Espaces Euclidiens et Formes Quadratiques

Soufiane Mezroui

mezroui.soufiane@yahoo.fr

ENSA de Tanger
Maroc

Avant-propos

Le polycopié suivant fait partie du cours d'Algèbre 3 donné à l'ENSA de Tanger durant la période 2016- . Notons que ce manuscrit ne peut remplacer le cours dispensé en classe, qui seul fixera les points qui seront abordés dans l'examen. En classe, ces notes seront expliquées en détail, il y aura aussi certains compléments, en plus des intuitions qui sont derrière les passages abstraits, etc.

Table des matières

Chapitre 1

Espaces Euclidiens

1.1 Produit Scalaire

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel défini sur un corps $\mathbb{K}$. L'application $f : E \times E \longmapsto \mathbb{K}$ est appelée* ***forme***

1. ***bilinéaire*** *si elle est linéaire par rapport à chaque coordonnée, en effet,*

$$\forall x,y,z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x + y,z) = \lambda f(x,z) + f(y,z),$$
$$f(z,\lambda x + y) = \lambda f(z,x) + f(z,y);$$

2. ***symétrique*** *si*

$$\forall x,y \in E, f(x,y) = f(y,x);$$

3. ***positive*** *si, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,*

$$\forall x \in E, f(x,x) \geq 0;$$

4. ***définie positive*** *si elle est positive et*

$$\forall x \in E, f(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Définition 1.1.2 *Soit E un espace vectoriel défini sur $\mathbb{R}$. On appelle* ***produit scalaire*** *sur E toute application, notée $\langle,\rangle : E \times E \longmapsto \mathbb{R}$, qui est bilinéaire, symétrique et définie positive.*
Un espace vectoriel réel de dimension finie et muni d'un produit scalaire est appelé ***Espace Euclidien****.*

Exemple 1 : Soit $E = \mathbb{R}^n$. Le **produit scalaire canonique** $\langle,\rangle$ défini sur E est donné par :

$$\langle x,y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

pour $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

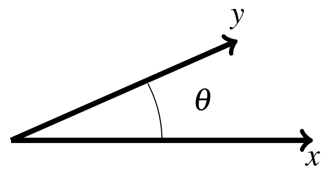
Cas particulier : Quand $n = 2$ et $E = \mathbb{R}^2$, on a

$$\forall x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2, \langle x,y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

On peut démontrer dans ce cas, que $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\langle x,y \rangle = \|x\| \, \|y\| \, Cos(\theta),$$

tel que θ est l'angle entre x et y.



Exemple 2 : Donnons la généralisation de l'exemple précédent. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E. Soient $x,y \in E$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, le produit scalaire $\langle , \rangle_{e_i}$ **associé à la base** $\{e_i\}$ est défini par

$$\langle x,y \rangle_{e_i} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Exemple 3 : Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $A,B \in E$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

L'application suivante

$$\langle A,B \rangle = Tr({}^t AB) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

définit un produit scalaire sur E.

Exemple 4 : Soit $E = \mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients sur $\mathbb{R}$ et $P,Q \in \mathbb{R}[x]$. L'application

$$\langle P,Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

définit un produit scalaire sur E. Comme $\mathbb{R}[x]$ n'est pas de dimension finie, alors il n'est pas **un espace Euclidien**.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E, $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire, et $x,y \in E$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. On a

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j f(e_i,e_j)$$

avec $f(e_i,e_j) \in \mathbb{K}$. Posons $a_{ij} = f(e_i,e_j)$, ce qui donne

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + \cdots + a_{ij} x_i y_j + \cdots + a_{nn} x_n y_n. \tag{1.1}$$

On remarque que la forme f est symétrique si et seulement si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous $1 \leq i,j \leq n$. Et elle est bilinéaire car elle est égale à la somme de monômes du type $x_i y_j$.

Exemple 5 : La forme

$$f(x,y) = 2x_1 y_1 + x_2 y_2 + 5x_1 y_2 + 5x_2 y_1$$

est symétrique car les coefficients de $x_1 y_2$ et $x_2 y_1$ sont les mêmes. Elle est aussi bilinéaire car dans tous les monômes $x_1 y_1, x_2 y_2, x_1 y_2$ et $x_2 y_1$ les degrés de x_i et y_j sont égales à 1.

Exemple 6 : La forme

$$f(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 2x_1 y_2 + x_2 y_1$$

n'est pas symétrique car les coefficients de $x_1 y_2$ et $x_2 y_1$ ne sont pas les mêmes.

Exemple 7 : La forme

$$f(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2x_1^2 y_2 + 2x_2 y_1$$

n'est pas bilinéaire car le degré de x_1 dans le monôme $x_1^2 y_2$ est égale à 2.

1.2 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Le but de cette section est de répondre à la question suivante.

Question : Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace Euclidien. Est ce qu'il existe une base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de E dans laquelle $\langle,\rangle$ s'écrit sous la forme

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n,$$

pour tous vecteurs $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $y=\sum_{i=1}^n y_ie_i$ de E ?

Commençons par les définitions suivantes.

Définition 1.2.1 *Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace Euclidien.*

1. *Soit $x\in E$. Puisque $\langle x,x\rangle \geq 0$, alors posons*

$$\| x \| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

   *On appelle $\| x \|$ la **norme** de x.*

2. *Deux vecteurs x et y sont dit **orthogonaux** si $\langle x,y\rangle = 0$, et ce sera noté par $x\perp y$.*
3. *Une base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ est dite **orthogonale** si*

$$\forall i,j,i\neq j,\langle e_i,e_j\rangle = 0.$$

4. *Une base orthogonale $\{e_1,\ldots,e_n\}$ est dite **orthonormée** si chaque vecteur est de norme 1,*

$$\forall i, \| e_i \| = 1.$$

Exercice 1.2.2 *Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace Euclidien.*

1. *Soit $\{e_i\}$ une base orthogonale de E, montrer que $\{\frac{e_i}{\|e_i\|}\}$ est une base orthonormée.*
2. *Soit $\{v_1,\ldots,v_r\}$ une famille de vecteurs de E deux à deux orthogonaux, montrer qu'elle est libre.*

Soit $\{e_1,\ldots,e_n\}$ une base orthonormée et $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i, y=\sum_{i=1}^n y_ie_i\in E$. On a

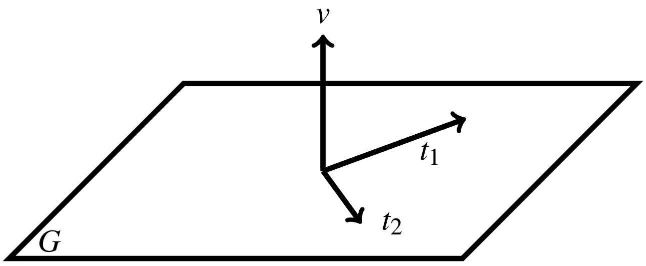
$$\langle x,y\rangle = \langle\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{i=1}^n y_ie_i\rangle = \sum_{i,j=1}^n x_iy_j\langle e_i,e_j\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n. \tag{1.2}$$

Pour répondre à la question principale de cette section, il suffit donc de voir s'il existe toujours une base orthonormée de E.

Théorème 1.2.3 *Dans un espace Euclidien, il existe toujours une base orthonormée.*

Démonstration : Soit E un espace Euclidien de dimension n. D'après l'exercice 1.2.2, il suffit de démontrer l'existence d'une base orthogonale. Prouvons le par récurrence.
Pour $n=1$, n'importe quel vecteur non nul constitue une base orthogonale. Supposons maintenant que le résultat est vrai pour tous les espaces Euclidiens de dimensions inférieurs ou égales à $n-1$. Soit $v\in E$, $v\neq 0$, et soit l'ensemble des vecteurs de E qui lui sont orthogonaux

$$G=\{x\in E \mid \langle x,v\rangle = 0\}.$$



L'ensemble G est clairement un sous-espace vectoriel de E. Calculons sa dimension. Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \langle x,v\rangle, \end{array}$$

c'est une application linéaire. Le théorème du Rang donne dim $E-$ dim(ker f)=1, donc dim (G) =dim(ker f)= $n-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthogonale $\{t_1,\ldots,t_{n-1}\}$ de G. Vérifions que $\{v,t_1,\ldots,t_{n-1}\}$ est une base orthogonale de E. En effet,

$$\forall i, \langle v,t_i\rangle = 0,$$

donc les éléments de la famille $\{v,t_1,\ldots,t_{n-1}\}$ sont deux à deux orthogonaux, ce qui implique que c'est une famille libre d'après l'exercice 1.2.2 et comme elle est constituée de n éléments, alors c'est une base orthogonale de E.

□

Nous allons expliquer en détails maintenant le **procédé de Gram-Schmidt** qui permet de construire une base orthonormée à partir de n'importe quelle base d'un espace Euclidien donné.
Soit E un espace Euclidien et $\{v_1,\ldots,v_r\}$ une famille libre de E, posons $G = Vect\{v_1,\ldots,v_r\}$.
Construisons par récurrence une base orthogonale de G à partir de cette première base $\{v_1,\ldots,v_r\}$.
Posons

$$\varepsilon_1 = v_1, \varepsilon_2 = v_2 + \lambda\varepsilon_1,$$

avec λ est choisi tel que $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$. La condition $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ est équivalente à

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1,\varepsilon_2\rangle &= \langle \varepsilon_1, v_2 + \lambda\varepsilon_1\rangle \\ &= \langle \varepsilon_1, v_2\rangle + \lambda \parallel \varepsilon_1 \parallel^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc

$$\lambda = -\frac{\langle \varepsilon_1, v_2\rangle}{\parallel \varepsilon_1 \parallel^2}.$$

Notons que

$$Vect(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = Vect(v_1,v_2),$$

puisque

$$v_1 = \varepsilon_1, v_2 = \varepsilon_2 - \lambda\varepsilon_1.$$

Posons maintenant

$$\varepsilon_3 = v_3 + \kappa\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2,$$

avec κ et μ sont choisis tels que $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_2$ et $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_1$. Les deux dernières conditions sont équivalentes à

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_3,\varepsilon_2\rangle = \langle v_3+\kappa\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2,\varepsilon_2\rangle =\\ \langle v_3,\varepsilon_2\rangle+\mu \parallel \varepsilon_2\|^2 = 0,\\ \langle \varepsilon_3,\varepsilon_1\rangle = \langle v_3+\kappa\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2,\varepsilon_1\rangle =\\ \langle v_3,\varepsilon_1\rangle+\kappa \parallel \varepsilon_1\|^2 = 0,\end{aligned}$$

donc

$$\mu = -\frac{\langle \varepsilon_2,v_3\rangle}{\parallel \varepsilon_2 \parallel^2}, \kappa = -\frac{\langle \varepsilon_1,v_3\rangle}{\parallel \varepsilon_1 \parallel^2}.$$

Notons que

$$Vect(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) = Vect(v_1,v_2,v_3),$$

puisque

$$v_1 = \varepsilon_1, v_2 = \varepsilon_2 - \lambda\varepsilon_1, v_3 = \varepsilon_3 - \kappa\varepsilon_1 - \mu\varepsilon_2.$$

On continue ainsi par récurrence. Supposons qu'on a construit de la même manière $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_k$, avec $k < r$. Posons

$$\varepsilon_{k+1} = v_{k+1} + \lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_k\varepsilon_k,$$

tel que $\varepsilon_{k+1} \perp \varepsilon_i$ pour tout i satisfaisant $1 \leq i \leq k$. Ainsi

$$\lambda_i = -\frac{\langle v_{k+1},\varepsilon_i\rangle}{\parallel \varepsilon_i \parallel^2}.$$

Par l'hypothèse de récurrence et puisque $v_{k+1} = \varepsilon_{k+1} - \lambda_1\varepsilon_1 - \cdots - \lambda_k\varepsilon_k$, on a

$$Vect(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{k+1}) = Vect(v_1,\dots,v_{k+1}).$$

La famille $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r\}$ obtenue à la fin est une base orthogonale de G. On remplace ε_i par $\frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|}$ pour obtenir une base orthonormée.

Exemple : Soient les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La famille $\{u_1,u_2,u_3\}$ est libre, en effet,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Appliquons le procédé de Gram-Schmidt pour déduire une base orthonormée de $\{u_1,u_2,u_3\}$. Posons

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons ensuite

$$\lambda = \frac{-\langle \varepsilon_1,v_2\rangle}{\parallel \varepsilon_1 \parallel^2} = -\frac{1}{2},$$

et posons

$$\varepsilon_2 = v_2 + \lambda\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Calculons aussi

$$\mu = -\frac{\langle v_3,\varepsilon_2\rangle}{\|\ \varepsilon_2\ \|^2} = \frac{2}{3}, \kappa = -\frac{\langle v_3,\varepsilon_1\rangle}{\|\ \varepsilon_1\ \|^2} = -1,$$

et posons

$$\varepsilon_3 = v_3 + \kappa\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique et soient $v = (v_1,v_2)$, $u = (u_1,u_2)$ deux points différents de $\mathbb{R}^2$. La distance entre les deux points v et u est égale à la norme du vecteur qui va de v à u, et elle est donnée par

$$\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2}.$$

Il convient donc d'introduire la notation

$$\|\ u\ \| = \sqrt{u_1^2+u_2^2}$$

pour la distance entre le point u et le point d'origine $(0,0)$; avec cette notation la distance entre u et v devient $\|\ v-u\ \|$.
Généralisons ce concept de distance aux espaces vectoriels. Soit E un espace vectoriel réel pas nécessairement de dimension finie, et muni d'un produit scalaire $\langle.\rangle$. L'application

$$\begin{array}{rccl} \|\ .\ \|: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \|\ x\ \| = \sqrt{\langle x,x\rangle}, \end{array}$$

, appelée **norme**, vérifie clairement les propriétés suivantes

1. $\forall x\in E, \forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\|\ \lambda x\ \| = |\ \lambda\ |\|\ x\ \|$;
2. $\|\ x\ \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Notons que sur $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, cette application se confond avec la norme de vecteurs déjà définie.
Dans la suite de cette section, nous allons démontrer que $\|\ .\ \|$ vérifie l'inégalité triangulaire

$$\forall x,y\in E,\ \|\ x+y\ \| \leq \|\ x\ \| + \|\ y\ \|. \tag{1.3}$$

Pour ce faire, on a besoin du théorème suivant.

Théorème 1.3.1 ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)***
On a

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \|\ x\ \|^2 \|\ y\ \|^2,$$

pour tous $x,y\in E$. Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration : Si $\| x \|=\| y \|= 0$, alors $x = y = 0$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce cas est valide. Supposons maintenant que $\| x \|\| y \|\neq 0$, comme le produit scalaire est symétrique, on peut imposer sans perte de généralité que $\| y \|\neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \| x+\lambda y \|^2 &=\| x \|^2 +2\langle x,\lambda y\rangle+ \| \lambda y \|^2 \\ &= \lambda^2 \| y \|^2 +2\lambda \langle x,y\rangle+ \| x \|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ce polynôme en λ est supérieur ou égale à 0 si et seulement si son discriminant est négatif,

$$\langle x,y\rangle^2 - \| x \|^2\| y \|^2 \leq 0,$$

ce qui prouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Supposons maintenant que $\langle x,y\rangle^2 =\| x \|^2\| y \|^2$. Donc

$$\begin{aligned} \| x+\lambda y \|^2 &=\| x \|^2 +2\langle x,\lambda y\rangle+ \| \lambda y \|^2 \\ &= \lambda^2 \| y \|^2 +2\lambda \langle x,y\rangle+ \| x \|^2 . \end{aligned}$$

Puisque le discriminant du polynôme $\lambda^2 \| y \|^2 +2\lambda \langle x,y\rangle+ \| x \|^2$ est nul, donc il admet toujours une racine réelle. Posons $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lambda_0^2 \| y \|^2 +2\lambda_0\langle x,y\rangle+ \| x \|^2=\| x+\lambda_0 y \|^2= 0.$$

Ainsi $x+\lambda_0 y = 0$. Par conséquent x et y sont liés, ce qui prouve la dernière assertion du théorème.

□

Exemple : Soit $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique. Soient $x,y \in \mathbb{R}^2$, on a $\langle x,y\rangle =\| x \| \| y \| \, cos(\theta)$ avec θ l'angle entre x et y. Puisque $| cos(\theta) |\leq 1$, ceci donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$| \langle x,y\rangle |=\| x \| \| y \| \, | cos(\theta) | \leq \| x \| \| y \| .$$

Montrons maintenant l'inégalité (1.3). Soient $x,y \in E$,

$$\begin{aligned} \| x+y \|^2 &=\| x \|^2 + \| y \|^2 +2\langle x,y\rangle \\ &\leq \| x \|^2 + \| y \|^2 +2 \, | \langle x,y\rangle | \\ &\leq \| x \|^2 + \| y \|^2 +2 \| x \|\| y \| \quad \textbf{(Cauchy-Schwarz)} \\ &= (\| x \| + \| y \|)^2, \end{aligned}$$

donc

$$\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \| .$$

1.4 Représentation matricielle du produit scalaire

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$, $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E, et $f : E\times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. Soient $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i, y=\sum_{i=1}^n y_ie_i \in E$, on a

$$f(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} x_iy_jf(e_i,e_j).$$

Il suffit donc de connaitre les éléments $f(e_i,e_j)$ pour pouvoir déterminer complètement f.

Définition 1.4.1 *On appelle **matrice de** f la matrice*

$$M(f)_{e_i}=\begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) & \cdots & f(e_1,e_n) \\ f(e_2,e_1) & f(e_2,e_2) & \cdots & f(e_2,e_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(e_n,e_1) & f(e_n,e_2) & \cdots & f(e_n,e_n). \end{pmatrix}.$$

On peut évidement à partir de la matrice $M(f)_{e_i}$ construire la forme f et vice versa. De plus, si f est symétrique, alors $f(e_i,e_j)=f(e_j,e_i)$ et $M(f)_{e_i}$ est une matrice symétrique.

Exemple : Soit $\langle,\rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ donné par

$$\forall x,y\in E, \langle x,y\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

C'est une forme bilinéaire, sa matrice est donnée par

$$M(\langle,\rangle)_{e_i}=I_n=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple : Soit la forme bilinéaire $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée dans la base canonique $\{e_1,e_2,e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ par $\forall x=\sum_{i=1}^n x_ie_i, y=\sum_{i=1}^n y_ie_i \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+7x_2y_3-x_1y_2+4x_1y_3+8x_3y_1.$$

La matrice de f est donnée par

$$M(f)_{e_i}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 8 & 0 & 0. \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.4.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n défini sur un corps $\mathbb{K}$, $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E, et $f:E\times E\longrightarrow\mathbb{K}$ une forme bilinéaire. On a $\forall x=\sum_{i=1}^n x_ie_i, y=\sum_{i=1}^n y_ie_i\in E$,*

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} M(f)_{e_i}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Il suffit d'écrire explicitement $M(f)_{e_i}$ et faire le calcul.

□

Exercice 1.4.3 *Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace Euclidien et $\{e_i\}$ une base de E. Montrer que la matrice du produit scalaire $M(\langle,\rangle)_{e_i}$ est inversible.*

Soient à présent $\{e_1,\dots,e_n\}$, $\{e_1^{'},\dots,e_n^{'}\}$ deux bases de E, $P = P_{\{e_i\}\to\{e_i^{'}\}}$ la matrice de passage de $\{e_i\}$ à $\{e_i^{'}\}$. Soient $x,y \in E$, donnés par

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, x = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'} e_i^{'}, y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i^{'} e_i^{'}$$

dans chacune des deux bases. Posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, X^{'} = \begin{pmatrix} x_1^{'} \\ \vdots \\ x_n^{'} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, Y^{'} = \begin{pmatrix} y_1^{'} \\ \vdots \\ y_n^{'} \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs sont reliés par les relations suivantes

$$X = PX^{'}, Y = PY^{'}.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x_1,\dots,x_n) M(f)_{e_i} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= {}^tX\, M(f)_{e_i} Y \\ &= {}^t(PX^{'}) M(f)_{e_i} (PY^{'}) \\ &= {}^tX^{'} ({}^tP M(f)_{e_i} P) Y^{'}. \end{aligned}$$

D'autre part on a $f(x,y) = {}^tX^{'} M(f)_{e_i^{'}} Y^{'}$. Par identification on trouve, $\forall X^{'}, Y^{'} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$${}^tX^{'} M(f)_{e_i^{'}} Y^{'} =^t X^{'} ({}^tP M(f)_{e_i} P) Y^{'}.$$

Ainsi on obtient la relation entre les deux matrices de la forme bilinéaire f,

$$M(f)_{e_i^{'}} = {}^tP M(f)_{e_i} P. \tag{1.4}$$

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\{e_1,e_2\}$ la base canonique, $\{e_1^{'},e_2^{'}\}$ la base donnée par

$$e_1^{'} = -e_1 + e_2, e_2^{'} = e_1 - 2e_2,$$

et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire satisfaisant

$$f(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_1y_2 + x_2y_1$$

dans la base canonique. En utilisant l'équation (1.4), donnons la formule de f dans la base $\{e_1^{'},e_2^{'}\}$. La matrice de f et la matrice de passage sont données par

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
M(f)_{e_i'} &= {}^tPM(f)_{e_i}P \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi f est donnée dans la base $\{e_1',e_2'\}$ par

$$f(x,y) = -3x_1'y_1' - 9x_2'y_2' + 6x_1'y_2' + 5x_2'y_1'.$$

1.5 Sous-espaces orthogonaux et projection

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace Euclidien. Étudions dans cette partie les propriétés des sous-espaces orthogonaux aux sous-ensembles de E.

Définition 1.5.1 *Soit un sous-ensemble B de E. Posons*

$$B^{\perp} = \{x \in E \mid \forall b \in B, \langle x,b\rangle = 0\}.$$

$B^{\perp}$ est un sous espace vectoriel dit ***orthogonal*** *de B.*

Proposition 1.5.2 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a*

1. *$\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$,*
2. *$E = F \oplus F^{\perp}$,*
3. *$F^{\perp\perp} = F$.*

Démonstration :

1. Supposons que $\dim F = p$ et soit $\{v_1,\dots,v_p\}$ une base de F. Complétons-la en une base $\{v_1,\dots,v_p,\dots,v_n\}$ de E. Posons $M(\langle,\rangle)_{v_i} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice du produit scalaire dans la base $\{v_1,\dots,v_n\}$, telle que
$$\langle v_i,v_j\rangle = a_{ij}.$$
On a $x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \in F^{\perp}$ si et seulement si
$$\begin{aligned}
\langle v_1,x\rangle = \langle v_1, \sum_{j=1}^{n} x_j v_j\rangle &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = 0, \\
\langle v_2,x\rangle = \langle v_2, \sum_{j=1}^{n} x_j v_j\rangle &= \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j = 0, \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\
\langle v_p,x\rangle = \langle v_p, \sum_{j=1}^{n} x_j v_j\rangle &= \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j = 0,
\end{aligned}$$

ce qui est équivalent au système d'équations

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

D'après l'exercice 1.4.3, $M(\langle,\rangle)_{v_i}$ est inversible, donc det $(a_{ij}) \neq 0$. Les lignes de cette matrice sont donc indépendantes, et par conséquent rang $(a_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n} =$ rang ${}^t(a_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n} = p$. D'après le théorème du rang, on déduit que $\dim F^{\perp} = n - p$.

2. Pour montrer que F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires, puisque E est de dimension finie et d'après 1), il suffit de prouver que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. En effet, soit $x \in F \cap F^{\perp}$. Donc $\langle x,x\rangle = 0$ et par conséquent $x = 0$.
3. Soit $y \in F$, on a $\forall x \in F^{\perp}$, $\langle y,x\rangle = 0$, donc $y \in F^{\perp\perp}$, ceci donne $F \subset F^{\perp\perp}$. D'autre part, d'après 1,

$$\dim F^{\perp\perp} = \dim E - \dim F^{\perp} = \dim E - (\dim E - \dim F) = \dim F.$$

On a F est de dimension finie, $F \subset F^{\perp\perp}$, et $\dim F^{\perp\perp} = \dim F$, donc $F = F^{\perp\perp}$.

□

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace Euclidien et E^* son dual. La proposition suivante décrit un isomorphisme canonique entre E et E^*.

Proposition 1.5.3 *L'application*

$$\begin{array}{cccc} s: & E & \longrightarrow & E^* \\ & y & \longmapsto & s(y), \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{cccc} s(y): & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \langle x,y\rangle, \end{array}$$

est un isomorphisme de E sur E^*.

Démonstration : L'application s est linéaire car le produit scalaire est linéaire sur la seconde coordonnée. Comme $\dim E = \dim E^*$, l'application linéaire s est un isomorphisme si et seulement si elle est injective. Pour montrer l'injectivité, soit $y \in E$ tel que $s(y) = 0$. Donc $\forall x \in E, \langle x,y\rangle = 0$, en particulier $\langle y,y\rangle = 0$, ce qui donne $y = 0$.

□

Définition 1.5.4 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. La proposition précédente donne $E = F \oplus F^{\perp}$. Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique comme $x = u + v$ tels que $u \in F$, $v \in F^{\perp}$. On appelle u la* ***projection orthogonale*** *de x sur F et on note par p_F l'application $p_F(x) = u$.*

Proposition 1.5.5 *Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\{e_1, \dots e_k\}$ une base orthonormée de F. On a :*

1. *$\forall x \in E$, $p_F(x) - x \in F^{\perp}$. De plus, $\| p_F(x) \| \leq \| x \|$.*
2. *On a $\forall x \in E$, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x,e_i\rangle\, e_i$.*
3. *$p_F \circ p_F = p_F$.*

4. $\forall x \in E$, $\| x - p_F(x) \| = inf_{y\in F} \ \| x - y \|$.

Démonstration :

1. Soit $x \in E$ avec $x = u + v$, $u \in F$, $v \in F^{\perp}$. On a $p_F(x) - x = u - x = -v \in F^{\perp}$. De plus,

$$\begin{aligned} \| p_F(x) \|^2 &= \| u \|^2 \\ &\leq \| u \|^2 + \| v \|^2 \\ &= \| u + v \|^2 \qquad\qquad \textbf{(Car } u \perp v \textbf{)} \\ &= \| x \|^2 . \end{aligned}$$

2. Soit $x = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i + v$ où $\sum_{i=1}^{k} a_i e_i \in F$ et $v \in F^{\perp}$. Pour trouver les a_i, calculons $\langle x, e_i \rangle = \langle a_1 e_1 + \cdots + a_k e_k + v, e_i \rangle = a_i$, ce qui donne la formule voulue.
3. Soit $x \in E$ avec $x = u + v$, $u \in F$, $v \in F^{\perp}$. On a $p_F \circ p_F(x) = p_F(u) = u = p_F(x)$. D'où le résultat.
4. On a
$$\| x - y \|^2 = \| x - p_F(x) + p_F(x) - y \|^2 = \| x - p_F(x) \|^2 + \| p_F(x) - y \|^2 ,$$
car $(x - p_F(x)) \perp (p_F(x) - y)$. Ce qui donne $\forall y \in F$, $\| x - p_F(x) \| \leq \| x - y \|$. D'où le résultat.

□

1.6 Endomorphisme adjoint

On définit dans cette section le concept de l'endomorphisme adjoint et on explique la relation qu'il a avec la matrice transposée.

Proposition 1.6.1 *Soit E un espace Euclidien et $f \in End(E)$. Il existe un unique endomorphisme $f^* \in End(E)$ tel que*

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

*f^* est appelé **adjoint** de f. Si $\{e_i\}$ est une base orthonormée de E, $M(f)_{e_i}$ la matrice de l'endomorphisme f, $M(f^*)_{e_i}$ la matrice de l'endomorphisme f^*. On a*

$$M(f^*)_{e_i} = {}^tM(f)_{e_i}.$$

Démonstration : Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de E et $f^* \in End(E)$ l'endomorphisme ayant pour matrice $M(f^*)_{e_i} = {}^tM(f)_{e_i}$ la transposée de la matrice de f dans la base $\{e_i\}$. On a $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= {}^t\left(M(f)_{e_i} X\right) Y \\ &= {}^tX \, {}^tM(f)_{e_i} Y \\ &= \langle x, f^*(y) \rangle. \end{aligned}$$

Montrons maintenant l'unicité, supposons qu'il existe un autre $g \in End(E)$ tel que

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.$$

Ce qui donne

$$\forall x,y \in E, \langle x, g(y)\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle,$$

et donc

$$\forall x,y \in E, \langle x, g(y) - f^*(y)\rangle = 0.$$

En particulier on a $\forall y \in E, \langle g(y) - f^*(y), g(y) - f^*(y)\rangle = 0$, et par suite $\forall y \in E, g(y) - f^*(y) = 0$, ce qui achève la démonstration.

□

Proposition 1.6.2 *Pour tous endomorphismes f,g de E et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $f^{**} = f$, $(id)^* = id$, $(f+g)^* = f^* + g^*$, $(\lambda f)^* = \lambda f^*$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, $rg\ f^* = rg\ f$, $dét\ f^* = dét\ f$.*

Démonstration : Il suffit d'écrire ces formules sous la forme matricielle.

□

1.7 Groupe orthogonal

Soit E un espace Euclidien. Nous étudions dans cette partie les endomorphismes $f \in End(E)$ qui conservent la norme des vecteurs, $\forall x \in E, \| f(x) \| = \| x \|$. En particulier, les rotations et les réflexions dans le plan et l'espace réalisent cette propriété.

Définition 1.7.1 *Soit E un espace Euclidien et $f \in End(E)$. On dit que f est une **transformation orthogonale**, ou **isométrie**, si*

$$\forall x,y \in E, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Notons $O(E)$ l'ensemble des transformations orthogonales.

Proposition 1.7.2 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\forall x,y \in E, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
2. $\forall x \in E, \| f(x) \| = \| x \|$.
3. *Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée et $M(f)_{e_i}$ la matrice de l'endomorphisme f dans cette base. On a ${}^tM(f)_{e_i} M(f)_{e_i} = Id$.*

Démonstration :
1) $\Longrightarrow$ 2), il suffit de faire $x = y$ dans la formule de 1).
2) $\Longrightarrow$ 1), on a

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\| f(x) + f(y) \|^2 - \| f(x) \|^2 - \| f(y) \|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\| f(x+y) \|^2 - \| f(x) \|^2 - \| f(y) \|^2\right).\end{aligned}$$

Puisque f conserve la norme, on déduit que

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \frac{1}{2}\left(\| x+y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2\right) = \langle x, y\rangle.$$

Montrons que 1) $\Leftrightarrow$ 3). On a d'après 1),

$$\forall x,y \in E, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

D'après l'équation 1.2, et dans une base orthonormée $\{e_i\}$, cette formule devient

$$\forall X,Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t(M(f)_{e_i}X)M(f)_{e_i}Y = {}^tXY.$$

Ce qui est équivalent à

$${}^tM(f)_{e_i}M(f)_{e_i} = Id.$$

□

Proposition 1.7.3 *Soit E un espace Euclidien et f une transformation orthogonale.*

1. *Les valeurs propres de f sont 1 ou -1.*
2. *dét $f = \pm 1$, en particulier f est bijective.*

Les transformations orthogonales de déterminant 1 sont dites ***directes****, celles de déterminant -1 sont dites* ***indirectes****.*

Démonstration : Soit λ une valeur propre et $v \neq 0$ un vecteur propre correspondant, $f(v) = \lambda v$. On a

$$\| f(v) \| = \| \lambda v \| = | \lambda | \| v \| .$$

Comme f est une transformation orthogonale, $\| f(v) \| = \| v \|$, alors $| \lambda | = 1$ et donc $\lambda = \pm 1$.
On a d'autre part, dans une basée orthonormée $\{e_i\}$, ${}^tM(f)_{e_i}M(f)_{e_i} = Id$. Ce qui donne dét $M(f)_{e_i}^2 = 1$, ainsi dét $f =$ dét $M(f)_{e_i} = \pm 1$.

□

Les transformations orthogonales ont la propriété de transformer les bases orthonormées en bases orthonormées, en effet :

Proposition 1.7.4 *Soit E un espace Euclidien et $f \in End(E)$ un endomorphisme. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est une transformation orthogonale.*
2. *f transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.*
3. *Il existe une base orthonormée transformée par f en une base orthonormée.*

Démonstration :
Montrons que $1) \Rightarrow 2)$. Supposons que f est une transformation orthogonale et soit $\{e_i\}$ une base orthonormée. D'après la Proposition 1.7.3, f est bijective, donc l'image $\{f(e_i)\}$ de la base $\{e_i\}$ est aussi une base. Il reste à montrer qu'elle est orthonormée. On a

$$\forall i,j, i \neq j, \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = 0,$$

et

$$\forall i, \| f(e_i) \| = \| e_i \| = 1,$$

ce qui donne le résultat voulu.
$2) \Rightarrow 3)$ C'est une implication évidente.
Montrons que $3) \Rightarrow 1)$. Supposons qu'il existe une base orthonormée $\{e_i\}$ telle que $\{f(e_i)\}$ soit aussi orthonormée. Soient $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$. Puisque $\{e_i\}$ est orthonormée, d'après l'équation (1.2), on a

$$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\langle f(x),f(y)\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j f(e_j)\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle f(e_i),f(e_j)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad\qquad \textbf{(Car } \{f(e_i)\} \textbf{ est orthonormée)} \\
&= \langle x,y\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi f est orthogonale.

□

Définition 1.7.5 *L'ensemble*

$$O(n,\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t AA = Id\right\}$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. *$\forall M,N \in O(n,\mathbb{R})$, alors $MN \in O(n,\mathbb{R})$.*
2. *$Id \in O(n,\mathbb{R})$.*
3. *Si $M \in O(n,\mathbb{R})$, alors $M^{-1} \in O(n,\mathbb{R})$.*

*En particulier, $O(n,\mathbb{R})$ est un groupe dit **groupe orthogonal**. Les matrice appartenant à ce groupe sont appelées **matrices orthogonales**.*
*Pour $M \in O(n,\mathbb{R})$, dét $M = \pm 1$. Si dét $M = 1$, M est dite **matrice orthogonale directe**. Si dét $M = -1$, M est dite **matrice orthogonale indirecte**. L'ensemble des matrices orthogonales directes est noté $SO(n,\mathbb{R})$. Ce groupe*

$$SO(n,\mathbb{R}) = \{M \in O(n,\mathbb{R}) \mid \text{dét}\, M = 1\}$$

*est appelé **groupe spécial orthogonal**.*

D'après la Proposition 1.7.3, et dans une base orthonormée, les matrices orthogonales sont les matrices des transformations orthogonales dans les espaces Euclidiens.

Proposition 1.7.6 *Soit E un espace Euclidien et $\{e_i\},\{e_i^{'}\}$ deux bases orthonormées de E. Soit $P_{\{e_i\}\to\{e_i^{'}\}}$ la matrice de passage de $\{e_i\}$ vers $e_i^{'}$. On a $P_{\{e_i\}\to\{e_i^{'}\}} \in O(n,\mathbb{R})$.*

Démonstration : Soit f l'endomorphisme défini par $\forall i, f(e_i) = e_i^{'}$. Donc f est orthogonal d'après la proposition précédente et par suit $M(f)_{e_i} \in O(n,\mathbb{R})$. On a $M(f)_{e_i} = P_{\{e_i\}\to\{e_i^{'}\}}$, donc $P_{\{e_i\}\to\{e_i^{'}\}}$ est une matrice orthogonale.

□

Exercice 1.7.7 *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in O(n,\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si et seulement si*

$$a^2+c^2 = 1, b^2+d^2 = 1, ab+cd = 0.$$

1.8 Cas particuliers : Étude des groupes $O(2,\mathbb{R})$ et $O(3,\mathbb{R})$

1.8.1 Étude de $O(2,\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. D'après l'exercice précédent on a $A \in O(n,\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si et seulement si

$$a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1, ab + cd = 0.$$

Les deux premières équations impliquent que $\exists \theta, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$a = cos(\theta), c = sin(\theta), b = cos(\lambda), d = sin(\lambda).$$

La troisième équation donne

$$ab + cd = 0 \Longleftrightarrow cos(\theta - \lambda) = cos(\theta)cos(\lambda) + sin(\theta)sin(\lambda) = 0,$$

donc

$$\theta - \lambda = \frac{(2m+1)\pi}{2}$$

avec $m \in \mathbb{Z}$. Ainsi

$$b = cos\left(\theta + \frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = (-1)^{m+1} sin(\theta),$$
$$d = sin\left(\theta + \frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = (-1)^{m} cos(\theta).$$

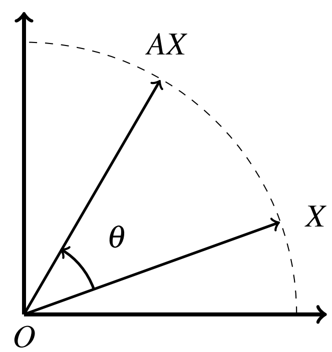
Donc $A \in O(2,\mathbb{R})$ si et seulement si

$$A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & (-1)^{m+1} sin(\theta) \\ sin(\theta) & (-1)^{m} cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

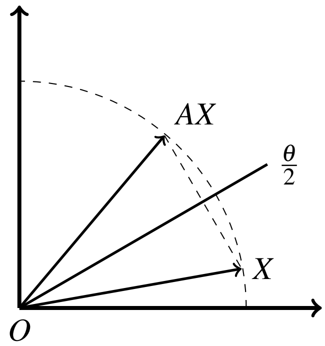
Comme dét $A = (-1)^m \left(cos(\theta)^2 + sin(\theta)^2\right) = (-1)^m$, alors $A \in SO(2,\mathbb{R})$ si et seulement si m est pair, $m \in 2\mathbb{N}$. Nous avons ainsi le résultat suivant :

Proposition 1.8.1 *Soit $A \in O(2,\mathbb{R})$, on a :*

1. *Supposons que $A \in SO(2,\mathbb{R})$, il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$. C'est une rotation d'angle θ et ayant O l'origine du repère comme centre.*



2. *Supposons que $A \notin SO(2,\mathbb{R})$, il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix}$. C'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$.*



1.8.2 Étude de $O(3,\mathbb{R})$

Lemme 1.8.2 *Soit $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in End(\mathbb{R}^3)$ une transformation orthogonale, $M(f)_{e_i} \in O(3,\mathbb{R})$:*

Si dét $M(f)_{e_i} = 1$, alors 1 est une valeur propre de f d'ordre 1 ou 3.
Si dét $M(f)_{e_i} = -1$, alors -1 est une valeur propre de f d'ordre 1 ou 3.

Démonstration : Supposons dét $M(f)_{e_i} = 1$ et considérons $M(f)_{e_i} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ comme la matrice de l'endomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ X & \longmapsto & M(f)_{e_i}X. \end{array}$$

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique $P(\lambda) =$ dét $(M(f)_{e_i} - \lambda I_3)$ est scindé et il admet donc 3 racines dans $\mathbb{C}$. On a deux cas :
1^{er} **cas** Supposons que ces 3 racines λ_1,λ_2 et λ_3 sont réelles. D'après la Proposition 1.7.2, $\lambda_i = \pm 1$, et comme dét $M(f)_{e_i} = P(0) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$, alors soit $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, soit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Ce qui termine la démonstration dans ce cas.
2^{eme} **cas** Supposons que l'une de ces racines $\beta \in \mathbb{C}$ est non réelle, ainsi, puisque $M(f)_{e_i}$ est réelle alors $\overline{\beta}$ est une valeur propre aussi. On a dét $M(f)_{e_i} = P(0) = \mu\beta\overline{\beta} = \mu \mid \beta \mid^2 = 1$, avec μ c'est la troisième valeur propre. Puisque $\mu \mid \beta \mid^2 = 1$, et $\mid \beta \mid \in \mathbb{R}$, alors $\mu \in \mathbb{R}$. Ainsi, d'après la Proposition 1.7.2, $\mu = \pm 1$. Comme $\mu \mid \beta \mid^2 = 1$ et $\mid \beta \mid^2 > 0$, alors $\mu = 1$. Ce qui termine la démonstration dans ce cas.
On traite le cas dét $M(f)_{e_i} = -1$ de manière analogue.

□

Lemme 1.8.3 *Soit $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in End(\mathbb{R}^3)$ une transformation orthogonale, $M(f)_{e_i} \in O(3,\mathbb{R})$. Supposons que $M(f)_{e_i} \neq Id$:*

Si dét $M(f)_{e_i} = 1$, alors dim $E_1 = 1$;
Si dét $M(f)_{e_i} = -1$, alors dim $E_{-1} = 1$.

Démonstration : Supposons que dét $M(f)_{e_i} = 1$. D'après le Lemme 1.8.2, 1 est une valeur propre d'ordre 1 ou 3. Si dim $E_1 = 3$, alors $E_1 = \mathbb{R}^3$ et donc $M(f)_{e_i} = I_3$, ce qui est exclu dans l'énoncé. Supposons maintenant que dim $E_1 = 2$, alors 1 est une valeur propre d'ordre 3. Soit $\{v_1,v_2\}$ une base de E_1 et $w \in Vect\{v_1,v_2\}^{\perp}$, $w \neq 0$. On a $\forall i$,

$$\begin{aligned}\langle f(w),v_i\rangle &= \langle f(w),f(v_i)\rangle && \textbf{(Car } f(v_i)=v_i\textbf{)}\\ &= \langle w,v_i\rangle && \textbf{(Car } f \textbf{ est orthogonale)}\\ &= 0,\end{aligned}$$

ce qui donne $f(w) \in Vect\{v_1,v_2\}^{\perp}$. Ceci implique $f(w) \in Vect(w)$, d'après la Proposition 1.5.2. Donc $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tel que $f(w) = \mu w$, et 1 est une valeur propre d'ordre 3, alors $\mu = 1$. Ainsi $f(w) = w$ et donc $w \in E_1$. Ce qui est impossible d'après la Proposition 1.5.2, car $w \in E_1^{\perp}$ et $w \neq 0$. Donc, on a nécessairement dim $E_1 = 1$.
Le cas dét $M(f)_{e_i} = -1$ se traite de la même manière.

□

Proposition 1.8.4 *Soit $A \in O(3,\mathbb{R})$, $\{e_i\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $A = M(f)_{e_i}$. Il existe une base orthonormée $\{e_i^{'}\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que*

$$M(f)_{e_i^{'}} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R},$$

où $\varepsilon = 1$ si $A \in SO(3,\mathbb{R})$, $e_1^{'},e_2^{'}$ engendrent $E_1^{\perp}$, $e_3^{'} \in E_1$; et $\varepsilon = -1$ si $A \notin SO(3,\mathbb{R})$, $e_1^{'},e_2^{'}$ engendrent $E_{-1}^{\perp}$, $e_3^{'} \in E_{-1}$;

Démonstration : Si $A = \pm I_3$, on pose $\forall i$, $e_i^{'} = e_i$, $\theta = 0$ si $A = I_3$, $\theta = \pi$ si $A = -I_3$. Ce qui donne le résultat voulu pour ce cas.
Supposons maintenant que $A \neq \pm I_3$. Si dét $A = 1$, on a d'après le Lemme 1.8.3, dim $E_1 = 1$. Posons $E_1 = Vect(w), w \in E_1$. On a $\forall x \in E_1^{\perp}$, $\langle x,w\rangle = 0$. Puisque f est une transformation orthogonale, alors $\langle f(x), f(w)\rangle = 0$. D'autre part $f(w) = w$, ce qui implique $\langle f(x),w\rangle = 0$, et donc $f(x) \in E_1^{\perp}$. Ainsi le plan $E_1^{\perp}$ est stable par f.
Posons $\tilde{f} = f\mid_{E_1^{\perp}}$ la restriction de f sur le plan $E_1^{\perp}$. On a $\forall x,y \in E_1^{\perp}$,

$$\left\langle \tilde{f}(x),\tilde{f}(y)\right\rangle_{E_1^{\perp}} = \langle f(x),f(y)\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle x,y\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle x,y\rangle_{E_1^{\perp}},$$

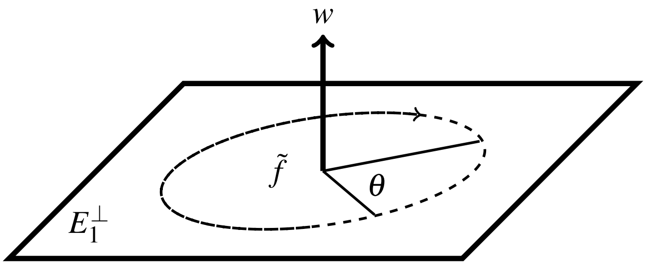
donc $\tilde{f}$ est une transformation orthogonale sur le plan $E_1^{\perp}$.
Calculons maintenant dét $\tilde{f}$. Soit $\{e_1^{'},e_2^{'}\}$ une base orthonormée du plan $E_1^{\perp}$ et posons $e_3^{'} = \frac{w}{\|w\|}$. On a $\{e_1^{'},e_2^{'},e_3^{'}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et

$$M(f)_{e_i^{'}} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } M(\tilde{f})_{\{e_1^{'},e_2^{'}\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Puisque le déterminant est invariant par changement de base, alors

$$\text{dét } M(\tilde{f})_{\{e_1^{'},e_2^{'}\}} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \text{ dét } M(f)_{e_i^{'}} = \text{ dét } M(f)_{e_i} = \text{dét } A = 1.$$

Par conséquent, d'après la Proposition 1.8.1, $\tilde{f}$ est une rotation d'angle θ, $\theta \in \mathbb{R}$.



Ceci implique

$$M(\tilde{f})_{\{e_1',e_2'\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$M(f)_{e_i'} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition dans ce cas. Le cas dét $A = -1$ se traite d'une manière analogue, on remplace seulement E_1 par E_{-1}.

□

Gardons les notations de la Proposition 1.8.4. Si dét $A = 1$, f est alors une rotation autours de la droite E_1. Comme la trace est invariante par changement de base, on a

$$\mathrm{Tr}\, A = 2cos(\theta) + 1. \tag{1.5}$$

Dans la pratique, pour pouvoir trouver θ, il suffit de calculer Tr A.
Si dét $A = -1$, on peut écrire $f = g \circ h$ avec

$$M(g)_{e_i'} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M(h)_{e_i'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc, la transformation orthogonale f est égale à la composition de la rotation autour de la droite E_{-1} suivie de la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$. On a dans ce cas

$$\mathrm{Tr}\, A = 2cos(\theta) - 1. \tag{1.6}$$

En particulier, si Tr $A = 1$, alors $\theta = 0$ et donc f c'est la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$. f dans ce cas est appelée **réflexion** par rapport à $E_{-1}^{\perp}$.

1.9 Orientation et angles

1.9.1 Bases orientées

Soit E un espace Euclidien de dimension n, $\{e_1,\dots,e_n\}$ et $\{e_1',\dots,e_n'\}$ deux bases orthonormées ordonnées différentes de E, c'est à dire l'ordre des éléments de chaque base est pris en compte. Soit $P_{\{e_i\}\to\{e_i'\}}$ la matrice de passage, on a dét $P_{\{e_i\}\to\{e_i'\}} = \pm 1$, d'après la Proposition 1.7.6.

Définition 1.9.1 *Soit E un espace Euclidien de dimension n. Fixons une base orthonormée $\{e_i\}$ de E. Si dét $P_{\{e_i\}\to\{e_i'\}} = 1$, telle que $\{e_i'\}$ est une base orthonormée de E, on dit que $\{e_i'\}$* ***est une base directe****. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est* ***indirecte****.*
L'espace E muni de $\{e_i\}$ est appelé ***espace Euclidien orienté par la base*** *$\{e_i\}$.*

Exemple : Orientation canonique de $\mathbb{R}^n$
Soit $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et de la base ordonnée canonique $\{e_1,\ldots,e_n\}$, $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$,..., $e_n = (0,0,\ldots,1)$. On se base sur cette base canonique pour fixer l'orientation des autres bases de $\mathbb{R}^n$. En effet, on dit que la base $\{v_1,\ldots,v_n\}$ est **une base directe**, si dét $P_{\{e_i\}\to\{v_i\}} = 1$.

1.9.2 Orientation induite

Soit E un espace Euclidien de dimension n, orienté par la base $\{e_i\}$, et soit π un hyperplan de E.
Question : Comment définir une orientation sur les bases orthonormées de l'hyperplan π ?

On a $\pi^\perp$ est de dimension 1, d'après la Proposition 1.5.2. Soit $w \in \pi^\perp$ tel que $\| w \| = 1$. On dit que la base orthonormée et ordonnée $\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}\}$ de π est directe si la base $\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-1},w\}$ est directe pour la base $\{e_i\}$.

1.9.3 Angle non orienté

Soit E un espace Euclidien. Définissons ce que c'est un **angle** non orienté, ou simplement angle, entre deux vecteurs de E. Soient $x,y \in E\backslash\{0\}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\frac{| \langle x,y\rangle |}{\| x \| \| y \|} \leq 1.$$

Il existe donc un unique $\theta \in [0,\pi]$ tel que

$$cos(\theta) = \frac{| \langle x,y\rangle |}{\| x \| \| y \|}.$$

θ est appelé **angle non orienté** entre les vecteurs x et y.

1.9.4 Angle orienté en dimension 2

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace Euclidien de dimension 2 et orienté par la base $\{e_1,e_2\}$. Soit $f \in SO(E)$ une rotation. D'après la Proposition 1.8.1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Puisque θ reste fixe modulo 2π, on peut considérer que $\theta \in]-\pi,\pi]$ et on l'appelle **angle de la rotation**. Dans la suite de cette sous-section, toute rotation d'angle θ sera notée $\mathscr{R}_\theta$.

Proposition 1.9.2 *Soient $u,v \in E$ et posons $U = \frac{u}{\|u\|}, V = \frac{v}{\|v\|}$. Il existe un unique $\theta \in]-\pi,\pi]$ tel que $\mathscr{R}_\theta(U) = V$. θ est appelé* ***angle orienté*** *entre u et v et est noté (uv).*

Démonstration : Soient $U = (U_1,U_2)$, $V = (V_1,V_2)$ les composantes de U,V dans la base orthonormée $\{e_i\}$. On a

$$U_1^2 + U_2^2 = 1, V_1^2 + V_2^2 = 1,$$

donc ils existent $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tels que $U_1 = cos(\alpha)$, $U_2 = sin(\alpha)$, $V_1 = cos(\beta)$, $V_2 = sin(\beta)$. Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_\theta(U) = V &\iff \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\beta) \\ sin(\beta) \end{pmatrix} \\
&\iff cos(\theta+\alpha) = cos(\beta), sin(\theta+\alpha) = sin(\beta) \\
&\iff \theta = \beta - \alpha \text{ mod } 2\pi.
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.9.3 *Dans la proposition précédente, on peut montrer que si on oriente E par une autre base directe, différente de $\{e_1,e_2\}$, alors l'angle orienté θ ne change pas. Ce qui justifie pourquoi on travaille dans cette proposition dans un espace Euclidien orienté, car les angles orientés restent fixes quand on passe d'une base directe à une autre qui est directe aussi.*

Le système d'équations

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix},$$

donne

$$cos(\theta) = U_1V_1 + U_2V_2 = \langle U,V \rangle, sin(\theta) = U_1V_2 - U_2V_1 = \text{ dét } \| U,V \|_{e_i}.$$

On a donc les équations suivantes, qui sont utiles pour calculer l'angle θ,

$$cos(\theta) = \frac{\langle u,v \rangle}{\| u \| \| v \|}, sin(\theta) = \frac{\text{dét } \| U,V \|_{e_i}}{\| u \| \| v \|}. \tag{1.7}$$

Exemple : Soit $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique et de l'orientation canonique. Soient les deux vecteurs $u = (1,0)$ et $v = (2\sqrt{2},2\sqrt{2})$. L'angle orienté θ entre u et v est donné par

$$cos(\theta) = \frac{\langle u,v \rangle}{\| u \| \| v \|} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, sin(\theta) = \frac{\text{dét } \| U,V \|_{e_i}}{\| u \| \| v \|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 1.9.4 *Montrer que :*

1. $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\mathscr{R}_\theta \circ \mathscr{R}_{\theta'} = \mathscr{R}_{\theta+\theta'}$.

2. $\forall u,v,w \in E$, $(uv) + (vw) = (uw)$ *mod* 2π.

1.9.5 Angle orienté en dimension 3

Soit E un espace Euclidien orienté de dimension 3. Soit aussi π un plan de E muni du produit scalaire induit et de l'orientation induite définie par le vecteur unitaire $n \in \pi^\perp$. Soient u et v deux vecteurs de $\pi \setminus \{0\}$. Puisque π est orienté, d'après la Proposition 1.9.2 il existe un angle orienté $\theta = (uv)$ entre les deux vecteurs u et v. L'axe de la rotation $\mathscr{R}_\theta$ telle que $\mathscr{R}_\theta(\frac{u}{\|u\|}) = \frac{v}{\|v\|}$ est la droite ayant n comme vecteur directeur.

Exercice 1.9.5 *Soit $\{e_1,e_2\}$ une base orthonormée directe de π, ou d'une manière équivalente, $B = \{e_1,e_2,n\}$ est une base orthonormée directe de E. Montrer que*

$$sin(\theta) = \frac{\textit{dét } \| u,v,n \|_B}{\| u \| \| v \|}.$$

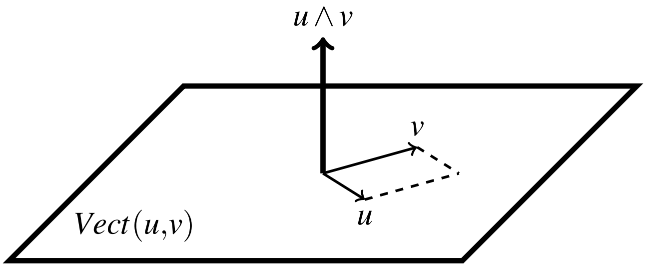
1.9.6 Produit extérieur

Nous définissons dans cette partie la notion du produit vectoriel, qui est importante en Mécanique, en particulier pour définir le moment d'une force. Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace Euclidien orienté de dimension 3.

Définition 1.9.6 *Soient u et v deux vecteurs indépendants de E. Le* ***produit vectoriel*** *de u et v, noté $u \wedge v$, est le vecteur qui réalise les conditions suivantes :*

1. *il est orthogonal au plan $Vect(u,v)$;*
2. *$(u,v,u \wedge v)$ est une base directe de E ;*
3. *$\| u \wedge v \|$=Surface du parallélogramme défini par les deux vecteurs u et v.*

Si u et v sont liés, on pose $u \wedge v = 0$.



Proposition 1.9.7 *Soient $u,v \in E$. Soit aussi n un vecteur unitaire perpendiculaire au plan $Vect(u,v)$ et θ l'angle orienté par l'orientation définie par le vecteur n. On a*

$$u \wedge v = \| u \| \| v \| \; sin(\theta) n.$$

Démonstration : Soient $w = \frac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|}$ et P le parallélogramme défini par u et v. On a par définition $u \wedge v =$ **Surface de P** $\times w$, comme **Surface de P** $= \| u \| \| v \| \, | \, sin(\theta) \, |$, alors

$$u \wedge v = \| u \| \| v \| \, | \, sin(\theta) \, | \; w. \tag{1.8}$$

D'autre part, on a

$$sin(\theta) = \frac{\text{dét} \; \| u,v,n \|}{\| u \| \| v \|} = \frac{\text{dét} \; \| u,v,\pm w \|}{\| u \| \| v \|}.$$

Donc si $w = n$, alors $sin(\theta) > 0$, si $w = -n$, on a $sin(\theta) < 0$. On remplace cela dans l'équation (1.8), et on trouve le résultat recherché.

□

Exercice 1.9.8 *Soit $\{e_1,e_2,e_3\}$ une base orthonormée directe de E et $x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i, y = \sum_{i=1}^{3} y_i e_i \in E$. Donner les coordonnées de $x \wedge y$ dans la base $\{e_i\}$.*

Exercice 1.9.9 *Soit $x,y,z \in E$. Montrer les équations suivantes :*

1. $\| x \wedge y \|^2 = \| x \|^2 \| y \|^2 - \langle x,y \rangle^2$.
2. $x \wedge (y \wedge z) = \langle x,z \rangle y - \langle x,y \rangle z$.

1.10 Diagonalisation des automorphismes autoadjoints

Définition 1.10.1 *Soit E un espace Euclidien. Un endomorphisme $f \in End(E)$ est dit* ***autoadjoint*** *si*

$$\forall x,y \in E, \langle f(x),y\rangle = \langle x,f(y)\rangle.$$

En d'autres termes, $f = f^*$.

Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de E. f est autoadjoint si et seulement si

$$\forall X,Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t(M(f)_{e_i}X)Y = {}^tXM(f)_{e_i}Y = {}^tX\,{}^tM(f)_{e_i}Y.$$

Ce qui est équivalent à ${}^tM(f)_{e_i} = M(f)_{e_i}$. Par conséquent, f est autoadjoint si et seulement si sa matrice $M(f)_{e_i}$ dans la base orthonormée $\{e_i\}$ est symétrique.

Théorème 1.10.2 ***(Diagonalisation des matrices symétriques réelles)***
Soit E un espace Euclidien et $f \in End(E)$ un automorphisme autoadjoint. On a :

1. *f est diagonalisable.*
2. *Les sous espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.*

En particulier, en choisissant une base orthonormée pour chaque sous espace propre, on peut construire une base orthonormée de vecteurs propres de E.

Démonstration : Soit A la matrice de f dans une base orthonormée et λ une valeur propre. Montrons que λ est réelle. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ. On a $AX = \lambda X$, de plus $\overline{AX} = \overline{\lambda}\overline{X}$ donne $A\overline{X} = \overline{\lambda}\overline{X}$, car A est réelle. Puisque A est symétrique, on déduit que

$$\lambda^t X\overline{X} = {}^t(AX)\overline{X} = {}^tX^tA\overline{X} = {}^tXA\overline{X} = \overline{\lambda}\,{}^tX\overline{X}.$$

Ainsi $\bar{\lambda} = \lambda$, et λ est donc réelle. Puisque λ a été choisi arbitrairement, les valeurs propres de A sont donc toutes réelles.
Montrons maintenant par récurrence sur n, la dimension de E, qu'il existe une base de vecteurs propres de E. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons le résultat vrai pour les espaces Euclidiens de dimension $n-1$. Soit λ une valeur propre de f, x un vecteur propre associé et posons $H = \text{Vect}\{x\}^\perp$. Rappelons que $\dim H = n-1$, d'après la Proposition 1.5.2.
Montrons au début que f est stable sur H, c'est à dire $f(H) \subset H$. En effet, soit $y \in H$. On a

$$\langle f(y),x\rangle = \langle y,f(x)\rangle = \lambda\langle y,x\rangle = 0,$$

car $y \perp x$. Ainsi $f(y) \perp x$ et donc $f(y) \in H$. Posons $\tilde{f} = f_{|H}$ la restriction de f sur H.
Vérifions que $\tilde{f}$ est autoadjoint sur H. En effet, $\forall u,v \in H$,

$$\left\langle \tilde{f}(u),v\right\rangle_H = \langle f(u),v\rangle_E = \langle u,f(v)\rangle_E = \left\langle u,\tilde{f}(v)\right\rangle_H.$$

Comme $\dim H = n-1$, alors d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\{e_2,\dots,e_n\}$ de vecteurs propres de $\tilde{f}$. On a clairement $\{x,e_2,\dots,e_n\}$ est une base de E formée de vecteurs propres de f. On en déduit que f est diagonalisable.
Finalement, vérifions que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Soient v_1,v_2 deux vecteurs propres de E et λ_1,λ_2 les valeurs propres correspondantes avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On a

$$\lambda_1\langle v_1,v_2\rangle = \langle f(v_1),v_2\rangle = \langle v_1,f(v_2)\rangle = \lambda_2\langle v_1,v_2\rangle.$$

Donc $(\lambda_1-\lambda_2)\langle v_1,v_2\rangle = 0$. Comme $\lambda_1-\lambda_2 \neq 0$, alors $\langle v_1,v_2\rangle = 0$.

$\square$

Ce théorème peut se reformuler sous la forme matricielle suivante :

Corollaire 1.10.3 *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et ses sous espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*

Exercice 1.10.4 *Soit la matrice symétrique complexe $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.*

Soit f une forme bilinéaire symétrique définie sur un espace vectoriel réel E. Pour savoir si f définit un produit scalaire, il suffit de vérifier si elle est définie positive. Pour cela, on utilise la méthode de réduction de Gauss qu'on verra dans le chapitre suivant (voir Théorème 2.2.2). On peut aussi utiliser le critère suivant :

Proposition 1.10.5 *Soit f une forme bilinéaire symétrique définie sur un espace vectoriel réel E de dimension n. Soit $\{e_1,\ldots,e_n\}$ une base de E. On a f définit un produit scalaire si et seulement si la matrice $M(f)_{e_i}$ a toutes ses valeurs propres strictement positives.*

Démonstration : Soit $\langle,\rangle_{e_i}$ le produit scalaire **associé à la base** $\{e_i\}$, et posons $g : E \longrightarrow E$ l'endomorphisme ayant $M(f)_{e_i}$ comme matrice dans $\{e_i\}$. On a donc

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle x, g(y)\rangle_{e_i} = {}^tXM(g)_{e_i}Y = {}^tXM(f)_{e_i}Y = f(x,y),$$

avec $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i, y = \sum_{i=1}^n y_ie_i \in E$.
Montrons que g est autoadjoint. En effet,

$$\forall x,y \in E, \langle x, g(y)\rangle = f(x,y) = f(y,x) = \langle y, g(x)\rangle = \langle g(x), y\rangle.$$

Ainsi, d'après le Théorème 1.10.2, on peut construire une base orthonormée $\{v_1,\ldots,v_n\}$ de vecteurs propres de g ayant $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ comme valeurs propres respectives. Soient $x = \sum_{i=1}^n x_iv_i, y = \sum_{j=1}^n y_jv_j \in E$. On a

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^n x_iy_jf(v_i,v_j) = \sum_{i,j=1}^n x_iy_j\langle v_i, g(v_j)\rangle_{e_i} =$$
$$= \sum_{i,j=1}^n x_iy_j\lambda_j\langle v_i, v_j\rangle_{e_i} = \lambda_1x_1y_1 + \cdots + \lambda_nx_ny_n.$$

Ainsi

$$f(x,x) = \lambda_1x_1^2 + \cdots + \lambda_nx_n^2.$$

Par conséquent, d'après le Théorème 1.10.2, f est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres λ_i de g, donc de $M(f)_{e_i}$, sont strictement positives.

$\square$

Chapitre 2

Formes bilinéaires et formes quadratiques

2.1 Rang et noyau d'une forme bilinéaire

Définition 2.1.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie défini sur un corps $\mathbb{K}$ et f une forme bilinéaire sur E. On appelle **rang** de f le rang de la matrice $M(f)_{e_i}$ de f dans une base quelconque $\{e_i\}$ de E :*

$$rg(f) = rg\, M(f)_{e_i}.$$

*La forme f est dite **non dégénérée** si $rg(f)$ =dim(E). On a*

$$f \text{ est non dégénérée} \Longleftrightarrow \text{dét}\, M(f)_{e_i} \neq 0.$$

Soit $\{e_i^{'}\}$ une autre base de E. L'équation (1.4) donne

$$M(f)_{e_i^{'}} = {}^tPM(f)_{e_i}P,$$

où P est la matrice de passage de $\{e_i\}$ vers $\{e_i^{'}\}$. P est inversible, donc dét $P \neq 0$. Ainsi

$$\text{dét}\, M(f)_{e_i^{'}} = (\text{dét}\, P)^2 \text{ dét}\, M(f)_{e_i},$$

ce qui implique

$$\text{dét}\, M(f)_{e_i^{'}} \neq 0 \Longleftrightarrow \text{ dét}\, M(f)_{e_i} \neq 0.$$

Donc le fait que f soit non dégénérée ne dépend pas de la base choisie, ce qui justifie la définition adoptée.

Exercice 2.1.2 *Montrer que $rg(f) = rg\, M(f)_{e_i}$ ne dépend pas de la base choisie $\{e_i\}$.*

Exemple : Tout produit scalaire est non dégénérée. En effet, si E est un espace vectoriel réel de dimension n, $\langle,\rangle$ un produit scalaire sur E, et $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base orthonormée de E. On a

$$M(\langle,\rangle_{e_i}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Donc rg $\langle,\rangle = n$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par

$$f(x,y) = -3x_1y_1 + 3x_3y_3 - 3x_1y_2 - 4x_1y_3 + x_2y_3 - 3x_2y_1 - 4x_3y_1 + x_3y_2.$$

Soit $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La forme f est dégénérée car dét $M(f)_{e_i} = 0$.
Fixons les hypothèses de la définition précédente. Posons

$$\begin{array}{rccc} s: & E & \longrightarrow & E^* \\ & y & \longmapsto & s(y), \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rccc} s(y): & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x,y). \end{array}$$

Si f est un produit scalaire, la Proposition 1.5.3 implique que s est un isomorphisme.

Proposition 2.1.3 *Soit $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E, $\{v_1,\dots,v_n\}$ une base de son dual E^*. On a*

$$M(s)_{e_i,v_j} = M(f)_{e_i}.$$

Démonstration : Posons $\forall i,j, s(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i$. Ceci donne

$$M(s)_{e_i,v_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On a

$$s(e_j)(e_k) = (a_{1j}v_1 + \dots + a_{nj}v_n)(e_k) = a_{kj}v_k(e_k) = a_{kj}.$$

D'autre part, par définition de s,

$$s(e_j)(e_k) = f(e_k,e_j).$$

Ainsi $f(e_k,e_j) = a_{kj}$, ce qui donne $M(s)_{e_i,v_j} = M(f)_{e_i}$.

□

D'après cette proposition, le rang de l'application bilinéaire f est égal au rang de l'application s, qui est aussi égal à la dimension de $\mathrm{Im}(s)$. Ceci nous permet de formuler les définitions suivantes, valables même quand la dimension de E n'est pas finie.

Définition 2.1.4 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $f: E\times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.*

1. *On appelle **rang de f** le rang de l'application*

$$\begin{array}{rccc} s: & E & \longrightarrow & E^* \\ & y & \longmapsto & f(.,y). \end{array}$$

2. *On appelle **noyau de f** l'ensemble*

$$N(f) = \{y \in E \mid \forall x \in E, f(x,y) = 0\} = Ker\ s.$$

3. *f est dite **non dégénérée** si s est injective, $Ker\ s = N(f) = \{0\}$, c'est à dire*

$$\forall x \in E, f(x,y) = 0 \Longrightarrow y = 0.$$

Quand E est de dimension finie. Le théorème du rang appliqué à l'application s donne

$$\dim E = \text{rg} f + \dim N(f).$$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par

$$f(x,y) = -3x_1y_1 + 3x_3y_3 - 3x_1y_2 - 4x_1y_3 + x_2y_3 - 3x_2y_1 - 4x_3y_1 + x_3y_2.$$

Soient $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{v_1,v_2,v_3\}$ une base de son dual $(\mathbb{R}^3)^*$. On a d'après la Proposition 2.1.3,

$$M(s)_{e_i,v_j} = M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a $N(f) = \text{Ker } s$, c'est l'ensemble de solutions du système

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Après calcul, on trouve $N(f) = \text{Ker } s = \{z_3(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 1), z_3 \in \mathbb{R}\}$.

Définition 2.1.5 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$ et $\{e_1,\ldots,e_n\}$ une base de E. L'application $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite **forme quadratique** sur E si*

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E, q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{K}, \forall i,j$. $q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en fonction des x_i.

Exercice 2.1.6 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, $\{e_i\}$ et $\{e_i'\}$ deux bases de E. Montrer que si $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme quadratique par rapport à $\{e_i\}$, alors c'est aussi une forme quadratique par rapport à la base $\{e_i'\}$. Donc le fait que q soit une forme quadratique ne dépend pas de la base choisie.*

Il existe une correspondance bijective entre les formes quadratiques et les formes bilinéaires symétriques, en effet :

Proposition 2.1.7 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$.*

1. *Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique. L'application $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par*

$$\forall x \in E, q(x) = f(x,x),$$

   est une forme quadratique sur E.

2. *Supposons maintenant que $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2. Soit $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique sur E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\forall x \in E, f(x,x) = q(x)$. f est donnée par la formule*

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)),$$

   *et elle est dite **forme polaire de** q.*

Démonstration :
Soit $\{e_1,\dots,e_n\}$ est une base de E.

1. Soit $f : E\times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique et soit l'application $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par
$$\forall x\in E, q(x) = f(x,x).$$
Vérifions que q est une forme quadratique sur E. Soient $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, $y=\sum_{j=1}^n y_je_j \in E$. L'équation (2.2) donne
$$q(x) = f(x,x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \dots,$$
avec $a_{ij}\in\mathbb{K}$. Donc q est une forme quadratique.
2. Réciproquement, soit $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique sur E. Donc $\forall x=\sum_{i=1}^n x_ie_i \in E$, $q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en fonction des x_i, c'est à dire
$$q(x) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \cdots + a_{ij}x_ix_j + \dots$$
tel que $a_{ij}\in\mathbb{K}$. Pour construire la forme bilinéaire symétrique f à partir de q, appliquons à q l'opération suivante, appelée **opération de polarisation** : On remplace les termes **carrés** $a_{ii}x_i^2$ par $a_{ii}x_iy_i$. On remplace les termes **rectangles** $a_{ij}x_ix_j$ par $\frac{1}{2}a_{ij}x_iy_j + \frac{1}{2}a_{ij}x_jy_i$. Ce qui donne $\forall x = \sum_{i=1}^n x_ie_i, y=\sum_{j=1}^n y_je_j \in E$,
$$f(x,y) = a_{11}x_1y_1 + \cdots + a_{nn}x_ny_n + \cdots + \frac{1}{2}a_{ij}x_iy_j + \frac{1}{2}a_{ij}x_jy_i + \dots$$
Ainsi f est une forme bilinéaire symétrique telle que $\forall x\in E, q(x) = f(x,x)$.
Pour $x,y\in E$, on a
$$\begin{aligned} q(x+y) &= f(x+y,x+y) \\ &= f(x,x)+f(x,y)+f(y,x)+f(y,y) \\ &= q(x)+2f(x,y)+q(y). \end{aligned}$$
Donc
$$f(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y)). \tag{2.1}$$
Ce qui assure l'unicité de la forme bilinéaire symétrique f

□

La Proposition 2.1.7 permet de donner une définition générale des formes quadratiques, valable même pour les espaces vectoriels qui n'ont pas une dimension finie.

Définition 2.1.8 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, pas nécessairement de dimension finie. L'application $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite **forme quadratique** sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique $f : E\times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\forall x\in E, q(x) = f(x,x)$. Quand la forme f existe, elle est donnée par*
$$\forall x,y\in E, f(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y)),$$
*f est appelée **forme polaire** de q.*

Cette définition généralise la Définition 2.1.5.

Exemple : Soit $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients sur $\mathbb{R}$, c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas de dimension finie. Vérifions que l'application

$$\begin{array}{rccl} q: & \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & \int_0^1 P(x)^2\,dx, \end{array}$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{R}[x]$. Soit la forme $f : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\forall P,Q \in \mathbb{R}[x]$,

$$\begin{aligned} f(P,Q) &= \frac{1}{2}\left(q(P+Q) - q(P) - q(Q)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (P(x)+Q(x))^2\,dx - \int_0^1 P(x)^2\,dx - \int_0^1 Q(x)^2\,dx\right) \\ &= \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx. \end{aligned}$$

Puisque f est une forme bilinéaire symétrique, alors q est une forme quadratique.
Puisque les formes quadratiques sont en correspondance bijective avec les formes bilinéaires symétriques, on peut transporter toutes les notions déjà vues pour les formes bilinéaires symétriques vers les formes quadratiques, en effet :

Définition 2.1.9 *Soit E un espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie.*

1. *On appelle rang, noyau, matrice d'une forme quadratique q, le rang, noyau et la matrice de la forme polaire associée à q.*
2. *La forme quadratique q est dite **non dégénérée** si sa forme polaire f est non dégénérée, $N(f) = \{0\}$. C'est à dire*
$$\forall y \in E, f(x,y) = 0 \Longrightarrow x = 0.$$
3. *La forme quadratique $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ à valeurs réelles est dite **définie positive** si sa forme polaire f est définie positive. C'est à dire*
$$(\forall y \in E, q(y) \geq 0) \text{ et } (q(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0).$$
4. *La forme quadratique $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ à valeurs réelles est dite **définie** si sa forme polaire f est définie. C'est à dire*
$$(q(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0).$$

Définition 2.1.10 *Soit E un espace vectoriel défini sur un corps $\mathbb{K}$ et $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique.*

1. *Les vecteurs $x \in E$ tels que $q(x) = 0$ sont dits **isotropes**.*
2. *L'ensemble*
$$\mathfrak{I}(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$$
*est appelé **cône isotrope**.*
*Notons que $\mathfrak{I}(q)$ n'est pas un espace vectoriel, c'est plutôt un **cône**, c'est à dire si $x \in \mathfrak{I}(q)$ alors $\lambda x \in \mathfrak{I}(q), \forall \lambda \in \mathbb{K}$.*

Exemple : Soit $E=\mathbb{R}^2$ et $q:E\longrightarrow\mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}, q(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$. La forme polaire $f:E\times E\longrightarrow\mathbb{R}$ de q est donnée par $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) &= \frac{1}{2}\left(q(x_1+y_1,x_2+y_2)-q(x_1,x_2)-q(y_1,y_2)\right)\\ &= (x_1+y_1)^2-(x_2+y_2)^2-(x_1^2-x_2^2)-(y_1^2-y_2^2)\\ &= 2(x_1y_1-x_2y_2). \end{aligned}$$

Puisque $f((1,1),(1,1))=0$, alors f n'est pas **définie**. On a de plus

$$\begin{aligned} N(f) &= \{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 \mid \forall(x_1,x_2)\in E, f((x_1,x_2),(y_1,y_2))=0\}\\ &= \{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 \mid \forall(x_1,x_2)\in E, x_1y_1-x_2y_2=0\}\\ &= \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

Ainsi f, et aussi q, sont non dégénérées. Finalement, le cône isotrope est donné par

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(q) &= \{(x_1,x_2)\in E \mid q(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2=0\}\\ &= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1=\pm x_2\}. \end{aligned}$$

Exercice 2.1.11 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $q:E\longrightarrow\mathbb{K}$ une forme quadratique. Montrer que*

$$N(q)\subset\mathfrak{I}(q).$$

2.2 Réduction en carrées via la méthode de Gauss

Le but de cette section est de répondre à la question suivante.

Question : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et $f:E\times E\longmapsto\mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Quand est ce que f est définie positive ?

Pour déterminer si f est définie positive, on va utiliser la méthode de réduction en carrées due à Gauss. En utilisant l'équation (1.1), on a

$$f(x,x)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+\cdots+2a_{ij}x_ix_j+\ldots. \tag{2.2}$$

C'est un polynôme homogène de degré 2. Les termes en x_i^2 sont appelés **termes carrés**, et ceux en $x_ix_j, i\neq j$ sont appelés **termes rectangles**.

Remarque 2.2.1 *Si f est un produit scalaire, tous les a_{ii} sont strictement positifs, $a_{ii}>0$. En effet, supposons que $a_{ii}\leq 0$, on a $a_{ii}=f(e_i,e_i)\leq 0$, ce qui implique que $e_i=0$, car f est un produit scalaire. Mais $e_i\neq 0$, ce qui est absurde.*

Répondons maintenant à la question principale de cette section et explicitons la méthode de Gauss via deux exemples concrets :

Exemple 1 : Soit $f:E\times E\longrightarrow\mathbb{R}$, $E=\mathbb{R}^3$, une forme bilinéaire symétrique telle que

$$f(x,x)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3-2x_1x_2.$$

On opère sur la variable x_1 pour extraire une identité remarquable de degré 2

$$\begin{aligned} f(x,x) &= \left(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right) + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2. \end{aligned}$$

On opère ensuite sur la variable x_2 pour extraire une identité remarquable de degré 2

$$\begin{aligned} f(x,x) &= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + 2x_3^2. \end{aligned}$$

On obtient donc une somme de carrés de formes linéaires. Cette expression est appelée **réduction en carrés de Gauss**.
Il est évident via cette expression que $f(x,x) \geq 0$ et donc f est positive. Supposons maintenant que $f(x,x) = 0$, ce qui implique

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0, \\ x_2 + x_3 &= 0, \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et $x = 0$. Par conséquent, f est définie positive.

Exemple 2 : Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\{e_1, e_2, e_3\}$ sa base canonique. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique telle que

$$f(x,x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

On fait comme dans l'exemple précédent. On commence par opérer sur la variable x_1 pour extraire une identité remarquable de degré 2

$$\begin{aligned} f(x,x) &= \left(x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2\right) + x_2^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3. \end{aligned}$$

On opère ensuite sur la variable x_2 pour extraire une identité remarquable de degré 2

$$\begin{aligned} f(x,x) &= (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 - x_3^2. \end{aligned}$$

Contrairement à l'exemple 1, on remarque dans cette expression qu'il y a un signe moins dans le dernier carré. La forme f n'est donc pas définie positive, en effet, le système suivant

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0, \\ x_2 - x_3 &= x_3, \end{aligned}$$

admet des solutions non nulles, par exemple $x_3 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_1 = -4$. Ainsi $f(x,x) = 0$ pour $x = -4e_1 + 2e_2 + e_3$ et donc f n'est pas définie positive.

Exemple 3 : Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\{e_1, e_2, e_3\}$ sa base canonique. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique telle que

$$f(x,x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

On opère sur la variable x_1 pour extraire une identité remarquable de degré 2

$$\begin{aligned} f(x,x) &= \left(x_1^2 + 2\,(2x_2 - x_3)x_1\right) + 4x_2^2 + x_3^2 - 3x_2x_3 \\ &= \left(x_1^2 + 2\,(2x_2 - x_3)x_1 + (2x_2 - x_3)^2\right) - (2x_2 - x_3)^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 3x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + x_2x_3. \end{aligned}$$

Contrairement aux exemples précédents, on remarque qu'on n'a pas de termes carrés dans la partie à droite de cette formule. On va donc procéder comme suit, on applique l'identité remarquable $ab = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right)$,

$$\begin{aligned} f(x,x) &= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{4}\left((x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2\right). \end{aligned}$$

C'est la **réduction en carrés de Gauss** de f.

On généralise ces exemples dans le théorème suivant.

Théorème 2.2.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ et f une forme bilinéaire symétrique. On peut écrire $f(x,x)$ sous la forme suivante*

$$f(x,x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i l_i(x)^2,$$

tels que $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ne sont pas tous nuls et $l_1, \ldots, l_r, r \leq n$, sont des formes linéaires indépendantes. De plus, f est définie positive si et seulement si $r = n$ et $\alpha_i > 0$ pour tout i.

Démonstration : On reprends l'équation (2.2)

$$f(x,x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \cdots + 2\,a_{ij}x_ix_j + \ldots.$$

On applique la méthode de réduction en carrées de Gauss. On distingue deux cas :

1^{er} **cas.** Supposons que l'un des termes carrés a_{ii} est non nul, $a_{ii} \neq 0$. Sans perte de généralité on pose donc $a_{11} \neq 0$. On commence par opérer sur x_1 pour extraire une identité remarquable de degré 2,

$$\begin{aligned} f(x,x) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \cdots + 2\,a_{ij}x_ix_j + \ldots \\ &= a_{11}x_1^2 + 2(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots \\ &= a_{11}\left(x_1^2 + 2\left(\frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)x_1\right) + a_{22}x_2^2 + \ldots \\ &= a_{11}\left(x_1^2 + 2\left(\frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)x_1 + \left(\frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2\right) - \frac{(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}} + \\ &\quad a_{22}x_2^2 + \ldots \\ &= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2 - \frac{(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}} + a_{22}x_2^2 + \ldots \end{aligned}$$

On regroupe les termes selon chaque monôme, cette dernière expression devient

$$
\begin{aligned}
f(x,x) &= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2 - \frac{(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}} + a_{22}x_2^2 + \dots \\
&= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + \cdots + b_{nn}x_n^2 + \cdots + 2b_{ij}x_ix_j + \dots
\end{aligned}
$$

tels que $b_{ij} \in \mathbb{R}$. Supposons que l'un des termes carrés b_{ii} est non nul, par exemple $b_{22} \neq 0$, on procède alors comme avant selon la variable x_2 et on continue ainsi progressivement pour obtenir à la fin

$$
f(x,x) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2 + b_{22}\left(x_2 + \frac{b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n}{b_{22}}\right)^2 + \dots
$$

On pose

$$
\begin{aligned}
l_1(x_1,\dots,x_n) &= x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}, \\
l_2(x_1,\dots,x_n) &= x_2 + \frac{b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n}{b_{22}}, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

ce qui donne

$$
f(x,x) = a_{11}l_1(x)^2 + b_{22}l_2(x)^2 + \dots,
$$

tels que $l_1,\dots,l_r$, $r \leq n$, sont des formes linéaires clairement indépendantes. Ce qui répond à l'énoncé du théorème.

2^{eme} **cas.** Supposons qu'a une certaine étape du procédé du 1^{er} **cas** on ne trouve pas de termes carrés, tous les termes sont rectangles. On se réduit alors à une expression de la forme suivante

$$
\sum a_{ij}x_ix_j,
$$

telle que $a_{ii} = 0$ pour tout i. Sans perte de généralité on suppose que $a_{12} \neq 0$. On isole les variables x_1 et x_2 et on trouve

$$
f(x,x) = a_{12}x_1x_2 + x_1S_1 + x_2S_2,
$$

tels que S_1 et S_2 sont des expressions linéaires en fonction des variables $x_3, x_4, \dots, x_n$. On a

$$
\begin{aligned}
f(x,x) &= a_{12}x_1x_2 + x_1S_1 + x_2S_2 \\
&= a_{12}\left(x_1 + \frac{S_2}{a_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{S_1}{a_{12}}\right) - \frac{S_1S_2}{a_{12}}.
\end{aligned}
$$

L'identité remarquable $ab = \frac{\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right)}{4}$ donne

$$
\begin{aligned}
f(x,x) &= a_{12}\left(x_1 + \frac{S_2}{a_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{S_1}{a_{12}}\right) - \frac{S_1S_2}{a_{12}} \\
&= \frac{a_{12}}{4}\left(\left(x_1 + x_2 + \frac{S_1 + S_2}{a_{12}}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{S_2 - S_1}{a_{12}}\right)^2\right) - \frac{S_1S_2}{a_{12}}.
\end{aligned}
$$

On applique ensuite le procédé du 1^{er} **cas** sur la formule $\frac{S_1S_2}{a_{12}}$. Posons

$$
\begin{aligned}
l_1(x_1,\ldots,x_n) &= x_1+x_2+\frac{S_1+S_2}{a_{12}},\\
l_2(x_1,\ldots,x_n) &= x_1-x_2+\frac{S_2-S_1}{a_{12}},\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

ce qui donne

$$f(x,x)=\frac{a_{12}}{4}l_1(x)^2-\frac{a_{12}}{4}l_2(x)^2+\ldots$$

Les formes linéaires l_1 et l_2 seront clairement indépendantes avec les autres, en effet, dans le cas contraire cela reviendrait à écrire x_1 en fonction des autres variables $x_2,x_3,\ldots,x_n$, ce qui est absurde. Ceci répond à l'énoncé du théorème.

Montrons maintenant la seconde partie du théorème. Supposons que durant la méthode en carrés de Gauss décrite au dessus, on trouve des termes carrés dans chaque étape avec des coefficients positifs, on n'applique donc que l'opération du 1^{er} **cas.** sans passer par le second cas et on obtiendra à la fin

$$f(x,x)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i l_i(x)^2,$$

tels que $\alpha_i>0$, et $l_1,\ldots,l_r$, $r\leq n$, sont des formes linéaires indépendantes de la forme (2.3). Si $r=n$ et $f(x,x)=0$, alors

$$
\begin{aligned}
x_1+&\frac{a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n}{a_{11}}=0,\\
x_2+&\frac{b_{23}x_3+\cdots+b_{2n}x_n}{b_{22}}=0,\\
&\vdots\\
x_n&=0.
\end{aligned}
$$

Donc $x_1=\cdots=x_n=0$ et f est définie positive. Si $r<n$ et $f(x,x)=0$, alors il existera moins d'équations que de variables et on aura une infinité de solutions, donc f n'est pas définie positive. Supposons maintenant que via la méthode en carrés de Gauss on trouve un coefficient négatif,

$$f(x,x)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i l_i(x)^2,$$

tel que $\alpha_1>0$ et $\alpha_2<0$. Considérons dans ce cas le système d'équations

$$
\begin{aligned}
l_1(x) &= \sqrt{\frac{-\alpha_2}{\alpha_1}}l_2(x),\\
l_3(x) &= 0,\\
&\vdots\\
l_r(x) &= 0.
\end{aligned}
$$

C'est un système homogène qui comporte moins d'équations que d'inconnues, donc il existe $x=(x_1,\ldots,x_n)\neq 0$ tel que $f(x,x)=0$. Ce qui achève la preuve du théorème.

$\square$

2.3 Bases orthogonales et réduction des formes quadratiques

Nous étudions dans cette section le problème de la réduction des formes quadratiques, nous allons voir que ce problème pourrait être réduit à chercher des bases orthogonales dans les espaces vectoriels munis de formes bilinéaires symétriques.

Définition 2.3.1 *Soit E un espace vectoriel défini sur un corps $\mathbb{K}$ et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique. Une base $\{e_i\}$ de E est dite* ***orthogonale*** *pour la forme f si $\forall i, j, i \neq j, f(e_i, e_j) = 0$. Une base orthogonale $\{e_i\}$ est dite* ***orthonormée*** *si de plus elle réalise $\forall i, f(e_i, e_i) = 0$.*

Notons que cette définition généralise la Définition 1.2.1 pour les bases orthogonales et orthonormées pour les produits scalaires aux formes bilinéaires symétriques.

Exemple : Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$, $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ la forme polaire associée. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthogonale de E pour la forme f. Posons $\forall i, a_{ii} = f(e_i, e_i) \in \mathbb{K}$. On a

$$M(q)_{e_i} = M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ce qui est équivalent à $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$q(x) = f(x, x) = a_{11} x_1^2 + \cdots + a_{nn} x_n^2.$$

Notons que le nombre de carrés dans cette expression est égale au rang de la forme quadratique q. De la même manière, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormée de E pour la forme f, alors

$$M(q)_{e_i} = M(f)_{e_i} = I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui est équivalent à $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$q(x) = f(x, x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

D'après cet exemple, chercher une base orthogonale revient à déterminer une base dans laquelle la matrice de q est diagonale, ce qui est équivalent à écrire q sous la forme de somme en termes carrés. On peut ainsi formuler les questions suivantes :

Question : Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q :

1. Est ce qu'il existe une base orthogonale de E pour la forme q ?
2. Est ce que le Théorème 1.2.3 se généralise et s'applique sur E ? Plus précisément, est ce qu'il existe une base orthonormée de E pour la forme q ?

Le théorème suivant répond à la première question.

Théorème 2.3.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, $E \neq 0$, et $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique.*
Il existe toujours une base orthogonale de E pour la forme q. Plus précisément, il existe une base $\{e_i\}$ de E telle que $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$q(x) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_r x_r^2,$$

avec $a_i \in \mathbb{K}$ et $r = rg\ q$. En d'autres termes,

$$M(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration : La démonstration est presque identique à celle du Théorème 1.2.3. On raisonne par récurrence sur la dimension n de E.
Si $n = 1$, le résultat est évident. Supposons le théorème vrai pour l'ordre $n-1$. Soit E un espace vectoriel de dimension n défini sur un corps $\mathbb{K}$ et muni d'une forme quadratique $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ et sa forme polaire associée $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$.
Si $q = 0$, toutes les bases sont orthogonales et le théorème est trivial. Supposons maintenant que $q \neq 0$. Soit $v \in E$ tel que $q(v) \neq 0$, et soit l'ensemble des vecteurs de E qui lui sont orthogonaux

$$G = \{x \in E \mid f(x,v) = 0\}.$$

L'ensemble G est clairement un sous espace vectoriel et $v \notin G$, car $q(v) \neq 0$. Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & f(x,v). \end{array}$$

Le théorème du Rang donne dim $E-$ dim(ker f)=1, donc dim (G) =dim(ker f)= $n-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthogonale $\{t_1,\dots,t_{n-1}\}$ de G. Vérifions que $\{v,t_1,\dots,t_{n-1}\}$ est une base orthogonale de E. En effet,

$$\forall i, f(v,t_i) = 0,$$

donc les éléments de la famille $\{v,t_1,\dots,t_{n-1}\}$ sont deux à deux orthogonaux. Il reste à montrer que $\{v,t_1,\dots,t_{n-1}\}$ est une base. Puisqu'elle est constituée de n éléments, il suffit de vérifier qu'elle est libre. En effet, soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_{n-1}t_{n-1} + \lambda_n v = 0$. On a donc

$$f(\lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_{n-1}t_{n-1} + \lambda_n v, v) = f(0,v) = 0,$$

et d'autre part

$$f(\lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_{n-1}t_{n-1} + \lambda_n v, v) = \lambda_1 f(t_1,v) + \cdots + \lambda_{n-1} f(t_{n-1},v) + \lambda_n f(v,v) = \lambda_n f(v,v).$$

Par conséquent, $\lambda_n f(v,v) = 0$, et donc $\lambda_n = 0$ car $q(v) = f(v,v) \neq 0$. Puisque $\lambda_n = 0$, alors $\lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_{n-1}t_{n-1} = 0$, et ainsi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ car $\{t_1,\dots,t_{n-1}\}$ est une base de G. On a finalement $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$, ce qui achève la démonstration du théorème.

□

2.4 Classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel

Théorème 2.4.1 ***(Théorème de Sylvester)***
Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ et $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique. Il existe toujours une base $\{e_i\}$ de E telle que $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$,

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2,$$

avec $r = rg(q)$ et p est un entier qui ne dépend que de la forme quadratique q et non pas de la base choisie. Le couple $(p, r-p)$, noté $sign(q)$, est appelé ***signature de q****.*

Démonstration : Soit $\{e_i\}$ une base orthogonale de E. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$. On a

$$q(x) = a_1 y_1^2 + \cdots + a_r y_r^2, a_i \in \mathbb{R}.$$

Supposons que pour un certain entier naturel $p \leq r$, on a $a_1, \ldots, a_p > 0$ et $a_{p+1}, \ldots, a_r < 0$. Ainsi, posons

$$x_1 = \sqrt{a_1} y_1, \ldots, x_p = \sqrt{a_p} y_p, x_{p+1} = -\sqrt{-a_{p+1}} y_{p+1}, \ldots, x_r = -\sqrt{-a_r} y_r.$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} q(x) &= (\sqrt{a_1} y_1)^2 + \cdots + \left(\sqrt{a_p} y_p\right)^2 - \left(\sqrt{-a_{p+1}} y_{p+1}\right)^2 - \cdots - \left(\sqrt{-a_r} y_r\right)^2 \\ &= x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2. \end{aligned}$$

Vérifions que l'entier p ne dépend pas du choix de la base. Soient $\{e_i\}$ et $\{e_i^{'}\}$ deux bases de E telles que

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2, \\ q(x) &= y_1^2 + \cdots + y_{p'}^2 - y_{p'+1}^2 - \cdots - y_r^2, \end{aligned}$$

avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $x = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^{'}$. Posons

$$\begin{aligned} F = Vect\{e_1, \ldots, e_p\}, F^{'} = Vect\{e_1^{'}, \ldots, e_{p'}^{'}\}, \\ G = Vect\{e_{p+1}, \ldots, e_n\}, G^{'} = Vect\{e_{p'+1}^{'}, \ldots, e_n^{'}\}, \end{aligned}$$

Montrons que $F \cap G^{'} = \{0\}$. On a

$$\begin{aligned} x \in F \setminus \{0\} \Longrightarrow q(x) > 0, x \in F^{'} \setminus \{0\} \Longrightarrow q(x) > 0, \\ x \in G \Longrightarrow q(x) \leq 0, x \in G^{'} \Longrightarrow q(x) \leq 0. \end{aligned}$$

Donc $x \in F \cap G^{'}$ implique $x = 0$, et par conséquent, $F \cap G^{'} = \{0\}$. Ainsi

$$\dim F + \dim G = \dim (F + G) = p + (n - p^{'}) \leq n = \dim E,$$

et donc $p \leq p^{'}$. De la même manière, on montre que $G \cap F^{'} = \{0\}$, et on en déduit que $p^{'} \leq p$.

□

Corollaire 2.4.2 *Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E. On a les équivalences suivantes,*

$$\begin{aligned} q \text{ est défini positive } &\Longleftrightarrow sign(q) = (n,0), \\ q \text{ est non dégénérée } &\Longleftrightarrow sign(q) = (p,n-p). \end{aligned}$$

Exemple : Soit la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$ donnée dans la base canonique $\{e_1,e_2,e_3\}$ par $\forall x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i \in \mathbb{R}^3$,

$$q(x) = x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

La réduction de Gauss donne

$$q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 + x_3^2,$$

ce qui donne $\text{sign}(q) = (2,1)$.

2.5 Recherche d'une base orthogonale

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$, $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E, et $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique donnée par $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \cdots + a_{ij}x_ix_j + \dots, \tag{2.4}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{K}$.
Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ la forme polaire de q. Pour trouver une base orthogonale de E, on peut partir de la base $\{e_1,\dots,e_n\}$ et lui appliquer le procédé de Gram-Schmidt. Dans la première étape du procédé de Gram-Schmidt, on va devoir diviser par $q(e_1) = f(e_1,e_1)$ qui peut être nul, puisque f n'est pas toujours définie positive. Ainsi, ce procédé qui fonctionne bien dans le cas du produit scalaire, ne marche pas toujours pour les formes bilinéaires symétriques. Pour cela, on va voir une autre méthode pour déterminer une base orthogonale de E.
Supposons que la réduction en carrés de Gauss (Théorème 2.2.2) appliquée à l'équation (2.4) donne $\forall x \in E$,

$$q(x) = f(x,x) = \alpha_1 l_1(x)^2 + \cdots + \alpha_r l_r(x)^2, \tag{2.5}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{K}$ ne sont pas tous nuls et $l_1,\cdots,l_r$ sont des formes linéaires indépendantes, $r = rg(q)$. $\{l_1,\dots,l_r\}$ est une famille libre de l'espace dual E^*, complétons la en une base $\{l_1,\dots,l_r,l_{r+1},\dots,l_n\}$ de E^*. Posons $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$\begin{aligned} l_1(x) &= \beta_{11}x_1 + \cdots + \beta_{1n}x_n, \\ &\vdots \\ l_n(x) &= \beta_{n1}x_1 + \cdots + \beta_{nn}x_n, \end{aligned}$$

tels que $\forall i,j,\beta_{ij} \in \mathbb{K}$, et soit la matrice de taille $n \times n$

$$P = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{pmatrix} l_1(x) \\ \vdots \\ l_n(x) \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.5.1 *On a dét $P \neq 0$.*

Démonstration : Puisque $l_1, \cdots, l_n$ sont des formes indépendantes, alors pour $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \mathbb{K}$, on a

$$\left(\forall x \in E, \sum_{i=1}^{n} \gamma_i l_i(x) = 0\right) \Longrightarrow \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0.$$

Ce qui donne

$$\left(\forall x \in E, \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\beta_{i1}x_1 + \cdots + \beta_{in}x_n) = 0\right) \Longrightarrow \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0.$$

C'est équivalent à

$$\left(\forall x \in E, \sum_{i=1}^{n} x_i(\gamma_1\beta_{1i} + \cdots + \gamma_n\beta_{ni}) = 0\right) \Longrightarrow \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0.$$

En particulier, ceci nous donne

$$(\forall i, \gamma_1\beta_{1i} + \cdots + \gamma_n\beta_{ni} = 0) \Longrightarrow \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0.$$

C'est équivalent à

$${}^tP \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{1n} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0.$$

Ainsi dét $P =$ dét ${}^tP \neq 0$.

$\square$

Puisque dét $P \neq 0$, P est inversible. Soient $v_1, \cdots, v_n$ les vecteurs colonnes de la matrice inverse P^{-1} tels que $\{v_i\}$ soit une base de E et $P^{-1} = P_{\{e_i\} \longrightarrow \{v_i\}}$ la matrice de passage de $\{e_i\}$ vers $\{v_i\}$. On déduit que $P = P_{\{v_i\} \longrightarrow \{e_i\}}$. Ainsi

$$\begin{aligned} e_1 &= \beta_{11}v_1 + \cdots + \beta_{n1}v_n, \\ &\vdots \\ e_n &= \beta_{1n}v_1 + \cdots + \beta_{nn}v_n. \end{aligned}$$

Proposition 2.5.2 *On a $\forall i$, $l_i(v_i) = 1$ et $l_i(v_j) = 0$ pour $j \neq i$.*

Démonstration :
En effet, on a $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$\begin{aligned} x &= x_1(\beta_{11}v_1 + \cdots + \beta_{n1}v_n) + \cdots + x_n(\beta_{1n}v_1 + \cdots + \beta_{nn}v_n) \\ &= (\beta_{11}x_1 + \cdots + \beta_{1n}x_n)v_1 + \cdots + (\beta_{n1}x_1 + \cdots + \beta_{nn}x_n)v_n \\ &= l_1(x)v_1 + \cdots + l_n(x)v_n. \end{aligned}$$

Ainsi $\forall i$,

$$v_i = l_1(v_i)v_1 + \cdots + l_n(v_i)v_n.$$

Ce qui donne, puisque $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base, $l_i(v_i) = 1$ et $l_j(v_i) = 0, \forall j \neq i$.

$\square$

Vérifions maintenant que $\{v_i\}$ est orthogonale. L'équation (2.5) donne $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in E$,

$$\begin{aligned} q(x) &= \alpha_1 l_1(x)^2 + \cdots + \alpha_r l_r(x)^2 \\ &= \alpha_1 l_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \right)^2 + \cdots + \alpha_r l_r \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \right)^2 \\ &= \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_r x_r^2, \end{aligned}$$

et donc

$$M(q)_{v_i} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\{v_i\}$ est une base orthogonale. Récapitulons ce qu'il faut faire pour trouver une base orthogonale de la forme quadratique q :

1. On commence par utiliser la réduction en carrées de Gauss appliquée à la forme quadratique q.
2. On complète la famille libre $\{l_1, \ldots, l_r\}$ en une base $\{l_1, \ldots, l_n\}$ de E^*.
3. On extrait la matrice P.
4. Les vecteurs colonnes $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de la matrice P^{-1} forment la base orthogonale recherchée.

Exemple : Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique donnée par $\forall x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i \in \mathbb{R}^3$,

$$q(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

En appliquant la méthode de réduction en carrées de Gauss, on trouve que

$$q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (2x_1 + x_3)^2.$$

Soient les formes linéaires $l_1, l_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ données par

$$\begin{aligned} l_1(x) &= x_1 + x_2 + x_3, \\ l_2(x) &= 2x_1 + x_3. \end{aligned}$$

$\{l_1, l_2\}$ est une famille libre de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$, complétons la en une base $\{l_1, l_2, l_3\}$ telle que

$$l_3(x) = x_2.$$

Par conséquent, la matrice P est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et sa matrice inverse P^{-1} est donnée par

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La base orthogonale $\{v_1,v_2,v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ pour q est donnée par

$$\begin{aligned} v_1 &= -e_1+2e_3,\\ v_2 &= e_1-e_3,\\ v_3 &= e_1+e_2-2e_3. \end{aligned}$$

2.6 Sous espaces orthogonaux

On dit que deux vecteurs $x,y \in E$ **sont orthogonaux** pour la forme bilinéaire f, si $f(x,y)=0$. On note $x \perp_f y$. Cela généralise la définition des vecteurs orthogonaux pour les espaces Euclidiens.

Définition 2.6.1 *Soit E un espace vectoriel défini sur un corps $\mathbb{K}$, A un sous-ensemble de E, et $f : E\times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. L'ensemble*

$$A^{\perp} = \{x\in E \mid \forall a \in E, f(x,a)=0\}$$

*est appelé **orthogonal de** A pour la forme bilinéaire f.*

Proposition 2.6.2 *Soit E un espace vectoriel défini sur un corps $\mathbb{K}$, A un sous-ensemble de E, $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique et f sa forme polaire.*

1. *$A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *$\{0\}^{\perp}=E$, $E^{\perp}=N(q)$.*
3. *$N(q)\subset A^{\perp}$.*

Démonstration : Les démonstrations sont évidentes.

□

Définition 2.6.3 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et F un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble F^0 des formes linéaires qui s'annulent sur les vecteurs de F,*

$$F^0=\{\varphi\in E^* \mid \forall x\in F, \varphi(x)=0\},$$

*est un sous-espace vectoriel de l'espace dual E^*. Il est appelé **annulateur de** F.*

Lemme 2.6.4 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On a*

$$dim\ E = dim\ F + dim\ F^0.$$

Démonstration : Supposons que dim $E=n$ et soit $\{e_1,\dots,e_p\}$ une base de F. Complétons la en une base $B=\{e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n\}$ de E. Soit $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}$ la base duale de B dans E^*. Montrons que $\{e_{p+1}^*,\dots,e_n^*\}$ est une base de F^0, ce qui donnera le résultat voulu dim $F^0=n-p=$ dim $E-$ dim F. Soit $k=p+1,\dots,n$. On a $e_k^*(e_1)=0,\dots,e_k^*(e_p)=0$, donc e_k^* annule tous les vecteurs de F. Ainsi $e_k^*\in F^0$. On déduit que $e_{p+1}^*,\dots,e_n^*\in F^0$. De plus, la famille $\{e_{p+1}^*,\dots,e_n^*\}$ est clairement libre, puisqu'elle est extraite d'une base. Il reste à démontrer qu'elle engendre F^0.
Soit $\varphi\in F^0$. Montrons que φ s'écrit comme combinaison linéaire en fonction des $e_{p+1}^*,\dots,e_n^*$. Soit $x\in E$ tel que

$$x=x_1e_1+\cdots+x_pe_p+x_{p+1}e_{p+1}+\cdots+x_ne_n,$$

avec $x_i \in \mathbb{K}$. Comme $e_1, \ldots, e_p \in F$ et $\varphi \in F^0$, alors

$$\varphi(x) = x_{p+1}\varphi(e_{p+1}) + \cdots + x_n\varphi(e_n).$$

Posons $\lambda_{p+1} = \varphi(e_{p+1}), \ldots, \lambda_n = \varphi(e_n)$. On trouve que

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lambda_{p+1}x_{p+1} + \cdots + \lambda_n x_n \\ &= \lambda_{p+1}e^*_{p+1}(x) + \cdots + \lambda_n e^*_n(x).\end{aligned}$$

Puisque cela est vrai pour tout $x \in E$, alors

$$\varphi = \lambda_{p+1}e^*_{p+1} + \cdots + \lambda_n e^*_n.$$

$\square$

Proposition 2.6.5 *Soient E un espace vectoriel défini sur un corps $\mathbb{K}$, F un sous-espace vectoriel de E, $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique et f sa forme polaire. Posons $N = N(q)$. On a :*

1. $\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim F \cap N$.

2. $F^{\perp\perp} = F + N$.

Démonstration :

1. Soit l'application

$$\begin{array}{cccc} s: & E & \longrightarrow & E^* \\ & y & \longmapsto & f(.,y), \end{array}$$

telle que $f(.,y)$ est définie par

$$\begin{array}{cccc} f(.,y): & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & f(x,y). \end{array}$$

Appliquons le Lemme 2.6.4 au sous-espace vectoriel $s(F)$ de l'espace dual E^*, ce qui donne

$$\dim\ (s(F))^0 + \dim s(F) = \dim E^* = \dim E. \tag{2.6}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(s(F))^0 &= \{x \in E^{**} \simeq E \mid \forall \varphi \in s(F), \varphi(x) = 0\} \\ &= \{x \in E \mid \forall y \in F, f(x,y) = 0\} \\ &= F^\perp.\end{aligned}$$

Remplaçons cela dans l'équation (2.6), on trouve

$$\dim F^\perp + \dim s(F) = \dim E.$$

Ainsi, le théorème du rang donne

$$\begin{aligned}\dim F &= \dim Im(s_{|F}) + \dim Ker(s_{|F}) \\ &= \dim Im(s_{|F}) + \dim\ (Ker(s) \cap F) \\ &= \dim s(F) + \dim\ (F \cap N) \\ &= \dim E - \dim F^\perp + \dim\ (F \cap N).\end{aligned}$$

2. On a $F \subset F^{\perp\perp}$. D'autre part, $N = E^{\perp} \subset F^{\perp\perp}$, ce qui donne

$$F + N \subset F^{\perp\perp}.$$

D'après 1), on a

$$\dim E = \dim F + \dim F^{\perp} - \dim F \cap N. \tag{2.7}$$

Appliquons encore une fois 1) à $F^{\perp}$, on trouve

$$\dim E = \dim F^{\perp} + \dim F^{\perp\perp} - \dim F^{\perp} \cap N. \tag{2.8}$$

On soustrait l'équation (2.7) de l'équation (2.8), on a

$$\dim F - \dim F^{\perp\perp} + \dim F^{\perp} \cap N - \dim F \cap N.$$

Comme $N = E^{\perp} \subset F^{\perp}$, alors $N \cap F^{\perp} = N$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \dim F^{\perp\perp} =& \dim F + \dim N - \dim F \cap N \\ =& \dim (F + N). \end{aligned}$$

Ajoutons cela à $F + N \subset F^{\perp\perp}$, ceci donne $F + N = F^{\perp\perp}$.

□

Définition 2.6.6 *Soient E un espace vectoriel défini sur un corps $\mathbb{K}$, $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique et f sa forme polaire. Un sous-espace vectoriel F de E est dit* ***isotrope*** *si*

$$F \cap F^{\perp} \neq \{0\}.$$

Proposition 2.6.7 *Soient E un espace vectoriel défini sur un corps $\mathbb{K}$, $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique et f sa forme polaire. On a*

$$E = F \oplus F^{\perp} \Longleftrightarrow F \textit{ est non isotrope } (F \cap F^{\perp} = \{0\}).$$

Démonstration : Il suffit de montrer l'implication $\Longleftarrow$). Supposons que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Puisque $N = E^{\perp} \subset F^{\perp}$, alors $N \cap F = \{0\}$. Donc la Proposition 2.6.5 donne

$$\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}.$$

Ainsi $E = F \oplus F^{\perp}$.

□

2.7 Endomorphisme adjoint

Nous allons voir dans cette section que la notion de l'endomorphisme adjoint qu'on a vu pour les espaces Euclidiens, se généralise aux espaces vectoriels de dimension finie munis d'une forme quadratique non dégénérée.

Proposition 2.7.1 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique non dégénérée, s sa forme polaire, et $f \in End(E)$ un endomorphisme. Il existe alors un unique endomorphisme $f^* \in End(E)$ tel que*

$$\forall x,y \in E, s(f(x),y) = s(x,f^*(y)).$$

L'endomorphisme f^* est appelé ***adjoint de*** *f relativement à s*

Démonstration : Soit $\{e_i\}$ une base de E, $S = M(s)_{e_i}$. Puisque s est non dégénérée, alors S est inversible. Soit donc $f^* \in End(E)$ l'endomorphisme ayant pour matrice

$$M(f^*)_{e_i} = S^{-1}\,{}^tM(f)_{e_i}S. \tag{2.9}$$

On a $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} s(f(x),y) &= {}^t\left(M(f)_{e_i}X\right) SY \\ &= {}^tX\,{}^tM(f)_{e_i}SY \\ &= {}^tX\,SM(f^*)_{e_i}Y \\ &= s(x,f^*(y)). \end{aligned}$$

On a finalement que tout endomorphisme satisfaisant cette équation, sa matrice est de la forme suivante $S^{-1}\,{}^tM(f)_{e_i}S$, ce qui prouve l'unicité.

□

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\{e_1,e_2\}$ sa base canonique, et q une forme quadratique donnée par $\forall x = x_1e_1 + x_2e_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2^2.$$

Sa forme polaire s est donnée donc par $\forall x = x_1e_1 + x_2e_2, y = y_1e_1 + y_2e_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} s(x,y) &= \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \\ &= x_1y_1 - 2x_2y_2. \end{aligned}$$

On a

$$S = M(s)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme donné par

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Son endomorphisme adjoint f^*, d'après l'équation (2.9), est donné par

$$\begin{aligned} M(f^*)_{e_i} &= S^{-1}\,{}^t M(f)_{e_i} S \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -2c \\ -\frac{b}{2} & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposition 2.7.2 *Gardons les hypothèses de la proposition précédente et soient f,g deux endomorphismes de E. Soit aussi le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $f^{**} = f$, $(id)^* = id$, $(f+g)^* = f^* + g^*$, $(\lambda f)^* = \lambda f^*$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, $rg\ f^* = rg\ f$, $dét\ f^* = dét\ f$.*

Démonstration : Ces résultats se démontrent tous en utilisant la formule (2.9). Prouvons par exemple $f^{**} = f$. On a

$$M(f^*)_{e_i} = S^{-1}\,{}^t M(f)_{e_i} S.$$

D'autre part

$$M(f^{**})_{e_i} = S^{-1}\,{}^t M(f^*)_{e_i} S.$$

On remplace la première équation dans la seconde, on trouve

$$\begin{aligned} M(f^{**})_{e_i} &= S^{-1}\,{}^t M(f^*)_{e_i} S \\ &= S^{-1}\,{}^t\left(S^{-1}\,{}^t M(f)_{e_i} S\right) S \\ &= S^{-1}\,{}^t S\,{}^t\left({}^t M(f)_{e_i}\right) {}^t S^{-1} S \\ &= S^{-1}\,{}^t S\, M(f)_{e_i}\,{}^t S^{-1} S. \end{aligned}$$

Puisque la forme s est symétrique, alors S est une matrice symétrique, ${}^t S = S$, la dernière équation devient

$$\begin{aligned} M(f^{**})_{e_i} &= S^{-1}\,{}^t S\, M(f)_{e_i}\,{}^t S^{-1} S \\ &= S^{-1} S\, M(f)_{e_i} S^{-1} S \\ &= M(f)_{e_i}. \end{aligned}$$

Ce qui donne $f^{**} = f$.

□

2.8 Groupe orthogonal d'une forme quadratique

Dans cette partie, nous allons étudier les endomorphismes f de E qui conservent une forme quadratique $q, \forall x \in E, q(f(x)) = q(x)$. Ceci généralise le concept du groupe orthogonal déjà vu pour les endomorphismes qui conservent la norme des vecteurs.

Proposition 2.8.1 *Soit (E,q) un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique non dégénérée q, s la forme polaire de q. Soit aussi un endomorphisme $f \in End(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\forall x \in E$, $q(f(x)) = q(x)$.

2. $\forall x,y \in E$, $s(f(x),f(y)) = s(x,y)$.

3. $f^* \circ f = Id$, $f \circ f^* = Id$.

L'endomorphisme f est dit ***orthogonal*** *relativement à q.*

Démonstration : 2) $\Longrightarrow$ 1), il suffit de faire $x = y$ dans la formule de 2).
1) $\Longrightarrow$ 2), on a

$$\begin{aligned} s(f(x),f(y)) &= \frac{1}{2}\left(q(f(x)+f(y)) - q(f(x)) - q(f(y))\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(q(f(x+y)) - q(f(x)) - q(f(y))\right). \end{aligned}$$

Puisque f conserve la forme quadratique q d'après 1), alors

$$s(f(x),f(y)) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) = s(x,y).$$

Montrons que 2) $\Leftrightarrow$ 3). Soit $\{e_i\}$ une base de E, $S = M(s)_{e_i}$. L'équation de 2)

$$\forall x,y \in E, s(f(x),f(y)) = s(x,y)$$

est équivalente à

$$\forall X,Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t(M(f)_{e_i}X)\, S M(f)_{e_i} Y = {}^t X S Y.$$

Ceci est équivalent à

$${}^t M(f)_{e_i} S M(f)_{e_i} = S.$$

Donc $S^{-1}\, {}^t M(f)_{e_i} S M(f)_{e_i} = Id$. Ceci devient en utilisant l'équation (2.9), $M(f^*)_{e_i} M(f)_{e_i} = Id$. Ainsi $f^* \circ f = Id$. L'autre équation de 3) se démontre de la même façon.

$\square$

La proposition suivante se vérifie facilement :

Proposition 2.8.2 *Soient (E,q) un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique non dégénérée q et s la forme polaire de q. Posons $O(q) = \{f \in End(E) \mid f^* \circ f = Id\}$. On a :*

1. $Id \in O(q)$;

2. $\forall f,g \in O(q)$, $f \circ g \in O(q)$;

3. $\forall f \in O(q)$, $f^{-1} \in O(q)$.

L'ensemble $O(q)$ est donc un groupe appelé ***groupe orthogonal de*** *q.*

Proposition 2.8.3 *Fixons les hypothèses de la proposition précédente. Soit $f \in O(q)$, alors dét $f = \pm 1$.*
L'ensemble

$$SO(q) = \{f \in O(q) \mid \text{dét } f = 1\}$$

est un sous-groupe de $O(q)$, appelé ***groupe spécial orthogonal de*** *q.*

Démonstration : Soit $f \in O(q)$. On a $f^* \circ f = Id$. L'équation (2.9) implique dét $f^* =$ dét f. Ainsi

$$1 = \text{dét } f^* \circ f = \text{dét } f^* \times \text{dét } f = (\text{dét } f)^2.$$

Ce qui donne le résultat dét $f = \pm 1$.

$\square$

Bibliographie

[1] S. Axler, Linear Algebra, Done Right, *Springer-Verlag New York Inc*, **Seconde édition** (1997).

[2] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence, Linear Algebra, *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632*, **Seconde édition** (1989).

[3] J. Grifone, Algèbre Linéaire, *Cépaduès-Editions*, **4ème édition** (2011).

[4] P. R. Halmos, Finite-Dimensional vector spaces, *Springer-Verlag New York Inc* (1987).