Analyse 3

AMAL Youssef

2018-2019

Programme du cours

1. Topologie dans $\mathbb{R}^n$
2. Fonction de Plusieurs Variables
3. Calcul Différentiel
4. Calcul d'Intégrales Multiples
5. Calcul d'Intégrales Curvilignes

Références:

- Mathématiques 3, par E. AZOULAY
- Mathématiques, par Francine Delmer
- Site web: www.bibmath.net, exo7.emath.fr

Note du Module: CC 1 (50%) + CC 2 (50%).

Définition 1.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Une application $N : E \to \mathbb{R}$ est appelée norme, notée encore par $\| \ . \ \|$, s.s.i. les trois propriétés sont vérifiées:

- $N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$, pour $x \in E$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$.
- $\forall (x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé ***espace vectoriel normé***.

Remarque 1.2

- Soit N une norme définie sur l'e.v. E. Montrer que $N(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.

Exercice 1.3

- Montrer que les applications suivantes N_1, N_2, N_∞ définies sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ par:
  $N_1(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $N_2(x_1, ..., x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,
  $N_\infty(x_1, ..., x_n) = \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$ sont des normes.

Définition 1.4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équivalentes s.s.i. $\exists \alpha, \beta > 0$ telle que
$\forall x \in E, \;\; \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$.

Exemple 1.5

- Les normes N_1, N_2 et N_∞ définies sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes,
  A vérifier que: $N_\infty \leq N_1 \leq nN_\infty$ et $N_\infty \leq N_2 \leq \sqrt{n}N_\infty$.

Exercice 1.6

- Les normes N_1, N_2 et N_∞ définies sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels et à degré quelconque par:
  $N_1(P) = \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$, $N_2(P) = \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2}$, $N_\infty(P) = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$ avec
  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $n \in \mathbb{N}$, ne sont pas équivalentes

Définition 1.7

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r \in]0, +\infty[$.

- La boule ouverte de centre a et de rayon r est : $B(a, r) = \{x \in E | N(x - a) < r\}$.
- La boule fermée de centre a et de rayon r est : $B_F(a, r) = \{x \in E | N(x - a) \leq r\}$

Exemple 1.8

1. Dans l'e.v. $(\mathbb{R}, |.|)$, on a: $B(a, r) =]a - r, a + r[$ et $B_F(a, r) = [a - r, a + r]$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, on a: $B_{1,F}(O, 1) \subset B_{2,F}(O, 1) \subset B_{\infty,F}(O, 1)$

Définition 1.9

Un ensemble A d'un e.v.n E est appelé ouvert si, $\forall a \in A$, $\exists r > 0$ tq $B(a, r) \subset A$. L'ensemble des ouverts de E est noté par $\mathcal{O}$.

Exemple 1.10

1. Dans l'e.v.n E, $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.
2. Soit a, b deux réels tels que $a < b$. L'intervalle $]a, b[$ est un ouvert dans $\mathbb{R}$.
3. Dans l'e.v.n E, une boule ouverte est un ouvert.

Définition 1.11

Un ensemble A d'un e.v.n E est appelé fermé si son complémentaire A^c est ouvert. L'ensemble des fermés de E est noté par $\mathcal{F}$.

Exemple 1.12

1. Dans l'e.v.n E, $\emptyset$ et E sont des fermés de E.
2. Soit a, b deux réels tels que $a < b$. L'intervalle $[a, b]$ est un fermé dans $\mathbb{R}$.
3. Dans l'e.v.n E, une boule fermée est un fermé.

Théorème 1.13

Deux normes équivalentes sur un e.v.n E définies mêmes parties ouvertes de E.

Théorème 1.14

Toutes les normes définies sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalente.

Exemple 1.15

1. les normes de l'e.v $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.
2. Les normes de l'e.v $\mathbb{R}[X]$ ne sont pas forcément équivalentes.

Remarque 1.16

Si A est un ouvert pour une norme N_1 de $\mathbb{R}^n$ alors A est aussi ouvert pour tout autre norme N_2 définie sur $\mathbb{R}^n$.

Propriété 1.17

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

1. *$\emptyset$ et E sont à la fois des ouverts et des fermés de E.*
2. *Si $\forall i \in I$, $A_i \in \mathcal{O}$ Alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}$.*
3. *Si $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $A_i \in \mathcal{O}$ Alors $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{O}$.*
4. *Si $\forall i \in I$, $B_i \in \mathcal{F}$ Alors $\bigcap\limits_{i\in I} B_i \in \mathcal{F}$.*
5. *Si $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $B_i \in \mathcal{F}$ Alors $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{F}$.*

Exercice 1.18

Soit la famille des ouverts $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $A_n =]-1/n, 1/n[$. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \notin \mathcal{O}$.

Définition 1.19

Soit $(E, \| \,.\, \|)$, un espace vectoriel normé, et $a \in E$. On dit que V est un ***voisinage*** de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$. L'ensemble des voisinages de a est noté par $\mathcal{V}(a)$.

Exemple 1.20

1. $[0, 1]$ est un voisinage de $1/2$.
2. $B_F(O, 1) \in \mathcal{V}((-1/2, 0))$, par contre $B_F(O, 1) \notin \mathcal{V}((0, 1))$.
3. toute partie ouverte est voisinage de chacun de ses points

Définition 1.21

Soit $(E, \| \,.\, \|)$, un espace vectoriel normé, A un ensemble de E et $a \in E$.
On dit que a est ***intérieur*** à A ssi A est voisinage de a:
$\exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. L'ensemble des points intérieurs à A est appelé l'intérieur de A est noté par $\mathring{A}$ ou $int(A)$.

Exemple 1.22

1. $int([0, 1[) =]0, 1[$.
2. $int(]0, 1[\cup \{2\}) = ?$.

Propriété 1.23

Soit A, un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E.

1. *$\mathring{A}$ est un ouvert.*
2. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.*
3. *A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.*

Définition 1.24

Soit $(E, \| \, . \, \|)$, un espace vectoriel normé, A un sous ensemble de E et $a \in E$. On dit que a est ***adhérent*** à A ssi $\forall r > 0$ tel que $B(a,r) \cap A \neq \emptyset$. L'adhérence de A, notée $\bar{A}$, est l'ensemble des adhérents de A.

Exemple 1.25

1. $\overline{[0,1[} = [0,1]$.
2. $\overline{]0,1[\cup \{2\}} = ?$.

Proposition 1.26

Soit A, un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E. Alors $\left(\overline{A}\right)^c = (\overset{\circ}{A^c})$.

Propriété 1.27

Soit A, un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E.

1. *$\overline{A}$ est un fermé.*
2. *$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*
3. *A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.*

Exercice: Soit $(E, \| \ . \ \|)$, un espace vectoriel normé, et $a \in E$. Soit $r > 0$. Alors:

1. $\overline{B(a,r)} = B_F(a,r)$.
2. $\overset{\circ}{B_F(a,r)} = B(a,r)$.

Définition 1.28

Soit $(E, \| \, . \, \|)$, un espace vectoriel normé, A un sous ensemble de E. On appelle frontière de A et on note $Fr(A)$, l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Exemple 1.29

1. $Fr([0,1[\cup\{2\}) = \{0,1,2\}$.
2. $B_F(O,1) \setminus B(O,1/2)$

Propriété 1.30

$Fr(A)$ est une partie fermée de E.

Définition 1.31

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ si: $\exists r > 0, \forall x \in A$ on a $\| x \| \leq r$.

Exemple: Toute boule est bornée dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.32

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est compacte de $\mathbb{R}^n$ si A est à la fois fermée et bornée.

Exemple: $[0, 1] \times [-2, 0]$ est un compacte de $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.33

On appelle suite à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ toute application de $\{p_0, p_0+1, ...\}$ dans $\mathbb{R}^n$, une telle suite est dite définie à partir du rang p_0. On la note $(U_p)_{p\geq p_0}$. Le vecteur $U_p = (U_{1,p}, ..., U_{n,p}) \in \mathbb{R}^n$ est appelé terme générale de la suite.

Définition 1.34

Une suite $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^n$ a pour limite le vecteur $l \in \mathbb{R}^n$ si:
$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\| U_p - l \| < \varepsilon$
et on écrit $\lim\limits_{p\to+\infty} U_p = l$.

Exercice:

Soit N_1 et N_2 deux normes définies sur $\mathbb{R}^n$ et soit $(U_p)_p$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ et $l \in \mathbb{R}^n$ tels que $\lim\limits_{p\to+\infty} N_1(U_p - l) = 0$. Montrer qu'on a aussi: $\lim\limits_{p\to+\infty} N_2(U_p - l) = 0$.

Exemple:

1. La suite de terme générale $U_p = (1/p, -1)$ converge vers $l =?$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. La suite de terme générale $U_p = (0, p)$ définie dans $\mathbb{R}^2$ ...? .

Propriété 1.35

Soient $(U_p)_p$, $(V_p)_p$ *deux suites de* $\mathbb{R}^n$, $(l, l') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $\lim\limits_{p \to +\infty} U_p = l$ *alors* l *est unique.*
2. *Si* $\lim\limits_{p \to +\infty} U_p = l$ *alors pour toute suite extraite* $(U_{\phi(p)})_p$ *de* $(U_p)_p$ (ϕ *est une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$) *on a* $\lim\limits_{p \to +\infty} U_{\phi(p)} = l$.
3. *Si* $\lim\limits_{p \to +\infty} U_p = l$ *et* $\lim\limits_{p \to +\infty} V_p = l'$ *alors* $\lim\limits_{p \to +\infty} U_p + V_p = \lim\limits_{p \to +\infty} U_p + \lim\limits_{p \to +\infty} V_p = l + l'$.
4. *Si* $\lim\limits_{p \to +\infty} U_p = l$ *alors* $\lim\limits_{p \to +\infty} \alpha U_p = \alpha l$.
5. *Si* $\lim\limits_{p \to +\infty} U_p = l$ *alors* $\lim\limits_{p \to +\infty} \parallel U_p \parallel = \parallel l \parallel$.
6. *Si* $\lim\limits_{p \to +\infty} U_p = l$ *avec* $U_p = (U_{1,p}, ..., U_{n,p})$ *et* $l = (l_1, ..., l_n)$ *alors* $\lim\limits_{p \to +\infty} U_{i,p} = l_i$ $\forall i = 1, ..., n$.

Exemple:

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} (\cos(1/n), \arctan(n))$.
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \big(\log(n)/n, \sin(n)/n, n^2 \exp(-n)\big)$.

Proposition 1.36

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est fermée s.s.i. $\forall (U_p)_p \subset A$ telle que $\lim\limits_{p\to+\infty} U_p = l$ alors $l \in A$.

Exercice:

Montrer que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y > 1\}$ n'est pas une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1.37 (Bolzano-Weierstrass)

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est compacte s.s.i. toute suite $(U_p)_p$, à valeurs dans A, admet une sous-suite $(U_{\phi(p)})_p$ qui converge vers une limite $l \in A$.

Exercice:

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ et soit X une partie fermée de $\mathbb{R}^2$ telles que $K \cap X = \emptyset$. Montrer que la distance entre K et X est non nulle: il existe $\delta > 0$ tel que $\| k - x \| \geq \delta$ pour tout $(k, x) \in K \times X$.

Fonction scalaire

Définition 2.1

Une fonction réelle, dite aussi fonction scalaire, de p variables réelles est une application d'une partie D de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée par:

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_p) &\mapsto z = f(x_1, ..., x_p) \end{aligned}$$

où D est l'ensemble de définition de f, constitué de tout vecteur de $\mathbb{R}p$ dont l'image par f existe dans $\mathbb{R}$.

Exemple:

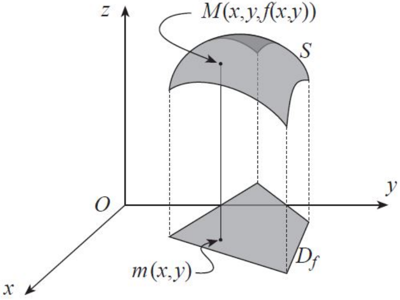
La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

est définie pour les valeurs de x et y telles que $x^2 + y^2 \leq 1$. Dans un repère orthonormé, $D_f = B_F(O, 1)$.

Graphe

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \; z = f(x, y)\}$.
- S est le graphe de la fonction f.



Fonction vectorielle

Définition 2.2

Une fonction vectorielle de p variables réelles est une application d'une partie $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, noté par:

$$f : D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$$
$$(x_1, ..., x_p) \mapsto (f_1(x_1, ..., x_p), ..., f_q(x_1, ..., x_p))$$

où D est l'ensemble de définition de f, constitué de tout vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont l'image par f existe dans $\mathbb{R}^q$. Les f_i sont appelées fonctions coordonnées de f.

Remarque: Le domaine de définition de la fonction vectorielle f est: $D_f = \cap_{i=1}^q D_{f_i}$.

Exemple:

Déterminer le domaine de définition de la fonction vectorielle suivante:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (\sqrt{1 - x^2 - y^2}, xy, \frac{1}{x - y})$$

Fonction partielle

Définition 2.3

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$. Soit $a = (a_1, ..., a_p) \in D$. Pour $i = 1, ..., p$, on appelle i-ème fonction partielle de f en a définie sur le domaine $D_i = \{x \in \mathbb{R} \mid (a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_p) \in D\}$ la fonction suivante :

$$\begin{aligned} & f_{a,i} : D_i \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q \\ & x \mapsto f(a_0, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_p) \end{aligned}$$

Exemple:

Donner les expressions de la 1-ère et de la 2-ème fonction partielle en $a = (1/2, 1)$ de la fonction suivante:

$$\begin{aligned} & f : B_2(O, 2) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

Définition 2.4

Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ et $l \in \mathbb{R}^q$. Soit $a \in \overline{D}$. On dit que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \alpha > 0$ tels que $\forall x \in D$ et $0 < \| x - a \| < \alpha$ impliquent $\| f(x) - l \| < \varepsilon$.

Remarque:

1. La notion de limite ne dépend pas des normes utilisées.
2. La limite si elle existe est unique.

Proposition 2.5

Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ et $l \in \mathbb{R}^q$. Soit $a \in \overline{D}$. Alors $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ssi $\forall (x_n)_n \subset D \setminus \{a\}$ tel que $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$ implique $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$

Exemple:

On considère la fonction suivante:

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Étudier la limite de f en $(0,0)$?

Propriété 2.6

Soient f et g deux fonctions sur $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2$, alors

1. *Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a $\lim\limits_{x \to a} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha l_1 + \beta l_2$.*
2. $\lim\limits_{x \to a} < f(x), g(x) >=< l_1, l_2 >$.
3. *Dans le cas où $q = 1$, si $l_1 \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = l_1/l_2$.*

Exemple:

Calculer $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{(1 + x^2y^2)\sin(y)}{y}$.

Théorème 2.7 (Théorème des Gendarmes)

Soit $a \in \mathbb{R}^p$ et soient f, g et h trois fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l$
2. *Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $0 < \| x - a \| < \alpha$ on a $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Alors $\lim\limits_{x \to a} h(x) = l$.*

Exemple:

Calculer $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} x^2 \sin(\dfrac{1}{x^2 + y^2})$.

Proposition 2.8

Soient $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *et* $g : D_g \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. *Supposons que* $g(D_g) \subset D_f$, $\lim\limits_{t \to a} g(t) = b$ *et que* $\lim\limits_{x \to b} f(x) = l$. *Alors,* $\lim\limits_{t \to a} f \circ g(t) = l$.

Exemple:

- Calculer $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} (x+y)\ln(x+y)$.

Définition 2.9

Chaque point $P(x,y)$ du plan $\mathbb{R}^2$ peut être déterminée par les coordonnées polaires qui sont la coordonnée radiale $r = \| \overrightarrow{OP} \|$ et la coordonné angulaire θ, suivant l'application suivante:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ &(r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)), \end{aligned}$$

dont l'application réciproque est l'application suivante:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\\ &(x,y) \mapsto (r,\theta), \end{aligned}$$

où $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et θ est défini comme suit: $\theta = \begin{cases} arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \text{ et } y \geq 0, \\ arctan(y/x) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0, \\ arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0, \\ \pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0, \\ 3\pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0. \end{cases}$

- La condition sur les deux variables $(x,y) \to 0$ devient une condition sur une seule variable $r \to 0$.
- Si on étudie une limite quand $(x,y) \to (a,b)$, on ramène le problème en $(0,0)$ par translation des variables, $x = a+h$,$y = b+k$ avec $(h,k) \to (0,0)$.
- Calculer les limites suivantes: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x}$.

Définition 2.10

Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est continue en $a \in D$ ssi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est continue sur D si elle est continue en tout point de D.

Proposition 2.11

Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est continue en $a \in D$ ssi pour toute suite $(x_n)_n \subset D$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x_n) = f(a)$.

Proposition 2.12

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction continue au point $a = (a_1, ..., a_p)$ alors les p fonctions partielles $f_{a,i}$ de f sont continues en a_i pour tout $i = 1, ..., p$.

Exemple: Soit $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \forall (x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Étudier la continuité des fonctions partielles $f_{O,1}$ et $f_{O,2}$ de la fonction f au point $(0, 0)$.
2. Que peut dire de la continuité de la fonction f au point $(0, 0)$.

Propriété 2.13

Soient f et g deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et continues en a, alors:

1. *Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est continue en a.*
2. *de même $< f, g >$ et $\| f \|$ sont continues en a.*
3. *Dans le cas où $q = 1$, si $g \neq 0$ au voisinage de a alors la fonction f/g est continue en a.*
4. *la composée de fonctions continues est continue.*

Exemples: les fonctions suivantes sont continues:

1. $p_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ avec $p_i(x_1, ..., x_p) = x_i$.
2. $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ avec $f(x_1, ..., x_p) = a x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_p^{i_p}$, $a \in \mathbb{R}$ et $i_1, ..., i_p \in \mathbb{N}$.
3. les fonctions polynômes définis sur $\mathbb{R}^p$.
4. les applications linéaires définies sur $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ (même lipschitzienne).

Définition 2.14

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Soit $a \in \overline{D} \setminus D$. Si f a une limite l lorsque x tend vers a, on peut étendre le domaine de définition de f à $D \cup \{a\}$ en posant $f(a) = l$. Et on dit que f est prolongeable par continuité au point a.

Exemple: Pour quel paramètre $\alpha > 0$ la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^\alpha y}{x^2 + y^2}$ est-elle prolongeable par continuité au point $(0, 0)$?

Théorème 2.15

Soit f une fonction continue sur $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $F \subset \mathbb{R}^q$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. *f est continue en tout point de D,*
2. *pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U) = \{x \in D \mid f(x) \in U\}$ est un ouvert de D.*
3. *pour tout fermé V de F, $f^{-1}(V)$ est un fermé de D.*

Exemple: Montrer que l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(1 - 2x)\}$ est fermé de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2.16

Soit f une fonction continue sur $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. Soit A un compact de $\mathbb{R}^p$ tel que $A \subset D$. Alors $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}^q$.

Corollaire 2.17

Soit A un compact de $\mathbb{R}^p$. Soit f une fonction continue sur $A \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur A.

Exercice: Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. et Soit $f : C \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue. Démontrer que $\inf_{x \in C} f(x) > 0$.

Définition 2.18

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$. Une séparation de A est une paire (O, O') d'ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$ tels que:

1. $A \subset O \cup O'$
2. $A \cap O \neq \emptyset,\ A \cap O' \neq \emptyset$,
3. $A \cap O \cap O' = \emptyset$.

Exemple:

- Dans $\mathbb{R}$, le paire $(]-1, 1[,]1/2, 2[)$ est une séparation de l'ensemble $[0, 1/2[\cup]1, 3/2]$.

Définition 2.19

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$. A est dit connexe si A n'admet aucune séparation.

Exemple:

- l'ensemble $[0, 1/2[\cup]1, 3/2]$ n'est pas un connexe.

Proposition 2.20

Dans $\mathbb{R}$, tout ensemble est connexe si seulement s'il est un intervalle.

Définition 2.21

Soient x et y sont deux points de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$, on appelle chemin d'origine x et d'extrémité y toute application continue $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Définition 2.22

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite connexe par arcs si tout couple de points de A est relié par un chemin restant dans A.

Définition 2.23

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$. A est dit convexe si pour tout a et b de A, le segment $[a,b] = \{(1-t)a + tb;\ t \in [0,1]\}$ est contenu dans A.

Exemple:

- Dans $\mathbb{R}^n$, toute partie convexe est connexe par arcs
- Un cercle est un connexe par arcs.

Théorème 2.24

Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. Soit A une partie connexe (respectivement connexe par arcs) de $\mathbb{R}^p$. Soit $f : A \to \mathbb{R}^q$ une application continue. Alors $f(A)$ est aussi connexe (respectivement connexe par arcs).

Corollaire 2.25

Si $A \subset \mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, est connexe par arc alors A est connexe.

Exemple:

- Tout ensemble convexe est connexe.

Définition 2.26

Une partie A de $\mathbb{R}^p$ est dite étoilée s'il existe $a \in A$ tel que $[a, x] \subset D$ pour tout $x \in A$.

Exercice:

- Toute partie convexe est une partie étoilé dans $\mathbb{R}^p$. La réciproque n'est pas en générale vraie.
- $A = ([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([1, 2] \times [0, 2])$ est étolé mais non convexe.