Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA de Tanger .
AP2

Algèbre 3 : Série 1

EXERCICE 1. Parmi les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, lesquelles sont des formes bilinéaires, des formes bilinéaires symétriques, des produits scalaires ?

1. $f_1 : (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \longmapsto 4x_1y_1 + 9x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_1x_3 + 2x_1y_3 + 2(x_2y_3 + x_3y_2)$.
2. $f_2 : (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \longmapsto 3x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_3 + y_3 + 5$.

EXERCICE 2. Soit k un nombre réel. On définit l'application

$$\begin{array}{lcl} f_k : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto & x_1y_1 + x_2y_2 + k(x_1y_2 + x_2y_1). \end{array}$$

1. Montrer que f_k est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles f_k est un produit scalaire.

EXERCICE 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

EXERCICE 4. Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace Euclidien.

1. Soit $\{e_i\}$ une base orthogonale de E, montrer que $\{\frac{e_i}{\|e_i\|}\}$ est une base orthonormée.
2. Soit $\{v_1,\dots,v_r\}$ une famille de vecteurs de E deux à deux orthogonaux, montrer qu'elle est libre.

EXERCICE 5. Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Considérons les vecteurs suivants

$$u = (1,0,1)\,, v = (1,1,1)\,, w = (-1,1,0)\,.$$

1. Montrer que $\{u,v,w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt sur $\{u,v,w\}$ et trouver une base orthonormée.

EXERCICE 6. Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. Considérons les vecteurs suivants

$$v_1 = (1,2,-1,-2)\,, v_2 = (2,3,0,-1)\,, v_3 = (5,-2,-5,-2)\,, v_4 = (8,10,-10,4)\,.$$

1. Montrer que $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt sur $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ et trouver une base orthonormée.

EXERCICE 7. Montrer que la forme bilinéaire $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

est un produit scalaire.

Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ muni de ce produit scalaire.

EXERCICE 8. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Soit aussi l'application $\langle,\rangle : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall P,Q \in E$,

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

1. Montrer que cette application est un produit scalaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique $(1,X,X^2)$ de E.
3. Construire une base orthonormée de E, qu'on va noter B.
4. Décomposer le polynôme $R(x) = (X-1)^2$ dans la base B.

EXERCICE 9. Soit $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. En étudiant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Étudier le cas d'égalités.

EXERCICE 10. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique. Déterminer la matrice de la forme bilinéaire symétrique $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\forall x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = 2x_1y_1 - 3(x_1y_2 + x_2y_1) + x_2y_2.$$

EXERCICE 11. Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace Euclidien et $\{e_i\}$ une base de E. Montrer que la matrice du produit scalaire $M(\langle,\rangle)_{e_i}$ est inversible.

EXERCICE 12. **(Identité du Parallélogramme)** Soit E un espace Euclidien. Montrer que $\forall x,y \in E$,

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2\left(\| x \|^2 + \| y \|^2\right).$$

EXERCICE 13. **(Théorème de Pythagore)** Soit E un espace Euclidien. Montrer que $\forall x,y \in E$,

$$\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \Longleftrightarrow \langle x,y\rangle = 0.$$

EXERCICE 14. On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $B = (i,j,k)$. Former la matrice dans B de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x+y+z = 0$.

EXERCICE 15.

1. Montrer que $(P \mid Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer $d(X^2,P)$ où $P = \{aX+b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

EXERCICE 16. On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = x-y+z-t = 0\}.$$

1. Déterminer une base orthonormée du supplémentaire orthogonal de F.
2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F.
4. Calculer $d(u,F)$ où $u = (1,2,3,4)$.