Denombrement

Permutation	tous les mélanges des objets	$n!$
Permutation avec repetition	tous les mélanges des objets si certains des éléments sont identiques $n_1, n_2, \dots, n_k$ sont les nmbr de repetit° des x_k et $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$	$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$
Arrangements	Tirage d'une quantité d'objets dans l'ordre	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $= (n-k+1) \times \dots \times n$
Arrangement avec repetit°	Tous les elements peuvent prendre n valeurs	$\bar{A}_n^k = n^k$
Combinaisons	Collection d'objets pris simultan parmi n, sans tenir compte de l'orde de l'apparit°	$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ $= \frac{A_n^k}{k!}$
Combinaisons avec repetit°	repetition des elements permise	$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$ $= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\, k!}$

Probabilité conditionnelle

A sachant B :

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Probabilité totale :

$C_1, \dots, C_n$ partit° de Ω

$$P(A) = P(A|C_1)P(C_1) + \dots + P(A|C_n)P(C_n)$$

Formule de Bayes :

$$P(C_k|A) = \frac{P(A|C_k)\,.\,P(C_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)}$$

Evenements independants

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$$

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire :

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longrightarrow X(\omega)$$

résultat de l'experience aléatoire

Loi de probabilité :

$$p_i = P(X = x_i)$$

2 V.a qui ont la même loi ont la $\hat{m}$ fonct° de repartition

Système complet d'evenement :

→ $\{X = x_i\} \cap \{X = x_j\} = \emptyset$ $i \neq j$

→ $\bigcup_{i\in I} \{X = x_i\} = \Omega$

Fonction de repartit°

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longrightarrow P(X \leq x)$$

→ F_X est croissante

→ F_X est partout continue à droite.

→ $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

→ $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Esperance	La moyenne des valeurs que peut prendre X, ponderée par la probabilité de ces valeurs	$E[X] = \sum_{k \geq 0} x_k P(x = x_k)$
Variance	Mesure la dispersion de x autour de sa valeur moyenne	$V[X] = E\left[(X - E[X])^2\right]$
Ecart-type	deviation standard de la v.a X.	$\sigma(X) = \sqrt{V[X]}$

2 v.a ayant m̂ loi ont m̂ espérance et variance

Théorème de transfert:

$\forall g \in X(\Omega) \subset \mathbb{R}$

$E[g(X)] = \sum_{k \geq 0} g(x_k)\, P(X = x_k)$

→ $E[a] = a \quad V[a] = 0$

→ $E[ax] = a\,E[x]$

$V[ax] = a^2\,V[x]$

→ $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

→ $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Independance:

X et Y independant si :

$\forall i, j : \{X = x_i\}, \{Y = x_j\}$ sont inde pendant

Probabilité totales

$P(X = x_i) = \sum_{x_j \in P(\Omega)} P(X = x_i \mid Y = x_j)\, P(x_j)$

Théorème de transfert 2:

g de $I = X(\Omega) \times Y(\Omega) \subset \mathbb{R}$

$E[g(X,Y)] = \sum_{(x,y) \in I} g(x,y)\, P(X = x, Y = y)$

X et Y v.a Independants définies sur le m̂ espace d'evenement.

→ $E[X \cdot Y] = E[X] . E[Y]$

→ $V[X+Y] = V[X] + V[Y]$

covariance

X, Y v.a definies sur le m̂ espace d'even

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]\,E[Y]$

Variables Aléatoires continue

$$P(X \in [c,d]) = \int_c^d f(x)\,dx$$

Fonction densité $f(x)$:

→ C'est une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}$ (sauf en qlq pt)
→ Elle n'est pas unique
→ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
→ $P(X=a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$
→ Une v.a discrète ne possède pas de f.d

Loi de probabilité :

Ça revient à calculer la fonction densité

Espérance :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

Variance :

$$V[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x)\,dx$$

Fonction de repartition

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

→ $F_X(x) \in [0,1] \quad \forall x \in \mathbb{R}$
→ F_X est une fonction croissante
→ $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \, ; \, \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
→ F_X est continue sur $\mathbb{R}$
→ F_X est de C^1 (sauf en qlq pt)
→ Si F_X est derivable en x :
$F'_X(x) = f(x)$

Soit g une fonction definie sur $X(\Omega)$:

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$$

→ • L'espérance et la variance existent à condit° que les intégrales qui les definissent existent
• Elles ont les m̂ propriétés que les v.a discrète

Les lois des variables aléatoire continues

Loi(nom)	Definition	Loi	Fonction repartit°	Esperance	Variance
Loi Uniforme $\mathcal{U}[a,b]$	→ Modelise une grandeur qui prend ses valeurs dans une intervalle sans préférence pour aucune d'elles. → a,b des reels, $a<b$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\leq x\leq b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0 & x\leq a\\ \frac{x-a}{b-a} & a<x<b\\ 1 & x\geq b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	→ X représente le temps requis pour obtenir un premier succès, ou le temps entre 2 succès consecutifs → λ: paramètre de la loi	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-x\lambda} & x>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x\lambda} & x>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	(*) $\frac{1}{\lambda^2}$
Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	→ Modelise les phénomènes qui fluctuent de manière aléatoire autour d'une valeurs moyenne μ → $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2>0$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	→ On peut pas l'exprimer par une fonction usuelle. → $X\sim\mathcal{N}(0,1)$ et $x\geq 0$ $F_X(x)$ est approchée (voir tableau cours) → autres cas possibles (**)	μ	σ^2

Les lois des variables aléatoire discrète

Nom Loi	Definition	Loi	Esperance	Variance
Conjointe	→ (X, Y) couple de variables aléatoire definie sur (Ω, P)	$P_{(X,Y)}: X(\Omega)\times Y(\Omega) \to [0,1]$ $(x,y) \to P(X=x, Y=y)$		
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	→ Y prend la valeur 1 si l'evenement est realisé et 0 sinon. → $\Omega = \{S, E\}$ → p paramètre de la loi	$P(Y=1) = p$ $P(Y=0) = 1-p$	$E[Y] = p$	$p(1-p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	→ X représente le nombre de succès obtenus lors des n épreuves de bernoulli. → (n, p) pamètres de la loi	$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $0 \leq k \leq n$	np	$np(1-p)$
Geométrique $\mathcal{G}(p)$	→ X représente le nombre d'épreuves necessaires pour obtenir un premier succès → P_p: probabilité de succès, param de la loi	$P(X = n) = p(1-p)^{(n-1)}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $P(\lambda)$	→ X represente le nombre de succès d'une expérience aléatoire dans un intervalle de temps fixé. → $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ tend vers $P(\lambda)$ quand $n \longrightarrow \infty$ → λ : nombre moyen de succès dans $[t, t+k]$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}$	λ	λ

(*)

Sans mémoire

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $s,t>0$

$P(X>t+s \mid X>t) = P(X>s)$

(**)

Autres cas Possibles pour $F_X(x)$ (loi normale)

1) $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$

2) $P(X \geqslant x) = 1 - F_X(x)$

3) $P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

4) $\forall\, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$; Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $aX+b \sim \mathcal{N}(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

5) Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Théorème centrale limite :

→ X_n suite de variables independantes, identiquement distribués

→ $\mu = E[X_1]$, $\sigma^2 = V[X_1]$

→ $Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

→ $(Y_n)_n$ converge en loi vers une V.a de loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$P(Y_n \leqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$