I/ Modélisation des actions mécaniques :

→ L'action mécanique élémentaire :

$$\{dF\} = {}_A\begin{Bmatrix} d\vec{F}(M) \\ \vec{AM} \wedge d\vec{F}(M) \end{Bmatrix}$$

→ Le torseur des actions mécaniques :

$$\{F\} = \begin{cases} \vec{R} = \int_{M \in D} d\vec{F}(M) \equiv \text{Résultante}(N) \\ \vec{\mathcal{M}}_A = \int_{M \in D} \vec{AM} \wedge d\vec{F}(M) \equiv \text{moment Résultant}(m.N) \end{cases}$$

$\Downarrow$

Glisseur

$\equiv \vec{\mathcal{M}}_P = \vec{0}$ $\left(\{F\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}\right)$

(Champ des moments : $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_P + \vec{OP} \wedge \vec{R}$)

Couple

$\equiv \vec{R} = \vec{0}$ $\left(\{F\} = {}_{\forall P}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}} \end{Bmatrix}\right)$

et son couple est $\vec{C} = \vec{\mathcal{M}}$

$\Downarrow$

action linéique

$\equiv d\vec{F}(M) = \vec{f}(M) \cdot dl$

et

$\vec{f}(M) = -p\vec{y}$

avec $p \equiv$ pression linéique

action surfacique

$d\vec{F}(M) = \vec{f}(M) ds$

et

$\vec{f}(M) = p(M)\vec{x}$

avec

$p(M) = \rho g(h - y_m) + P_{atm}$

ty ρ = masse volumique de l'eau

h = hauteur de l'eau

P_{atm} = Pression atmosphérique

action volumique

$d\vec{F}(M) = \vec{f}(M) \cdot d\tau$

et

$\vec{f}(M) = \rho(M)\vec{g}$

avec $\rho(M) = \frac{dm}{dV}$

(masse volumique)

Pour les Coordonnées doivent être compatible avec la source de contact

$\Downarrow$

$$d\vec{F}_{1\to2}(M) = d\vec{N}_{1\to2}(M) + d\vec{T}_{1\to2}(M)$$

$d\vec{N}_{1\to2}(M)$: Répartition de l'effort normal (pression de contact)

$d\vec{T}_{1\to2}(M)$: Répartition de l'effort tangentielle

•/ Loi de Coulomb (Relation entre T et N) :

Pas de frottement

$\Downarrow$

$d\vec{T}_{1\to2}(M) = \vec{0}$

$d\vec{F}_{1\to2}(M) = d\vec{N}_{1\to2}(M)$

frottement + glissement ($\vec{V}_g(M \in 2/1) \neq \vec{0}$)

$\Downarrow$

$d\vec{T}_{1\to2}(M) = -\vec{V}_g(M \in 2/1)$

$f = \tan\varphi = \frac{\|d\vec{T}_{1\to2}(M)\|}{\|d\vec{N}_{1\to2}(M)\|}$

↓ coeff de frottement

frottement sans glissement

$\Downarrow$

adhérence en M entre (1) et (2)

$f_0 = \frac{\|d\vec{T}_{1\to2}(M)\|}{\|d\vec{N}_{1\to2}(M)\|}$

↓ coeff d'adhérence

$f_0 >> f \xrightarrow{\text{Pratique}} f_0 = f$

$\Downarrow$

$$\vec{f}_{1\to2}(M) = \vec{n}_{1\to2}(M) + \vec{t}_{1\to2}(M)$$

→ Torseur d'action mécanique transmissible par les liaisons normalisées :

on a : $\begin{cases} \vec{R}_{1\to2} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{\mathcal{M}}_A(1\to2) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$

d'où

$$\{F(1\to2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

→ Torseur cinématique :

$$\{\mathcal{V}(1\to2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(A \in 2/1) \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \Omega_x & V_x \\ \Omega_y & V_y \\ \Omega_z & V_z \end{Bmatrix}$$

⇒ Relation entre torseur cinématique et d'action :

$\{F(i\to j)\} \cdot \{\mathcal{V}(j/i)\} = 0$ (Pour les liaisons entre i et j)

sauf liaison hélicoïdale d'axe $(A, \vec{x})$

$$V_x = \frac{-p}{2\pi}\Omega_x \; ; \; L = \frac{-p}{2\pi}X$$

L'inertie

- **Moment d'inertie**
  - Déf :
    - $I_{ox} = \int y^2 + z^2 \, dm$
    - $I_{oy} = \int x^2 + z^2 \, dm$
    - $I_{oz} = \int x^2 + y^2 \, dm$
  - à partir de matrice d'inertie :
    - $I_\Delta = ([I_O(S)]\,\vec{\delta}) \cdot \vec{\delta}$
    - ou
    - $I_{\Delta} = ([I_O(S)] \cdot \vec{x_i}) \cdot \vec{x_i}$
- **Matrice d'inertie**
  - d'un solide de propriété (S) :
    - $[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A = I_{ox} & -F & -E \\ -F = \int xy\,dm & B = I_{oy} & -D = -\int yz\,dm \\ -E = -\int xz\,dm & -D & C = I_{oz} \end{bmatrix}$
    - ⇓ Par symétrie
      - 1 plan de symétrie
        - matérielle ⇓ $D = 0,\ E = 0$ ⇓ $[I_O(S)] = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$
        - Révolution $(O\vec{z})$ ⇓ $D = 0,\ E = 0$, $F = 0$ ⇓ $[I_O(S)] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$
      - 2 plans de symétrie
        - matérielle ⇓ $D = 0,\ E = 0$, $F = 0$ ⇓ $[I_O(S)] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$
        - Révolution $(O\vec{z})$ ⇓ $D = E = F = 0$, $A = B$ ⇓ $[I_O(S)] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$
      - méthode de calcul
  - d'un solide de G = centre d'inertie
    - Centre d'inertie ⇓
      - $\vec{OG} = \frac{1}{m} \int \vec{OM}\,dm$
      - $\int \vec{GM}\,dm = 0$
      - ⇓
      - $\int x^2\,dm = 0$
      - $\int y^2\,dm = 0$
      - $\int z^2\,dm = 0$
    - matrice d'inertie ⇓
      - $[I_G(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$
    - Th. d'Huygens ⇓
      - $I_O(S) = I_G(S) + md^2$
      - avec
      - $d^2 = \begin{pmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{pmatrix}$

Énergétique :

L'énergie cinétique E_c : (avec $T(\Sigma/R_g) = \sum T(S_i/R_g)$)

Cas général

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\{\mathcal{V}(S/R)\}\{P(S/R)\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S/R)\\ \vec{V}(A \in S/R)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}m\vec{V}(G/R)\\ \vec{\sigma}_A(S/R)\end{Bmatrix}$$

En translation

$$T(S/R) = \frac{1}{2} m V^2$$

V : vitesse de translation du solide

En rotation autour d'un axe fixe

$$T(S/R) = \frac{1}{2} I \omega^2$$

ω : vitesse de rotation

I : moment d'inertie $= [I_G(S)].\vec{x}].\vec{x}$

Puissance :

Cas général (actions mécaniques)

$$P(E_1 \to S) = \{F(E_1 \to S)\}\{\mathcal{V}(S/R)\}$$

$$= \begin{Bmatrix}\int dF_{E_1 \to S}(M)\\ \int \vec{AM} \wedge dF_{E_1 \to S}(M)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S/R)\\ \vec{V}(A \in S/R)\end{Bmatrix}$$

$P_{int}(\Sigma) = P(S_1 \leftrightarrow S_2) + P(S_2 \leftrightarrow S_3)$

$P_{ext}(\bar{\Sigma} \to \Sigma/R_g) = \sum P(\bar{S} \to S/R_g)$

Puissance des actions mutuelles :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{F(S_1 \to S_2)\}\{\mathcal{V}(S_2 \to S_1)\}$$

$$= \{F(S_1 \to S_2)\}\{\mathcal{V}(S_2 \to S_1)\}$$

Cas particulier

- **pesanteur** : $P(pes \to S/R) = m\vec{g}.\vec{V}(G/R)$
- **moteur** : $P(mot \to S/R) = C_m\,\omega$ (C_m : couple du moteur)
- **liaison parfaite** : $P(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0$

Th. de l'énergie cinétique :

Pour un solide

$$\frac{d}{dt}T(S/R_g) = P(\bar{S} \to S/R_g)$$

Pour un ensemble de solides

$$\frac{d}{dt}T(\Sigma/R_g) = P_{ext}(\bar{\Sigma} \to \Sigma/R_g) + P_{int}(\Sigma)$$

P F D

Définition

$$\{F(\bar{E} \rightarrow E)\} = \{\mathcal{D}(E/R_g)\}$$

le torseur des actions mécaniques — le torseur dynamique

$$\begin{Bmatrix} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) \\ \vec{M}_A(\bar{E} \rightarrow E) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G/R_g) \\ \vec{\delta}_A(E/R_g) \end{Bmatrix}$$

R_g : Référentiel galiléen : R_g

- R. Copernic → $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ — O : centre d'inertie; $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ = $\vec{V}$ fixe % aux étoiles
- R. géocentrique → R. en translation % au R (Copernic R_0)
- R. lié à la Terre → liés à la Terre

- $\vec{\Gamma}(G/R_g) = \frac{d}{dt}(\vec{V}(G/R))$
- $\vec{\delta}_A(E/R_g) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_A(E/R_g)}{dt}\right]_{R_g} + \vec{V}(A/R) \wedge m\vec{V}(G/R)$

Les éq. de PFD

On doit choisir :

- le solide ou l'ensemble de solides à isoler
- le théorème à utiliser et l'axe de projection

TRD

$$\sum \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = m\vec{\Gamma}(G/R_g)$$

on choisit le TR si la liaison : (glissière, pivot glissant) (d'axe $\vec{R}$) et on projette sur $\vec{K}$

TMD

$$\sum \vec{M}_A(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{\delta}_A(E/R_g)$$

on choisit le TM si la liaison : (pivot, sphérique, appui plan, rotule, annulaire, ponctuelle) (d'axe $\vec{R}$) et on projette sur $\vec{K}$

Calcul des éq. de PFD

on utilise : (G : centre d'inertie)

$$\vec{\delta}_G(S/R_g) \cdot \vec{K} =$$

si $\vec{K}$ est fixe dans R_g :

$$= \left[\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_G(S/R) \cdot \vec{K})\right]$$

avec $\vec{\sigma}_G(S/R) = [I_G(S)] \, \vec{\Omega}(S/R)$

Sinon :

$$= \left[\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_G \cdot \vec{K}) - \vec{\sigma}_G(S/R) \cdot \left[\frac{d\vec{K}}{dt}\right]\right]$$

avec $\left[\frac{d\vec{K}}{dt}\right]_{R_g} = \vec{\Omega}(R_k/R) \wedge \vec{K}$

Rq : si A un solide de masse nulle alors :

$$\vec{\delta}_G(A/R_g) = \vec{0}$$

P F S

Problèmes 3D

Résolution analytique

1/ Choisir le torseur d'action mécanique de la liaison (Rai)

2/ Choisir le système à isoler

3/ énoncé le PFS : $\{F(\bar{S} \to S)\} = \{0\}$

↳ $\bar{S}$ = le complémentaire de S (l'extérieur de S)

4/ exprimons les torseurs au même point en utilisons champ des moment : (Babar)

$\vec{M}_O(\bar{S} \to S) = \vec{M}_A(\bar{S} \to S) + \vec{OA} \wedge \vec{R}(\bar{S} \to S)$

et en $\vec{0}$ (pour les résultantes et les moments)

5/ d'où les deux th. suivants :

Th. de la Résultante : $\vec{R}(\bar{S} \to S) = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}(S_i \to S) = \vec{0}$

Th. du moment résultant en A : $\vec{M}_A(\bar{S} \to S) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(S_i \to S) = \vec{0}$

6/ Donc la traduction de l'équilibre devient

$$\underbrace{\begin{matrix} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \\ \sum Z_i = 0 \end{matrix}}_{\vec{R}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} \sum L_i = 0 \\ \sum M_i = 0 \\ \sum N_i = 0 \end{matrix}}_{\vec{M}_A}$$

Rq : Principe des actions mutuelles

$\{F(S_1 \to S_2)\} = -\{F(S_2 \to S_1)\}$

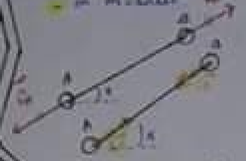
Problème 2D (Plan)

Résolution géométriques

Solide soumis à l'action de deux forces (glisseurs)

leurs résultantes : (des 2 glisseurs A et B)

- sont la même direction (AB)
- sens opposé
- même modules



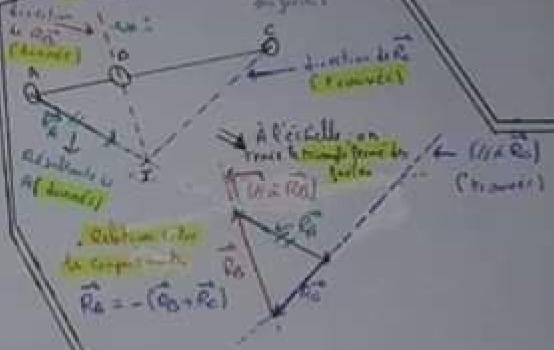
. Relation entre les composantes :

$\tan \alpha = \frac{YA}{XA} = \frac{YB}{XB}$

Solide soumis à l'action de trois forces

leurs résultantes :

- sont coplanaires (même plan)
- sont // ou concourantes en même point
- leur somme est nulle (Triangle fermé des forces)



. Relation entre les composantes :

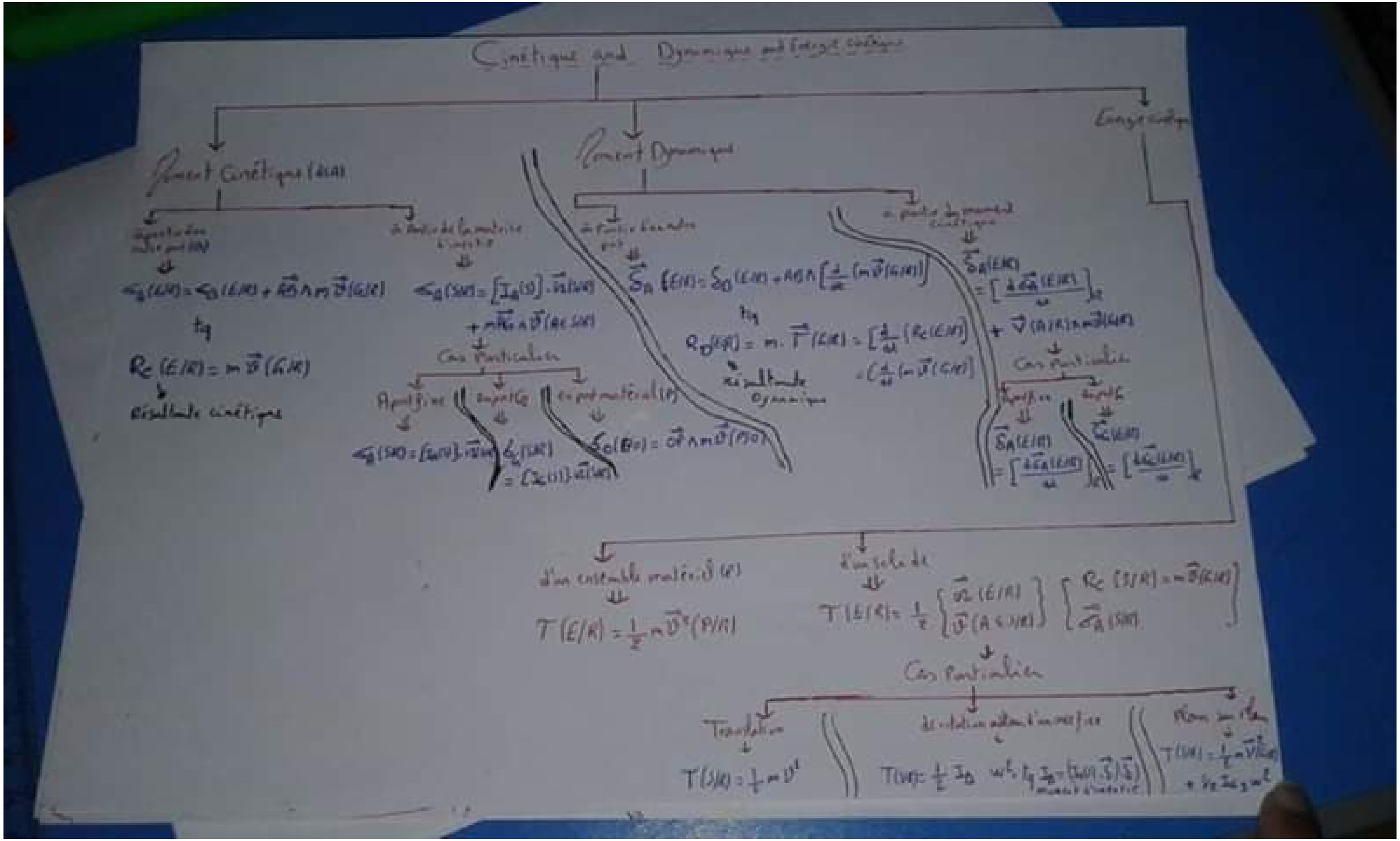
$\vec{R_A} = -(\vec{R_B} + \vec{R_C})$

Résolution analytique

on suit les même étapes que Problème 3D

on a que 3 équations de la traduction de l'équilibre 3 éq :

. 2 Résultant
. 1 Moment


Cinétique and Dynamique and Energie cinétique
Moment Cinétique
Moment Dynamique
Energie cinétique
tq
Résultante cinétique
Cas Particulier
Résultante Dynamique
Cas Particulier
Cas Particulier
Translation
moment d'inertie