TD proba 1e

Exercice 1:

1) Combien de mots distincts peut-on écrire des lettres du mot "LILLE"

→ Indexer les "L" dans "LILLE" :

$L_1 I L_2 L_3 E$

→ le nombre de mots distincts construits à partir de $L_1 I L_2 L_3 E$ est $5!$ car c'est le nombre de permutation de 5 lettres distincts entre 5 positions.

Cependant pour chaque mot il y a $3!$ répétitions, exemple

$$L_1 I L_2 L_3 E \begin{cases} L_2 I L_1 L_3 E \\ L_3 I L_2 L_3 E \\ L_1 I L_3 L_2 E \end{cases}$$

Car la permutation des 3 "L" dans ces 3 positions ne change pas le mot.

Soit N le nombre de ces mots distincts sachant que pour chaque mot on a $3!$ mot semblable alors

$3! . N = 5!$ le nombre totale des mots avec répétition.

Donc $\boxed{N = \frac{5!}{3!}} = A_5^2$

2) Combien de manières différentes peut-on placer l'une à côté de l'autre 5 Boules rouges, 3 vertes et 2B ?

- Si on indexe les boules suivant leurs couleurs on a.

$\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5; V_1, V_2, V_3; B_1, B_2\}$

on obtient $10!$ permutations des 10 boules entre 10 positions.

→ Si on enlève l'indexation des BR on obtient $5!$ de répétition d'alignement de telles boules car ça revient à permuter les 5 B.R entre leurs 5 positions dans l'alignement

X Ainsi le nbre d'alignement des BR non indexés

- En enlevant l'indexation des B.V on obtient $3!$ de répétitions d'alignements dû aux permutations entre les 3 boules vertes et leurs 3 positions dans l'alignement.

X Ainsi le nbre d'alignement des BR non indexés et B.V et B indexées est $N_1 = \frac{10!}{5!}$

Ainsi le nombre d'alignement sans répétition des BR et B.V non indexées et B.B sont indexées est :

$$N_2 = \frac{N_1}{3!} = \frac{10!}{5!3!}$$

le nbre d'alignement sans répétities des Boules R, V et B non indexes est.

$$N = \frac{10!}{5!3!2!}$$

3. Combien de nombres de 4 chiffres "abcd" peut-on écrire tq $a > b > c > d$.

- Remarquons que $a \in \{3, \dots, 9\}$ pour respecter la cd $a > b > c > d$.

- En fixant la valeur de a de $\{3, \dots, 9\}$ on définit les 3 chiffres qui restent du nombre à partir de l'ensemble $\{0, \dots, a-1\}$ et pour respecter la cd $b > c > d$, on ne doit pas permuter entre les 3 chiffres placés, Ainsi le nbre des nbres dont a est fixé est C_a^3. Par conséquent le nbre totale des nbres "abcd" respectant la cd $a > b > c > d$.

est $\sum_{a=3}^{9} C_a^3 = C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_8^3 + C_9^3$

Remarque :

$C^3_5 + C^3_4 + \dots + C^3_3 = C^4_{10}$

"abcd" tq $a > b > c > d$

l'ordre dans lui est inclus dans les chiffres

7- Combien peut-on former de nombres de 4 chiffres avec répétition des chiffres

On a 4 positions à remplir avec les 10 chiffres pour former un nbre de 4 chiffres, si les chiffres changent de position le nbre change de valeur et puisque la répétition des chiffres est acceptée donc il s'agit d'un 4-arrangement avec répétition de l'ensemble des chiffres

Donc le nbre de tels nombres est égal à 10^4, mais comme le chiffre des milliers doit être différent de 0 alors le nbre est plutôt égal à

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^3$$

Exercice 2 :

Dans une université il y a 5 économistes et 6 sociologues. On aimerait former un comité de 3 économistes et 3 sociologues. Combien peut on former de comités si :

a → Tous peuvent y participer.

En changeant l'ordre du choix des membres du comité le comité reste le même, la répétition des membres n'a aucun sens réel ; par conséquent il s'agit d'une combinaison de 3 parmi 5 et 3 parmi 6 pour les sociologues ainsi le nbre du comité est $C^3_5 \cdot C^3_6$.

Le produit s'interprète par les correspondances possible entre l'ensemble contenant les groupes possibles de 3 économistes et les groupes possibles de 3 sociologues

2ème méthode

card E = card F

$C^3_5 \cdot C^3_6$

b → Si un économiste ne peut y participer

→ i : l'économiste est désigné

→ ii : l'économiste n'est pas désigné

i. L'économiste est désigné

Dans ce cas là l'ensemble est réduit à 4 personnes ainsi le nbre de comités est de $C^3_4 \cdot C^3_6$

ii. L'économiste n'est pas désigné

Dans ce cas on retire un économiste parmi 5 d'une manière aléatoire puis on choisit les 3 économistes des 4 personnes restantes ainsi le nombre de comités est $C^1_5 \cdot C^3_4 \cdot C^3_6$

$(C^1_5 = A^1_5 = C^4_5 = A^4_5)$

c → Si une personne ne peut y participer

$C^1_5 \cdot C^3_4 \cdot C^3_6 + C^1_6 \cdot C^3_5 \cdot C^3_5$

d → deux sociologues doivent absolument

$C^2_6 \cdot C^3_5 \cdot C^1_4$

Exercice 3 :

Une urne contient 5 boules vertes (numérotées de 1 à 5) et 4 boules rouges (numérotées de 1 à 4)

1- On tire successivement et au hasard 3 boules de l'urne sans remise

Calculez la probabilité

Ω := justification. card $\Omega = A^3_9$ $= 9 \times 8 \times 7$

P = loi uniforme

card A = A^3_5

• justification de Ω :

- Puisque le tirage des boules est au hasard, alors la loi de probabilité considérée est la loi uniforme

- l'espace des événements Ω contient tous les arrangements sans répétition de 3 boules parmi 9 car le tirage est effectué d'une manière successive et sans remise

Donc $\text{card}\,\Omega = A_9^3 = 9 \times 8 \times 7$

⚠ Pour chaque exercice il faut toujours commencer par la justification de Ω.

Calculons la probabilité

a- Tirer 3 boules vertes

Soit A = " tirer 3 boules vertes "

$\text{card}(A) = A_5^3$ (même justification que Ω)

$= 5 \times 4 \times 3 = 60$

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{60}{504} = \frac{5 \times 4 \times 3}{7 \times 8 \times 9}$$

$$= \frac{5}{42}$$

b- ne tirer aucune boule verte

Soit B = " Tirer 3 boules rouges "

$\text{card}(B) = A_4^3 = 4 \times 3 \times 2$

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4 \times 3 \times 2}{7 \times 8 \times 9}$$

$$= \frac{1}{21}$$

c- Tirer au plus 2 boules vertes

Soit C = " Tirer au plus 2 boules vertes " $= \overline{A}$

* $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

avec $C_1 = \{R, R, R\}$ = " ne tirer aucune boule verte "

$C_2 = \{V, R, R\}$ = " tirer une seule boule verte "

$C_3 = \{R, V, V\}$ = " tirer 2 boules vertes "

1ère méthode : $C = \overline{A}$

d'où $P(C) = P(\Omega) - P(A)$

$$= 1 - \frac{5}{42}$$

$$= \frac{37}{42}$$

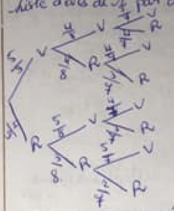
2ème méthode

* Remarquons que les C_1, C_2, C_3 sont disjoints 2 à 2

d'où $P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3)$

avec $P(C_1) = P(B) = \frac{1}{21}$

- liste d'évts de Ω par diagramme d'arbre



$$\text{d'où } P(C_2) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7}$$

$$P(C_2) = 3 \times \left(\frac{5 \times 4 \times 3}{9 \times 8 \times 7}\right)$$

* Autre justification pour $P(C_2)$

C_2 contient les triplets de forme

$$\begin{cases} RRV \\ RVR \\ VRR \end{cases}$$

Cela revient à une permutation de 3 parmi 2 b. rouges et 1 verte.

Donc le nombre de forme est :

$$\frac{3!}{2!\,1!} = 3.$$

En considérant la numérotation l'ensemble de triplets de la forme " RRV " contient tous les arrangements sans répétition de 2R parmi 4 et 1V parmi 5 donc le cardinal de cet ensemble est : $A_4^2 \cdot A_5^1$

Qui est le même pour les autres formes

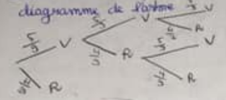
Ainsi $\text{card}(C_2) = 3 A_4^1 A_5^1$

⚠ Suggestion examen

Mq $\sum_{i=m}^{n} C_i^m = C_{N+1}^{m+1}$

2- D. « Tirer 2 boules R et une boule verte »
(les avec remise)

- Listons toutes les possibilités par diagramme de l'arbre



$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

avec C_1 contient les triplets de forme VRR

C_2 contient les triplets de forme RVR

C_3 contient les triplets de forme RRV

et C_1, C_2, C_3 sont disjoints 2 à 2

$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3)$

$= 3\left(\frac{5}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{4}{9}\right)$

$= \binom{3!}{2,1} \cdot \frac{A_5^1 \cdot A_4^1}{9^3}$

3- On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne

→ Reprenons les questions 1, 2, 3, 4

- Puisque le tirage est effectué simultanément alors l'ordre du choix des boules n'est pas pris en compte ainsi que les 3 boules prises sont distinctes (de numéros différents)

Donc l'événement C est l'ensemble de correspondances entre les combinaisons de 2R parmi 4 et combinaisons de 1V parmi 5 dont le nombre est $C_4^2 \cdot C_5^1$.

Exercice 4 :

1- La probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies

$P = P(A) \cdot P(B)$ (ils sont indépendants)

2- $P = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

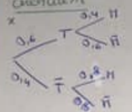
3- $P(A/B) = P(A \cap \bar{B})$

$= P(A) \cdot P(\bar{B})$

TD2 : Proba

Il faut toujours commencer par définir l'espace de probabilité

Exercice 1 :



l'arbre interprète l'ordre seulement

1. La probabilité pour que le client achète un téléviseur et un magnétoscope

$P(T \cap M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} \cdot P(T)$

$= P(M \mid T) \cdot P(T)$

$= 0,6 \cdot 0,4$

$= 0,24$

× Soit (Ω, P) l'espace de probabilité défini par

$\Omega = \{T, \bar{T}\}$ avec T : "acheter un télé"

$\bar{T}$: "ne pas acheter un télé"

P : définie par $P(T) = 0,6$ et $P(\bar{T}) = 1 - 0,6$
$= 0,4$

2. La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope.

D'après la probabilité totale on a :

$P(M) = P(M \mid T) \cdot P(T) + P(M \mid \bar{T}) \cdot P(\bar{T})$

$= 0,4 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4$

$= 0,24 + 0,08$

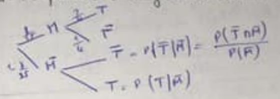
$= 0,32$

3. Probabilité d'acheter un téléviseur sachant qu'on achète un magnétoscope

D'après la formule de Bayes on a

$P(T \mid M) = \frac{P(T \cap M)}{P(M)} = \frac{0,24}{0,32} = \frac{3}{4}$

4. Remplissons le diagramme suivant



Exercice 2 :

Soit l'espace de proba suivant :

$\Omega = \{A, M\}$

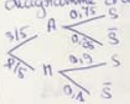
A : prendre aspirine

M : Prendre médicament M

La loi est définie par :

$P(A) = \frac{3}{5}$ $P(M) = 1 - \frac{3}{2} = 2/5$

diagramme d'arbre :



avec S : être soulagé par le médecin pris

$P(S) = P(S \mid A) \cdot P(A) + P(S \mid M) \cdot P(M)$

$= 0,75 \cdot \frac{3}{5} + 0,9 \cdot \frac{2}{5}$

$= \frac{81}{100}$

Interprétation des formules

Exercice 3 : Tablette + barre

A_m : " Trouver l'image en au plus m tablettes"

A_i : " Trouver l'image en i tablettes achetées"

$$A = \bigcup_{i=1} A_i$$

$$P(A_m) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \dots + \underbrace{\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{4}{5}}_{m-1} \times \frac{1}{5} \geq 0{,}9$$

$$P(A) = P(A_1) + \dots + P(A_m)$$

$$= \frac{1/5 \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^m\right)}{1/5} = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^m$$

× Soit (Ω, P) l'espace de probabilité avec $\Omega = \{C, \bar{C}\}$; C : " tablette ayant l'image "

P : loi uniforme discrète car toutes les tablettes ont la même chance d'avoir l'image c et $P(C) = \frac{1}{5}$; $P(\bar{C}) = \frac{4}{5}$

Remarquons que A est aussi l'événement contraire de " ne pas trouver l'image en m tablettes achetées "

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^m \geq 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}1 \geq \left(\frac{4}{5}\right)^m$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-\ln(0{,}1)}{-\ln(0{,}8)} \leq m \Leftrightarrow m \geq 11$$

Exercice 4 :

Soit

$$\Omega = \{\{C, S_1, S_2\}, \{C, S_1, \bar{S_2}\}, \{C, \bar{S_1}, S_2\}, \{C, \bar{S_1}, \bar{S_2}\},$$
$$\{\bar{C}, S_1, S_2\}, \{\bar{C}, \bar{S_1}, S_2\}, \{\bar{C}, S_1, \bar{S_2}\}, \{\bar{C}, \bar{S_1}, \bar{S_2}\}\}$$

C : moteur central.

S_1, S_2 : moteur secondaire

Interprétation des formules

TD3 : Probas

Exercice 1 ⚠ C.C

1/ Soit X v.a suivant la loi uniforme et définie dans $\{1, \dots, m\}$

1- Calcul de $E(X)$ et $V(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} i\, P(X=i)$$

$$= \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} i\right) = \frac{1}{m}\frac{(m+1)m}{2}$$

$$= \frac{m+1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{m} i^2\, P(X=i)$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} i^2$$

$$= \frac{1}{m}\,\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$= \frac{(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$i^3 - (1-i)^3 = i^3 - (i^3 - 3i^2 + 3i - 1)$$

$$= 3i^2 - 3i + 1$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(i^3 - (i-1)^3\right) = 3\sum_{i=1}^{m} i^2 - 3\sum_{i=1}^{m} i + m$$

2/ Soient X, Y 2 v.a suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, m\}$.

Calculer :

→ a/ $P(X=Y)$

→ b/ $P(X \geq Y)$

} Pour faire ces calculs, il suffit d'utiliser un tableau

a/ $P(X=Y)$

Y \ X	1	2	⋯	m
1	1			
2		1		
⋮				
m				1

1 : $X=Y$

0 : $X \neq Y$

$$* \quad P(X=Y) = \underbrace{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2} + \dots + \frac{1}{m^2}}_{m \text{ fois}}$$

$$= m \times \frac{1}{m^2}$$

$$= \frac{1}{m}$$

On peut utiliser cette méthode aussi :

$$P(X=Y) = \sum_{i=1}^{m} P(X=i, Y=i)$$

$$\overset{X \perp Y}{=} \sum_{i=1}^{m} P(X=i)\cdot P(Y=i) = m \cdot \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}$$

$$= \frac{1}{m}$$

b/ $P(X \geq Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i} P(X=i, Y=j)$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i} P(X=i, Y=i)$$

$$\overset{X \perp Y}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i} P(X=i)\cdot P(Y=j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{m^2} = \sum_{i=1}^{m}\frac{i}{m^2}$$

$$= \frac{m+1}{2m}$$

Exercice 2

1/ Soit la v.a X représentant le nbre de bonnes réponses des 3 questions du test

Ainsi $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

2/ Le test est schéma de Bernoulli

* Chaque question est une épreuve de Bernoulli à 2 issues "succès" pour bonne réponse et "échec" pour mauvaise réponse

* La probabilité d'obtenir une bonne réponse est la même pour chaque qst et est égal à $\left(\frac{1}{4}\right)$

* Les questions sont supposées indépendantes

Donc $X \sim \mathcal{B}(3, \frac{1}{4})$

Par suite, $P(X=2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3-2}$

$= \frac{9}{64} \simeq 0,1$

Pour affaiblir les chances de réussite
→ soit augmenter le nbre de questions
↳ chose qui n'est pas faite

→ soit ajouter les choix (plus série)

Exercice 3 (cours)

$S = X_1 + \dots + X_n$. $E(S) = n E(X_1) = n\mu$
et $V(S) = n V(X_1) = n\sigma^2$

$P(T > t_0 + \frac{1}{6} \mid T > t_0) = P(T > \frac{1}{6})$
$= P(X' = 0) = e^{-\frac{\lambda}{6}}$

T : Durée de temps entre 2 accidents

$T \sim \mathcal{E}(\mu)$

Généralités

λ = nbre d'accidents sur $[0, 1]$ (h)
X = nbre d'accidents sur $[0, 1]$ (h)
$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

X' = nbre d'accidents sur $[0, t]$ (h)
$X' \sim \mathcal{P}(\lambda . t)$ car :

$X' = X . t \Rightarrow E(X') = t\, E(X)$
$= t . \lambda$

X' : nbre d'accidents sur $[0, \frac{1}{6}]$ (h)

$X' \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{6}\right) = \mathcal{P}\left(\frac{5}{6}\right)$

$P(T > \frac{1}{6}) = 1 - P(T \leq \frac{1}{6})$
$= 1 - (1 - e^{-\frac{1}{6}\mu})$
$= e^{-\frac{1}{6}\mu}$

On en déduit que $\mu = \lambda$

Exercice 3

Soit X la v.a représentant le nbre d'enfants atteints d'autisme

On a affaire à un schéma de Bernoulli
→ chaque enfant peut être considéré comme étant une épreuve de Bernoulli à 2 issues : "succès" si l'enfant est autiste et "échec" si l'enfant ne l'est pas
→ La probabilité d'avoir l'autisme est la même pour chaque enfant ($p = \frac{1}{88}$)

→ Les consultations sont supposées indépendantes

Du fait que si un enfant a l'autisme cela n'a aucune influence sur les autres enfants

Ainsi $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{88})$

1- $P(X=0) = C_{10}^{0} \left(\frac{1}{88}\right)^0 \left(\frac{87}{88}\right)^{10} = 0,89$

2- $P(X \geq 5) = \sum_{i=5}^{10} C_{10}^{i} \left(\frac{1}{88}\right)^i \left(\frac{87}{88}\right)^{10-i} = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{i=0}^{4} C_{10}^{i} \ldots = 4,35 \ldots$

<u>Remarque</u> $\{X \geq 5\}$ est un événement improbable mais reste tjrs possible

<u>Exercice 4.</u>

Soit la v.a X représentant le 1^{er} produit défaillant après un nbre donné d'inspections

La suite des inspections est un schéma de Bernoulli

Car. * chaque inspection est une épreuve de Bernoulli à 2 issues "Succès" si le produit est défaillant et "Echec" si le produit est non-défaillant

* La proba qu'un produit soit défaillant est égale à 0,03 et c'est la même pour chaque inspection.

* les inspections sont indépendantes car la défaillance d'un produit n'affecte pas les autres

Donc $X \sim \mathcal{G}(0,03)$

1/ $P(X=5) = (0,03)(0,97)^4$, $p = 0,03$ et $q = 0,97 = 1-p$

2/ $P(X \leq k) \geq 0,75$.

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} P(X=i) \geq 0,75 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} p \cdot q^{i-1} \geq 0,75$

$\Leftrightarrow p \sum_{i=0}^{k-1} q^i \geq 0,75$

$\Leftrightarrow p \frac{(1-q^k)}{1-q} \geq 0,75$

$\Leftrightarrow 1 - q^k \geq 0,75$

$\Leftrightarrow q^k \leq 0,25$

$\Leftrightarrow k \geq \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,97)}$

3/ Loi géométrique discrète et sans mémoire

elle est aussi considérée exponentielle

↳ d'où elle est appelée sans mémoire

$P(X=m \mid X>k) = \frac{P(X=m, X>k)}{P(X>k)}$; $m > k$

$= \frac{P(X=m)}{P(X>k)} = \frac{p q^{m-1}}{1-(1-q^k)}$

$= p\, q^{(m-k)-1}$

$= P(X = m-k)$

$= P(X=5)$

si on cherche nbre de fois du lancer... durée... en exp

<u>Exercice 5:</u>

Soit la v.a X représentant le nombre de patients sur l'intervalle de temps $[0, 1,5]$ (h)

Ainsi $X \sim \mathcal{P}(6 \cdot 1,5) = \mathcal{P}(9)$

a/ $P(X=7) = \frac{9^7}{7!} e^{-9}$

b/ $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$

$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - \ldots$

2- T = "Durée de temps entre l'arrivée de 2 patients ..."

$T \sim \mathcal{E}(6)$

$$P(T<11{,}75 \mid T>11{,}5) \underset{\text{s.m}}{=} P(T<0{,}25)$$

sans mémoire

$$= 1-e^{-6/4}$$

$$= 1-e^{-\frac{3}{2}}$$

On peut résoudre la question avec la loi de Poisson

X' = nbre de patients arrivant dans $[0, \frac{1}{4}]$ (h)

$X' \sim \mathcal{P}(6 \cdot \frac{1}{4})$

$$P(X' \geq 1) = 1 - P(X'<1) = 1-P(X=0)$$

$$= 1-e^{-\frac{3}{2}}$$

TD5 :

Exercice 2 :

1- Pour $m = 2000$, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N <nbre de plaques inutilisables parmi les 2000> ?
(On utilisera une loi de probabilité adaptée)

La v.a N représentant nbre de plaques inutilisables parmi $m = 2000$ plaques peut être considérée suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2000, 0{,}001)$ car :

* l'inspection de chaque plaque est une épreuve de Bernoulli à 2 issues : "Succès" si la plaque est inutilisable et "Echec" si la plaque est utilisable
* La probabilité qu'une plaque soit inutilisable est de $p = 0{,}001$ et c'est la même pour chaque plaque à chaque inspection
* Les inspections sont supposées indépendantes, du fait qu'une plaque inutilisable n'a aucune influence sur les plaques suivantes

Ainsi la suite des inspections de 1 à m est un schéma de Bernoulli.

Donc $P(N \leq 3) = \sum_{i=0}^{3} P(N=i)$

$= \sum_{i=0}^{3} C_m^i (0{,}001)^i (0{,}999)^{m-i}$

$= (0{,}999)^{2000} + 2000 \times (0{,}001) \cdot (0{,}999)^{1999}$

$+ 1000 \times 1999 \times (0{,}001)^2 \times (0{,}999)^{1998}$

$+ \frac{2000 \times 1999 \times 1998}{6} \times (0{,}001)^3 \times (0{,}999)^{1997}$

$=$

2ème méthode : En utilisant le résultat du th de limite centrale

Soit $(X_i)_{i=1}^{m}$ avec :

$\begin{cases} \text{si } X_i = 1 \text{ alors la } i\text{-ème plaque est inutilisable} \\ \text{si } X_i = 0 \text{ alors la } i\text{-ème plaque est utilisable} \end{cases}$

qui vérifient les conditions du T.C.L :

* $N = X_1 + \dots + X_m$
* La loi de X_i est la loi de Bernoulli avec $P(X_i = 1) = 0{,}001$ et $P(X_i = 0) = 0{,}999$
* Les X_i sont indépendants car si une plaque est inutilisable n'affecte pas les plaques suivantes

Ainsi d'après le T.C.L on a

$N \sim \mathcal{N}(2000 \cdot E(X_1), 2000\, V(X_1))$

Càd $N \sim \mathcal{N}(2, 2 \times 0{,}999)$

par conséquent

$P(N \leq 3) = P\left(\frac{N-2}{\sqrt{2 \times 0{,}999}} \leq 0{,}70\right)$

$= 0{,}758$ (3 s.f)