ENSA Tanger
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES - TANGER

UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI

Contrôle Continu 2 (Durée: 2h)

Analyse 3

Année Universitaire 1440/2019

Questions de cours (6 points):

1. Soit f une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$ dans un voisinage de a, telle que les valeurs propres de sa matrice hessienne $H_f(a)$ sont toutes strictement positives.
   (a) Donner l'expression de $H_f(a)$.
   (b) Montrer que $h^t.H_f(a).h > 0$ pour tout vecteur h non nul de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ limitée par une courbe C de classe C^1 par morceaux, fermé et simple, orienté positivement. Soit $P : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que: $\oint_C P(x,y)dx = -\int\int_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dA$.

Exercice 1 (6 points):

On considère la fonction $f(x,y,z) = xy + 2x - z^2y$ définie sur $\mathbb{R}^3$.

1. Trouver les extremums relatifs de la fonction f sur $\mathbb{R}^3$.
2. Sont-ils des extremums absolus de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (4 points):

Soit Q le corps délimité par les graphes: $z = 4 - y^2$, $x + z = 4$, $x = 0$ et $z = 0$.

1. Dessiner le corps Q dans le repère orthonormé (Oxyz).
2. Calculer le volume du corps Q, en considérant sa projection sur le plan (Oxz).

Exercice 3 (4 points):

On considère l'intégrale double suivante: $I = \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dxdy$.

1. Dessiner la région sur laquelle l'intégrale I est définie.
2. Calculer l'intégrale I.

(P. I)

Correction du CC2 (1440 – 2019)

Pour la réponse aux questions de cours et question 1 de l'ex. 2 voir cours et TD.

Q.1(a) : 1 pt + Q.1(b) : 2 pts ; Q.3 : 3 pts

Ex 1 (6 pts)

(1 pt)

* Cherchons les pts critiques de f sur $\mathbb{R}^3$

Puisque la fct f est une fct polynomiale sur $\mathbb{R}^3$ alors elle est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et par suite ses seuls pts critiques sont les solutions du système $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$.

(3 pts)

On a $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2 = 0 \\ x - z^2 = 0 \\ -2zy = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = z^2 \\ z = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = z^2 \\ z = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -2 \\ y = 0 \\ x = z^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = z^2 \\ z = 0 \end{cases}$ car le système $y=-2$; $y=0$ et $x=z^2$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$ du fait que y ne peut prendre 2 valeurs différentes.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$

Donc le seul pt critique de f sur $\mathbb{R}^3$ est $(0,-2,0)$.

$\boxed{\text{P.II}}$ Classifions le pt critique $(0,-2,0)$ par la méthode de la matrice hessienne :

On a $H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2z \\ 0 & -2z & -2y \end{pmatrix}$

d'où $H_f(0,-2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

et on a $\det\left(H_f(0,-2,0) - \lambda I_3\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

$= (4-\lambda)(\lambda^2-1)$

1pt

1pt

D'où les valeurs propres de $H_f(0,-2,0)$ sont $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$ et $\lambda_3=4$

Comme $\lambda_1<0$ et $0<\lambda_2, \lambda_4$ alors f n'admet pas d'extremum relatif en $(0,-2,0)$ sur $\mathbb{R}^3$.

<u>Ex 2</u> (4 pts) ; <u>Q.1 (2 pts)</u> et <u>Q.2 (2pts)</u>

$\boxed{\text{Q.2}}$ Le volume V du corps Q est donné par :

$$V = \iiint_Q 1\, dV$$

, puisque la fct constante $(x,y,z) \mapsto 1$ est continue sur $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,z) \in R \text{ et } -\sqrt{4-z} \leq y \leq \sqrt{4-z}\}$

où $R = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq z \leq 4 \text{ et } 0 \leq x \leq 4-z\}$

P. III. b)

et vu les 2 fcts $(x,z)\mapsto\sqrt{4-z}$ et $(x,z)\longmapsto\sqrt{4-z}$ sont continues avec $-\sqrt{4-z}\leq\sqrt{4-z}$ pour tout $(x,z)\in R$. Alors d'après le th. de Fubini appliqué aux intégrales triple, on a :

$$V=\iint_R\int_{-\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z}}1\,dy\,dA$$ et ceci en considérant la projection du corps Q sur le plan (Oxz).

Ainsi, $V=2\iint_R\sqrt{4-z}\,dA$.

puisque $(x,z)\mapsto\sqrt{4-z}$ continue sur $\mathbb{R}\times]-\infty,4]$, en particulier, sur la région $R\subset\mathbb{R}\times]-\infty,4]$ et puisque la fct nulle et $z\mapsto 4-z$ sont continues avec $0\leq 4-z$ pour tout $z\in[0,4]$ Alors d'après le th de Fubini appliqué aux intégrales doubles, on a :

$$V=2\int_0^4\int_0^{4-z}\sqrt{4-z}\,dx\,dz=2\int_0^4(4-z)^{3/2}dz$$

$$=2\left[-\frac{2}{5}(4-z)^{5/2}\right]_0^4=2\cdot\frac{2}{5}\cdot4^{5/2}=\frac{2^7}{5}=\boxed{\frac{128}{5}}$$

PP IV

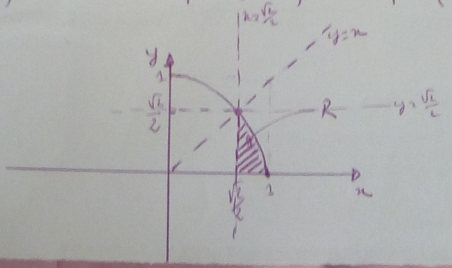
Ex3 : 1/ Soit R la région sur laquelle l'intégrale I est définie

avec $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$

Ainsi R est délimitée par les droites d'équations $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = 0$

et les 2 courbes d'équation $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = \sqrt{1-y^2}$

cette dernière éq est celle de l'arc du cercle de centre O et de rayon 1 défini entre le pt $(1,0)$ et le pt $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:



1 pt

IV Ex3 : Q2 (3 pts)

Pour pouvoir calculer I, nous proposons de permuter entre les intégrales de I, mais avant vérifions que I existe dans $\mathbb{R}$:

On a $$\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left|\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| dx\,dy \leqslant \int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,dy$$

car $0 < \frac{\sqrt2}{2}$, $\frac{\sqrt2}{2} \leqslant \sqrt{1-y^2}$ et $|\sin(x)| \leqslant 1$ pour tout $(x,y) \in R$

On a aussi $\sqrt{1-y^2} \leqslant 1$ d'où :

$$\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left|\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| dx\,dy \leqslant \int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt2}{2}} \arcsin(1) - \arcsin\left(\frac{\sqrt2}{2}\right) dy = \frac{\sqrt2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < +\infty.$$

Par conséquent la fct $(x,y) \longmapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur la région R. D'après le th de Fubini, on a alors :

(0.5 pt)

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,dy = \iint_R \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dA$$

(2.5 pts)

Or $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\sqrt2}{2} \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\right\}$ Alors

$$I = \int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dy\,dx = \int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1} \frac{\sin(x)}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big[-\cos(x)\Big]_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}$$

Donc $\boxed{I = \cos\left(\frac{\sqrt2}{2}\right) - \cos(1)}$