Analyse 3

AMAL Youssef

2018-2019

Programme du cours

1. Topologie dans $\mathbb{R}^n$
2. Fonction de Plusieurs Variables
3. Calcul Différentiel
4. Calcul d'Intégrales Multiples
5. Calcul d'Intégrales Curvilignes

Références:

- Mathématiques 3, par E. AZOULAY
- Mathématiques, par Francine Delmer
- Site web: www.bibmath.net, exo7.emath.fr

Note du Module: CC 1 (50%) + CC 2 (50%).

Définition 1.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Une application $N : E \to \mathbb{R}$ est appelée norme, notée encore par $\| \,.\, \|$, s.s.i. les trois propriétés sont vérifiées:

- $N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$, pour $x \in E$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$.
- $\forall (x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé ***espace vectoriel normé***.

Remarque 1.2

- Soit N une norme définie sur l'e.v. E. Montrer que $N(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.

Exercice 1.3

- Montrer que les applications suivantes N_1, N_2, N_∞ définies sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ par:
  $N_1(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $N_2(x_1, ..., x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$,
  $N_\infty(x_1, ..., x_n) = \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$ sont des normes.

Définition 1.4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équivalentes s.s.i. $\exists \alpha, \beta > 0$ telle que
$\forall x \in E, \;\; \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$.

Exemple 1.5

- Les normes N_1, N_2 et N_∞ définies sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes,
  A vérifier que: $N_\infty \leq N_1 \leq nN_\infty$ et $N_\infty \leq N_2 \leq \sqrt{n}N_\infty$.

Exercice 1.6

- Les normes N_1, N_2 et N_∞ définies sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels et à degré quelconque par:
  $N_1(P) = \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$, $N_2(P) = \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2}$, $N_\infty(P) = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$ avec
  $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $n \in \mathbb{N}$, ne sont pas équivalentes

Définition 1.7

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r \in]0, +\infty[$.

- La boule ouverte de centre a et de rayon r est :
  $B(a, r) = \{x \in E | N(x - a) < r\}$.
- La boule fermée de centre a et de rayon r est :
  $B_F(a, r) = \{x \in E | N(x - a) \leq r\}$

Exemple 1.8

1. Dans l'e.v. $(\mathbb{R}, |.|)$, on a: $B(a, r) =]a - r, a + r[$ et
   $B_F(a, r) = [a - r, a + r]$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, on a: $B_{1,F}(O, 1) \subset B_{2,F}(O, 1) \subset B_{\infty,F}(O, 1)$

Définition 1.9

Un ensemble A d'un e.v.n E est appelé ouvert si, $\forall a \in A$, $\exists r > 0$ tq $B(a, r) \subset A$. L'ensemble des ouverts de E est noté par $\mathcal{O}$.

Exemple 1.10

1. Dans l'e.v.n E, $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.
2. Soit a, b deux réels tels que $a < b$. L'intervalle $]a, b[$ est un ouvert dans $\mathbb{R}$.
3. Dans l'e.v.n E, une boule ouverte est un ouvert.

Définition 1.11

Un ensemble A d'un e.v.n E est appelé fermé si son complémentaire A^c est ouvert. L'ensemble des fermés de E est noté par $\mathcal{F}$.

Exemple 1.12

1. Dans l'e.v.n E, $\emptyset$ et E sont des fermés de E.
2. Soit a, b deux réels tels que $a < b$. L'intervalle $[a, b]$ est un fermé dans $\mathbb{R}$.
3. Dans l'e.v.n E, une boule fermée est un fermé.

Théorème 1.13

Deux normes équivalentes sur un e.v.n E définies mêmes parties ouvertes de E.

Théorème 1.14

Toutes les normes définies sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalente.

Exemple 1.15

1. les normes de l'e.v $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.
2. Les normes de l'e.v $\mathbb{R}[X]$ ne sont pas forcément équivalentes.

Remarque 1.16

Si A est un ouvert pour une norme N_1 de $\mathbb{R}^n$ alors A est aussi ouvert pour tout autre norme N_2 définie sur $\mathbb{R}^n$.

Propriété 1.17

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

1. *$\emptyset$ et E sont à la fois des ouverts et des fermés de E.*
2. *Si $\forall i \in I$, $A_i \in \mathcal{O}$ Alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$.*
3. *Si $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $A_i \in \mathcal{O}$ Alors $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{O}$.*
4. *Si $\forall i \in I$, $B_i \in \mathcal{F}$ Alors $\bigcap_{i \in I} B_i \in \mathcal{F}$.*
5. *Si $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $B_i \in \mathcal{F}$ Alors $\bigcup_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{F}$.*

Exercice 1.18

Soit la famille des ouverts $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $A_n =]-1/n, 1/n[$. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \notin \mathcal{O}$.

Définition 1.19

Soit $(E, \| \, . \, \|)$, un espace vectoriel normé, et $a \in E$. On dit que V est un ***voisinage*** de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$. L'ensemble des voisinages de a est noté par $\mathcal{V}(a)$.

Exemple 1.20

1. $[0, 1]$ est un voisinage de $1/2$.
2. $B_F(O, 1) \in \mathcal{V}((-1/2, 0))$, par contre $B_F(O, 1) \notin \mathcal{V}((0, 1))$.
3. toute partie ouverte est voisinage de chacun de ses points

Définition 1.21

Soit $(E, \| \,.\, \|)$, un espace vectoriel normé, A un ensemble de E et $a \in E$. On dit que a est ***intérieur*** à A ssi A est voisinage de a: $\exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. L'ensemble des points intérieurs à A est appelé l'intérieur de A est noté par $\mathring{A}$ ou $int(A)$.

Exemple 1.22

1. $int([0, 1[) =]0, 1[$.
2. $int(]0, 1[\cup \{2\}) = ?$.

Propriété 1.23

Soit A, un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E.

1. *$\mathring{A}$ est un ouvert.*
2. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.*
3. *A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.*

Définition 1.24

Soit $(E, \| \,.\, \|)$, un espace vectoriel normé, A un sous ensemble de E et $a \in E$. On dit que a est ***adhérent*** à A ssi $\forall r > 0$ tel que $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$. L'adhérence de A, notée $\bar{A}$, est l'ensemble des adhérents de A.

Exemple 1.25

1. $\overline{[0, 1[} = [0, 1]$.
2. $\overline{]0, 1[\cup \{2\}} = ?$.

Proposition 1.26

Soit A, un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E. Alors $\left(\overline{A}\right)^c = (\mathring{A^c})$.

Propriété 1.27

Soit A, un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E.

1. $\overline{A}$ *est un fermé.*
2. $\overline{A}$ *est le plus petit fermé contenant A.*
3. A *est fermé si et seulement si* $A = \overline{A}$.

Exercice: Soit $(E, \| \,.\, \|)$, un espace vectoriel normé, et $a \in E$. Soit $r > 0$. Alors:

1. $\overline{B(a, r)} = B_F(a, r)$.
2. $\mathring{B_F(a, r)} = B(a, r)$.

Définition 1.28

Soit $(E, \| \,.\, \|)$, un espace vectoriel normé, A un sous ensemble de E. On appelle frontière de A et on note $Fr(A)$, l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Exemple 1.29

1. $Fr([0,1[\cup\{2\}) = \{0,1,2\}$.
2. $B_F(O,1) \setminus B(O,1/2)$

Propriété 1.30

$Fr(A)$ est une partie fermée de E.

Définition 1.31

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ si: $\exists r > 0, \forall x \in A$ on a $\| x \| \leq r$.

Exemple: Toute boule est bornée dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.32

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est compacte de $\mathbb{R}^n$ si A est à la fois fermée et bornée.

Exemple: $[0, 1] \times [-2, 0]$ est un compacte de $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.33

On appelle suite à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ toute application de $\{p_0, p_0+1, ...\}$ dans $\mathbb{R}^n$, une telle suite est dite définie à partir du rang p_0. On la note $(U_p)_{p \geq p_0}$. Le vecteur $U_p = (U_{1,p}, ..., U_{n,p}) \in \mathbb{R}^n$ est appelé terme générale de la suite.

Définition 1.34

Une suite $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^n$ a pour limite le vecteur $l \in \mathbb{R}^n$ si:
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\| U_p - l \| < \varepsilon$
et on écrit $\lim\limits_{p \to +\infty} U_p = l$.

Exercice:

Soit N_1 et N_2 deux normes définies sur $\mathbb{R}^n$ et soit $\left(U_p\right)_p$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ et $l \in \mathbb{R}^n$ tels que $\lim\limits_{p \to +\infty} N_1(U_p - l) = 0$. Montrer qu'on a aussi: $\lim\limits_{p \to +\infty} N_2(U_p - l) = 0$.

Exemple:

1. La suite de terme générale $U_p = (1/p, -1)$ converge vers $l =?$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. La suite de terme générale $U_p = (0, p)$ définie dans $\mathbb{R}^2$ ...? .

Propriété 1.35

Soient $(U_p)_p$, $(V_p)_p$ *deux suites de* $\mathbb{R}^n$, $(l, l') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $\lim\limits_{p\to+\infty} U_p = l$ *alors* l *est unique.*
2. *Si* $\lim\limits_{p\to+\infty} U_p = l$ *alors pour toute suite extraite* $(U_{\phi(p)})_p$ *de* $(U_p)_p$ (ϕ *est une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$) *on a* $\lim\limits_{p\to+\infty} U_{\phi(p)} = l$.
3. *Si* $\lim\limits_{p\to+\infty} U_p = l$ *et* $\lim\limits_{p\to+\infty} V_p = l'$ *alors* $\lim\limits_{p\to+\infty} U_p + V_p = \lim\limits_{p\to+\infty} U_p + \lim\limits_{p\to+\infty} V_p = l + l'$.
4. *Si* $\lim\limits_{p\to+\infty} U_p = l$ *alors* $\lim\limits_{p\to+\infty} \alpha U_p = \alpha l$.
5. *Si* $\lim\limits_{p\to+\infty} U_p = l$ *alors* $\lim\limits_{p\to+\infty} \| U_p \| = \| l \|$.
6. *Si* $\lim\limits_{p\to+\infty} U_p = l$ *avec* $U_p = (U_{1,p}, ..., U_{n,p})$ *et* $l = (l_1, ..., l_n)$ *alors* $\lim\limits_{p\to+\infty} U_{i,p} = l_i$ $\forall i = 1, ..., n$.

Exemple:

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(1/n), \arctan(n))$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\log(n)/n, \sin(n)/n, n^2 \exp(-n)\right)$.

Proposition 1.36

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est fermée s.s.i. $\forall (U_p)_p \subset A$ telle que $\lim_{p\to+\infty} U_p = l$ alors $l \in A$.

Exercice:

Montrer que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y > 1\}$ n'est pas une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1.37 (Bolzano-Weierstrass)

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est compacte s.s.i. toute suite $(U_p)_p$, à valeurs dans A, admet une sous-suite $(U_{\phi(p)})_p$ qui converge vers une limite $l \in A$.

Exercice:

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ et soit X une partie fermée de $\mathbb{R}^2$ telles que $K \cap X = \emptyset$. Montrer que la distance entre K et X est non nulle:
il existe $\delta > 0$ tel que $\| k - x \| \geq \delta$ pour tout $(k, x) \in K \times X$.

Fonction scalaire

Définition 2.1

Une fonction réelle, dite aussi fonction scalaire, de p variables réelles est une application d'une partie D de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée par:

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_p) &\mapsto z = f(x_1, ..., x_p) \end{aligned}$$

où D est l'ensemble de définition de f, constitué de tout vecteur de $\mathbb{R}p$ dont l'image par f existe dans $\mathbb{R}$.

Exemple:

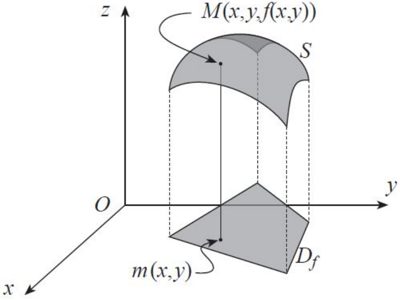
La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

est définie pour les valeurs de x et y telles que $x^2 + y^2 \leq 1$. Dans un repère orthonormé, $D_f = B_F(O, 1)$.

Graphe

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \; z = f(x, y)\}$.
- S est le graphe de la fonction f.



Fonction vectorielle

Définition 2.2

Une fonction vectorielle de p variables réelles est une application d'une partie $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, noté par:

$$f : D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$$
$$(x_1, ..., x_p) \mapsto (f_1(x_1, ..., x_p), ..., f_q(x_1, ..., x_p))$$

où D est l'ensemble de définition de f, constitué de tout vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont l'image par f existe dans $\mathbb{R}^q$. Les f_i sont appelées fonctions coordonnées de f.

Remarque: Le domaine de définition de la fonction vectorielle f est:
$D_f = \cap_{i=1}^q D_{f_i}$.

Exemple:

Déterminer le domaine de définition de la fonction vectorielle suivante:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (\sqrt{1 - x^2 - y^2}, xy, \frac{1}{x - y})$$

Fonction partielle

Définition 2.3

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$. Soit $a = (a_1, ..., a_p) \in D$. Pour $i = 1, ..., p$, on appelle i-ème fonction partielle de f en a définie sur le domaine $D_i = \{x \in \mathbb{R} \mid (a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_p) \in D\}$ la fonction suivante :

$$\begin{aligned} & f_{a,i} : D_i \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q \\ & x \mapsto f(a_0, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_p) \end{aligned}$$

Exemple:

Donner les expressions de la 1-ère et de la 2-ème fonction partielle en $a = (1/2, 1)$ de la fonction suivante:

$$\begin{aligned} & f : B_2(O, 2) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

Définition 2.4

Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ et $l \in \mathbb{R}^q$. Soit $a \in \overline{D}$. On dit que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \alpha > 0$ tels que $\forall x \in D$ et $0 < \| x - a \| < \alpha$ impliquent $\| f(x) - l \| < \varepsilon$.

Remarque:

1. La notion de limite ne dépend pas des normes utilisées.
2. La limite si elle existe est unique.

Proposition 2.5

Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ et $l \in \mathbb{R}^q$. Soit $a \in \overline{D}$. Alors $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ssi $\forall (x_n)_n \subset D \setminus \{a\}$ tel que $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$ implique $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$

Exemple:

On considère la fonction suivante:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{xy}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Étudier la limite de f en $(0,0)$?

Propriété 2.6

Soient f et g deux fonctions sur $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, alors

1. *Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ on a $\lim\limits_{x\to a} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha l_1 + \beta l_2$.*
2. $\lim\limits_{x\to a} < f(x), g(x) > = < l_1, l_2 >$.
3. *Dans le cas où $q = 1$, si $l_2 \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = l_1/l_2$.*

Exemple:

Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(1+x^2y^2)\sin(y)}{y}$.

Théorème 2.7 (Théorème des Gendarmes)

Soit $a \in \mathbb{R}^p$ et soient f, g et h trois fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l$
2. *Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $0 < \| x - a \| < \alpha$ on a $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Alors $\lim\limits_{x \to a} h(x) = l$.*

Exemple:

Calculer $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$.

Proposition 2.8

Soient $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *et* $g : D_g \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. *Supposons que* $g(D_g) \subset D_f$, $\lim_{t\to a} g(t) = b$ *et que* $\lim_{x\to b} f(x) = l$. *Alors,* $\lim_{t\to a} f \circ g(t) = l$.

Exemple:

- Calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\ln(x+y)$.

Définition 2.9

Chaque point $P(x, y)$ du plan $\mathbb{R}^2$ peut être déterminée par les coordonnées polaires qui sont la coordonnée radiale $r = \| \overrightarrow{OP} \|$ et la coordonné angulaire θ, suivant l'application suivante:

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)), \end{array}$$

dont l'application réciproque est l'application suivante:

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\\ (x, y) \mapsto (r, \theta), \end{array}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et θ est défini comme suit: $\theta = \begin{cases} arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \text{ et } y \geq 0, \\ arctan(y/x) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0, \\ arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0, \\ \pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0, \\ 3\pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0. \end{cases}$

- La condition sur les deux variables $(x, y) \to 0$ devient une condition sur une seule variable $r \to 0$.
- Si on étudie une limite quand $(x, y) \to (a, b)$, on ramène le problème en $(0, 0)$ par translation des variables, $x = a + h$,$y = b + k$ avec $(h, k) \to (0, 0)$.
- Calculer les limites suivantes: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{x}$.

Définition 2.10

Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est continue en $a \in D$ ssi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est continue sur D si elle est continue en tout point de D.

Proposition 2.11

Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est continue en $a \in D$ ssi pour toute suite $(x_n)_n \subset D$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x_n) = f(a)$.

Proposition 2.12

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction continue au point $a = (a_1, ..., a_p)$ alors les p fonctions partielles $f_{a,i}$ de f sont continues en a_i pour tout $i = 1, ..., p$.

Exemple: Soit $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \forall (x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Étudier la continuité des fonctions partielles $f_{O,1}$ et $f_{O,2}$ de la fonction f au point $(0, 0)$.
2. Que peut dire de la continuité de la fonction f au point $(0, 0)$.

Propriété 2.13

Soient f et g deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et continues en a, alors:

1. *Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est continue en a.*
2. *de même $< f, g >$ et $\| f \|$ sont continues en a.*
3. *Dans le cas où $q = 1$, si $g \neq 0$ au voisinage de a alors la fonction f/g est continue en a.*
4. *la composée de fonctions continues est continue.*

Exemples: les fonctions suivantes sont continues:

1. $p_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ avec $p_i(x_1, ..., x_p) = x_i$.
2. $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ avec $f(x_1, ..., x_p) = ax_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_p^{i_p}$, $a \in \mathbb{R}$ et $i_1, ..., i_p \in \mathbb{N}$.
3. les fonctions polynômes définis sur $\mathbb{R}^p$.
4. les applications linéaires définies sur $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ (même lipschitzienne).

Définition 2.14

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Soit $a \in \overline{D} \setminus D$. Si f a une limite l lorsque x tend vers a, on peut étendre le domaine de définition de f à $D \cup \{a\}$ en posant $f(a) = l$. Et on dit que f est prolongeable par continuité au point a.

Exemple: Pour quel paramètre $\alpha > 0$ la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^\alpha y}{x^2 + y^2}$ est-elle prolongeable par continuité au point $(0, 0)$?

Théorème 2.15

Soit f une fonction continue sur $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $F \subset \mathbb{R}^q$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. *f est continue en tout point de D,*
2. *pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U) = \{x \in D \mid f(x) \in U\}$ est un ouvert de D.*
3. *pour tout fermé V de F, $f^{-1}(V)$ est un fermé de D.*

Exemple: Montrer que l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(1 - 2x)\}$ est fermé de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2.16

Soit f une fonction continue sur $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. Soit A un compact de $\mathbb{R}^p$ tel que $A \subset D$. Alors $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}^q$.

Corollaire 2.17

Soit A un compact de $\mathbb{R}^p$. Soit f une fonction continue sur $A \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur A.

Exercice: Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. et Soit $f : C \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue. Démontrer que $\inf_{x \in C} f(x) > 0$.

Définition 2.18

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$. Une séparation de A est une paire (O, O') d'ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$ tels que:

1. $A \subset O \cup O'$
2. $A \cap O \neq \emptyset,\ A \cap O' \neq \emptyset$,
3. $A \cap O \cap O' = \emptyset$.

Exemple:

- Dans $\mathbb{R}$, le paire $(]-1, 1[,]1/2, 2[)$ est une séparation de l'ensemble $[0, 1/2[\cup]1, 3/2]$.

Définition 2.19

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$. A est dit connexe si A n'admet aucune séparation.

Exemple:

- l'ensemble $[0, 1/2[\cup]1, 3/2]$ n'est pas un connexe.

Proposition 2.20

Dans $\mathbb{R}$, tout ensemble est connexe si seulement s'il est un intervalle.

Définition 2.21

Soient x et y sont deux points de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$, on appelle chemin d'origine x et d'extrémité y toute application continue $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Définition 2.22

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite connexe par arcs si tout couple de points de A est relié par un chemin restant dans A.

Définition 2.23

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$. A est dit convexe si pour tout a et b de A, le segment $[a, b] = \{(1-t)a + tb;\ t \in [0,1]\}$ est contenu dans A.

Exemple:

- Dans $\mathbb{R}^n$, toute partie convexe est connexe par arcs
- Un cercle est un connexe par arcs.

Théorème 2.24

Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. Soit A une partie connexe (respectivement connexe par arcs) de $\mathbb{R}^p$. Soit $f : A \to \mathbb{R}^q$ une application continue. Alors $f(A)$ est aussi connexe (respectivement connexe par arcs).

Corollaire 2.25

Si $A \subset \mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, est connexe par arc alors A est connexe.

Exemple:

- Tout ensemble convexe est connexe.

Définition 2.26

Une partie A de $\mathbb{R}^p$ est dite étoilée s'il existe $a \in A$ tel que $[a, x] \subset A$ pour tout $x \in A$.

Exercice:

- Toute partie convexe est une partie étoilé dans $\mathbb{R}^p$. La réciproque n'est pas en générale vraie.
- $A = ([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([1, 2] \times [0, 2])$ est étolé mais non convexe.

Définition 3.1

Soit $f : D \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$. On dit que f admet en $a = (a_1, ..., a_i, .., a_n)$ une i-ème dérivée partielle si la i-ème application partielle associée à f au point a est dérivable en a_i, on note cette dérivée par $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, et on écrit:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f_{a,i}(a_i + h) - f_{a,i}(a_i)}{h}$$

Exemple: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$.

Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 3.2

Soit $f : D \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D si f admet en tout point $x \in D$, n dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ continues sur D.
L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur D est noté: $\mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$.
f est dite de $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, si f est de $\mathcal{C}^{k-1}(D, \mathbb{R})$ et admettent des dérivées partielles d'ordre k sur D, notées par: $\dfrac{\partial^k f}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_n} x_n}$ avec $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$, et qui sont continues pour tout α_i.

Exemple: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$.

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$.
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$.

Théorème 3.3 (Schwarz)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$, avec $D \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$, admettant des dérivées partielles secondes sur D et $i, j \in \{1, ..., n\}$.

1. *Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont continues en $a \in D$ alors:*
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$
2. *Si $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ alors on a sur D: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$*

Exemple: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$.

1. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.
2. Que peut-on déduire?

Définition 3.4

Soit $f : D \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^p} \to \mathbb{R}^q$. On dit que f est différentiable en un point $a \in D$ s'il existe une application linéaire $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ telle que $\lim\limits_{h \to 0_p} \left(f(a+h) - f(a) - l(h)\right) / \parallel h \parallel = 0$

Remarque:

$\lim\limits_{h \to 0_p} \left(f(a+h) - f(a) - l(h)\right) / \parallel h \parallel = 0 \Longleftrightarrow \exists \varepsilon : h \in \mathcal{V}(0_p) \to \mathbb{R}^q$ telle que $\lim\limits_{h \to 0_p} \varepsilon(h) = 0_q$ et $f(a+h) = f(a) + l(h) + \parallel h \parallel \varepsilon(h)$.

Théorème 3.5

Soit $f : D \in \mathcal{V}(a) \to \mathbb{R}^q$. Si f est différentiable en a alors l'application linéaire l vérifiant $\bigstar$:
$f(a+h) = f(a) + l(h) + \parallel h \parallel \varepsilon(h)$ *avec* $\lim\limits_{h \to 0_p} \varepsilon(h) = 0_q$,

est unique.

Définition 3.6

Si f est différentiable en a, l'application linéaire unique l vérifiant la relation $(\bigstar)$ est appelée la ***différentielle*** de f en a et notée par df_a. Si f est différentiable en tout point de D. On dit qu'elle est différentiable sur D.

Exemple: Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $f(x,y) = xy$ et $g(x,y) = x + y$.
Montrer que les fonctions f et g sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et donner leurs différentielles.

Théorème 3.7

Soient f et g deux fonctions différentiables en $a \in D$. Alors:

1. *f est continue en a.*
2. *$f+g$ est différentiable en a et $d(f+g)_a = df_a + dg_a$.*
3. *αf est différentiable en a et $d(\alpha f)_a = \alpha df_a$.*

Exemple: Calculer la différentielle de la fonction suivante:
$h(x,y) = x + xy + y$.

Théorème 3.8

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : D \subset \mathcal{V}(a) \to \mathbb{R}$ différentiable en a. Alors f admet n dérivées partielles en a telles qu'on a: $df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i$.

Remarque: La réciproque est fausse, par exemple: On considère la fonction f définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$.

Théorème 3.9

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ *et* $f : D \subset \mathcal{V}(a) \to \mathbb{R}$. *Si* f *est de* $\mathcal{C}^1$ *sur* D *alors* f *est différentiable en* a *et on a:* $df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i$.

Exemple: Calculer la différentielle à l'origine de la fonction f définie par:
$f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

Théorème 3.10

Soient $a \in \mathbb{R}^p$ *et* $f : D \subset \mathcal{V}(a) \to \mathbb{R}^q$ *telle que* $f = (f_1, ..., f_q)$. *Alors* f *est différentiable en* a *s.s.i.* f_i *est différentiable en* a *pour tout* $i = 1, ..., q$, *Dans ce cas on écrit:*

$$df_a(h) = (d(f_1)_a(h), ..., d(f_q)_a(h)) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(a).h_i \\ ... \\ \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\partial f_q}{\partial x_i}(a).h_i \end{pmatrix}.$$

Exemple: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $f(x, y) = (x + y, xy)$.
Montrer que la fonctions f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et donner sa différentielle.

Définition 3.11

Soient $a \in \mathbb{R}^p$ et $f : D \subset \mathcal{V}(a) \to \mathbb{R}^q$ telle que $f = (f_1, ..., f_q)$. On appelle ***Matrice Jacobienne*** de f en a, la matrice notée $J_f(a)$ définie par:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

On écrit ainsi: $df_a(h) = J_f(a).h$ pour tout $h \in \mathbb{R}^p$.

Proposition 3.12

Soient $a \in \mathbb{R}^p$, $f : D_f \subset \mathcal{V}(a) \to \mathbb{R}^n$ différentiable en a et $g : D_g \subset \mathcal{V}(f(a)) \to \mathbb{R}^q$ différentiable en $f(a)$, alors la composée $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

En termes de Jacobiennes, on écrit:

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)).J_f(a).$$

Exemple: Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = f(y, x)$ et qu'elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(y, x)$.

Théorème 3.13

Soient $x = x(u)$ et $y = y(u)$ deux fonctions dérivables au point u et soit $z = f(x, y)$ une fonction différentiable au point (x, y), Alors $z = f(x(u), y(u))$ admet des dérivées partielles de premier ordre au point u et on écrit:

$$\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{du}.$$

Théorème 3.14

Soient $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$ deux fonctions admettant des dérivées partielles de premier ordre au point (u, v) et soit $z = f(x, y)$ une fonction différentiable au point (x, y), Alors $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ admet des dérivées partielles de premier ordre au point (u, v) et on écrit:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

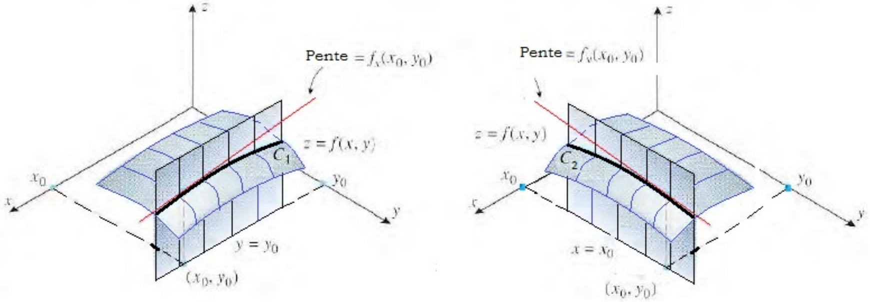
Exercice:

1. On considère $z = \sqrt{xy + y}$, $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$.
   Calculer $\frac{dz}{d\theta}$ en $\theta = \pi/2$.
2. On considère $z = \exp(xy)$, $x = 2u + v$ et $y = u/v$.
   Calculer $\frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial v}$ au point $(1, -1)$.

Définition 3.15

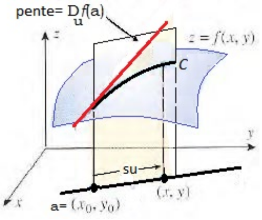
Pour une fonction à valeurs scalaires $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ dont les dérivées partielles existent, son ***gradient***, noté $grad(f)$, est défini par:

$$\begin{aligned} grad(f): \quad & D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p \\ & x \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_p}(x) \right) \end{aligned}$$



Définition 3.16

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a \in D$ et u un vecteur **non nul** de $\mathbb{R}^p$. On dit que f a une ***dérivée directionnelle***, notée par $D_u f(a)$, au point a suivant la direction u si l'expression: $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{f(a+su)-f(a)}{s}$ existe.



Proposition 3.17

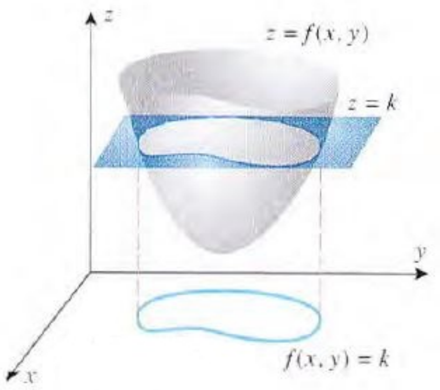
*Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in D$ et u un vecteur **non nul** de $\mathbb{R}^p$. Alors*
$D_u f(a) = \nabla f(a).u = df_a(u)$.

Remarques:

- L'existence de la dérivée directionnelle de f en a suivant toutes les directions n'implique pas la différentiabilité de f en a.
- Donner un contre exemple.

Définition 3.18

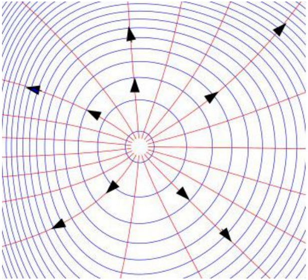
Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs réelles. On appelle courbe de niveau de hauteur k l'ensemble: $L_k(f) = \{(x, y) | f(x, y) = k\}$.

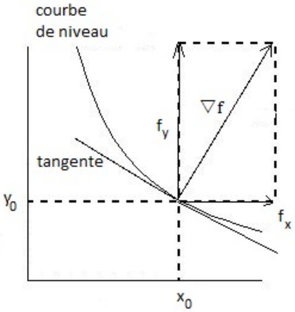


- Soit $(x, y) \in D$. Si $f(x, y) = k$ alors $(x, y) \in L_k(f)$.

Proposition 3.19

Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs réelles. Soit $(x,y) \in D$ tel que $f(x,y) = k$. Le vecteur gradient $\nabla f(x,y)$ est normal à la courbe $L_k(f)$ au point (x,y).



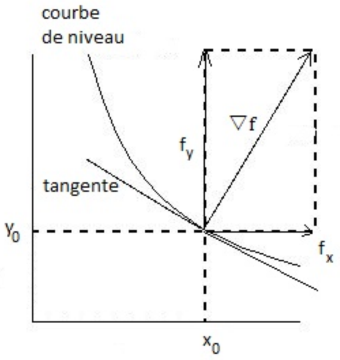


- Le gradient indique la direction de plus grande pente positive sur une courbe de niveau à partir d'un point donné.

Définition 3.20

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur D. L'équation du droite tangente à la courbe de niveau $L_k(f)$ en un point (x_0, y_0), tel que $\nabla f \neq 0$, est donné par:

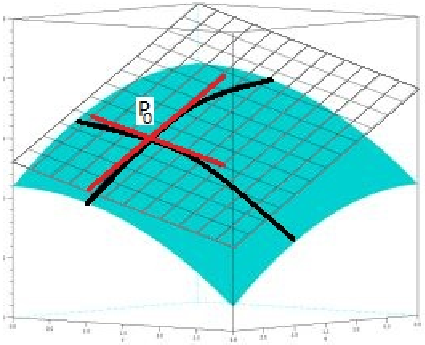
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$



Définition 3.21

Soit $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ un point de la surface $z = f(x, y)$. Si f est une fonction différentiable au point (x_0, y_0) alors la surface admet un plan tangent au point P_0 dont l'équation est la suivante:

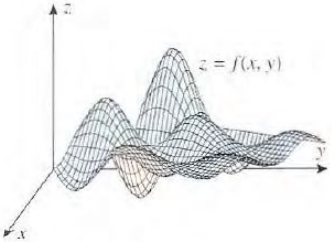
$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$



Définition 3.22

Soit f, une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^n$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.

1. On dit que la fonction f admet un maximum relatif en un point x_0 de D lorsqu'il existe un ouvert $O \subset D$ telle que : $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in O \setminus \{x_0\}$.
2. On dit que la fonction f admet un minimum relatif en un point x_0 de D lorsqu'il existe un ouvert $O \subset D$ telle que : $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in O \setminus \{x_0\}$.
3. On dit que la fonction f admet un maximum absolu en un point x_0 de D lorsque: $\forall x \in D,\ f(x) \leq f(x_0)$.
4. On dit que la fonction f admet un minimum absolu en un point x_0 de D lorsque: $\forall x \in D,\ f(x) \geq f(x_0)$.



Exemple: On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par: $f(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2$. Déterminer le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 3.23

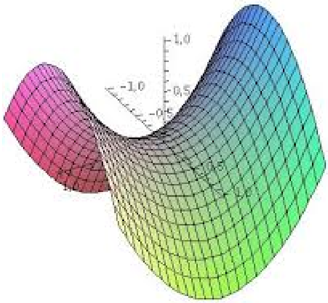
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. a est dite point critique de f, si une des conditions suivantes est satisfaite:

- Une ou plusieurs des dérivées partielles de f n'existent pas au point a.
- Dans le cas où toutes les dérivées partielles de f existent au point a, on a $\nabla f(a) = 0$.

Exemple: On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la relation: $f(x, y) = x^2 + y^4$.

Définition 3.24

Un point critique $a \in \mathbb{R}^n$ est appelé point selle de f s'il existe deux vecteurs $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ tels que la fonction $t \mapsto f(a+tv_1)$ admet un maximum locale stricte en $t=0$ et $t \mapsto f(a+tv_2)$ admet un minimum locale stricte en $t=0$.



- $f(x,y) = y^2 - x^2$.

Théorème 3.25

Soit $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ *et soit* $0 < r$. *Soit* f *une fonction de classe* C^2 *définie sur* $B(x_0, r)$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$. *Alors le développement limité de* f *à l'ordre 2 est donné par:*

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \\ &+ \| h \|^2 \varepsilon(h), \end{aligned}$$

$\forall \| h \| < r,\ h = (h_1, ..., h_n)$, *avec* $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Exemple: On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la relation: $f(x, y) = x^2 + y^4$.

Définition 3.26

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$, de classe C^2. Soit $a \in \Omega$. On appelle matrice hessienne de f en a la matrice à n lignes et n colonnes dont le terme à la i-ieme ligne et j-ieme colonne est $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$. On note $H_f(a)$ cette matrice.

Remarque: La matrice hessienne est toujours symétrique.

Proposition 3.27

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$, de classe C^2. Soit $a \in \Omega$.

1. *(Condition nécessaire) On suppose que f atteint un minimum relatif (respectivement, maximum relatif) en a. On a alors $\nabla f(a) = 0$ et $h^t.H_f(a).h \geq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ (respectivement, $h^t.H_f(a).h \leq 0$ pour tout $h \in \mathcal{V}(0)$).*
2. *(Condition suffisante) On suppose que $\nabla f(a) = 0$ et que $h^t.H_f(a).h \ > 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ (respectivement, $h^t.H_f(a).h < 0$ pour tout $h \in \mathcal{V}(0)$, $h \neq 0$). Alors, f atteint un minimum relatif en a (respectivement, f atteint un maximum relatif en a).*

Théorème 3.28

Soit f une fonction de classe C^2 dans un voisinage de a. $H_f(a)$ est alors une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres, nécessairement réelles, sont ordonnées comme suit: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$. On alors:

1. *Si $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in 1, ..., n$, f admet un minimum relatif en a.*
2. *Si $\lambda_i < 0$ pour tout $i \in 1, ..., n$, f admet un maximum relatif en a.*
3. *Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_n > 0$, alors f n'admet pas d'extremum relatif en a (Dans $\mathbb{R}^2$, ce point est appelé point selle).*
4. *S'il existe $i \in 1, ..., n$ tel que $\lambda_i = 0$, on ne peut rien conclure (voir TD).*

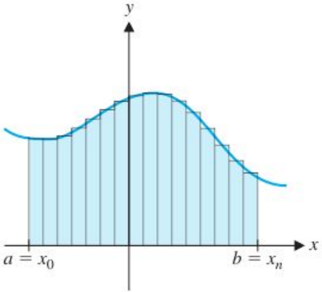
Exemple: On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la relation: $f(x, y) = x^2 + 3y^2$.

Définition 4.1

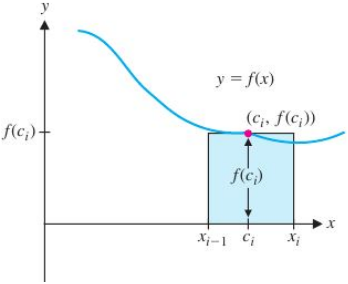
Pour toute fonction f définie sur l'intervalle [a,b], l'intégrale simple de f sur [a,b] est définie par:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

à condition que la limite existe et qu'elle est indépendante du choix du $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, pour i=1,2,...,n. Dans ce cas, f est dite intégrable sur [a,b].



Surface associée à l'intégrale simple.



Surface approchée sur un sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

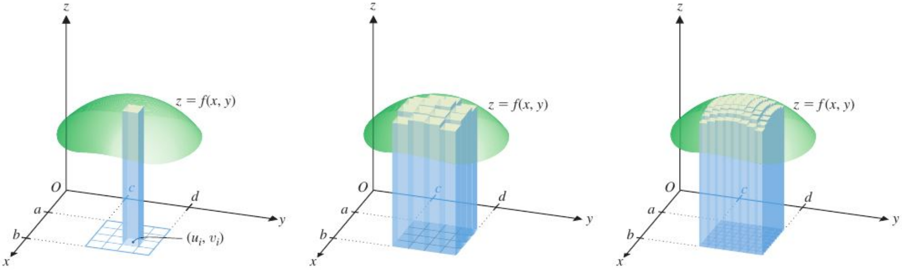
Intégrale Double sur un rectangle

Définition 4.2

Pour toute fonction $f(x,y)$ définie sur le rectangle $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ a \leq x \leq b \ et\ c \leq y \leq d\}$, l'intégrale double de f sur R est définie par:

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\Delta A_i$$

à condition que la limite existe et qu'elle est indépendante du choix du $(u_i, v_i) \in R_i$, pour i=1,2,...,n. Dans ce cas, f est dite intégrable sur R. La somme $\sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\Delta A_i$ est appelée somme de Riemann.

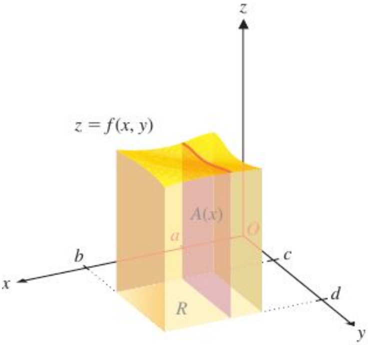


Approximation du volume par des parallélépipèdes.

Théorème 4.3 (Théorème de Fubini)

Soit f une fonction intégrable sur le rectangle $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}$. Alors l'intégrale double de f sur R peut être exprimée comme suit:

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy.$$



Tranchage du solide parallèlement au plan yz et au plan xz: $V = \int_a^b A(x)dx = \int_c^d A(y)dy$; avec $A(x) = \int_c^d\ f(x,y)\,dy$ et $A(y) = \int_a^b\ f(x,y)\,dx$.

Exemple 4.4

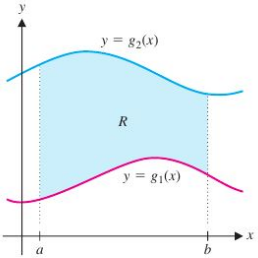
Calculer le volume compris entre la surface $z = x^3 \sin(x^2 y)$ et le rectangle $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}\ et\ 0 \leq y \leq 1\}$.

Intégrale Double sur une région comprise entre deux courbes en x

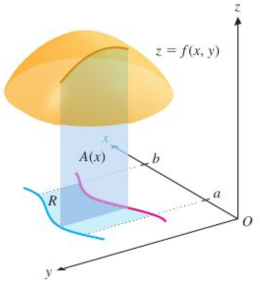
Théorème 4.5 (Théorème de Fubini)

Soit f une fonction continue sur la région définie par $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ a \leq x \leq b$ et $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, où $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont deux fonctions continues avec $g_1(x) \leq g_2(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors:

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx.$$



Région comprise entre deux courbes.

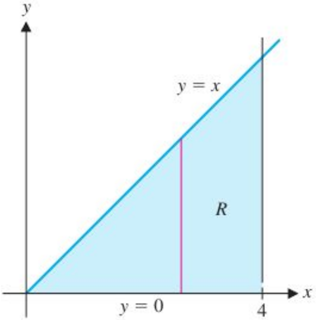


Volume par tranchage: $V = \int_a^b A(x)dx$ avec $A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy.$

Exemple 4.6

Soit R région délimitée par le graphes $y = x$, $y = 0$ et $x = 4$. Calculer l'intégrale

$$\int\int_R 4\exp(x^2)\, dA.$$



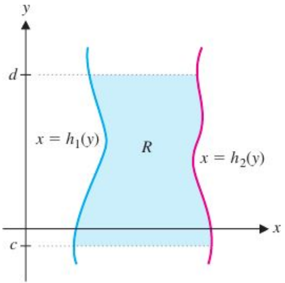
La région R.

Intégrale Double sur une région comprise entre deux courbes en y

Théorème 4.7 (Théorème de Fubini)

Soit f une fonction continue sur la région définie par $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ c \leq x \leq d$ et $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$, où $h_1(y)$ et $h_2(y)$ sont deux fonctions continues avec $h_1(y) \leq h_2(y)$ pour tout $y \in [c, d]$. Alors:

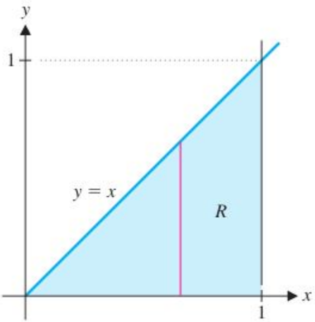
$$\int\int_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dxdy.$$



Région comprise entre deux courbes.

Exemple 4.8

Calculer l'intégrale $\int_0^1 \int_y^1 \exp(x^2)\,dxdy$.



La région R.

Théorème 4.9 (Propriétés)

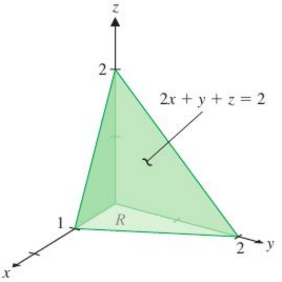
Soit f et g deux fonction intégrable sur la région $R \subset \mathbb{R}^2$ et soit c une constante réelle. Alors:

1. $\int\int_R \, cf(x,y)\, dA = c \int\int_R \, f(x,y)\, dA$
2. $\int\int_R \, f(x,y) + g(x,y)\, dA = \int\int_R \, f(x,y)\, dA + \int\int_R \, g(x,y)\, dA$
3. *si* $R = R_1 \cup R_2$ *et* $\mathring{R}_1 \cap \mathring{R}_2 = \emptyset$ *alors*
   $\int\int_R \, f(x,y)\, dA = \int\int_{R_1} \, f(x,y)\, dA + \int\int_{R_2} \, f(x,y)\, dA.$
4. *si* $f \leq g$ *sur* R *alors* $\int\int_R \, f(x,y)\, dA \leq \int\int_R \, g(x,y)\, dA.$
5. $|\int\int_R \, f(x,y)\, dA| \leq \int\int_R \, |f|\, dA.$

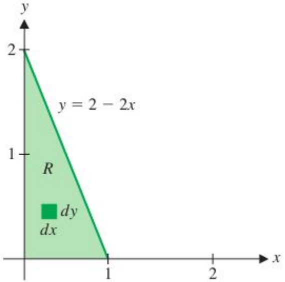
Applications: Aire, Volume, Aire de surface

Exemple 4.10

Déterminer le volume du tétraèdre délimité par le plan d'équation $2x + y + z = 2$ et les trois plans du repère cartésien.



Tétraèdre.

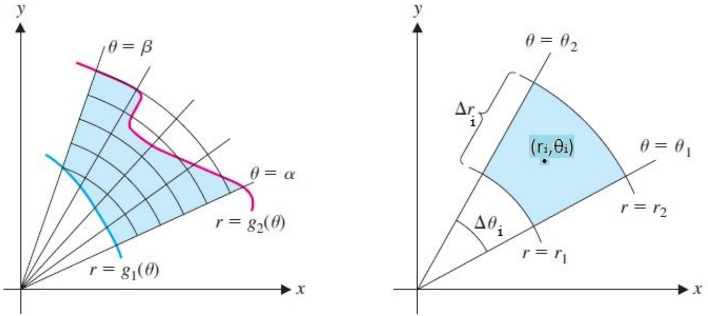


La région R.

Théorème 4.11 (Théorème de Fubini)

Soit $f(r,\theta)$ une fonction continue sur la région $R = \{(r,\theta)|\ \alpha \leq \theta \leq \beta\ \text{ et }\ g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}$ où g_1 et g_2 sont deux fonctions continues avec $0 \leq g_1(\theta) \leq g_2(\theta)$ pour toute $\theta \in [\alpha,\beta]$. Alors,

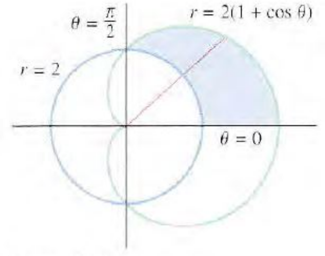
$$\int\int_R f(r,\theta)dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)r\,dr\,d\theta$$



Région polaire élémentaire.

Exemple 4.12

Calculer l'intégrale $\int\int_R \sin(\theta) dA$ où R est la zone sombre dans la figure suivante:

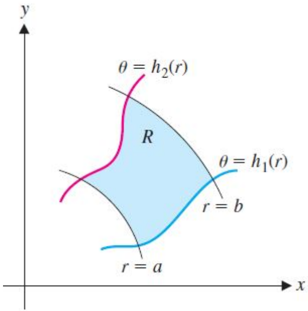


La région R.

Théorème 4.13 (Théorème de Fubini)

Soit $f(r,\theta)$ une fonction continue sur la région $R = \{(r,\theta)|\ h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r)\ \text{ et }\ 0 \leq a \leq r \leq b\}$ où h_1 et h_2 sont deux fonctions continues avec $h_1(r) \leq h_2(r)$ pour toute $r \in [a,b]$. Alors,

$$\int\int_R f(r,\theta)dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r,\theta)rd\theta dr$$



La région R.

Exemple 4.14

Reprendre l'intégrale $\int\int_R \sin(\theta)dA$ en utilisant le résultat de ce théorème.

Définition 5.1

Pour toute fonction $f(x, y, z)$ définie sur la région Q, l'intégrale triple de f sur Q est définie par:

$$\int\int\int_Q f(x, y, z)\, dV = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i, w_i)\Delta V_i.$$

à condition que la limite existe et qu'elle est indépendante du choix du $(u_i, v_i, w_i) \in Q_i$, pour i=1,2,...,n. Dans ce cas, f est dite intégrable sur Q.

- Si $f(x, y, z)$ est la densité d'un corps Q au point (x,y,z) alors $\int\int\int_Q f(x, y, z)\, dV$ est la masse du corps Q.
- $\int\int\int_Q 1\, dV$ est le volume du corps Q.

Théorème 5.2 (Théorème de Fubini)

Soit f une fonction intégrable sur la boite rectangulaire $Q = \{(x, y, z)|\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d \text{ et } r \leq z \leq s\}$. Alors l'intégrale triple de f sur R peut être exprimée comme suit:

$$\int\int\int_Q f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z)\, dzdydx$$

avec toutes les permutations possibles entre les trois intégrales.

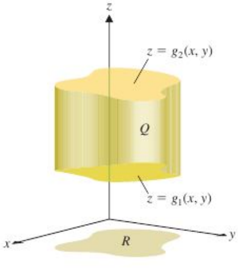
Exemple 5.3

Calculer l'intégrale triple suivante $\int\int\int_Q 2xe^y \sin(z)\, dV$ avec $Q = \{(x, y, z)|\ 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq \pi\}$

Théorème 5.4 (Théorème de Fubini)

Soit f une fonction continue sur le solide défini par $Q = \{(x,y,z) | (x,y) \in R$ et $g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$, où $g_1(x,y)$ et $g_2(x,y)$ sont deux fonctions continues avec $g_1(x,y) \leq g_2(x,y)$ pour tout $(x,y) \in R$. Alors:

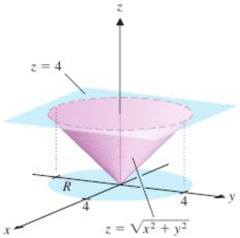
$$\int\int\int_R f(x,y,z)\, dV = \int\int_R \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\, dzdA.$$



Solide compris entre deux surfaces données.

Exemple 5.5

Trouver la masse du solide Q de densité massique $\rho(x, y, z) = 2z$ et qui est délimité par les graphes: le cone circulaire droit de surface $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et le plan $z = 4$.

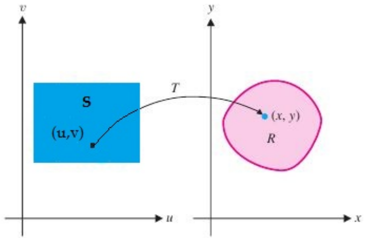


Le solide Q et sa projection R sur le plan (xOy).

Théorème 6.1

On suppose que la région S dans le plan uOv est mis en correspondance à la région R dans le plan xOy par la transformation bijective T définie par: $x = g(u, v)$ et $y = h(u, v)$ où h et g sont supposées de classe C^1. Si f est continue sur R et le Jacobien $\det(J_T)$ est non nul sur S alors:

$$\int\int_R f(x, y)dxdy = \int\int_S f(g(u, v), h(u, v))|det(J_T(u, v))|dudv$$

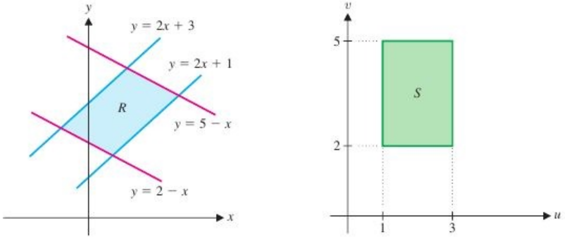


Transformation T de la région S vers la région R.

- $(x = g(u, v), y = h(u, v)) \in R \Leftrightarrow (u, v) \in S.$

Exemple 6.2

Soit R une région comprise entre les droites d'équations: $y = 2x + 3$, $y = 2x + 1$, $y = 5 - x$ et $y = 2 - x$. Calculer l'intégrale $\int\int_R (x^2 + 2xy)dA$.

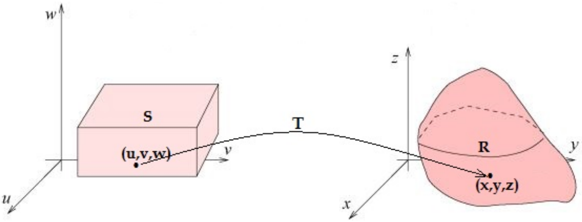


Transformation T de la région S vers la région R.

Théorème 6.3

On suppose que la région S dans l'espace uvw est mis en correspondance à la région R dans l'espace xyz par la transformation bijective T définie par : $x = g(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$ et $z = l(u, v, w)$ où h, g et l sont supposées de classe C^1. Si f est continue sur R et le Jacobien $det(J_T)$ est non nul sur S alors:

$$\int\int\int_R f(x,y)dV = \int\int\int_S f(g(u,v,w), h(u,v,w), l(u,v,w))|det(J_T(u,v,w))|dudvdw$$

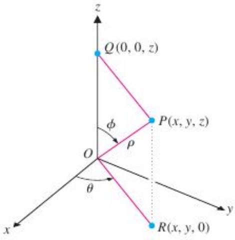


Transformation T de la région S vers la région R.

- $(x = g(u,v,w), y = h(u,v,w), z = l(u,v,w)) \in R \Leftrightarrow (u,v,w) \in S.$

Exemple 6.4

Utiliser le théorème du changement de variables pour établir la formule de l'intégrale triple dans les coordonnées sphériques.



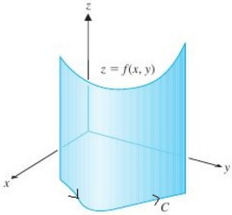
Coordonnées sphériques.

Définition 7.1

L'intégrale curviligne de $(x, y) \mapsto f(x, y)$ au longue d'une courbe C orientée dans l'espace (xOy), noté par $\int_C f(x, y)dl$, est définie par

$$\int_C f(x, y)dl = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta l_i$$

à condition que la limite existe et qu'elle est indépendante du choix de point (x_i^*, y_i^*).
De la même manière on peut définir l'intégrale $\int_C f(x, y, z)dl$.



Interprétation géométrique de l'intégrale curviligne.

- Si $f(x, y)$ est la densité massique d'un fil mince C au point (x,y) alors $\int_C f(x, y)dl$ est la masse du fil C.
- $\int_C 1dl$ est la longueur du fil C.

Théorème 7.2

On suppose que $(x, y) \mapsto f(x, y)$ *soit continue sur une région* D *contenant la courbe* C *et que* C *est décrit paramétriquement par* $(x(t), y(t))$, *pour* $t \in [a, b]$ *où* $x(t)$ *et* $y(t)$ *sont de classe* C^1. *Alors:*

$$\int_C f(x,y)dl = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

De la même manière on peut définir l'intégrale $\int_C f(x, y, z)dl$.

Exemple 7.3

Trouver la masse du ressort de forme curviligne paramétrée par: $x(t) = 2\cos(t)$, $y(t) = t$, $z = 2\sin(t)$, pour $t \in [0, 6\pi]$, avec une densité linéique $\rho(x, y, z) = 2y$.

Théorème 7.4

On suppose que $(x, y) \mapsto f(x, y)$ *soit continue sur une région* Q *contenant la courbe* C *et que* C *est décrit paramétriquement par* $(x(t), y(t))$, *pour* $t \in [a, b]$ *où* $x(t)$ *et* $y(t)$ *sont de classe* C^1. *Alors:*

1. $\int_C f(x, y)dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)dt$
2. $\int_C f(x, y)dy = \int_a^b f(x(t), y(t))y'(t)dt$

Théorème 7.5

On suppose que $(x, y) \mapsto f(x, y)$ *est continue sur une région* Q *contenant une courbe orientée* C. *Alors si* C *est de classe* C^1 *avec* $C = C_1 \cup ... \cup C_n$, *où* C_1,...,C_n *sont de classe* C^1 *et où le point final du* C_i *est le même point initial du* C_{i+1}, *pour* $i = 1, ..., n-1$, *Alors:*

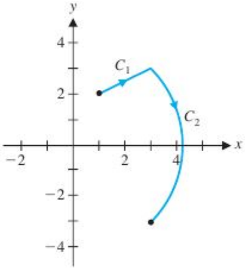
1. $\int_{-C} f(x, y)dl = \int_C f(x, y)dl.$
2. $\int_{-C} f(x, y)dx = -\int_C f(x, y)dx$ *et* $\int_{-C} f(x, y)dy = -\int_C f(x, y)dy$
3. $\int_C f(x, y)dl = \int_{C_1} f(x, y)dl + \int_{C_2} f(x, y)dl + ... + \int_{C_n} f(x, y)dl.$

Exemple 7.6

Calculer l'intégrale curviligne $\int_C 2x^2 ydl$, où C est la partie du parabole $y = x^2$ de $(-1, 1)$ au $(2, 4)$.

Exemple 7.7

Calculer l'intégrale curviligne $\int_C 3x - ydl$ où C est le segment entre $(1, 2)$ et $(3, 3)$ suivie par la partie du cercle $x^2 + y^2 = 18$ définie entre le point $(3, 3)$ et le point $(3, -3)$ orientée au sens des aiguilles du montre.



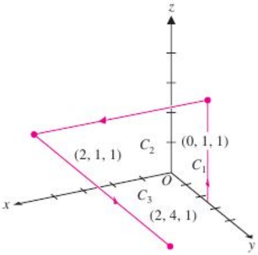
Le chemin C.

Remarque 7.8

Tous les résultats obtenus pour une fonction à deux variables peuvent être généralisés pour une fonction à trois variables $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$.

Exemple 7.9

Calculer l'intégrale curviligne $\int_C 4xdy + 2ydz$ où C est composé du segment du $(0, 1, 0)$ au $(0, 1, 1)$ suivie par le segment du $(0, 1, 1)$ au $(2, 1, 1)$ et suivie par le segment du $(2, 1, 1)$ au $(2, 4, 1)$.



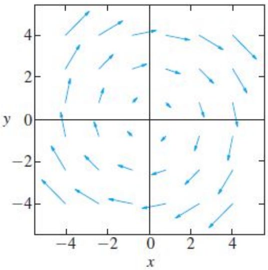
Le chemin C.

Définition 7.10

Un champ de vecteurs sur $D \subset \mathbb{R}^p$ est une application qui à tout point M de D associe un vecteur $\overrightarrow{F}(M)$ de $\mathbb{R}^p$.
En particulier, soit $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$, alors un champ de vecteurs $\overrightarrow{F}(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ est donné par deux fonctions P et Q sur D à valeurs réelles:

$$\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$$

On dit que le champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ est de classe C^p sur D si P et Q sont de classe C^p.



Champ de vecteurs $F(x,y) = (y, -x)$.

Définition 7.11

Soit $(x,y) \mapsto F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ continue sur une région D contenant la courbe C et que C est décrit paramétriquement par $(x(t), y(t))$, pour $t \in [a,b]$ où $x(t)$ et $y(t)$ sont de classe C^1. L'intégrale curviligne du champs de vecteurs F sur la courbe orientée C dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par:

$$\begin{aligned} \int_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr} &= \int_C P(x,y)dx + \int_C Q(x,y)dy \\ &= \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)dt + \int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)dt \end{aligned}$$

En physique, $W = \int_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr}$ est interprété par le Travail fourni par le champ de force F exercé sur un objet qui se déplace au long du chemin C.

Exemple 7.12

Calculer le Travail effectué par le champ de force $F(x,y) = (y, -x)$ de la parabole $y = x^2 - 1$ du point $(1,0)$ au point $(-2,3)$.

Définition 7.13

Un champ de vecteurs F est un champ gradient s'il existe f de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F = \nabla f$ sur D. f est dite le potentiel du champ de vecteurs F.

Exemple 7.14

- Le champ de vecteurs $F(x, y) = (y, x)$ est un champ gradient.
- Le champ de vecteurs $F(x, y) = (y, -x)$ n'est pas un champ gradient.

Théorème 7.15

Si F est un champ de gradient alors $\int_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr}$ ne dépend que des extrémités de C.

Théorème 7.16

Soit $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$ *un champ de vecteurs de classe* C^1 *sur un ouvert* D*. Alors:*
F *est un champ de gradient* $\Longrightarrow \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ *pour tout* i *et tout* j*.*

Théorème 7.17

Soit $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$ *un champ de vecteurs de classe* C^1 *sur un ouvert* D *simplement connexe (c.à.d connexe sans trou). Alors:*
$\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ *pour tout* i *et tout* j *sur* D *s.s.i.* F *est un champ de gradient sur* D*.*

Exemple 7.18

Soit $F(x, y) = (2xy^3, 1 + 3x^2y^2)$. F est-il un champ de gradient? si oui, trouver son potentiel f.

Théorème 7.19 (Green-Riemann)

Soit D un compact de $\mathbb{R}^2$ limité par un bord $C = Fr(D)$ de classe C^1 par morceaux et orienté positivement. $P, Q : D \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1. On a

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dA.$$

Exemple 7.20

On considère l'intégrale curviligne $I = \oint_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ avec C une courbe fermée constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ orientée positivement.

1. Calculer l'intégrale curviligne I.
2. Vérifier le résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.