodě A je roven lámavému úhlu hranolu φ. Paprsek vystoupí z hranolu, když $\varphi_m > \varphi$.

$$\sin\varphi_{\mathrm{m}} = \frac{1}{n} = 0{,}71 \ \sim \ \varphi_{\mathrm{m}} = 45°\ 35' > \varphi$$

Paprsek z hranolu vystoupí.

R6.43 n = 1,4; z = ?

Lámavý úhel φ hranolu musí splňovat podmínku $\varphi \geq \varphi_{\mathrm{m}}$.

$$\sin\varphi_{\mathrm{m}} = \frac{1}{n} = 0{,}71 \ \sim \ \varphi_{\mathrm{m}} = 45°\ 35'$$

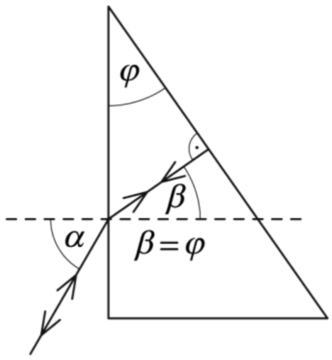
$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{z}{h}$$

$$z = h\ \mathrm{tg}\varphi = 1{,}02h$$

R6.44 φ = 35°, α = 60°; n = ?

Obr. R6-44. Stejný směr jako před odrazem může mít světelný paprsek jen v případě, že na postříbřenou plochu dopadá kolmo. Pak $\beta = \varphi$ a platí:

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = 1{,}5$$



Obr. R6-44

R6.45 n = 1,5; r_{min} = ?

Největší zakřivení může mít skleněná tyčinka v případě, že světelný paprsek nejbližší středu křivosti dopadá na rozhraní skla a vzduchu pod mezním úhlem:

$$\sin\alpha_{\mathrm{m}} = \frac{1}{n} = \frac{r_{\mathrm{min}} - d}{r_{\mathrm{min}}} \ \Rightarrow \ \frac{r_{\mathrm{min}}}{d} = \frac{n}{n-1} = 3:1$$

6.2 Vlnové vlastnosti světla

R6.46 Člověk vnímá barvu zelenou, poněvadž barvu světla neurčuje vlnová délka, ale frekvence, která se při přechodu do jiného optického prostředí nemění.

R6.47 Sklo láhve propouští jen zelené světlo, které inkoust pohlcuje. Proto se inkoust při pohledu zvenku bude jevit černý.

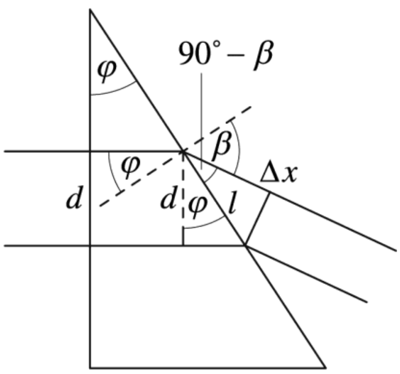
R6.48 Duhové zbarvení je projevem interference světla na tenké vrstvě oxidu železa, jejíž tloušťka není všude stejná.

R6.49 Dvě hvězdy nejsou koherentní zdroje světla, poněvadž jde o dva nezávislé zdroje světla a fáze světelných vlnění se náhodně mění.

R6.50 $\Delta x = \lambda/4$; $\Delta\varphi = ?$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\frac{\lambda}{4\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

R6.51 $n = 1{,}5$, $\varphi = 30°$, $d = 2$ cm $= 0{,}02$ m; $\Delta x = ?$



Obr. R6-51

$$\cos\varphi = \frac{d}{l}$$

$$\cos(90° - \beta) = \frac{\Delta x}{l}$$

$$\sin\beta = \frac{\Delta x}{d}\cos\varphi$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\beta} = \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \sin\beta = n\sin\varphi = \frac{\Delta x}{d}\cos\varphi$$

$$\Delta x = dn\,\mathrm{tg}\varphi \approx 1{,}7\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} = 1{,}7\,\mathrm{cm}$$

R6.52 $\Delta x = 2{,}0\ \mu\mathrm{m} = 2{,}0 \cdot 10^{-6}$ m, $\lambda_1 = 660$ nm $= 6{,}6 \cdot 10^{-7}$ m, $\lambda_2 = 570$ nm $= 5{,}7 \cdot 10^{-7}$ m, $\lambda_3 = 400$ nm $= 4{,}0 \cdot 10^{-7}$ m

a) $k_1 = \dfrac{\Delta x}{\lambda_1} \approx 3$; světlo se zesílí

b) $k_2 = \dfrac{\Delta x}{\lambda_2} \approx 3{,}5$; světlo se zeslabí

c) $k_3 = \dfrac{\Delta x}{\lambda_3} \approx 5$; světlo se zesílí

R6.53 $\lambda = 600\ \text{nm} = 6 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$, $l = 3{,}0\ \text{m}$, $d = 5{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{m}$; $y = ?$

Z obr. 6-53 [6-16] je patrné, že v bodě *B* vznikne interferenční maximum, když $\Delta l = l_2 - l_1 = k\lambda$. Platí:

$$l_1^2 = l^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2$$

$$l_2^2 = l^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2$$

Rovnice odečteme:

$$l_2^2 - l_1^2 = 2yd$$

Výraz upravíme

$$(l_2 - l_1)(l_2 + l_1) = 2yd$$

a odtud

$$l_2 - l_1 = \frac{2yd}{l_2 + l_1}.$$

Jestliže $y << $ l, je přibližně $l_2 + l_1 = 2l$ a pro vznik interferenčního maxima platí vztah

$$\Delta l = l_2 - l_1 = \frac{yd}{l} = k\lambda,$$

kde $k = 0, 1, 2, ...$ je řád interferenčního maxima. Pro polohu prvního interferenčního maxima ($k = 1$) platí:

$$y = \frac{l}{d}\lambda = 3{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

R6.54 a) $l_1 > l$, b) $d_1 < d$, c) $\lambda_1 < \lambda$

Pro polohu prvního interferenčního maxima platí:

$y = \frac{l}{d}\lambda$

a) $l_1 > l \Rightarrow$ vzdálenost maxim se zvětší.

b) $d_1 < d \Rightarrow$ vzdálenost maxim se zvětší.

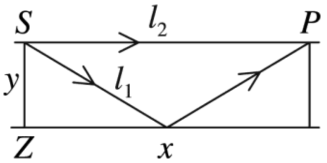
c) $\lambda_1 < \lambda \Rightarrow$ vzdálenost maxim se zmenší.

R6.55 Obr. R6-55.

Aby v bodě B bylo interferenční maximum, musí dráhový rozdíl odpovídat sudému počtu půlvln světelného vlnění ($\Delta l = 2k\ \lambda/2$, $k = 0, 1, 2, ...$).

$$l_1 = 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 4y^2}, l_2 = x$$

$$\Delta x = l_1 - l_2 = \sqrt{x^2 + 4y^2} - x = k\lambda$$



Obr. R6-55

R6.56 Příčinou vzniku interferenčního obrazce v podobě světlých (interferenční maximum) a tmavých proužků je odraz světla od dvou rozhraní klínové vrstvy vzduchu. Světlo prochází horní vrstvou skla (obr. R6-56 [6-18]) a částečně se od ní odráží. Světlo, které projde do vzduchové vrstvy, se odráží od dolního povrchu skleněné destičky a oba odražené paprsky interferují. Poněvadž index lomu skla je větší než index lomu vzduchu, mění se fáze paprsku při odrazu na rozhraní vzduchu a skla v opačnou a pro dráhový rozdíl obou paprsků ve vzdálenosti x od místa dotyku skleněných destiček platí:

$$\Delta s = 2d_x + \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

Aby vzniklo interferenční maximum, musí být splněna podmínka

$$\Delta s = k\lambda, \quad (2)$$

kde $k = 1, 2, 3, ...$. Z obr. R6-56 [6-18] je také patrný vztah mezi průměrem h vlasu, jeho vzdáleností l od místa styku skel a veličin x a d_x:

$$\frac{h}{l} = \frac{d_x}{x} \Rightarrow d_x = \frac{h}{l}x$$

Z rovnic (1) a (2) dostaneme po úpravě vztah pro polohu světlého proužku:

$$x_k = \frac{(2k+1)\lambda l}{4h}$$

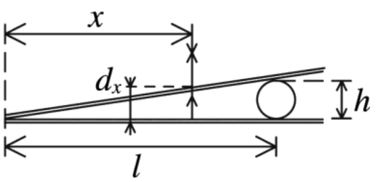
Podobně platí pro sousední proužek, jemuž odpovídá dráhový rozdíl o λ větší, popř. menší:

$$x_{k+1} = \frac{(2k+1)\lambda l}{4h}$$

Pro vzájemnou vzdálenost proužků, které jsou rovnoběžné s osou vlasu, platí:

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda l}{2h}$$

Poněvadž všechny tyto veličiny mají pro danou situaci konstantní hodnotu, jsou světlé proužky (ale i tmavé proužky) ve stejných vzájemných vzdálenostech.



Obr. R6-56

R6.57 λ = 600 nm = 6,0 · 10^{-7} m, Δx = 4,0 · 10^{-3} m; α = ?

Využijeme obecné řešení z úlohy 6.56:

$$\Delta x = \frac{\lambda l}{2h}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{l} = \frac{\lambda}{2\Delta x}$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{\lambda}{2\Delta x} = 7{,}5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{rad}$$

R6.58 Mýdlový roztok stéká k dolní části rámečku, kde je tloušťka mýdlové vrstvy větší. Proto má interferenční obrazec podobu proužků. Poněvadž vzdálenosti proužků nejsou pravidelné, nemá vrstva přesně klínový tvar.

R6.59 b_1 = 0,020 mm = 2,0 · 10^{-5} m, b_2 = 0,010 mm = 1,0 · 10^{-5} m

$$b \sin\alpha = k\lambda \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{k\lambda}{b}$$

$$\alpha \sim \frac{1}{b}$$

Poněvadž $b_2 < b_1$, vzdálenost ohybových maxim se zvětší.

R6.60 $b = 3 \cdot 10^{-4}$ cm $= 3 \cdot 10^{-6}$ m, $\lambda = 550$ nm $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ m, $k = 1, 2, 3$; $\alpha = ?$

$$b \sin\alpha = k\lambda$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{b} = 0{,}18,\ \alpha_1 \approx 10{,}6°$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{2\lambda}{b} = 0{,}37,\ \alpha_2 \approx 21{,}5°$$

$$\sin\alpha_3 = \frac{3\lambda}{b} = 0{,}55,\ \alpha_3 \approx 33{,}4°$$

R6.61 $a = 3 \cdot 10^{-6}$ m, $\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ m, $k = 2, 3$; $y = ?$

Pro úhel α_k směru, v němž vzniká ohybové maximum na optické mřížce s periodou a osvětlené světlem o vlnové délce λ, platí:

$$\sin\alpha_k = \frac{k\lambda}{b} \qquad (1)$$

Z obr. R6-61 [6-20] je zřejmé, že platí také:

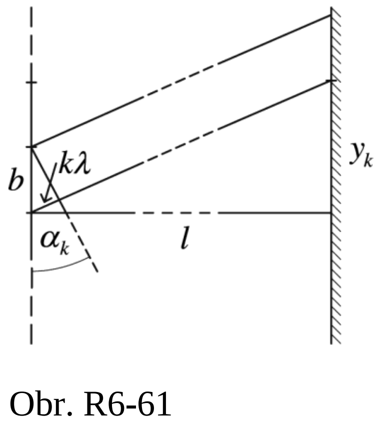
$$\sin\alpha_k = \frac{y_k}{\sqrt{l^2 + y_k^2}} \qquad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) úpravou dostaneme pro polohu k-tého interferenčního maxima:

$$y_k = \frac{k\lambda l}{\sqrt{b^2 - k^2\lambda^2}}$$

Pro vzájemnou vzdálenost 2. a 3. interferenčního maxima platí:

$$y = y_3 - y_2 = \lambda l \left(\frac{3}{\sqrt{b^2 - 9\lambda^2}} - \frac{2}{\sqrt{b^2 - 4\lambda^2}} \right) \approx 31{,}7 \text{ cm}$$



Obr. R6-61

R6.62 Z obecného řešení v úloze 6.61 vyplývá, že poloha ohybového spektra určitého řádu

$$y_k = \frac{k\lambda l}{\sqrt{b^2 - k^2\lambda^2}}.$$

Tzn. $y_k \sim l$; při zvětšení vzdálenosti stínítka od mřížky se vzdálenost ohybových maxim se zvětší.

R6.63 λ_f = 400 nm = $4{,}0 \cdot 10^{-7}$ m, $\lambda_č$ = 760 nm = $7{,}6 \cdot 10^{-7}$ m, $k = 2$, $k = 3$; $\Delta\lambda$ = ?

Určíme největší úhel pro maximum 2. řádu:

$$\sin\alpha_2 = \frac{2\lambda_č}{b}$$

Určíme vlnovou délku spektra 3. řádu pro úhel α_2:

$$\lambda = \frac{b\sin\alpha_2}{3} = \frac{2}{3}\lambda_č \approx 5{,}1 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 510\ \text{nm}$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_č = 110\ \text{nm}$$

R6.64 $b = 10^{-3}$ m/120 = $8{,}3 \cdot 10^{-6}$ m, $2\alpha = 8°$, $k = 1$; λ = ?

$\lambda = b \sin \alpha \approx 5{,}8 \cdot 10^{-7}$ m = 580 nm

R6.65 l = 1,0 m, λ = 760 nm = $7{,}6 \cdot 10^{-7}$ m, x = 15,2 cm = 0,152 m, $k = 1$, tg $\alpha \approx \sin \alpha$; b = ?

$$b\sin\alpha = k\lambda$$

$$b = \frac{\lambda}{\sin\alpha} \approx \frac{\lambda}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\lambda l}{x} \approx 5 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$$

R6.66 λ_1 = 380 nm = $3{,}8 \cdot 10^{-7}$ m, λ_2 = 760 nm = $7{,}6 \cdot 10^{-7}$ m, b = 0,01 mm = 10^{-5} m, l = 3 m, tg $\alpha \approx \sin \alpha$; Δx = ?

$$\lambda_1 = b\sin\alpha_1 = b\operatorname{tg}\alpha_1 = b\frac{x_1}{l} \Rightarrow x_1 = \frac{l\lambda_1}{b}$$

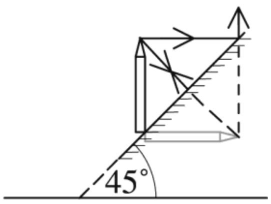
$$\lambda_2 = b\sin\alpha_2 = b\operatorname{tg}\alpha_2 = b\frac{x_2}{l} \Rightarrow x_2 = \frac{l\lambda_2}{b}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{l}{b} = (\lambda_2 - \lambda_1) \approx 1{,}1 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 11\ \text{cm}$$

6.3 Zobrazení zrcadlem a čočkou

R6.67 Svazek paprsků bude stejný jako před odrazem.

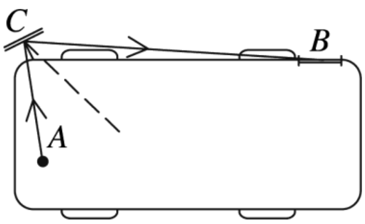
R6.68 Obr. R6-68 [V6-6].



Obr. R6-68

R6.69 Protože řidič automobilu jedoucího před vozem záchranné služby vidí ve zpětném zrcátku stranově převrácený, a tedy správně orientovaný nápis.

R6.70 Obr. R6-70 [V6-7].



Obr. R6-70

R6.71 h = 1,8 m, h' = 0,1 m, l = 1 m; h_1 = ?, h_2 = ?

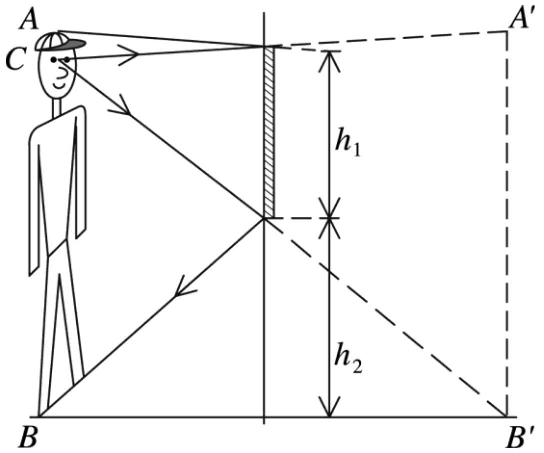
Chod paprsků vycházejících z krajních bodů A a B postavy pozorovatele a odrážejících se od rovinného zrcadla do oka pozorovatele v bodě C je patrný z obr. R6-71 [6 –23]. Odtud je také zřejmé, že výška zrcadla

$$h_1 = \frac{|AC|}{2} + \frac{|BC|}{2} = \frac{h}{2} = 0{,}9 \text{ m}.$$

Podobně najdeme vzdálenost dolního okraje zrcadla od podlahy

$$h_2 = \frac{|AB| - |AC|}{2} = 0{,}85 \text{ m}.$$

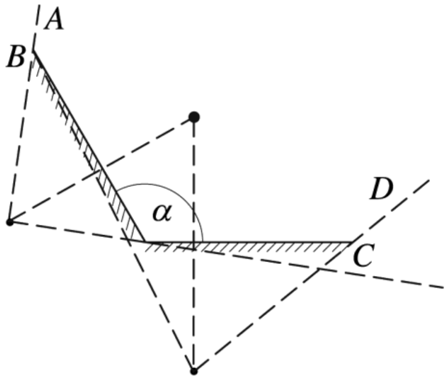
Poněvadž velikost zrcadla a jeho poloha závisí jen na velikosti postavy pozorovatele, nebude třeba při větším odstupu pozorovatele výšku zrcadla ani jeho umístění měnit.



Obr. R6-71

R6.72 Pacient se dívá do zrcadla a tabulka je za jeho zády. Písmena jsou však stranově převrácená.

R6.73 Obr. R6-73 [V6-8]. Zrcadla vytvoří jen dva body, které pozorovatel uvidí při pohledu z prostoru vymezeného body A, B, C, D.

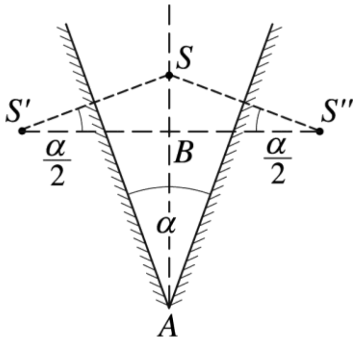


Obr. R6-73

R6.74 l = 12 cm = 0,12 m, α = 30°; $|S'S''|$ = ?

Obr. R6-74 [V6-9].

$$|S'S''| = 2|SS'|\cos(\alpha/2) = 4|SA|\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) = 2|SA|\sin\alpha = |SA| = 12\ \text{cm}$$



Obr. R6-74

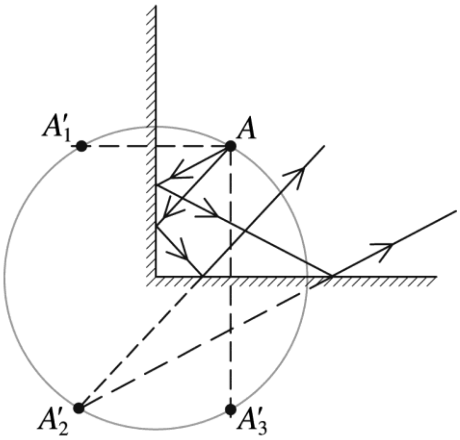
R6.75 $\alpha = 90°$; n = ?

Obr. R6-75 [V6-10]. Vzniknou tři obrazy: $n = 3$

Pro řešený případ platí

$$n = \frac{360°}{\alpha} - 1.$$

Tento vztah platí obecně, takže pro $\alpha = 0$ je $n = \infty$.



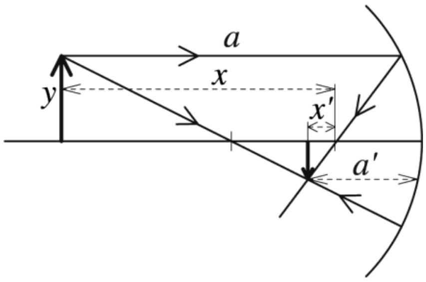
Obr. R6-75

R6.76 Poněvadž lékař umístí zrcátko do malé vzdálenosti od zubu, je $a < f$ a obraz zadní části zubu je zdánlivý, vzpřímený, zvětšený.

R6.77 Vlastnosti obrazu se nezmění, ale vytvoří ho jen část světelných paprsků, proto se zmenší jas obrazu.

R6.78 Obr. R6-78. Platí:

$$a = x + f$$
$$a' = x' + f$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{x+f} + \frac{1}{x'+f} = \frac{1}{f} \Rightarrow xx' = f^2$$

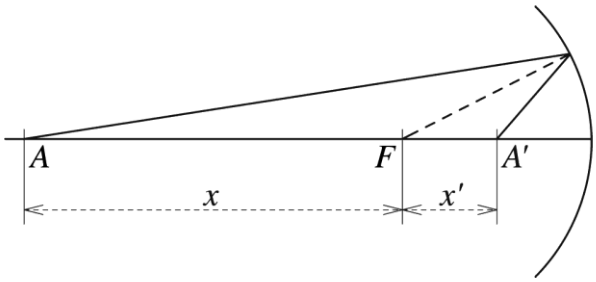


Obr. R6-78

R6.79 x = 36 cm = 0,36 m, x' = 9 cm = 0,09 m; f = ?

Obr. R6-79. Použijeme Newtonovu zobrazovací rovnici (viz úlohu 6.78):

$$f = \sqrt{xx'} = 0{,}18 \text{ m} = 18 \text{ cm}$$



Obr. R6-79

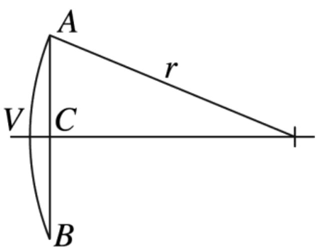
R6.80 $|AB|$ = 20 cm = 0,2 m, $|VC|$ = 2 cm = 0,02 m; f = ?

Obr. R6-80.

$$(r - |VC|)^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = r^2$$

$$r = \frac{|AB|^2}{8|VC|} + \frac{|VC|}{2} = 0{,}26 \text{ m}$$

$$f = \frac{r}{2} = 0{,}13 \text{ m} = 13 \text{ cm}$$



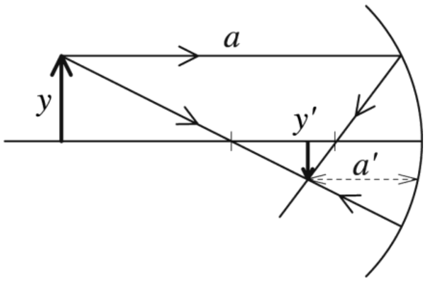
Obr. R6-80

R6.81 r = 40 cm = 0,4 m, $y' = y/2$; a = ?

Obr. R6-81.

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a} = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a' = \frac{a}{2}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{a} = \frac{2}{r} \;\Rightarrow\; a = \frac{3}{2} r = 0{,}6 \text{ m} = 60 \text{ cm}$$

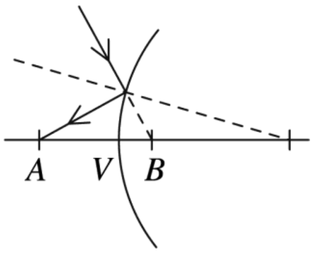


Obr. R6-81

R6.82 $|a|$ = 30 cm = 0,3 m, $|a'|$ = 60 cm = 0,6 m; r = ?

Obr. R6-82. Chod světelných paprsků optickou soustavou se nezmění, jestliže zaměníme jejich směr. To odpovídá situaci, kdy paprsky vycházejí ze skutečného zdroje v bodě A a zdánlivě se protínají v bodě B za zrcadlem. Pak $|AV| = a > 0$ a $|VB| = a' < 0$.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{2}{r} \;\Rightarrow\; r = 2\frac{aa'}{a+a'} = -1{,}2 \text{ m}$$



Obr. R6-82

R6.83 a = 30 cm = 0,30 m, $|Z|$ = 1,5; a' = ?, r = ?

Při daném zvětšení může být obraz skutečný a převrácený ($Z = -1{,}5$), nebo zdánlivý a vzpřímený ($Z = 1{,}5$). Pro první případ platí:

$$Z = -\frac{a'}{a} \;\Rightarrow\; a' = -Za = 0{,}45 \text{ m} = 45 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{2}{r} \;\Rightarrow\; r = 2\frac{aa'}{a+a'} = 0{,}36 \text{ m} = 36 \text{ cm}$$

Druhý případ nastane, když $a < f = r/2$:

$$a' = -Za = -0{,}45 \text{ m} = -45 \text{ cm}$$

$$r = 2\frac{aa'}{a+a'} = 1{,}8 \text{ m}$$

R6.84 $Z = -4$, $a' - a = 90$ cm $= 0{,}9$ m; $f = ?$

$$Z = -\frac{a'}{a} = \frac{-a'}{a' - 0{,}9} \;\Rightarrow\; a' = \frac{Z \cdot 0{,}9}{Z+1} = 1{,}2 \text{ m}$$

$$a = a' - 0{,}9 = 0{,}3 \text{ m}$$

$$f = \frac{aa'}{a+a'} = 0{,}24 \text{ m} = 24 \text{ cm}$$

R6.85 $Z = -1/3$, $a_1 = a - 0{,}1$ m, $Z_1 = -1/2$; $f = ?$

$$Z = -\frac{f}{a-f}, Z_1 = -\frac{f}{a - 0{,}1 - f}$$

$$f = \frac{0{,}1 Z_1}{\frac{Z_1}{Z}\left(Z-1\right) - Z_1 + 1} = 0{,}1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

R6.86 $r = 40$ cm, $a = 30$ cm; $x = ?$

Chod paprsků je vyznačen na obr. R6-86 [6-26]. Odtud je zřejmé, že zrcadlo musí být umístěno v polovině vzájemné vzdálenosti zdroje světla a jeho obrazu. Pro polohu obrazu najdeme ze zobrazovací rovnice dutého zrcadla

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{2}{r}$$

vztah

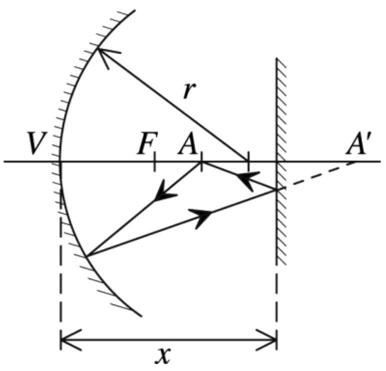
$$a' = \frac{ra}{2a - r}.$$

Pro polohu rovinného zrcadla na optické ose dutého zrcadla platí:

$$x = a + \frac{a' - a}{2}$$

Po dosazení za a' a úpravě dostaneme

$$x = \frac{a^2}{2a - r} = 45 \text{ cm}.$$



Obr. R6-86

R6.87 Při posunu předmětu vpravo se posune i obraz vpravo ($a_1 < a \Rightarrow a_1' > a'$), při posunu vlevo se obraz posune vlevo. Při posunu předmětu nahoru se obraz posune dolů a obráceně.

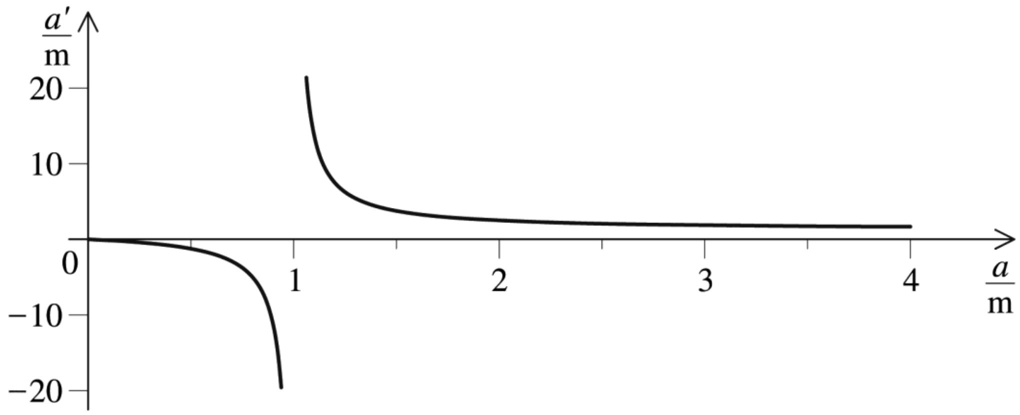
R6.88 Spojka vytváří převrácený obraz. Měsíc je v 1. čtvrti.

R6.89 Obraz zůstane skutečný a převrácený. Vzhledem k záměně chodu světelných paprsků je zvětšení $Z' = 1/Z$.

R6.90

vzdálenost předmětu	vzdálenost obrazu
$a_1 = 4f$	$a_1' = 4f/3$
$a_2 = 2f$	$a_2' = 2f$
$a_3 = 1{,}5f$	$a_3' = 3f$
$a_4 = f$	$a_4' = \infty$
$a_5 = 0{,}5f$	$a_5' = -f$
$a_6 = 0{,}1f$	$a_6' = -f/9$

Obr. R6-90 [V6-11].

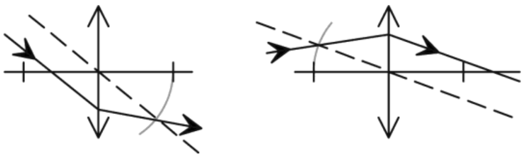


Obr. R6-90

R6.91

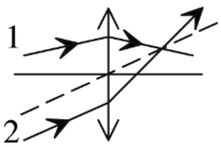
	a	b	c	d	e	f	g	h	i
typ čočky	spojka	spojka	spojka	rozptylka	spojka	rozptylka	spojka	spojka	rozptylka
a (cm)	+20	+5	+5	+5	+10	+10	+10	+10	+10
a' (cm)	+20	–10	–10	–3,3	+5	–5	–15	+20	–8
Z	–1	+2	> 1	< 1	–0,5	+0,5	+1,5	–2	+0,8
f (cm)	+10	+10	+10	–10	+3,3	–10	+30	+6,7	–40
n	–	–	–	–	–	–	1,5	1,5	1,5
r_1	–	–	–	–	–	–	+30	+3	–60
r_2	–	–	–	–	–	–	+30	–30	–30
skutečný obraz?	ano	ne	ne	ne	ano	ne	ne	ano	ne
převrácený obraz?	ano	ne	ne	ne	ano	ne	ne	ano	ne

R6.92 Obr. R6-92 [V6-12].



Obr. R6-92

R6.93 Obr. R6-93 [V6-13].



Obr. R6-93

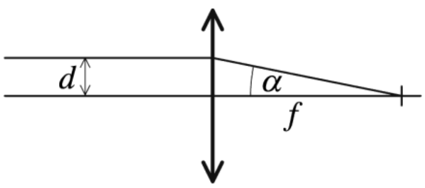
R6.94 Jestliže ji ponoříme do kapaliny o větším indexu lomu, než je index lomu skla čočky.

R6.95 d = 10 mm = 10^{-2} m, $\alpha = 5°$; f = ?

Obr. R6-95.

Poněvadž úhel α je malý, je tg $\alpha \approx$ sin α a platí:

$$\sin\alpha = \frac{d}{f} \Rightarrow f = \frac{d}{\sin\alpha} \approx 0{,}11\,\mathrm{m} = 11\,\mathrm{cm}$$



Obr. R6-95

R6.96 n = 1,5, φ = 2 D, φ_1 = –1 D; n_1 = ?

$$\varphi = (n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\varphi_1 = \left(\frac{n}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\varphi_1 = \left(\frac{n}{n_1}-1\right)\frac{\varphi}{(n-1)} \;\Rightarrow\; n_1 = \frac{n\varphi}{\varphi_1(n-1)+\varphi} = 2$$

R6.97 f = 10 cm = 0,1 m, n = 1,6; r = ?

$$\varphi = \frac{1}{f} = (n-1)\frac{1}{r} \;\Rightarrow\; r = (n-1)f = 0{,}06\ \mathrm{m} = 6\ \mathrm{cm}$$

R6.98 n = 1,8, f' = 1,6f, $r_1' = r_1$, $r_2' = r_2$; n' = ?

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{1{,}6f} = (n'-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{1{,}6f} = \frac{(n'-1)}{f(n-1)} \;\Rightarrow\; n' = \frac{n+0{,}6}{1{,}6} = 1{,}5$$

R6.99 n = 1,6, n_1 = 1,33; f_1/f = ?

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{f_1} = \left(\frac{n}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{f_1}{f} = \frac{n_1(n-1)}{n-n_1} = 3$$

R6.100 $a' = -f$; a = ?

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{f} = \frac{1}{f} \;\Rightarrow\; a = \frac{f}{2}$$

R6.101 $a + a' = d = 5$ m, $Z = -4$; $f = ?$, $a = ?$

$$Z = -\frac{a'}{a} = -\frac{d-a}{a} \Rightarrow a = \frac{d}{1-Z} = 1 \text{ m}$$

$$Z = -\frac{f}{a-f} \Rightarrow f = \frac{Za}{Z-1} = 0{,}8 \text{ m}$$

R6.102 $y = 12$ mm $= 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ m, $a = 1{,}75f$; $Z = ?$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \Rightarrow a' = \frac{af}{a-f} = \frac{7}{5}f$$

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a} \Rightarrow y' = -y\frac{a'}{a} = -1{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ m} = -16 \text{ mm}$$

R6.103 $a + a' = d = 40$ cm $= 0{,}4$ m, $Z = -1/2$; $f = ?$, $a = ?$

$$Z = -\frac{a'}{a} = -\frac{d-a}{a} \Rightarrow a = \frac{d}{1-Z} \approx 0{,}27 \text{ m} = 27 \text{ cm}$$

$$Z = -\frac{f}{a-f} \Rightarrow f = \frac{Zd}{(Z+1)(1-Z)} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 9 \text{ cm}$$

R6.104 $f = 12$ cm $= 0{,}12$ m, $Z = -2$; $a = ?$

$$Z = -\frac{f}{a-f} \Rightarrow a = f\,\frac{Z-1}{Z} = 0{,}18 \text{ m} = 18 \text{ cm}$$

R6.105 $y = 2$ cm $= 2 \cdot 10^{-2}$ m, $y' = 6$ cm $= 6 \cdot 10^{-2}$ m , $\Delta a = a - a_1 = 2$ cm $= 2 \cdot 10^{-2}$ m, $Z_1 = 2Z$; $f = ?$

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a-f} = -3 \Rightarrow a = \frac{4}{3}f$$

$$Z_1 = -\frac{f}{a_1 - f} = 2Z = -6$$

$$\frac{Z}{Z_1} = \frac{a_1 - f}{a-f} = \frac{a - \Delta a - f}{a-f} \Rightarrow f = 0{,}12 \text{ m} = 12 \text{ cm}$$

R6.106 $\varphi = 10$ D, $y = y'$, $y_1' = 2y$; $\Delta a = ?$

$$\varphi = \frac{1}{f} = 10\ \mathrm{D} \Rightarrow f = 0{,}1\ \mathrm{m}$$

$$Z = -\frac{f}{a-f} = -1 \Rightarrow a = 2f$$

$$Z_1 = -\frac{f}{a_1 - f} = -2 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}f$$

$$\Delta a = a - a_1 = \frac{1}{2}f = 0{,}05\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{cm}$$

Poněvadž $a_1 < a$, je třeba posunout čočku o 5 cm blíže ke svíčce.

R6.107 φ = 5 D, a = –20 cm = –0,2 m; a' = ?

$$\varphi = \frac{1}{f} = 5\ \mathrm{D} \Rightarrow f = 0{,}2\ \mathrm{m}$$

$$a = -f$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \Rightarrow a' = \frac{f}{2} = 0{,}1\ \mathrm{m} = 10\ \mathrm{cm}$$

R6.108 $a + a' = d$ = 1,0 m, x = 0,6 m; f = ?

Obr. R6-108. Polohy čočky odpovídají vzájemné záměně předmětu a obrazu.

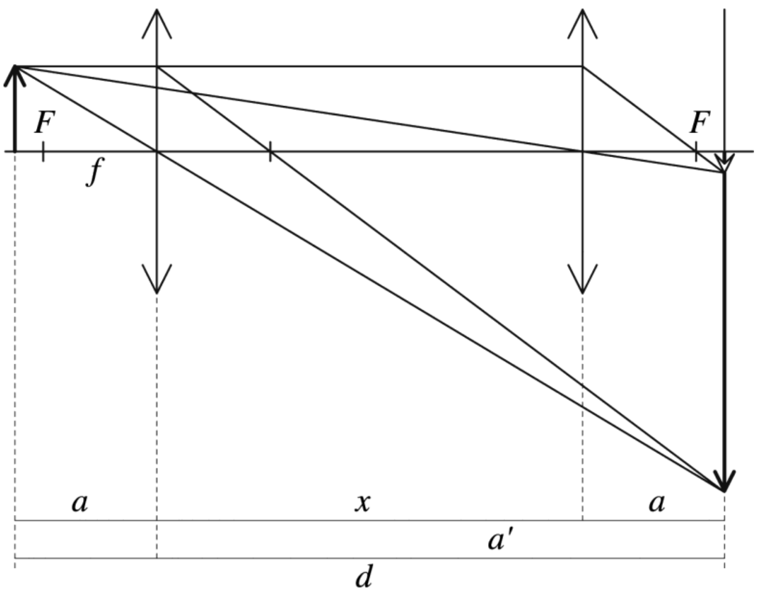
$$a' = a + x$$

$$a + a' = 2a + x = d \Rightarrow a = \frac{d-x}{2}$$

$$a' = \frac{d-x}{2} + x = \frac{d+x}{2}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{2}{d-x} + \frac{2}{d+x} = \frac{4d}{d^2 - x^2} = \frac{1}{f}$$

$$f = \frac{d^2 - x^2}{4d} = 0{,}16\ \mathrm{m} = 16\ \mathrm{cm}$$

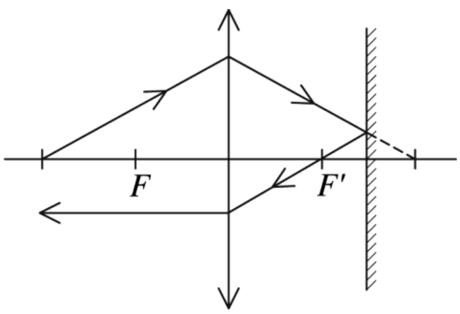


Obr. R6-108

R6.109 $a = 2f$, $a' = 2f$; $l = ?$

Poněvadž zdroj světla je v dvojnásobné ohniskové vzdálenosti, směřují paprsky po průchodu čočkou opět do dvojnásobné ohniskové vzdálenosti. Zrcadlo je třeba umístit tak, aby odražený paprsek procházel ohniskem (obr. R6-109 [V6-14]):

$$l = \frac{3}{2} f$$



Obr. R6-109

R6.110 $a = 1{,}0$ m, $f = 0{,}50$ m, $d = 2{,}0$ m; $a' = ?$, $Z = ?$

Obr. R6-110. Určíme polohu obrazu vytvořeného čočkou:

$$a' = \frac{af}{a - f} = 1 \text{ m}$$

Obraz je skutečný a převrácený a rovinné zrcadlo vytvoří jeho zdánlivý obraz ve vzdálenosti 3 m od čočky. Obraz je opět převrácený a zvětšení je 1. Tento obraz se stává předmětem, tzn. $a_1 = 3$ m.

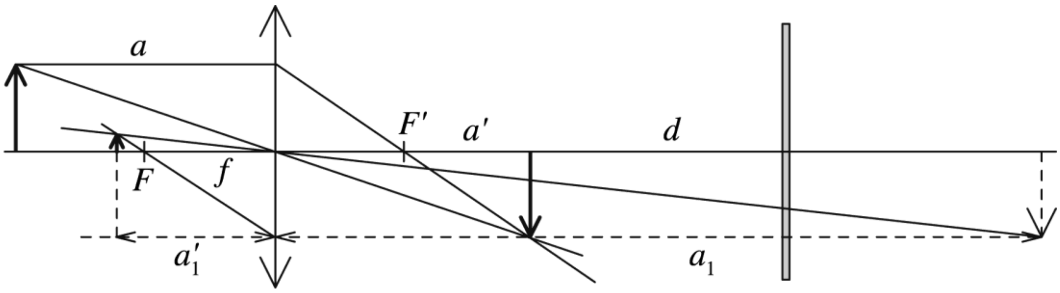
a) Pro polohu obrazu platí :

$$a_1' = \frac{a_1 f}{a_1 - f} = 0{,}60\ \text{m} = 60\ \text{cm}$$

b) Obraz je skutečný.

c) Obraz je vzpřímený.

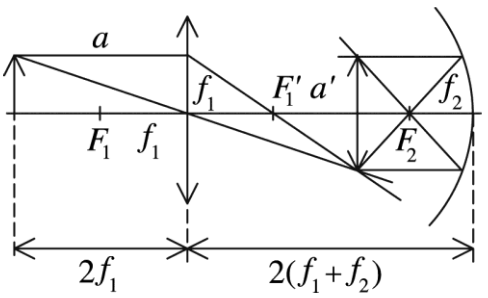
d) $Z' = -\dfrac{a'}{a} = -0{,}2$



Obr. R6-110

R6.111 $a = 2f_1$

Obr. R6-111. Obraz je skutečný a vzpřímený.



Obr. R6-111

R6.112 $n = 1{,}33$, $r = 16\ \text{cm} = 0{,}16\ \text{m}$; $f = ?$

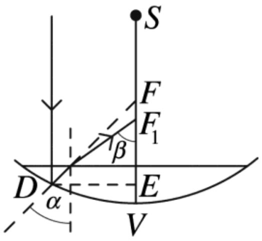
Označíme ohniskovou vzdálenost zrcadla $f = |VF| = |VS|/2 = r/2$ a ohniskovou vzdálenost dutého zrcadla s vodou $f_1 = |VF_1|$ (obr. R6-112 [6-32]). Světelný paprsek rovnoběžný s optickou osou dopadá na povrch vody kolmo a na zrcadlo dopadá v bodě D. Bez vody by odražený paprsek směřoval do bodu F a po nalití vody směřuje do bod F_1. Podle obr. R6-112 [6-32] platí $|DE| = |EF|\ \mathrm{tg}\ \alpha \approx |EF_1|\ \mathrm{tg}\ \beta$. Poněvadž nalitá vrstva vody je tenká, můžeme vzdálenost $|VE|$ ve srovnání se vzdálenostmi $|VF|$ a $|VF_1|$ zanedbat, takže $|EF| \approx |VF|$ a $|EF_1| \approx |VF_1|$.

Pro malé úhly α a β platí:

$$\frac{|VF|}{|VF_1|} = \frac{f}{f_1} \approx \frac{\text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n$$

Pro ohniskovou vzdálenost odtud najdeme vztah:

$$f_1 \approx \frac{f}{n} \approx \frac{r}{2n} \approx 0{,}06\ \text{m} = 6\ \text{cm}$$



Obr. R6-112

R6.113 $\varphi_1 = 5$ D, $\varphi_2 = 2{,}5$ D, $d = 90$ cm = 0,9 m, $a = 30$ cm = 0,30 m

Obr. R6-113 [V6-16].

$$f_1 = \frac{1}{\varphi_1} = 0{,}2\ \text{m},\ f_2 = \frac{1}{\varphi_2} = 0{,}4\ \text{m}$$

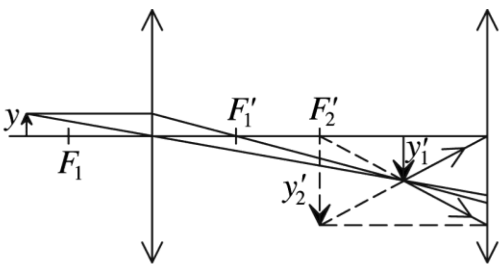
$$a' = \frac{af_1}{a - f_1} = 0{,}60\ \text{m}$$

$$a_1 = d - a' = 0{,}30\ \text{m}$$

$$a_1' = \frac{a_1 f_2}{a_1 - f_2} = -1{,}2\ \text{m}$$

$$Z = -\frac{a_1'}{a} = 4$$

Obraz je zdánlivý a zvětšený.



Obr. R6-113

R6.114 $f_1 = +20$ cm = +0,20 m, $f_2 = -15$ cm = –0,15 m, $d = 10$ cm = 0,10 m, $a = 40$ cm = 0,40 m; $a_2' = ?$

Poloha obrazu vytvořeného spojkou:

$$a_1' = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} = 0{,}40 \text{ m}$$

Poloha předmětu pro rozptylku: $a_2 = d - a_1' = -0{,}30$ m

Poloha obrazu vytvořeného rozptylkou:

$$a_2' = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2} = -\,0{,}30 \text{ m} = -30 \text{ cm}$$

Obraz se vytvoří 30 cm před rozptylkou. Obraz je zdánlivý, vzpřímený a stejně velký jako předmět.

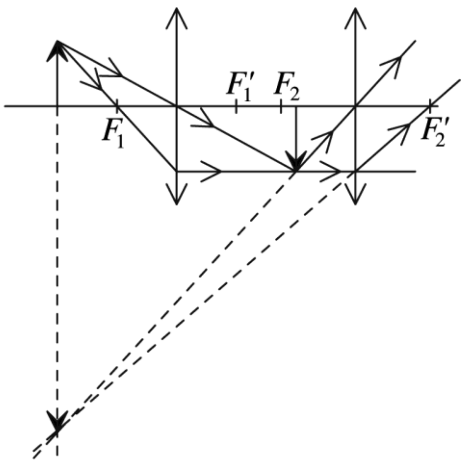
R6.115 a = 20 cm = 0,2 m, f_1 = 10 cm = 0,1 m, f_2 = 12,5 cm = 0,125 m, d = 30 cm = 0,3 m; a_2' = ?, Z = ?

Obr. R6-115 [V6-17].

$$a_1' = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} = 0{,}2 \text{ m}$$
$$a_2 = d - a_1' = 0{,}1 \text{ m}$$
$$a_2' = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2} = -0{,}5 \text{ m}$$

Obraz je v místě předmětu. Obraz je zdánlivý, převrácený a zvětšený:

$$Z = -\frac{a_2'}{a_2} = 5$$



Obr. R6-115

R6.116 Obraz vytvořený první čočkou je předmětem pro druhou čočku. Platí $a_2 = -a'_1$. Zobrazovací rovnice má tvar:

$$\frac{1}{a_2} = -\frac{1}{a_1'} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{f_1}$$

Odtud pro celou optickou soustavu najdeme:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a'_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

R6.117 a_1 = 12,5 cm = 0,125 m; φ **=** ?

Normální oko vidí nejlépe předměty v konvenční zrakové vzdálenosti (a_2 = 0,25 m). Poněvadž $a_1 < a_2$, je oko krátkozraké a vada oka se odstraní rozptylkou. Bez brýlí bude pro oko platit zobrazovací rovnice ve tvaru

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a'} = \varphi_1, \qquad (1)$$

kde φ_1 je optická mohutnost oka.

Jestliže před oko umístíme brýle, vzniká optická soustava o optické mohutnosti $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, kde φ_2 je optická mohutnost brýlí. Předmět v konvenční zrakové vzdálenosti a_2 se touto optickou soustavou opět zobrazí na sítnici oka a platí rovnice

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a'} = \varphi_1 + \varphi_2. \qquad (2)$$

Řešením rovnic (1) a (2) najdeme vztah pro optickou mohutnost čoček brýlí:

$$\varphi_2 = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = -4 \text{ D}$$

Do brýlí použijeme rozptylku o optické mohutnosti –4 D.

R6.118 $a = \infty$, $a' = -0{,}5$ m; φ = ?

$$\varphi = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = -2 \text{ D}$$

R6.119 φ = 2,75 D, a = 0,25 m; a' = ?

Bez brýlí by bylo nutné držet knihu ve vzdálenosti, ve které čočka brýlí vytvoří zdánlivý obraz předmětu umístěného v konvenční zrakové vzdálenosti ($a = d$ = 0,25 m).

$$\varphi = \frac{1}{d} + \frac{1}{a'} \Rightarrow a' = \frac{a}{\varphi a - 1} = -0{,}8 \text{ m}$$

R6.120 $a_1' = -0{,}1$ m, $a_2' = -0{,}5$ m; $a = ?$

Při akomodaci oka na vzdálený bod ($a \to \infty$) vzniká zdánlivý obraz v ohniskové vzdálenosti brýlí. Poněvadž v tomto případě $1/a \to 0$, platí:

$$\frac{1}{a_2'} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = a_2' = -0{,}5 \text{ m}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a_1'} = \frac{1}{f} \Rightarrow a = \frac{a_1' f}{a_1' - f} = 0{,}125 \text{ m} = 12{,}5 \text{ cm}$$

R6.121 Divadelní kukátko vytváří zdánlivý obraz, který vidí dalekozraký člověk ostře ve větší vzdálenosti od oka. Proto musí více vysunout objektiv dalekohledu.

R6.122 $a' = -50$ cm $= -0{,}5$ m, $\varphi = 20$ D; $a = ?$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \varphi \Rightarrow a = \frac{a'}{a'\varphi - 1} \approx 0{,}045 \text{ m} = 4{,}5 \text{ cm}$$

R6.123 $\varphi = 8$ D, $d = 0{,}25$ m; $\gamma = ?$

Lupa je spojná čočka, kterou může použít místo brýlí dalekozraký člověk. Jestliže lupou vytvoří zdánlivý obraz v konvenční zrakové vzdálenosti d ($a' = -d$), platí pro zvětšení lupou:

$$\gamma = \frac{\tau'}{\tau} \approx \frac{y/a}{y/d} = \frac{d}{a}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{d} = \varphi \Rightarrow a = \frac{d\varphi + 1}{d}$$

$$\gamma \approx d\varphi + 1 = 3$$

R6.124 Poněvadž index lomu vody je blízký indexu lomu očního moku a sklivce, optická mohutnost soustavy oka se zmenšuje.

R6.125 $f = 75$ mm $= 7{,}5 \cdot 10^{-2}$ m, $y = 180$ cm $= 1{,}8$ m, $a = 27$ m; $y' = ?$

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a - f} \Rightarrow |y'| = y\frac{f}{a - f} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 5 \text{ mm}$$

R6.126 $a_1 = 5$ m, $y_1' = 10{,}10$ mm $= 10{,}1 \cdot 10^{-3}$ m, $a_2 = 8$ m, $y_2' = 6{,}29$ mm $= 6{,}29 \cdot 10^{-3}$ m; $f = ?$

$$\frac{y_1'}{y} = -\frac{f}{a_1 - f}, \quad \frac{y_2'}{y} = -\frac{f}{a_2 - f}$$

$$f = \frac{y_1' a_1 - y_2' a_2}{y_1' - y_2'} = 0{,}047 \text{ m} = 47 \text{ mm}$$

R6.127 y = 1,0 cm = 1,0 · 10^{-2} m, y' = 4,0 cm = 4,0 · 10^{-2} m, a = 44 cm = 0,44 m; f = ?

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a-f} \;\Rightarrow\; f = \frac{y'a}{y'-y} = 0{,}35\ \text{m} = 350\ \text{mm}$$

R6.128 f_1 = 100 mm = 0,1 m, f_2 = 60 mm = 0,06 m; $y_1' : y_2'$ = ?

Pokud chceme dosáhnou stejného zvětšení v menší místnosti (vzdálenost projekční plochy je a'), musíme použít objektiv s menší ohniskovou vzdáleností. Důkaz:

$$|Z| = \frac{a'-f}{f} \Rightarrow a' = f(|Z|-1)$$
$$a' \sim f$$

Pro poměr velikostí obrazu při a' = konst. platí:

$$\frac{y_1'}{y} = -\frac{a'-f_1}{f_1},\; \frac{y_2'}{y} = -\frac{a'-f_2}{f_2}$$
$$\frac{y_1'}{y_2'} = \frac{(a'-f_1)f_2}{(a'-f_2)f_1} \approx \frac{f_2}{f_1} = 3:5$$

R6.129 $a \times b$ = 24 mm × 36 mm = (2,4 × 3,6) · 10^{-2} m, $a' \times b'$ = 130 cm × 130 cm = (1,3 × 1,3) m, f_1 = 100 mm = 0,1 m, f_2 = 60 mm = 0,06 m; a' = ?

y = 3,6 · 10^{-2} m, obraz na projekční ploše je skutečný, takže y' = –1,3 m

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{a'-f}{f} \;\Rightarrow\; a' = f\left(1-\frac{y'}{y}\right)$$
$$a_1' = 3{,}7\ \text{m}, a_2' = 2{,}2\ \text{m}$$

R6.130 y_1 = 36 mm = 3,6 · 10^{-2} m, y_2 = 6 cm = 6 · 10^{-2} m, a' = 5 m, y' = 1,8 m; f_1 = ?, f_2 = ?

Obraz vytvořený objektivem projektoru na projekční ploše je převrácený, takže y' = –1,8 m.

$$\frac{y'}{y} = -\frac{a'-f}{f} \;\Rightarrow f = -\frac{a'y}{y'-y}$$
$$f_1 = 0{,}102\ \text{m} \approx 100\ \text{mm}$$
$$f_2 = 0{,}172\ \text{m} \approx 170\ \text{mm}$$

R6.131 f_1 = 20 mm = 2,0 · 10^{-2} m, f_2 = 80 mm = 8,0 · 10^{-2} m, a = 5 m; Z_1 = ?, Z_2 = ?

Pro snímání celku volíme menší ohniskovou vzdálenost a pro snímání detailu volíme větší ohniskovou vzdálenost.

$$Z = -\frac{f}{a-f} \approx -\frac{f}{a}$$

$$|Z_1| = 4 \cdot 10^{-3},\ |Z_2| = 1{,}6 \cdot 10^{-2}$$

R6.132 Delší ohnisková vzdálenost objektivu umožňuje snímat portrét z větší vzdálenosti, takže nedochází ke zkreslení proporcí jednotlivých částí obličeje. Krátká ohnisková vzdálenost objektivu umožňuje snímat velké objekty z malé vzdálenosti (široký úhel záběru).

R6.133 f_1 = 5 mm = 5 · 10^{-3} m, f_2 = 50 mm = 5 · 10^{-2} m, Δ = 15 cm = 0,15 m, d = 0,25 m; Z = ?

$$Z = \frac{\Delta d}{f_1 f_2} = 150$$

R6.134 f_1 = 24 cm = 0,24 m, $a_1 = \infty$, a_2 = 10 m; x = ?

Při nastavení na nekonečno vzniká obraz v ohnisku objektivu ($a_1' = f$). Při zaostření do vzdálenosti 10 m vzniká obraz ve vzdálenosti a_2' od objektivu:

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2'} = \frac{1}{f} \Rightarrow a_2' = \frac{f a_2}{a_2 - f} = 0{,}246 \text{ m}$$

$$x = a_2' - a_1' = \frac{f^2}{a_2 - f} = 5{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 5{,}9 \text{ mm}$$

R6.135 f_1 =1,0 m, f_2 = 5,0 cm = 5,0 · 10^{-2} m, a_2' = 25 cm = 0,25 m, τ = 30′; x = ?, d' = ?

Objektiv dalekohledu vytvoří obraz Slunce v ohniskové vzdálenosti ($a_1' = f_1$). Okulár musí být v takové vzdálenosti a_2 od obrazového ohniska objektivu, aby vznikl skutečný obraz vytvořený okulárem ve vzdálenosti a_2'.

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2'} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow a_2 = \frac{a_2' f}{a_2' - f} \approx 0{,}06 \text{ m}$$

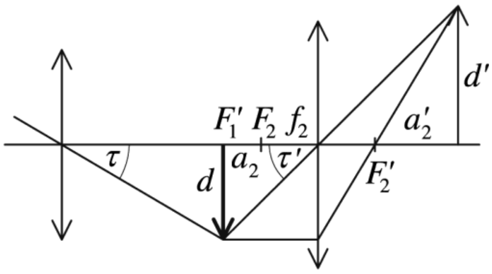
$$x = f_1 + a_2 \approx 1{,}06 \text{ m}$$

Obr. R6-135. Průměr obrazu Slunce vytvořeného objektivem je d.

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{d}{f_1},\ \operatorname{tg}\tau' = \frac{d}{a_2} = \frac{d'}{a_2'}$$

$$d = f_1 \operatorname{tg}\tau \approx 8{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

$$d' = d\frac{a_2' - f_2}{f_2} \approx 3{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{m} = 35\ \text{mm}$$



Obr. R6-135

6.4 Energie záření

R6.136 r = 60 cm = 0,6 m, h = 80 cm = 0,8 m, I = 100 cd; E = ?

Osvětlení uprostřed stolu:

$$E_1 = \frac{I}{h^2} = 160\ \text{lx}$$

Osvětlení okraje stolu:

$$E_2 = \frac{I\cos\alpha}{h^2 + r^2} = \frac{I}{h^2 + r^2}\frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = 80\ \text{lx}$$

R6.137 I_1 = 25 cd, I_2 = 40 cd, d = 1,2 m, $E_1 = E_2$; x_1 = ?, x_2 = ?

$$E = \frac{I_1}{x_1^2} = \frac{I_2}{(d - x_2)^2}$$

$$x_1^2(I_2 - I_1) + 2I_1 d r_1 - I_1 d^2 = 0$$

$$x_1 = \frac{-I_1 d + I_1 d\sqrt{I_2/I_1}}{I_2 - I_1} = 0{,}53\ \text{m} = 53\ \text{cm}$$

$$x_2 = d - x_1 = 0{,}67\ \text{m} = 67\ \text{cm}$$

R6.138 Φ = 360 lm, S = 210 mm × 297 mm = 6,24 · 10^{-2} m^2, α = 30°; E = ?

$$E = \frac{\Phi}{S}\cos\alpha = 5\cdot 10^3\ \text{lx}$$

R6.139 E = 0,2 lx, I = 1 cd; r = ?

$$E = \frac{I}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{I}{E}} \approx 2{,}2\ \text{m}$$

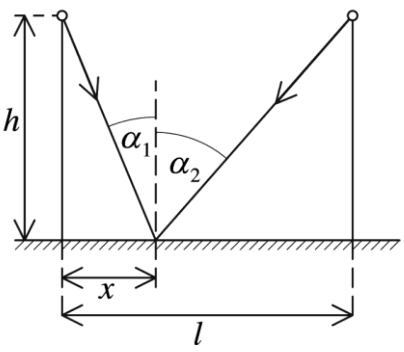
R6.140 h = 3,0 m, l = 4,0 m, I = 200 cd; $E = f(x)$, E_0 = ?, $E_{l/2}$ = ?

Do bodu ve vzdálenosti x od paty prvního stožáru dopadá světlo z prvního stožáru pod úhlem α_1 a z druhého stožáru pod úhlem α_2 (obr. R6-140a [6-33]). V uvažovaném bodě o souřadnici x platí:

$$E_1 = \frac{I\cos\alpha_1}{r_1^2} = I\frac{h}{\left(h^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

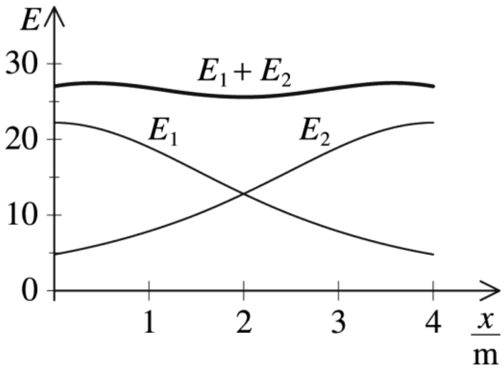
Pro osvětlení z druhého zdroje světla dostaneme podobně

$$E_2 = I\frac{h}{\left[h^2 + (l-x)^2\right]^{3/2}}\,.$$



Obr. R6-140a

Výsledné osvětlení $E = E_1 + E_2$ a jeho průběh podél spojnice pat obou stožárů ($E = f(x)$) je na obr. R6-140b [6-34].



Obr. R6-140b

Pro osvětlení pod patou stožáru (x = 0, popř. x = l) dostaneme po úpravě vztah

$$E_0 = I\frac{\left(l^2+h^2\right)^{3/2}+h^2}{\left(l^2+h^2\right)^{3/2}h^2} = 27\ \text{lx}\ .$$

Poněvadž uprostřed mezi stožáry je osvětlení z obou stožárů stejné, je

$$E_{l/2} = 2I\frac{h}{\left[h^2+\left(l/2\right)^2\right]^{3/2}} = 26\ \text{lx}\ .$$

Osvětlení u paty stožáru a uprostřed mezi stožáry je přibližně stejné.

R6.141 r_1 = 60 cm = 0,6 m, t_1 = 9 s, r_2 = 40 cm = 0,4 m; t_2 = ?

$$\frac{I_1}{r_1^2}t_1 = \frac{I_2}{r_2^2}t_2 \ \Rightarrow\ t_2 = t_1\frac{r_2^2}{r_1^2} = 4\ \text{s}$$

R6.142 S = 5,0 m × 3,6 m = 18 m^2, Φ = 1,8 · 10^3 lm; E = ?

$$E = \frac{\Phi}{S} = 100\ \text{lx}$$

R6.143 f = 20 cm = 0,2 m, a = 20,5 cm = 0,205 m, S = 24 mm × 36 mm =
8,64 · 10^{-4} m^2, Φ = 120 lm; E = ?

$$|Z| = \frac{f}{a-f} = 40$$

$$E = \frac{\Phi}{S'} = \frac{\Phi}{SZ^2} = 87\ \text{lx}$$

R6.144 Osvětlení se zvětší tak, jako by k původnímu zdroji světla přibyl další zdroj v trojnásobné vzdálenosti; osvětlení se zvětší 1,1krát.

R6.145 r = 1,0 m, l = 2,0 m, E_0 = 40 lx; E = ?

Poněvadž zdroj světla je v ohnisku zrcadla, jsou paprsky po odrazu rovnoběžné a osvětlení stínítka je stejné jako osvětlení zrcadla:

$$E_z = \frac{I}{(f)^2} = \frac{4I}{r^2},\ \text{kde}\ I = E_0\left(l-\frac{r}{2}\right)^2 = E_0\left(\frac{3}{2}r\right)^2$$

$$E_z = E_0\frac{4\left(\frac{3}{2}r\right)^2}{r^2} = 9E_0$$

$$E = E_0 + E_z = 10E_0 = 400\ \text{lx}$$

R6.146 λ_f = 390 nm = 3,9 · 10^{-7} m, $\lambda_č$ = 760 nm = 7,6 · 10^{-7} m; E = ?, m = ?
h = 6,625 · 10^{-34} J · s, c = 3 · 10^8 m · s^{-1}

$E = hf = h\dfrac{c}{\lambda}$, $E_{\mathrm{f}} = 5{,}1 \cdot 10^{-19}$ J, $E_{\mathrm{č}} = 2{,}6 \cdot 10^{-19}$ J

$m = \dfrac{E}{c^2} = \dfrac{h}{c\lambda}$, $m_{\mathrm{f}} = 5{,}7 \cdot 10^{-36}$ kg, $m_{\mathrm{č}} = 2{,}9 \cdot 10^{-36}$ kg

R6.147 a) $E_1 = 2 \cdot 10^{-17}$ J, b) $E_2 = 4 \cdot 10^{-19}$ J, c) $E_3 = 3 \cdot 10^{-23}$ J; $\lambda = ?$

a) $\lambda_1 = \dfrac{hc}{E_1} = 9{,}9 \cdot 10^{-9}$ m, rentgenové záření

b) $\lambda_2 = \dfrac{hc}{E_2} = 5 \cdot 10^{-7}$ m $= 500$ nm, světlo

c) $\lambda_3 = \dfrac{hc}{E_3} = 6{,}6 \cdot 10^{-2}$ m, rádiové záření

R6.148 Při ozáření se z kovové destičky uvolňují elektrony se záporným nábojem a destička se nabíjí kladným nábojem.

R6.149 $U = 4{,}1$ V; $\lambda = ?$

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

$E = eU = \dfrac{hc}{\lambda}$

$\lambda = \dfrac{hc}{eU} \approx 3 \cdot 10^{-7}$ m $= 300$ nm

R6.150 $m_{\mathrm{e}} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; $\lambda = ?$

$m_{\mathrm{e}} = \dfrac{h}{c\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{h}{cm_{\mathrm{e}}} = 2{,}4 \cdot 10^{-12}$ m

R6.151 $P = 2{,}1 \cdot 10^{-17}$ W, $\lambda = 500$ nm $= 5 \cdot 10^{-7}$ m, $t = 1$ s; $N = ?$

Na jeden foton připadá výkon:

$P_0 = \dfrac{E}{t} = \dfrac{hc}{\lambda}$

$N = \dfrac{P}{P_0} = \dfrac{P\lambda}{hc} \approx 53$

R6.152 $\lambda = 400$ nm $= 4 \cdot 10^{-7}$ m, $W = 4{,}47$ eV $\approx 7{,}2 \cdot 10^{-19}$ J; $E = ?$

$E = \dfrac{hc}{\lambda} \approx 5 \cdot 10^{-19}$ J

$E < W$, fotoelektrický jev nenastane.

R6.153 λ = 260 nm = 2,6 · 10^{-7} m; W = ?

$$W = \frac{hc}{\lambda} = 7{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

R6.154 λ = 320 nm = 3,2 · 10^{-7} m, W = 3,47 eV = 5,55 · 10^{-19} J; v = ?

$$h\frac{c}{\lambda} = W + \frac{1}{2}m_\mathrm{e}v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2(hc/\lambda - W)}{m_\mathrm{e}}} \approx 2{,}2 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

R6.155 W = 2,28 eV = 3,65 · 10^{-19} J, λ = 500 nm = 5 · 10^{-7} m; E = ?

Fotoelektrický jev lze vyvolat zářením o menší vlnové délce, než je mezní vlnová délka:

$$\lambda_\mathrm{m} = \frac{hc}{W} = 5{,}4 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 540\ \mathrm{nm}$$

$\lambda < \lambda_\mathrm{m}$, fotoelektrický jev nastane.

R6.156 $\Delta\varphi$ = 1,2 V, W = 1,93 eV = 3,1 · 10^{-19} J; λ = ?

Kinetická energie elektronu uvolněného při fotoelektrickém jevu je rovna práci elektrických sil vnějšího elektrického pole:

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{e}v^2 = e\Delta\varphi$$

$$h\frac{c}{\lambda} = W + e\Delta\varphi \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{hc}{W + e\Delta\varphi} \approx 4{,}0 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 400\ \mathrm{nm}$$

7 SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY

R7.1 a) i b): Vzhledem k principu stálé rychlosti světla je v obou případech rychlost signálu rovna rychlosti světla c.

R7.2 a) koule se středem v místě A, b) koule se středem v místě B.

R7.3 Obecně ne. Jsou současné jen za podmínky, že jsou v soustavě S soumístné (nebo alespoň mají v této soustavě stejnou souřadnici x).

R7.4 $v = 0{,}8c$, $\tau_0 = 2{,}4 \cdot 10^{-8}$ s; $\tau = ?$

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 4{,}0 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

R7.5 $v = 0{,}98c$, $\Delta t_0 = 0{,}5$ h; $\Delta t = ?$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2{,}5\,\mathrm{h}$$

R7.6 $v = 0{,}95c$, $\tau = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ s; $\tau_0 = ?$

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 7{,}8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}$$

R7.7 $v = 0{,}6c$, $l_0 = 8{,}0$ m; $l = ?$

a) $l = l_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = 6{,}4\,\mathrm{m}$,

b) $l = l_0 = 8{,}0$ m; ve směru kolmém k ose x kontrakce délky nenastává.

R7.8 $l_0 = 100$ m, $l = 50$ m; $v = ?$

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{l^2}{l_0^2},$$

odtud $v = c\sqrt{1-\dfrac{l^2}{l_0^2}} = 0{,}866c = 2{,}6 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

R7.9 $v = 0{,}8c$, $a = 4{,}5$ m; a) $V_0 = ?$, b) $V = ?$

a) $V_0 = a^3 = 91\ \mathrm{m}^3$

b) $V = a^2 \cdot a\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 55\ \mathrm{m}^3$

(Kontrakce délky nastává jen u té hrany krychle, která je rovnoběžná se směrem rychlosti krychle.)

R7.10 $v = c/2$, $u' = c/3$; $u = ?$

a) $u = \dfrac{v+u'}{1+\dfrac{vu'}{c^2}} = \dfrac{5}{7}c$

b) $u = \dfrac{v-u'}{1-\dfrac{vu'}{c^2}} = \dfrac{1}{5}c$

R7.11 $v = 0{,}50c$, $u' = 0{,}40c$; $u = ?$

a) $u = \dfrac{v+u'}{1+\dfrac{vu'}{c^2}} = 0{,}75c$

b) $u = \dfrac{v-u'}{1-\dfrac{vu'}{c^2}} = 0125c$

R7.12 $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $E_0 = ?$

$E_0 = m_0c^2 = 8{,}2 \cdot 10^{14}\ \mathrm{J}$

1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J

$E_0 = 5{,}1 \cdot 10^5$ eV = 0,51 MeV

R7.13 $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $v = 0{,}999\,999\,92c$; $m = ?$

$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 2\,500 m_0 = 2{,}3 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$

R7.14 $a_0 = 0{,}12$ m, $m_0 = 10{,}6$ kg, $v = 0{,}4c$; a) $\rho_0 = ?$, b) $\rho = ?$

a) Hustota tělesa v jeho klidové soustavě je

$\rho_0 = \dfrac{m_0}{V_0}$, kde $V_0 = a_0^3$, tedy $\rho_0 = \dfrac{m_0}{a_0^3} = 6\,100\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

b) Uvažujme nyní, jakou hustotu tělesa zjistí pozorovatel, vzhledem k němuž se těleso pohybuje rychlostí v. Pro jednoduchost předpokládejme, že se krychle pohybuje ve směru rovnoběžném s jednou její hranou. Délka hran kolmých ke směru rychlosti se nezmění, délky hran rovnoběžných se směrem pohybu se zkrátí na hodnotu

$$a = a_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Objem krychle je tedy $V = a_0^3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Relativistická hmotnost krychle je $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Hustota krychle je $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m_0}{a_0^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \dfrac{\rho_0}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 7\,300\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

R7.15 m_0, $v = 0{,}6c$; $m = ?$, $p = ?$, $E = ?$, $E_k = ?$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1{,}25m_0$$

$$p = mv = \frac{m_0 0{,}6c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0{,}75m_0c$$

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1{,}25m_0c^2$$

$$E_k = E - E_0 = 0{,}25m_0c^2$$

R7.16 $E_k = E_0$; $v = ?$

$$E - E_0 = E_0,\quad E = 2E_0;\quad \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c_2}}} = 2m_0c^2.$$

Odtud po úpravách dostaneme $\dfrac{v}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $v = 0{,}866c$.

R7.17 $E = nE_0$, $n = 5$; $v = ?$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = n m_0 c^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = n^2,$$

odtud $\frac{v^2}{c^2} = \frac{n^2-1}{n^2}$ a tedy $v = \frac{c}{n}\sqrt{n^2-1}$.

Pro $n = 5$ je rychlost $v = 0{,}98c$.

R7.18 $E_k = E_0/5\,000$; $v = ?$

$$E_k = E - E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - E_0 = \frac{E_0}{5\,000}$$

$$5\,000E_0 - 5\,000E_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = E_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$5\,000 = (5\,000+1)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{5\,000}{5\,001}$$

Po úpravách dostaneme

$v = c\sqrt{1-\frac{5\,000^2}{5\,001^2}}$ a odtud $v = 0{,}02c$.

R7.19 $E = 5m_0c^2/3$; $p = ?$

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{E}$$

$$p = \frac{m_0 v}{m_0 c^2} E$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2} = \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{E^2} \Rightarrow v = \frac{c}{E}\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}$$

$$p = \frac{m_0 v}{m_0 c^2} E = \frac{m_0 c\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}}{m_0 c^2} = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}$$

Dosadíme - li $E = \frac{5}{3} m_0 c^2$, je $p = m_0 c\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} m_0 c$.

R7.20 $E_k = 0{,}25 m_0 c^2$; $p = ?$

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{E_k + m_0 c^2}$$

Odtud:

$$v = c\,\frac{\sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2}}{E_k + m_0 c^2}$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{c}\sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2}$$

Po dosazení $E_k = 0{,}25 m_0 c^2$ je hybnost částice $p = 0{,}75 m_0 c$.

8 FYZIKA ATOMU

8.1 Elektronový obal atomu

R8.1 $Q_c = 2{,}08 \cdot 10^{-18}$ C; $n_e = ?$

Počet elektronů $n_e = Z$ a celkový náboj $Q_c = Ze$, kde $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

$$n_e = Z = \frac{Q_c}{e} = 13$$

Je to prvek hliník Al.

R8.2 $r = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ m; $F_e = ?$, $F_e/F_g = ?$

$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_e = 9{,}10 \cdot 10^{-31}$ kg

$$|Q_p| = |Q_e| = e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$$

$$F_e = k\frac{|Q_p||Q_e|}{r^2} = k\frac{e^2}{r^2} = 8{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{N}$$

$$F_g = \kappa\frac{m_p m_e}{r^2} = 3{,}6 \cdot 10^{-47}\ \text{N}$$

$$\frac{F_e}{F_g} \approx 2{,}3 \cdot 10^{39}$$

R8.3 $d_j' = 1$ mm $= 10^{-3}$ m, $d_j = 10^{-15}$ m, $d_a = 10^{-10}$ m; $d_a' = ?$

$$\frac{d_a'}{d_j'} = \frac{d_a}{d_j} \Rightarrow d_a' = \frac{d_a}{d_j}d_j' = 10^2\ \text{m}$$

R8.4 $r_1 = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ m, $|Q_p| = |Q_e| = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $E_k = ?$, $E_p = ?$, $E_c = ?$, $E_i = ?$

Podle Bohrovy teorie si atom vodíku můžeme představit jako soustavu, ve které se kolem protonu po přibližně kružnicové trajektorii pohybuje elektron. Na elektron působí elektrická síla, která je současně silou dostředivou, takže platí:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{m_e v^2}{r_1} \qquad (1)$$

Pro kinetickou energii platí vztah:

$$E_k = \frac{1}{2}m_e v^2 \qquad (2)$$

Z rovnice (1) vypočítáme součin $m_e v^2$ a po dosazení do vztahu (2) dostaneme:

$$E_k = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1}$$

Potenciální energie atomu vodíku odpovídá práci, kterou vykoná elektrická síla při přemístění elektronu z velké vzdálenosti ($r \rightarrow \infty$) do vzdálenosti r_1 od protonu:

$$E_p = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

Celková energie:

$$E_c = E_k + E_p = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1}$$

Po dosazení vychází pro celkovou energii atomu vodíku v základním stavu

$$E_c = -2{,}17 \cdot 10^{-18}\ \text{J} = -13{,}6\ \text{eV}.$$

Aby nastala ionizace atomu vodíku, je třeba mu dodat energii $E_i \geq |E_c| \geq 13{,}6$ eV.

R8.5 $E_1 = -13{,}6$ eV, $n = 2$; $\lambda_\alpha = ?$, $\lambda_\beta = ?$, $\lambda_\gamma = ?$

$$E_n - E_m = hf_{nm}$$

$$\lambda_{nm} = \frac{c}{f_{nm}}$$

$$E_n = \frac{1}{n^2} E_1$$

$$|E_3 - E_2| = 3{,}03 \cdot 10^{-19}\ \text{J},\ \lambda_\alpha = 657\ \text{nm}$$

$$|E_4 - E_2| = 4{,}08 \cdot 10^{-19}\ \text{J},\ \lambda_\beta = 488\ \text{nm}$$

$$|E_5 - E_2| = 4{,}58 \cdot 10^{-19}\ \text{J},\ \lambda_\gamma = 434\ \text{nm}$$

R8.6 $f = 4{,}57 \cdot 10^{14}$ Hz; $\Delta E = ?$

$\Delta E = hf = 3{,}03 \cdot 10^{-19}$ J

R8.7 $E = 15{,}5$ eV, $n = 1$; $v_e = ?$

$$E_1 = -13{,}6 \text{ eV}$$
$$\Delta E = 1{,}9 \text{ eV} = 3{,}04 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$
$$\Delta E = \frac{1}{2} m_e v_e^2$$
$$v_e = \sqrt{\frac{2\Delta E}{m_e}} \approx 8 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

R8.8 E = 1,892 eV; λ = ?

$$\lambda = \frac{hc}{E} \approx 660 \text{ nm}$$

Světlo má červenou barvu.

R8.9 λ = 91,2 nm = 9,12 · 10^{-8} m; E = ?

$$E = \frac{hc}{\lambda} = 2{,}2 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13{,}6 \text{ eV}$$

R8.10 E = 4,89 eV = 7,82 · 10^{-19} J; λ = ?

$$\lambda = \frac{hc}{E} = 2{,}54 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 254 \text{ nm}$$

R8.11 λ = 318 nm = 3,18 · 10^{-7} m; E = ?

$$E = \frac{hc}{\lambda} = 6{,}25 \cdot 10^{-19} \text{ J} \approx 3{,}9 \text{ eV}$$

R8.12 E = 3,278 · 10^{-19} J; λ = ?, k = ?

$$\lambda = \frac{hc}{E} = 6{,}06 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 606 \text{ nm; barva světla je oranžová.}$$
$$k = \frac{1}{\lambda} = 1{,}650 \cdot 10^6$$

R8.13 $E_1 = 4E$, $\Delta E_2 = E$; f_1 = ?, f_2 = ?

$$5E - E = hf$$
$$E = \frac{hf}{4}$$
$$4E - E = hf_1$$
$$f_1 = \frac{3E}{h} = \frac{3\frac{hf}{4}}{h} = \frac{3}{4}f$$
$$\Delta E = hf_2$$
$$f_2 = \frac{E}{h} = \frac{hf}{4h} = \frac{1}{4}f$$

R8.14 Přechodům $E_4 \rightarrow E_1$ a $E_3 \rightarrow E_1$ odpovídá větší energie fotonu, a tedy i větší frekvence záření. Přechodům $E_5 \rightarrow E_2$, $E_5 \rightarrow E_3$ a $E_5 \rightarrow E_4$ odpovídá menší energie fotonu, a tedy menší frekvence záření. To zobrazuje spektrum D.

R8.15 U atomu s hlavním kvantovým číslem $n = 2$ může vedlejší kvantové číslo nabývat hodnot $l = 0, 1$. Pro $l = 0$ může mít magnetické kvantové číslo jen hodnotu $m = 0$ a pro $l = 1$ je $m = –1, 0, 1$. Existují tedy čtyři různé kombinace l a m a pro každou existují dva elektrony s různým magnetickým spinovým číslem. Celkem je tedy 8 možností u prvku, který má ve sféře s hlavním kvantových číslem $n = 1$ dva elektrony, celkem tedy 10 elektronů, což odpovídá neonu.

R8.16 $n = 3$; $l = ?$, $m = ?$

$n = 3$	$l = 0, 1, 2$	$m = –2, –1, 0, 1, 2$	$l = 2$
		$m = –1, 0, 1$	$l = 1$
		$m = 0$	$l = 0$

Pro elektronovou slupku $n = 3$ existuje 9 kombinací kvantových čísel n, l, m a každé kombinaci odpovídají dva elektrony s různým magnetickým spinovým číslem. V elektronové slupce $n = 3$ může být 18 elektronů.

R8.17 $n = 4$, $p = 32$; $p = f(n) = ?$

$n = 1$	2	$2 \cdot 1^2$
$n = 2$	8	$2 \cdot 2^2$
$n = 3$	18	$2 \cdot 3^2$
$n = 4$	32	$2 \cdot 4^2$

Vztah pro p je: $p = 2n^2$

8.2 Jádro atomu

R8.18 $Q_{He} = 2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C, $Q_{Au} = 79e = 126{,}4 \cdot 10^{-19}$ C, $E = 0{,}4 \cdot 10^{6}$ eV = $6{,}4 \cdot 10^{-14}$ J; r = ?

Ostřelování zlata částicemi α si můžeme představit jako soustavu nepohyblivého jádra atomu zlata s elektrickým nábojem Q_{Au}, ke kterému se z velké vzdálenosti přibližuje částice α s nábojem Q_{He}. Při tom se vykoná práce

$$W = Q_{He}(\varphi_1 - \varphi_2),$$

kde φ_1 je potenciál ve velké vzdálenosti od atomu zlata ($\varphi_1 = 0$) a φ_2 je potenciál v nejmenší vzdálenosti od jádra. Elektrické pole jádra atomu zlata můžeme považovat za pole bodového náboje, v němž pro potenciál ve vzdálenosti r od jádra platí

$$\varphi_2 = -\frac{Q_{Au}}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Znaménko – vyjadřuje, že práci konají vnější síly na úkor kinetické energie E částice α, takže $W = Q_{He}\varphi_2 = -E$. Po dosazení a úpravě dostaneme pro nejmenší vzdálenost, do níž se částice α přiblíží k jádru atomu zlata:

$$r = \frac{Q_{He}Q_{Au}}{4\pi\varepsilon_0 E} = 5{,}7 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

R8.19 Skutečnému průběhu Rutherfordova experimentu odpovídá experiment 2.

R8.20 Zakřivení trajektorie s kladným nábojem určíme Flemingovým pravidlem levé ruky, částice se záporným nábojem se odchýlí na opačnou stranu. Vlevo se vychýlila částice s kladným nábojem a vpravo částice se záporným nábojem.

R8.21 Částice při průchodu vrstvou olova ztrácí část energie a ve druhé části komory se pohybuje menší rychlostí. Tomu odpovídá větší zakřivení trajektorie částice. Částice se pohybovala zdola nahoru.

R8.22 Směr vektoru magnetické indukce určíme pomocí Flemingova pravidla levé ruky, které použijeme u trajektorie pozitronu. Vektor B magnetické indukce míří před nákresnu.

Poloměr r trajektorie částice, která má hmotnost m a náboj Q, závisí na rychlosti v částice:

$$r = \frac{mv}{QB}$$

Poněvadž při pohybu v mlžné komoře částice postupně ztrácí svoji kinetickou energii, rychlost částice se zmenšuje a tomu odpovídá postupné zmenšování poloměru trajektorie, která má tvar spirály.

R8.23 Z = ?, N = ?

Počet protonů v jádře atomu určuje protonové číslo Z, počet neutronů určuje neutronové číslo N, které určíme z nukleonového čísla $A = Z + N$.

a) ${}^{4}_{2}He$	$Z = 2$, $N = 2$
b) ${}^{7}_{3}Li$	$Z = 3$, $N = 4$
c) ${}^{23}_{11}Na$	$Z = 11$, $N = 12$
d) ${}^{54}_{26}Fe$	$Z = 26$, $N = 28$
e) ${}^{235}_{92}U$	$Z = 92$, $N = 143$

R8.24

a) 7p + 7n: $Z = 7$, $A = 14$	${}^{14}_{7}N$
b) 9p + 10n: $Z = 9$, $A = 19$	${}^{19}_{9}F$
c) 79p + 118n: $Z = 79$, $A = 197$	${}^{197}_{79}Au$
d) 82p + 126n: $Z = 82$, $A = 208$	${}^{208}_{82}Pb$
e) 92p + 146n: $Z = 92$, $A = 238$	${}^{238}_{92}U$

R8.25 Všechny nuklidy určitého prvku mají stejné protonové číslo a různé nukleonové číslo. Jsou to izotopy.

R8.26 ${}^{35}_{17}Cl$, ${}^{37}_{17}Cl$, $m_a = 35{,}5$; $x : y$ = ?

$$\begin{aligned} x\cdot 35 + y\cdot 37 &= 35{,}5 \\ x + y &= 1 \\ \hline 2y &= 0{,}5 \\ y &= 0{,}25 \\ x &= 0{,}75 \end{aligned}$$

$$x : y = 3 : 1$$

Izotopy jsou v plynu zastoupeny v poměru 3 : 1.

R8.27

a) částice α

${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\alpha$

b) částice β^{-}

${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{-1}\beta$

R8.28

a) proton

${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A-1}_{Z-1}\mathrm{Y} + {}^{1}_{1}\mathrm{p}$

b) neutron

${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A-1}_{Z}\mathrm{X} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$

c) pozitron

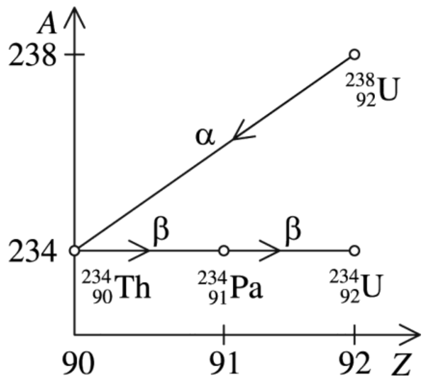
${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{1}\mathrm{e}$

	Z	N	A
a	-1	nezmění se	-1
b	nezmění se	-1	-1
c	-1	nezmění se	nezmění se

Obr. R8-28

R8.29 Viz obr. R8-29 [V8-1].

${}^{238}_{92}\mathrm{U} \to {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\alpha$
${}^{234}_{90}\mathrm{Th} \to {}^{234}_{91}\mathrm{Pa} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$
${}^{234}_{91}\mathrm{Pa} \to {}^{234}_{92}\mathrm{U} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$



Obr. R8-29

R8.30 m_{Po} = 0,10 mg = 10^{-7} kg, $n = 3 \cdot 10^7$ (částice α), $\Delta m = 0{,}02 m_{Po}$; m_{He} = ?

$$m_{He} = \frac{\Delta m}{n} = \frac{0{,}02 m_{Po}}{n} \approx 6{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

R8.31 $m = 0{,}0416 m_0$, T = 5 570 r; t = ?

Jestliže v počátečním okamžiku je počet jader radionuklidu N_0, pak v čase t je počet nepřeměněných jader

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \qquad (1)$$

kde λ je přeměnová konstanta, která s poločasem přeměny T souvisí vztahem $\lambda = \ln 2/T$. Zjištěnému poklesu hmotnosti radionuklidu $^{14}_{6}C$ ve dřevě odpovídá také poměr N/N_0. Najdeme přirozený logaritmus tohoto poměru a po úpravě ze vztahu (1) dostaneme:

$$t = -\frac{\left(\ln \frac{N}{N_0}\right) T}{\ln 2}$$

Po dosazení dostaneme pro stáří dřeva přibližnou hodnotu 25 600 roků.

R8.32 T = 20 min = 1 200 s, t_1 = 1 h = $3T$, t_2 = 2 h = $6T$; N_1 = ?, N_2 = ?

$$N = N_0 e^{-\lambda T}, \lambda = \ln 2/T$$

$$N_1 = N_0 e^{-\ln 2 \cdot 3} = N_0 (0{,}5)^3 = 0{,}125 N_0 = \frac{N_0}{8}$$

N_1 je počet nepřeměněných jader, přeměnilo se 7/8 počátečního počtu jader.

$$N_2 = N_0 (0{,}5)^6 = 0{,}015\,6 N_0 = \frac{N_0}{64}$$

Přeměnilo se 63/64 počátečního počtu jader.

R8.33 a) $^{4}_{2}\mathrm{He}$, $m_{He} = 6{,}646 \cdot 10^{-27}$ kg, b) $^{7}_{3}\mathrm{Li}$, $m_{Li} = 11{,}525 \cdot 10^{-27}$ kg, c) $^{9}_{4}\mathrm{Be}$, $m_{Be} = 14{,}962 \cdot 10^{-27}$ kg; B = ?

$$B = Z m_p + N m_n - m_j$$

a) $B_{He} = 2 m_p + 2 m_n - m_{He} = 0{,}050 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 0{,}030\,1 m_u$

b) $B_{Li} = 3 m_p + 4 m_n - m_{Li} = 0{,}194 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 0{,}116\,8 m_u$

c) $B_{Be} = 4 m_p + 5 m_n - m_{Be} = 0{,}105 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 0{,}063\,3 m_u$

R8.34 $B_{He} = 0{,}050 \cdot 10^{-27}$ kg, $B_{Li} = 0{,}194 \cdot 10^{-27}$ kg, $B_{Be} = 0{,}105 \cdot 10^{-27}$ kg; $\varepsilon_j = ?$

$$\varepsilon_j = \frac{Bc^2}{A}$$

$$\varepsilon_{jHe} = \frac{B_{He}c^2}{4} = 1{,}13 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 7{,}03\ \mathrm{MeV}$$

$$\varepsilon_{jLi} = \frac{B_{Li}c^2}{7} = 2{,}49 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 15{,}58\ \mathrm{MeV}$$

$$\varepsilon_{jBe} = \frac{B_{Be}c^2}{9} = 1{,}05 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 6{,}57\ \mathrm{MeV}$$

R8.35

$${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{p}$$
$${}^{18-4}_{9-7}\mathrm{X} = {}^{4}_{2}\alpha;\ \text{částice}\ \alpha$$
$${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{A}_{Z}\mathrm{Y} \rightarrow {}^{15}_{8}\mathrm{O}$$
$${}^{15-14}_{8-7}\mathrm{Y} = {}^{1}_{1}\mathrm{p};\ \text{proton}$$
$${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{A}_{Z}\mathrm{Z} \rightarrow {}^{11}_{5}\mathrm{B} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$
$${}^{15-14}_{7-7}\mathrm{Z} = {}^{1}_{0}\mathrm{n};\ \text{neutron}$$

R8.36 Neutrony nemají elektrický náboj, proto na ně nepůsobí kladně nabité jádro atomu elektrickou odpudivou silou.

R8.37

$${}^{6}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} \rightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$
$${}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{24}_{11}\mathrm{Na} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$
$${}^{27}_{13}\mathrm{Al} + \gamma \rightarrow {}^{26}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{1}_{1}\mathrm{p}$$
$${}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} \rightarrow {}^{13}_{6}\mathrm{C} + {}^{0}_{1}\mathrm{e}$$
$${}^{25}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} \rightarrow {}^{22}_{11}\mathrm{Na} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$
$${}^{55}_{25}\mathrm{Mn} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} \rightarrow {}^{55}_{26}\mathrm{Fe} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

R8.38 $\alpha = {}^{4}_{2}\mathrm{He}$

$${}^{11}_{5}\mathrm{B} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

R8.39

$${}^{11}_{5}\mathrm{B} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} \rightarrow 3 \cdot {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

Při rozpadu jádra boru vznikají částice záření α.

R8.40 m_{Li} = 11,525 · 10^{-27} kg, m_p = 1,673 · 10^{-27} kg, m_{He} = 6,646 · 10^{-27} kg; E_k = ?

$${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} \rightarrow 2 \cdot {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

$$B = m_{Li} + m_p - 2m_{He} = -9{,}4 \cdot 10^{-29}\ \mathrm{kg}$$

$$E_k = Bc^2 = 8{,}5 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 53\ \mathrm{MeV}$$

R8.41

$${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{p}$$

$${}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$$

R8.42 Pro celkovou přeměnu uranu na olovo můžeme napsat rovnici:

$${}^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{206}_{82}\mathrm{Pb} + x\,{}^{4}_{2}\mathrm{He} + y\,{}^{0}_{-1}\mathrm{e}$$

Pro atomová a nukleonová čísla současně platí:

$92 = 82 + x \cdot 2 - y$

a

$238 = 206 + x \cdot 4$

Řešením těchto rovnic dostaneme $x = 8$ a $y = 6$. To znamená, že uran se mění v olovo postupně probíhajícími osmi přeměnami α a 6 přeměnami β.

R8.43 $B = 1m_u$ = 1,661 · 10^{-27} kg; E = ?

$E = m_u c^2$ = 1,49 · 10^{-10} J = 934 MeV

R8.44 m_{He} = 4,002 603m_u; ε_j = ?

Jádro helia je tvořeno dvěma protony a dvěma neutrony. Pro hmotnost těchto částic vyjádřenou v násobcích atomové hmotnostní konstanty m_u najdeme v tabulkách:

m_p = 1,007 27m_u, m_n = 1,008 66m_u

Hmotnostní úbytek jádra helia činí:

$$B = (2m_p + 2m_n) - m_{He} = 0{,}029\,26 m_u$$

Tomu odpovídá celková vazebná energie jádra helia $E_j = Bc^2$ a energie připadající na jeden nukleon ε_j je $\varepsilon_j = E_j/A$, kde A je nukleonové číslo (pro helium A = 4). Vazebná energie se zpravidla určuje v jednotkách eV. Pro výpočet proto využijeme poznatek, že hmotnostnímu úbytku 1m_u odpovídá energie $m_u c^2 \approx$ 931 MeV.

Vazebnou energii připadající na jeden nukleon v jádře helia tedy vypočítáme pomocí vztahu:

$$\varepsilon_{\mathrm{j}} = \frac{Bc^2}{A} = 6{,}8\ \mathrm{MeV}$$

R8.45 ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$ (Z = 4, A = 9), ε_{j} = 6,45 MeV, A_{r} = 9,012 2; m_{jBe} = ?

$$\varepsilon_{\mathrm{j}} = \frac{Bc^2}{A} = \frac{(4m_{\mathrm{p}} + 5m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{jBe}})c^2}{A}$$

$$m_{\mathrm{jBe}} = 4m_{\mathrm{p}} + 5m_{\mathrm{n}} - \frac{\varepsilon_{\mathrm{j}} A}{c^2} = 1{,}496 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg} = 9{,}010\,1 m_{\mathrm{u}}$$

$$A_{\mathrm{r}} - m_{\mathrm{j}} = 0{,}002\,1 m_{\mathrm{u}}$$

Rozdíl je způsoben hmotností elektronů.

R8.46 ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$, Y, Z

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + \beta^-$$

$${}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} \rightarrow {}^{A}_{Z+2}\mathrm{Z} + \beta^-$$

$${}^{A}_{Z+2}\mathrm{Z} \rightarrow {}^{A-4}_{Z}\mathrm{X} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

a) $${}^{234}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{234}_{91}\mathrm{Pa} + \beta^-$$

$${}^{234}_{91}\mathrm{Pa} \rightarrow {}^{234}_{92}\mathrm{U} + \beta^-$$

$${}^{234}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{230}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

b) $${}^{212}_{82}\mathrm{Pb} \rightarrow {}^{212}_{83}\mathrm{Bi} + \beta^-$$

$${}^{212}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{212}_{84}\mathrm{Po} + \beta^-$$

$${}^{212}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{208}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

R8.47 T_{X} = 50 min, T_{Y} = 100 min, t = 200 min = $4T_{\mathrm{X}} = 2T_{\mathrm{Y}}$; $N_{\mathrm{X}} : N_{\mathrm{Y}}$ = ?

$$N_{\mathrm{X}} = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{X}} t} = N_0 \mathrm{e}^{-\ln 2\, t/T_{\mathrm{X}}}$$

$$N_{\mathrm{Y}} = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Y}} t} = N_0 \mathrm{e}^{-\ln 2\, t/T_{\mathrm{Y}}}$$

Pro podíl $N_{\mathrm{X}}/N_{\mathrm{Y}}$ po úpravě platí:

$$\frac{N_{\mathrm{X}}}{N_{\mathrm{Y}}} = \frac{(0{,}5)^{\frac{t}{T_{\mathrm{X}}}}}{(0{,}5)^{\frac{t}{T_{\mathrm{Y}}}}} = (0{,}5)^2 = \frac{1}{4}$$

R8.48 Ra $\rightarrow$ Rn + α, m_{Ra} = 225,98, m_{Rn} = 221,97, m_{He} = 4,002 6; E = ?

$$E = [m_{\mathrm{Ra}} - (m_{\mathrm{Rn}} + m_{\mathrm{He}})]c^2 = 1{,}104\,4 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 6{,}89\ \mathrm{MeV}$$

R8.49 m = 0,01 kg, m_K = 0,03m, m_{K^*} = 1,2 · 10^{-4} m_K, T = 1,3 · 10^9 r; A = ?

Aktivita je určena vztahem $A = \lambda N$, kde λ je přeměnová konstanta, pro kterou platí $\lambda = \ln 2/T$.

Počet jader radionuklidu ve vzorku je dán podílem

$$N = \frac{m_{K^*}}{A_r m_u} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}03 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{kg}}{40 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 5{,}42 \cdot 10^{17}.$$

Poněvadž rok má 365,25 · 24 · 3 600 s = 3,16 · 10^7 s, je přeměnová konstanta draslíku $^{40}_{19}\text{K}$:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{1{,}3 \cdot 10^9 \cdot 3{,}16 \cdot 10^7\ \text{s}} = 1{,}69 \cdot 10^{-17}\ \text{s}^{-1}$$

Dosazením do vztahu pro aktivitu dostaneme

$A = 1{,}69 \cdot 10^{-17} \cdot 5{,}42 \cdot 10^{17}$ Bq = 9,2 Bq.

R8.50 $A = 1/4\ A_0$, t = 8 d; T = ?, λ = ?

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\ln 2 \frac{t}{T}}$$

$$A(t) = A_0 (0{,}5)^{\frac{t}{T}} = \frac{1}{4} A_0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{t}{T} = 2 \ \Rightarrow \ T = \frac{t}{2} = 4\ \text{d} = 3{,}5 \cdot 10^5\ \text{s}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \approx 2 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1}$$

R8.51 $^{212}_{83}\text{Bi} \to ? + \alpha$, m = 0,05 g = 5 · 10^{-5} kg, t = 7 s, n = 1,89 · 10^{17}; a) A = ?, b) λ = ?, T = ?

a) $A = \frac{n}{t} = 2{,}7 \cdot 10^{16}$ Bq

b) $N_0 = \frac{m}{A_r m_u} = 1{,}440\,8 \cdot 10^{20}$

$N(t) = N_0 - n = 1{,}438\,9 \cdot 10^{20}$

$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow e^{-\lambda t} = \frac{N(t)}{N_0}$

$\lambda = -\frac{\ln \frac{N(t)}{N_0}}{t} = 1{,}9 \cdot 10^{-4}$ s

$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = 3\,648{,}1\ \mathrm{s} = 60{,}8\ \mathrm{min}$

R8.52 $\varepsilon_{jU} = 7{,}5$ MeV, $\varepsilon_{jXe} = 8{,}2$ MeV, $\varepsilon_{jSr} = 8{,}5$ MeV, $E_n = 0{,}03E$; $E = ?$, $v_n = ?$

a) Rovnici štěpné jaderné reakce napíšeme ve tvaru:

$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{94}_{Z}\mathrm{Sr} + x\,{}^{1}_{0}\mathrm{n}$

Ze zákonů zachování náboje a počtu nukleonů vyplývá:

$235 + 1 = 140 + 94 + x$

$92 + 0 = 54 + Z + 0$

a odtud najdeme $x = 2$ a $Z = 38$. Úplná rovnice štěpné reakce tedy bude mít tvar:

$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{94}_{38}\mathrm{Sr} + 2\,{}^{1}_{0}\mathrm{n}$

b) Celkovou uvolněnou energii určíme z rozdílu vazebných energii jader, která se štěpné reakce zúčastní. Poněvadž uran má 235 nukleonů, je vazebná energie E_1 jeho jádra

$E_1 = 235 \cdot 7{,}5\ \mathrm{MeV} = 1{,}76 \cdot 10^3\ \mathrm{MeV}$.

Podobně určíme vazebnou energii jader xenonu a stroncia a vypočítáme jejich součet E_2:

$E_2 = (140 \cdot 8{,}2 + 94 \cdot 8{,}5)\ \mathrm{MeV} = 1{,}95 \cdot 10^3\ \mathrm{MeV}$

Rozdíl obou energií odpovídá energii E uvolněné při štěpné reakci:

$E = E_2 - E_1 = (1{,}95 - 1{,}76) \cdot 10^3\ \mathrm{MeV} = 185\ \mathrm{MeV}$

c) Poněvadž při štěpné reakci vznikly dva neutrony, připadá na každý neutron energie $E_n = 0{,}03E/2 = 2{,}77$ eV $= 4{,}43 \cdot 10^{-19}$ J. Rychlost neutronu pak vypočítáme ze vztahu

$$v_n = \sqrt{2E_n / m_n},$$

kde m_n je hmotnost neutronu ($m_n = 1{,}674\,95 \cdot 10^{-27}$ kg). Po dosazení pro rychlost neutronu vychází
$v_n = 2{,}3 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

R8.53 ${}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{139}_{53}\mathrm{I} + {}^{94}_{39}\mathrm{Y} + k\,{}^{1}_{0}\mathrm{n}$; $k = ?$

$235 + 1 = 139 + 94 + k$

$k = 3$

Při štěpení uranu vzniknou 3 neutrony.

R8.54 ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, $t = 1$ s, $P = 1$ W, $E = 200$ MeV; $n = ?$

$$n = \frac{P}{P_j} = \frac{P}{\frac{E}{t}} = \frac{Pt}{E} = 3 \cdot 10^{10}$$

P_j je výkon připadající na přeměnu 1 jádra uranu.

R8.55 ${}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$, $A_{rD} = 2{,}014$, $A_{rHe} = 3{,}016$, $A_{rn} = 1{,}008\,7$, $m_D = 4$ g; $E = ?$, $E_c = ?$

$$E = \left[2A_{rD} - \left(A_{rHe} + A_{rn}\right)\right] m_u c^2 = 4{,}925 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = 3{,}1\ \mathrm{MeV}$$

Ve vzorku o hmotnosti 4 g je n jader:

$$n = \frac{m}{A_{rD} m_u} = 1{,}19 \cdot 10^{24}$$

E (MeV) .... 2 jádra D

E_c (MeV) .... n jader D

$$E_c = \frac{n}{2} E = 1{,}85 \cdot 10^{24}\ \mathrm{MeV} \approx 3 \cdot 10^{11}\ \mathrm{J}$$

9 ASTROFYZIKA

R9.1 r = 4 pc; a) r = ?, b) t = ?, c) π = ?

a) 1 pc = 3,09 · 10^{16} m = 3,09 · 10^{13} km

4 pc ≈ 1,2 · 10^{14} km

b) 1 pc = 3,26 l. y., 4 pc ≈ 13 l. y.

Světlo dospěje na Zemi asi za 13 let.

c) $\{\pi\} = \dfrac{1}{\{r\}} = 0{,}25,\ \pi = 0{,}25''$.

R9.2 S = 1 m^2, r = 1 AU, Φ_e = 1 400 W; a) r_1 = 0,5 AU, S = 1 m^2; Φ_{e1} = ?, b) r = 1 AU, S_2 = 0,5 m^2; Φ_{e2} = ?

a) $\Phi_e = \dfrac{L_\odot}{4\pi r^2}S,\ \Phi_{e1} = \dfrac{L_\odot}{4\pi r_1^2}S$

$r_1 = \dfrac{r}{2} \Rightarrow \Phi_{e1} = 4\Phi_e = 5\,600\ \text{W}$

b) $\Phi_{e2} = \dfrac{L_\odot}{4\pi r^2}S_1 = \dfrac{L_\odot}{4\pi r^2}\cdot\dfrac{S}{2} = \dfrac{1}{2}\Phi_e = 700\ \text{W}$

R9.3 r_1 = 1,47 · 10^{11} m, r_2 = 1,52 · 10^{11} m, S = 1,00 m^2, Φ_{e1} = 1,41 · 10^3 W; Φ_{e2} = ?

$\Phi_{e1} = \dfrac{L_\odot}{4\pi r_1^2}S$

$\Phi_{e2} = \dfrac{L_\odot}{4\pi r_2^2}S$

$\Phi_{e2} = \Phi_{e1}\dfrac{r_2^2}{r_1^2} = 1{,}32\cdot 10^3\ \text{W}$

R9.4 r = 384 000 km, R_Z = 6 378 km; α = ?

$\alpha = \dfrac{2R_Z}{r} = 3{,}32\cdot 10^{-2}\ \text{rad} = 1{,}9° = 1°54'$

R9.5 α = 32′; a) α_1 = ?, b) α_2 = ?, c) α_3 = ?, d) α_4 = ?

$r_Z = 1\ \text{AU}, \alpha = \dfrac{2R_\odot}{r_Z}$

a) $r_1 = 0{,}378\ \text{AU}, \alpha_1 = \dfrac{2R_\odot}{r_1},\ \alpha_1 = \alpha\dfrac{r_Z}{r_1} = 83' = 1°23'$

Analogicky:

b) $r_2 = 0{,}723\ \mathrm{AU}, \alpha_2 = \alpha \dfrac{r_Z}{r_2} = 44'$

c) $r_3 = 1{,}52\ \mathrm{AU}, \alpha_3 = \alpha \dfrac{r_Z}{r_3} = 21'$

d) $r_4 = 30{,}3\ \mathrm{AU}, \alpha_4 = \alpha \dfrac{r_Z}{r_4} = 1'3''$

R9.6 r = 147 l. y.; π = ?

$$1\ \mathrm{l.\ y.} = \frac{1}{3{,}26}\ \mathrm{pc}$$

$$\{\pi\} = \frac{1}{\{r\}} = \frac{3{,}26}{147} = 0{,}022,\ \pi = 0{,}022''$$

R9.7 a = 9,5 AU, r = 25 pc; α = ?

$$\alpha = \frac{a}{r} = 0{,}38''$$

R9.8 $R_M = 0{,}272 R_Z$, $R_\odot = 109 R_Z$; r/r_M = ?

$$\frac{r}{r_M} = \frac{109}{0{,}272} \approx 400$$

R9.9 r_1 = 0,850 AU, T_1 = 0,285 roku; $M_1 + m_1$ = ?

Podle obecného tvaru třetího Keplerova zákona platí pro dvě dvojice těles obíhajících kolem společného hmotného středu vztah

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{(M_1 + m_1)T_1^2}{(M_2 + m_2)T_2^2}.$$

Jako srovnávací dvojici těles použijeme Slunce a Zemi, je tedy r_2 = 1 AU, T_2 = 1 rok, $M_2 + m_2 = M_\odot$ (hmotnost Země je vzhledem k hmotnosti Slunce zanedbatelně malá). Součet hmotností složek dvojhvězdy je

$$M_1 + m_1 = M_\odot \frac{r_1^3 T_2^2}{r_2^3 T_1^2} = 7{,}56 M_\odot.$$

R9.10 r_1 = 11,5 AU, T_1 = 15,3 roku; $M_1 + m_1$ = ?

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{(M_1 + m_1)T_1^2}{(M_2 + m_2)T_2^2}$$

Jako srovnávací dvojici těles použijeme Slunce a Zemi, je tedy $r_2 = 1$ AU, $T_2 = 1$ rok, $M_2 + m_2 = M_\odot$ (hmotnost Země je vzhledem k hmotnosti Slunce zanedbatelně malá). Součet hmotností složek dvojhvězdy je

$$M_1 + m_1 = M_\odot \frac{r_1^3 T_2^2}{r_2^3 T_1^2} = 6{,}5 M_\odot.$$

R9.11 $L_\odot = 3{,}83 \cdot 10^{26}$ W, $r = 1{,}52$ AU $= 2{,}27 \cdot 10^{11}$ m, $S = 1{,}00$ m^2, $R = 3{,}40 \cdot 10^6$ m; $\Phi_1 = ?$, $\Phi_2 = ?$

Pro zářivý tok Φ_1 dopadající ze Slunce kolmo na plochu o obsahu S ve vzdálenosti r od Slunce platí vztah

$$\Phi_1 = \frac{L_\odot}{4\pi r^2} S = 590 \text{ W}.$$

Planeta Mars zachycuje zářivý tok celým svým průřezem, tj. plochou o obsahu πR^2, kde R je poloměr Marsu. Je tedy

$$\Phi_2 = \frac{L_\odot}{4\pi r^2} \pi R^2 = \frac{L_\odot}{4 r^2} R^2 = 2{,}14 \cdot 10^{16} \text{ W}.$$

R9.12 $R = 64 R_\odot$, $T_{ef} = 3\,300$ K, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W $\cdot$ m^{-2} $\cdot$ K^{-4}, $R_\odot = 7{,}0 \cdot 10^8$ m; $L = ?$, $L/L_\odot = ?$

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4 = 1{,}7 \cdot 10^{29} \text{ W}$$

$$\frac{L}{L_\odot} = \frac{R^2 T_{ef}^4}{R_\odot^2 T_\odot^4} = 440$$

R9.13 $r = 20$ pc $= 6{,}18 \cdot 10^{17}$ m, $S = 1{,}0$ m^2, $\Phi_e = 5{,}14 \cdot 10^{-8}$ W, $T_{ef} = 2\,900$ K; $L = ?$, $R = ?$

$$L = \frac{\Phi_e 4\pi r^2}{S} = 2{,}6 \cdot 10^{29} \text{ W} = 680 L_\odot$$

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T_{ef}^4}} = 7{,}2 \cdot 10^{11} \text{ m} = 103 R_\odot$$

R9.14 $\lambda = 422{,}7$ nm, $\Delta\lambda = 0{,}070$ nm; $v = ?$

Hvězda se k nám přibližuje rychlostí o velikosti

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c = 50 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

R9.15 $\lambda = 589{,}6$ nm, $v = 160$ km $\cdot$ s^{-1}; $\lambda' = ?$

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = \lambda + \frac{v}{c}\lambda = \lambda\left(1 + \frac{v}{c}\right) = 589{,}9\ \text{nm}$$

R9.16 $L_{\odot} = 3{,}83 \cdot 10^{26}$ W, $\Delta t = 1$ den $= 86\,400$ s; $\Delta m = ?$

$$\Delta E = L_{\odot}\Delta t = c^2 \Delta m$$

Odtud úbytek hmotnosti

$$\Delta m = \frac{L_{\odot}\Delta t}{c^2} = 3{,}68 \cdot 10^{14}\ \text{kg}.$$

R9.17 $L = 6{,}63 \cdot 10^{26}$ W, $\Delta t = 1$ s; $\Delta m = ?$

$$\Delta E = L\Delta t = c^2 \Delta m, \text{ tedy } \Delta m = \frac{L\Delta t}{c^2} = 7{,}4 \cdot 10^{9}\ \text{kg}.$$

R9.18 a) $T = T_{\odot}$, $R = R_{\odot}/2$; $L = ?$, b) $R = R_{\odot}$, $T = T_{\odot}/2$; $L = ?$

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4$$

a) $L = 4\pi \dfrac{R_{\odot}^2}{4} \sigma T_{\odot}^2 = \dfrac{1}{4} L_{\odot}$

b) $L = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma \dfrac{T_{\odot}^4}{16} = \dfrac{1}{16} L_{\odot}$

R9.19 a) hvězda *A*, b) hvězda *C*, c) hvězda *D*, d) $\log (L/L_{\odot}) = 3$, zářivý výkon je 1 000krát větší.

R9.20 $T = T_{\odot}$, $R = 100R_{\odot}$; $L/L_{\odot} = ?$

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 = 4\pi (100 R_{\odot})^2 \sigma T^4 = 10\,000 L_{\odot}$$

Na stavovém diagramu hvězd je na větvi nadobrů.

R9.21 $L = 0{,}1L_{\odot}$, $R = 0{,}5R_{\odot}$; $T = ?$

$$\frac{T^4}{T_{\odot}^4} = \frac{L}{L_{\odot}} \cdot \frac{R_{\odot}^2}{R^2}$$

$$T = T_{\odot}\sqrt[4]{\frac{L}{L_{\odot}}} \cdot \sqrt{\frac{R_{\odot}}{R}} = 4\,600\ \text{K}$$

Hvězda je na hlavní posloupnosti.

R9.22 $T = 6\,200$ K, $R = 110R_{\odot}$, $\Delta m = M_Z$; a) $L = ?$, b) $t = ?$

a) $L = L_{\odot}\left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4 = 1{,}6 \cdot 10^4\, L_{\odot} = 6{,}1 \cdot 10^{30}$ W,

b) $\Delta m = M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg,

$\Delta m = M_Z = \frac{Lt}{c^2} \Rightarrow t = \frac{M_Z c^2}{L} = 8{,}85 \cdot 10^{10}$ s, tj. asi 2 800 roků.

R9.23 $M = M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $R = 10$ km $= 1{,}0 \cdot 10^4$ m, $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $\rho = ?$, $R_1 = ?$

$$\rho = \frac{M_{\odot}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx 5 \cdot 10^{17}\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$$

$$R_1 = \sqrt[3]{\frac{3M_Z}{4\pi\rho}} \approx 140\ \mathrm{m}$$

R9.24 $T = 0{,}033$ s, $R = 10$ km $= 1{,}0 \cdot 10^4$ m; $v = ?$, $a_d = ?$

$$v = \omega r = \frac{2\pi R}{T} = 1{,}9 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$a_d = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R = 3{,}6 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$