Salma EL AAKKOUCHI

Date :

Devoir 3 : Gr 1 .

1/ Justifier pour $h = (h_1, h_2)$ que :

$$d^2 f_x . h^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0)$$

Soit f une fonction qui est deux fois différentiable sur U (C^2)

alors d'après le th. 3.8 ; on a f admet n dérivées partielles tq :

$$d f_x (h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (a) . h_i$$

Soit g une fonction définie sur U par :

$$g(x) = d f_x (h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i$$

D'où pour $h = (h_1, h_2)$:

$$d d f_x (h_1, h_2) = d g_x (h_2)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} h_{2j}$$

Date :

d'où : $ddf_x(h_1, h_2) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_{1i} \right) h_{2j}$

Donc : $d^2 f_x \cdot (h^2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_{1i} h_{2j}$

~~on se basant au premier question ; on a :~~

$$\cancel{d^3 f_{x_0}(h^3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)}$$

2°/ Calculons ddf au point $(0,0)$ avec
$f(x,y) = \exp(x + \sin(y))$

on a d'après la question 1 : soit $h = (h_1, h_2)$

$$d^2 f(0,0) = h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0)$$

Date :

(car $x \mapsto \exp$ et $x \mapsto x$ et $y \mapsto \sin(y)$ sont des fct usuelle qui sont de C^∞ sur leur dommaine de définition) $\Rightarrow$ différentiable)

avec :

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x}$$

$$\left(tq \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \exp(x + \sin(y)) \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$ 2 (limite usuelle)

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}$$

$$\left(tq \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(y)\, e^{x + \sin(y)} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$ 3

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\cos(y)\, e^{\sin(y)} - 1}{y}$$

Date :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\cos(y)\,(1+\sin(y)) - 1}{y} \qquad \left(\text{DL}_0 \text{ de } e^t = 1+t \text{ à l'ordre } 1\right)$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\cos(y) - 1}{y} + \cos(y) \cdot \frac{\sin(y)}{y}$$

$\left(\text{DL}_0 \text{ de } \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} \text{ à l'ordre } 2\right)$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\cancel{1} - \frac{y^2}{2} - \cancel{1}}{y} + \left(1 - \frac{y^2}{2}\right) \frac{\sin(y)}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \underbrace{-\frac{y}{2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\sin(y)}{y}}_{\to 1} - \underbrace{y \cdot \frac{\sin(y)}{2}}_{=0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) = 1 \quad (3)$$

de (1), (2), (3) et (*) ; on a :

$$d^2 f(0,0) = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2$$

$$d^2 f(0,0) = (h_1 + h_2)^2$$

Salma Girl
EL AHRKOUCHI