Exercice 1 :

On considère la fonct° f définie par : $f(x,y) = x^2 + y^2$

on montre que f est différentiable en pt $(1,1)$.

M1 - f est une fonction polynomiale $\Rightarrow$ f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, en particulier au pt $(1,1)$.

et on a : $df_{(1,1)}(h,K) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1).K$

(b) f de classe C^1
$\Downarrow$
f différen en x_0
$\Downarrow$
f continue en x_0

d'où : $df_{(1,1)}(h,K) = 2h + 2K$.

M2 - soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h,K) \in \mathbb{R}^2$

on a : $f((x+y)+(h,K)) - f(x,y) = (x+h)^2 + (y+K)^2 - x^2 - y^2$

$= x^2 + 2xh + h^2 + y^2 + 2Ky + K^2 - x^2 - y^2$

d'où : $f((x+y)+(h,K)) - f(x,y) = 2xh + 2Ky + h^2 + K^2$

$= 2xh + 2Ky + \|(h,K)\|_2 . \underbrace{\frac{(h^2+K^2)}{\|(h,K)\|_2}}_{\varepsilon(h,K)}$

soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(h,K) \mapsto 2xh + 2Ky$ est une app linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.

et soit : $|\varepsilon(h,K)| = \left| \frac{h^2+K^2}{\|(h,K)\|_2} \right| = \sqrt{h^2+K^2} \underset{(h,K)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

Par suite, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, en particulier au pt $(1,1)$

et on a : $df_{(x,y)}(h,K) = 2xh + 2yK$

d'où : $df_{(1,1)}(h,K) = 2h + 2K$.

M3 - on fixe y, alors la 1^{er} fonction partielle de f est dérivable et $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2x$

on fixe x, " " $2^{ème}$ " " " " " $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 2y$

d'où : $\frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1) = 2$ et $\frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1) = 2$

d'où : f est différentiable au pt $(1,1)$.

Exercice 2 :

soit l'applicat' suivante : $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1- Mq f est continue sur $\mathbb{R}^2$:

* f est une fonction rationnelle, donc : elle est continue sur $\mathbb{R}^2$

* Étudions la continuité de f au pt $(0,0)$:

On a : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^3 \cos\theta \sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$

$= \lim\limits_{r\to 0} r \cos\theta \sin\theta = 0 = f(0,0)$

donc : f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2 - Prouvez l'existence des dérivées partielles au pt $(0,0)$. sont elles continues en $(0,0)$?

* f est une fonction rationnelle, donc : f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^2(x^2+y^2) - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2xy(x^2+y^2) - 2y^3x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{K\to 0} \dfrac{f(0,K) - f(0,0)}{K} = 0$

donc : f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

* Étudions la continuités des dérivées partielles de f.

• $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont des foncti rationn $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2_*$

• continuité en $(0,0)$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{(0,0)} \dfrac{-r^4\cos^2\theta \sin^2\theta + r^4\sin^4\theta}{((r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2)^2} = -\cos^2\theta \sin^2\theta + \sin^4\theta$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lim\limits_{(0,0)} 2\cos^3\theta \sin\theta$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'ont pas de limite en $(0,0) \Rightarrow$ ils ne sont pas continues en $(0,0)$

$\Rightarrow$ f n'est pas de classe C^1.

PS02

3- Que peut on dire de la différentiabilité de f au pt $(0,0)$?

Calculons : $\lim\limits_{(h,K)\to 0} \varepsilon(h,K) = \lim\limits_{(0,0)} \dfrac{f((0,0)+(h,K)) - f(0,0) - df_{(0,0)}(h,K)}{\|(h,K)\|_2}$

avec : $df_{(0,0)}(h,K) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0).K = 0$

d'où : $\lim\limits_{(0,0)} \varepsilon(K,K) = \lim\limits_{(0,0)} \dfrac{f(h,K)}{\sqrt{h^2+K^2}}$

$\lim\limits_{(0,0)} \varepsilon(h,K) = \lim\limits_{(0,0)} \dfrac{hK^2}{(\sqrt{h^2+K^2})^{3/2}}$

posons : $\begin{cases} h = r\cos\theta \\ K = r\sin\theta \end{cases}$

$\lim\limits_{r\to 0} \varepsilon(r) = \lim\limits_{0} \dfrac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^3} = \lim\limits_{0} \cos\theta\sin^2\theta \quad \theta\in[0,2\pi]$

pas de limite

donc : f n'est pas différentiable ~~se~~ au pt $(0,0)$.

Exercice 3 :

Soit la fonction f telle que : $f(x,y) = y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$

1. On montre que l'on peut définir un prolongem' par continuité $\bar{F}$ de la fonction f.

on a : $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, donc : $Fr(D_f) = 0$

Ainsi : Etudions le prolongement par continuité au pt $(x,0)$

on a : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(0,0)} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) = 0$

car $\left|\sin\frac{x}{y}\right| \leqslant 1 \Rightarrow \left|y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leqslant y^2 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$

Posons $\bar{f} = \begin{cases} y^2 . \sin\left(\frac{x}{y}\right) & (x,y) \neq (x,0) \\ 0 & (x,y) = (x,0) \end{cases}$

2- On précise en quels pts $\bar{F}$ est de classe C^1 :

* sur D_f :

on a : $\bar{f}$ est le produit de $(x,y) \mapsto y^2$ et la f sin composé à fract rationnel $(x,y) \mapsto \frac{x}{y}$ dont le y est non nul.

Par conséquant $\bar{f}$, admet des dérivées partielles sur D_f.

d'où : $\begin{cases} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(x,y) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(x,y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - y^2 . \frac{x}{y^2} \cos\left(\frac{x}{y}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(x,y) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(x,y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right) \end{cases}$

* sur D :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(a,0) &= \lim_{x\to a} \frac{\bar{f}(x,0) - \bar{f}(a,0)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{f}(a+h,0) - \bar{f}(a,0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(a,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{\bar{f}(a,y) - \bar{f}(0,0)}{y-0} = \lim_{k\to 0} \frac{\bar{f}(a\ \ )-\bar{f}(0,0)}{k} = 0 \end{aligned}\right\} \text{Existance de } \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}.$$

Etudions la continuité des dérivées partielles ?

* sur D_f :

$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$ sont continues sur D_f, car ils s'agissent de produits et composit' de fonctions continues sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow$ f de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

surD :

Étudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

au pt $(0,0)$

on a : $\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{(a,0)} y\cos\left(\frac{x}{y}\right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a,0)$

~~$\left(\lim_{(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(a,0)} 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right) = 0\right)$~~

on a : $\lim_{(a,0)} \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{(a,0)} -x\cos\left(\frac{x}{y}\right) + \underbrace{2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)}_{\to 0}$

Lmachkil b9a hna

hyta ma3arfin 3lihawalo

*** si $a=0$:**

$\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue au pt $(0,0)$ car : $\left|-x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| < x \xrightarrow[a\to 0]{} 0$

*** si $a \neq 0$:**

on choisit deux ss suites qui $\to (a,0)$

$\to$ soit $u_n = \left(a, \frac{a}{2n\pi}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (a,0)$

on a : $\lim_{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(u_n) = \lim_{+\infty} -a\cos(2\pi n) = -a$

$\to$ soit $v_n = \left(a, \frac{a}{2\pi(n+1)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (a,0)$

On a : $\lim_{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(v_n) = \lim_{+\infty} -a\cos(2\pi(n+1)) = a$

d'où : $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'admet pas de limite au pt $(a,0)$ tq $a\neq 0$

D'où : Les dérivées partielles sont de classe C^1 sur $D_f \cup \{(0,0)\}$

3/ Etudions la différentiabilité de $\bar{f}$:

$\bar{f}$ est de classe C^1 sur $D_f \cup \{(0,0)\} \Rightarrow \bar{f}$ différentiable sur $D_f \cup \{(0,0)\}$

Pour $(a,0) \in \mathbb{R}^* \times \{0\}$

On a : $\lim_{(h,k)\to(a,0)} \varepsilon(h,k) \left| \dfrac{\bar{f}((a,0)+h,k) - \bar{f}(a,0) - df_{(a,0)}(h,k)}{\|(h,k)\|_2} \right|$

$$= \lim_{(a,0)} \left| \frac{k^2 \sin\left(\frac{a+h}{k}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leqslant \lim_{(a,0)} \frac{k^2}{|k|} = \lim_{(a,0)} |k| = 0$$

donc : $\bar{f}$ est différentiable sur $D \cup \{(0,0)\} \Rightarrow \bar{f}$ est diff sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 4 :

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une applicat' de classe C^2 et : $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

définie par $F(x,y) = \dfrac{g(x) - g(y)}{x - y}$, si $x \neq y$.

$F(x,x) = g'(x)$. si $x = y$

. On montre que F est de classe C^1 en tt pt de $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle :

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(y)}{x - y} , & x \neq y \ (\mathbb{R}^2/D) \\ g'(x) & x = y \ (D) \end{cases}$$

* sur $\mathbb{R}^2/D$:

Puisque g est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}^2/D)$ Alors : $(x,y) \mapsto g(x) - g(y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2/D$.

De plus $x \neq y$, alors $\dfrac{g(x) - g(y)}{x - y}$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}^2/D)$.

* sur D :

Soit $(a,a) \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial F(a,a)}{\partial x} = \lim_{x \to a} \frac{F(x,a) - F(a,a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{F(a+h,a) - F(a,a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{g(a+h) - g(a)}{h} - g'(a)}{h}$$

$$\frac{\partial F(a,a)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a) - h g'(a)}{h^2}$$

Puisque g est de classe C^2, on a d'après Taylor suivant :

on a : $g(a+h) = g(a) + h g'(h) + \frac{h^2}{2} g''(a) + h^2 \varepsilon(h)$ $\quad \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\to} 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial F(a,a)}{\partial x} = \frac{g''(a)}{2} \quad \text{de m̂ :} \quad \frac{\partial F(a,a)}{\partial y} = \frac{g''(a)}{2}$$

Donc : Les dérivées partielles existent sur D .

F est elle de classe C^1 sur D ? $\Rightarrow$ Est $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ continues en D ?

Calculons $\lim\limits_{(a,a)} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{(a,a)} \frac{g'(x)(x-y)-(g(x)-g(y))}{(x-y)^2}$

Puisque g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, donc: DL de g à l'ordre 2 est

$$g(y) = g(x) + (y-x)\,g'(x) + \frac{1}{2}(y-x)^2 g''(x)$$

D'où : $\lim\limits_{(a,a)} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{(a,a)} \frac{g''(x)(y-x)^2}{2(x-y)^2} = \frac{g''(a)}{2} = \frac{\partial F}{\partial x}(a,a)$

Par suite : $\frac{\partial F}{\partial x}$ est continue au pt (a,a)

De la m̂ manière, on montre que $\frac{\partial F}{\partial y}$ est continue au pt (a,a)

$\Rightarrow$ F est de classe C^1 sur D $\Rightarrow$ F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

Calcul de $dF(x,y)$

On a :
$$\begin{cases} dF_{(x,y)}(h,k) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,h + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,k & x \neq y \\ dF_{(a,a)}(h,k) = \frac{\partial F}{\partial x}(a,a)\,h + \frac{\partial F}{\partial y}(a,a).k \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES - TANGER

UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAÂDI

Calcul Différentiel II

Analyse3-AP2 **Jan. 2017**

Excercice 1:

Proposer une fonction qui admet une dérivée directionnelle en un point donné suivant tout vecteur u non nul mais elle n'est pas différentiable en ce point.

Excercice 2:

Trouver et classifier les points critiques des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + y^2(1-x)^3$.
2. $g(x,y) = 2x^2 - y^3 - 2xy$.
3. $h(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

Excercice 3:

Trouver les extremums absolus de la fonction $f(x,y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$ sur la région R délimitée par les droites $y = 2$, $y = x$ et $y = -x$.

Excercice 4:

On considère la fonction suivante : $f(x,y) = x^2 + y^2$.

1. Tracer les courbes de niveau de la fonction f aux hauteurs $k = 0, 4, 9, 16, 25$.
2. Donner la variation maximale et minimale de la fonction f au point $(3,4)$.
3. Tracer le vecteur gradient au point $(3,4)$.
4. Tracer la courbes qui passe par les deux points $(3,4)$ et $(0,0)$ en suivant la direction du gradient.
5. Tracer la projection de la surface $z = f(x,y)$ sur le plan (zOx).
6. Dessiner, dans l'espace à tois dimension (x,y,z), la surface $z = f(x,y)$.
7. Reprendre les mêmes questions pour la fonction $g(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

Calcul différentiel II

Exercice 1 :

On propose une fonction qui admet une dérivée directionnelle en un pt donné suivant tt vecteur u non nul mais elle n'est pas différentiable en ce pt.

soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

→ f n'est pas différentiable en (0,0)

→ on vérifie que f admet des dérivées directionnelles suivant u vecteur non nul.

soit $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2_*$

on a : $\lim\limits_{s\to 0} \frac{f((0,0)+s(a,b)) - f(0,0)}{s} = \lim\limits_{s\to 0} \frac{f(sa,sb)}{s}$

$= \lim\limits_{s\to 0} \frac{sa(sb)^2}{s((sa)^2+(sb)^2)}$

$\lim\limits_{s\to 0} \frac{f((0,0)+s(a,b)) - f(0,0)}{s} = \lim\limits_{s\to 0} \frac{ab^2}{a^2+b^2} = f(a,b)$

Ainsi : la dérivée directionnelle existe pr tt (a,b).

Exercice 2 :

Trouver et classifier les pts critiques des fonctions suivantes :

1) - $f(x,y) = x^2 + y^2(1-x^3)$

f est une fonction polynomiale => f est différentiable

Donc : les seules pts critiques sont ceux qui réalisent $\nabla f(x,y)=0$

$$\nabla f(x,y)=0 \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 3y^2(1-x)^2 = 0 \\ 2y(1-x)^3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=0 \text{ ou } x=1 \\ x=0 \text{ et } y=0 \end{cases}$$

le cas $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ est impossible.

Donc : le seul pt critique est le pt $(0,0)$.

Classifions ce pt critique :

on a : $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2+6y^2(1-x) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(1-x)^3 \end{cases}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6y(1-x)^2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (car f est de classe C^2).

Alors : $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

D'où : f ayant 2vp positives, alors f admet un min relatif en $(0,0)$.

2) - $g(x,y) = 2x^2 - y^3 - 2xy$

g est une fonction polynomiale => f est différentiable

Donc : les seuls pts critiques sont ceux qui réalisent $\nabla f(x,y)=0$

$$\nabla f(x,y)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-2y=0 \\ -3y^2-2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ 2x=-3y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \text{ ou } x=-\frac{1}{6} \\ y=0 \text{ ou } y=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

la cas ~~$(0,-\frac{1}{3})$ est impossible~~

donc ~~le seul pt critique est $(0,0)$~~.

Alors $(0,0)$ et $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$ st deux pts critiques

Classifions ces pts critiques :

* On doit calculer la matrice hessiene $H_f(x,y)$:

$\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x,y) = 4$, $\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x,y) = -6y$, $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = -2 = \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}(x,y)$

alors : $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -6y \end{pmatrix}$

d'où : $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $H_f(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

* on a : $\det(H_f(0,0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4-\lambda) - 4$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 4$

d'où : $\Delta = 32$

d'où : les valeurs propres sont : $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{4-\sqrt{32}}{2} = 2-2\sqrt{2} < 0 \\ \lambda_2 = \frac{4+\sqrt{32}}{2} = 2+2\sqrt{2} > 0 \end{cases}$

or $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors f n'admet pas d'extremum au pt $(0,0)$

donc : $(0,0)$ est un pt selle.

* on a : $\det\left(H_f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}) - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 4 \Rightarrow \Delta = 20$

d'où : les valeurs propres sont : $\begin{cases} \lambda_1 = 3-\sqrt{5} > 0 \\ \lambda_2 = 3+\sqrt{5} > 0 \end{cases}$

or $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, alors : f admet un minimum relatif au pt ~~(0,0)~~ $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$.

3- $h(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$

h est une fonction polynomiale $\Rightarrow$ f est differentiable sur $\mathbb{R}^2$

Donc : Les seuls pts critique sont ceux qui réalisent $\nabla f(x,y) = 0$

$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

d'où : le seul pt critique est $(-1,-1)$

Classifions ce pt critique :

on doit calculer la matrice Hessienne :

on a : $\begin{cases} \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x,y) = 2 \\ \frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x,y) = 2 \end{cases}$ et $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = -1 = \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}(x,y)$

d'où : $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = H_f(-1,-1)$

on a : $\det(H_f(-1,-1) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1$

$= (2-\lambda-1)(2-\lambda+1)$

$= (1-\lambda)(3-\lambda)$

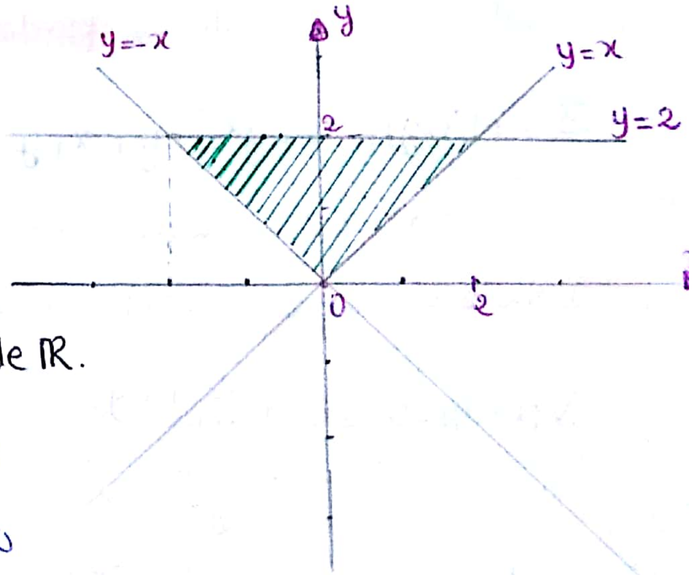
donc : les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

Puisque $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ alors : f admet un minimum relatif au pt $(-1,-1)$

Exercice 3:

Trouvez les extremums absolus de la fonction $f(x,y) = 3 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$ sur la région R délimitée par les droites $y = 2$, $y = x$ et $y = -x$

Nb: Extremum absolu : on compare ce pt avec les images des pts à la frontière (s'ils sont ds le domaine d'étude).
Pr un polynôme de "2" : l'extremum relatif est l'extremum absolue.
Si une partie $\notin D_f$ il n'entre pas ds les régions d'études.



→ On a : La région contient la frontière
→ les extremums sont déterminés sur un ouvert.
→ cherchons le pt critique sur un ouvert $\subset \mathbb{R}$.

أش هاد الكلمات المتقاطعة

* cherchons les pts critiques à l'intérieur de $\mathbb{R}$.

on a : $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4x = 0 \\ 3 - 2y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$

d'où : le seul pt critique est $(1, \frac{3}{2})$.

* <u>Cherchons les valeurs propres de la matrice Hessienne :</u>

on a : $\begin{cases} \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2}(x,y) = -4 \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial y^2}(x,y) = -2 \end{cases}$ et $\dfrac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f^2}{\partial y \partial x}(x,y)$

car f est de classe C^2.

d'où : $H_f\left(1, \frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

les vp sont $\lambda_1 = -4 < 0$ et $\lambda_2 = -2 < 0$

Alors : f admet un max relatif au pt $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ sur $\mathring{R}$

Rq : Un seul pt critique $\Rightarrow$ max relatif.

$\begin{cases} y \text{ fixe} ; \lim\limits_{\pm\infty} f(x,y) = \pm\infty \\ x \text{ fixe} ; \lim\limits_{\pm\infty} f(x,y) = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow$ max absolu La walahi hhhh

* <u>Etudions la variat' de f sur Fr(R) :</u>

• Sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2\}$

$f_1(x,y) = f_1(x,2) = 7 + 4x - 2x^2$

$f_1'(x,y) = 4 - 4x$

x	-2 $(-2,2)$		1 $(1,2)$		2 $(2,2)$
f_1'		$+$	0	$-$	
f_1	-9	$\nearrow$	9	$\searrow$	7

• Sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$

$f_2(x,x) = -3x^2 + 7x + 5$

$f_2'(x,x) = -6x + 7$

x	0		$7/6$		2
f_2'		$+$	0	$-$	
f_2	5	$\nearrow$	$\frac{109}{12}$	$\searrow$	7

• Sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\}$

$f_3(x,y) = f_3(x,-x) = 5 + x - 3x^2$

$f_3'(x,-x) = 1 - 6x$

x	-2		0
f_3'		$+$	
f_3	-9	$\nearrow$	5

• Puisque $f\left(1, \frac{3}{2}\right) = \frac{37}{4} > f\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right) = \frac{109}{12} > f(1,2) = 9 > f(0,0) = 5$

Donc : $f\left(1, \frac{3}{2}\right)$ est un maxe absolu sur $\mathbb{R}$.

• Puisque $f(-2,2) < f(0,0) < f(2,2)$ alors $f(-2,2)$ est un min absolu sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

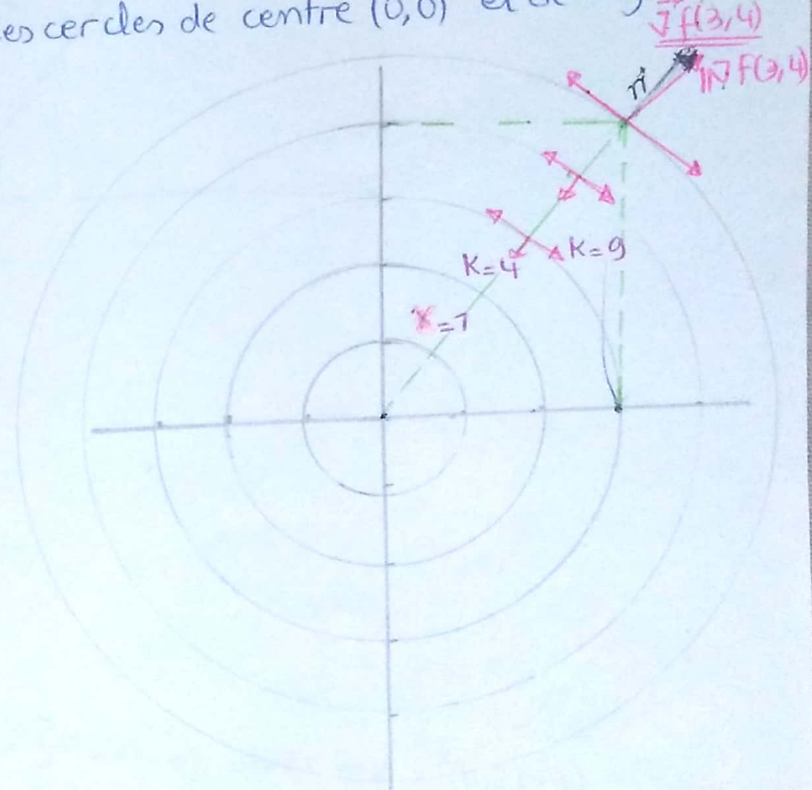
On considère la fonction suivante : $f(x,y) = x^2+y^2$

1- On trace les courbes de niveau de la fonction f aux hauteurs $K = 0,4,9,16,25$

: $f(x,y) = x^2+y^2 \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

ainsi les courbes d'hauteur K est défini par : $x^2+y^2 = K \;/\; K \geq 0$

qui représentent les équations des cercles de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{K}$, dont le graphe est :



2- La variat' maximale de f au pt $(3,4)$ est définit par :

$\sup \nabla f(3,4) \cdot x = \sup \|\nabla f(3,4)\|$

$\cancel{\sup} \cdot \|u\| \cdot (\cos \widehat{\nabla f(3,4), u})$

$= \|\nabla f(3,4)\|$

la variat' minimal est $\|\nabla f(3,4)\|$

3- Traçons le chemin la montée le plus rapide.

→ méthode graphique.

→ méthode analytique.

on a : $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$.

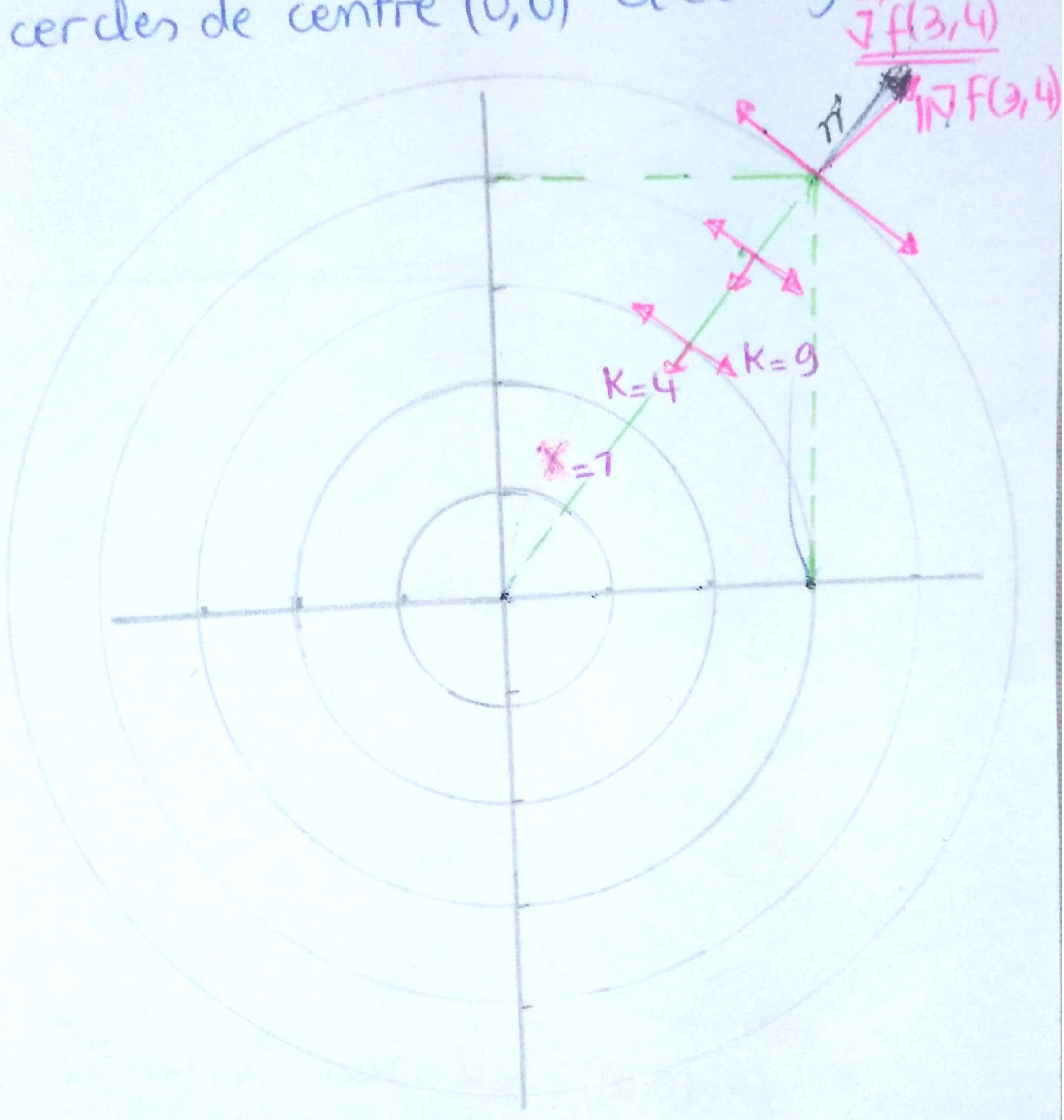
on a : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \dfrac{2y}{2x} = \dfrac{\cancel{y}}{\cancel{x}} \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C \;/\; C \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow y = ax$.

la fonction

défini par : $x^2+y^2=K$ / $K\geq 0$
les cercles de centre (0,0) et de rayon

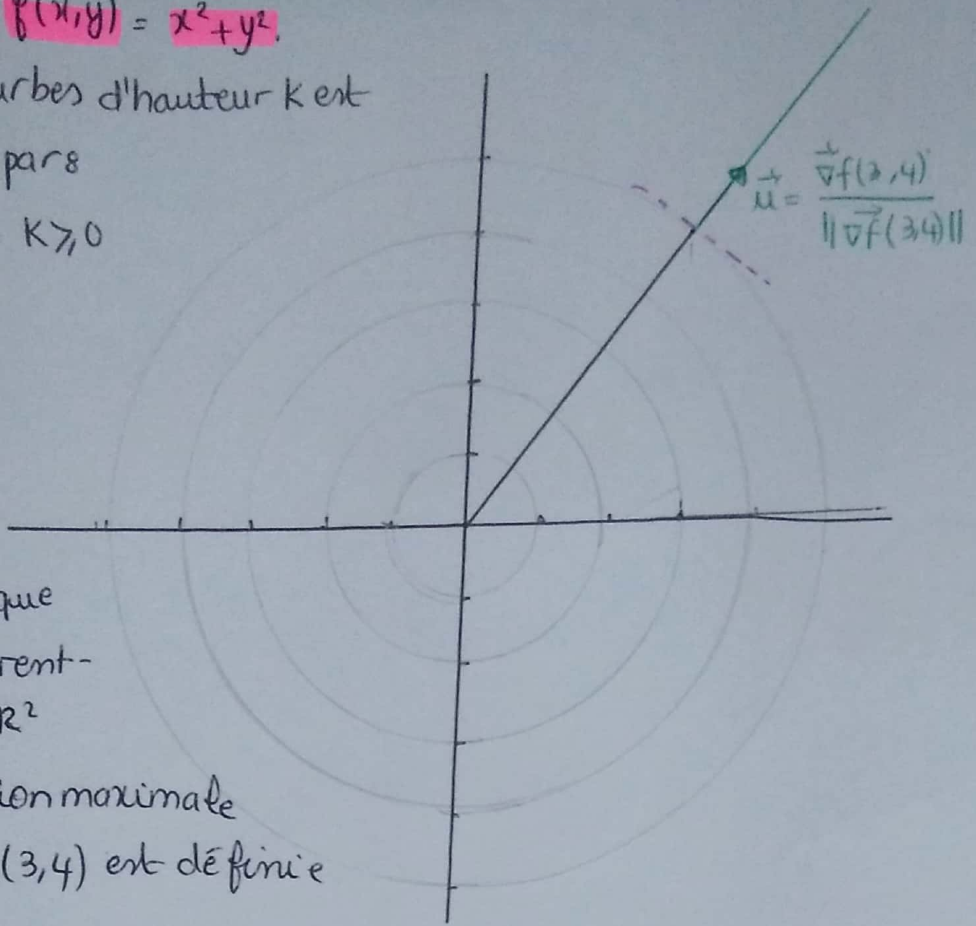


$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

Exo4 : $f(x,y) = x^2+y^2$.

1/ - Les courbes d'hauteur k est définie par :

$x^2+y^2 = K \geq 0$



2- Sachant que f est differentiable sur $\mathbb{R}^2$

la variation maximale de f au pt (3,4) est définie

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^2} Df(3,4) = \sup_{u\in\mathbb{R}^2} \nabla f(3,4).u$$

$$= \sup \|\vec{\nabla} f(3,4)\|.\|\vec{u}\|.\cos(\underbrace{\vec{\nabla} f(3,4),\vec{u}}_{\geq 1}) \quad \text{avec } u \in S((0,0),1)$$

$$= \|\nabla f(3,4)\|$$

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^2} Df(3,4) = \sqrt{6^2+8^2} = 10$$

3- voir figure.

4- On trace le chemin qui passe par les deux pts (3,4) et (0,0) suivant la plus forte pente.

On a : $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, 2y)$

et : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$

$\Rightarrow \ln(y) = \ln(x) + C$

$\Rightarrow y = A.x$

$A \in \mathbb{R}$, or $(3,4) \in \mathcal{C} \Rightarrow A = \dfrac{4}{3}$

donc : le chemin suivant la plus forte pente est décrit par l'équation
$y = \frac{4}{3} x$.
$\rightarrow$ Puisque

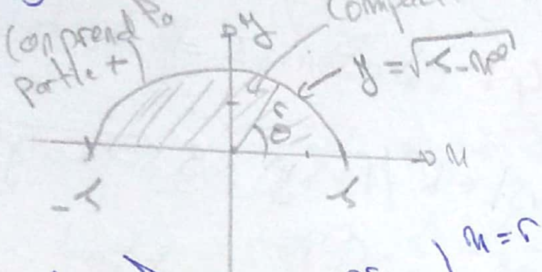
TD : Calcul d'intégrales

Exercice 1 :

Calculons l'intégrale :

$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2(x^2+y^2)^2\,dy\,dx.$

• $y = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow y^2+x^2 = 1$ Equ de cercle.



Coord. polaire : on pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$r \in [0,1]$, $\theta \in [0,\pi]$

D'après le thm de Fubini on a :

$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2(x^2+y^2)^2\,dy\,dx = \int_0^\pi\int_0^1 r^2\cos^2\theta\,(r^2)^2\,r\,dr\,d\theta = \int_0^\pi\int_0^1 r^7\,dr\,\cos^2\theta\,d\theta$

$= \int_0^\pi \left[\frac{r^8}{8}\right]_0^1 \cos^2\theta\,d\theta =$

$= \int_0^\pi \frac{1}{8}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$

$= \frac{1}{16}\int_0^\pi 1+\cos 2\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{16}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{16}\cdot\pi = \frac{\pi}{16}$

Exercice 2 :

Calculons l'air de R = l'intérieur de la courbe définie par $r(\theta) = \cos(2\theta)$ et du cercle de centre $(0,0)$ et rayon 1.

• $r(\theta) = \cos(2\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

On a : $r(\theta+\pi) = r(\theta) = \cos(2\theta+2\pi)$

d'où la courbe est sym % à l'origine.

$r(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos(2\theta+\pi) = -r(\theta)$

$r(\pi-\theta) = \cos(2\pi-2\theta) = \cos(2\theta) = r(\theta)$

d'où la courbe est sym % à (Oy)

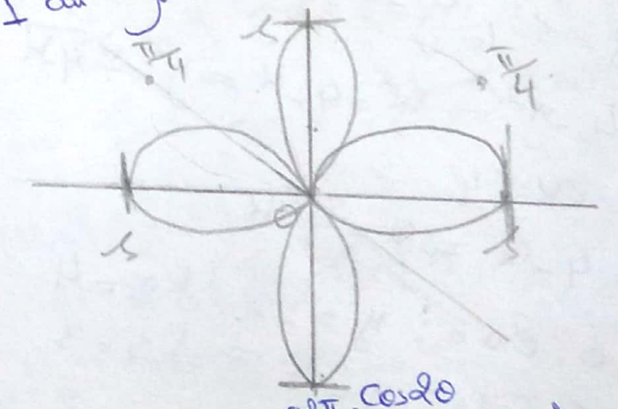
• $r(-\theta) = r(\theta)$ d'où la courbe est sym % (Ox)

Ainsi le domaine d'étude se réduit en $[0, \frac{\pi}{4}]$.

On a : $r'(\theta) = -2\sin(2\theta)$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
$r'(\theta)$	0	$-$	
$r(\theta)$	1	$\searrow$	0

On a : $r(\frac{\pi}{4}) = 0$ Alors la courbe est tangente au rayon vecteur ou $MV'(\theta) = 0$ et $r(\theta) \neq 0 (=1)$ alors la tangente est $\perp$ au rayon vecteur.



$\iint_R 1\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\cos 2\theta} 1\,r\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2\theta}{2}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 4\theta}{4}\,d\theta$

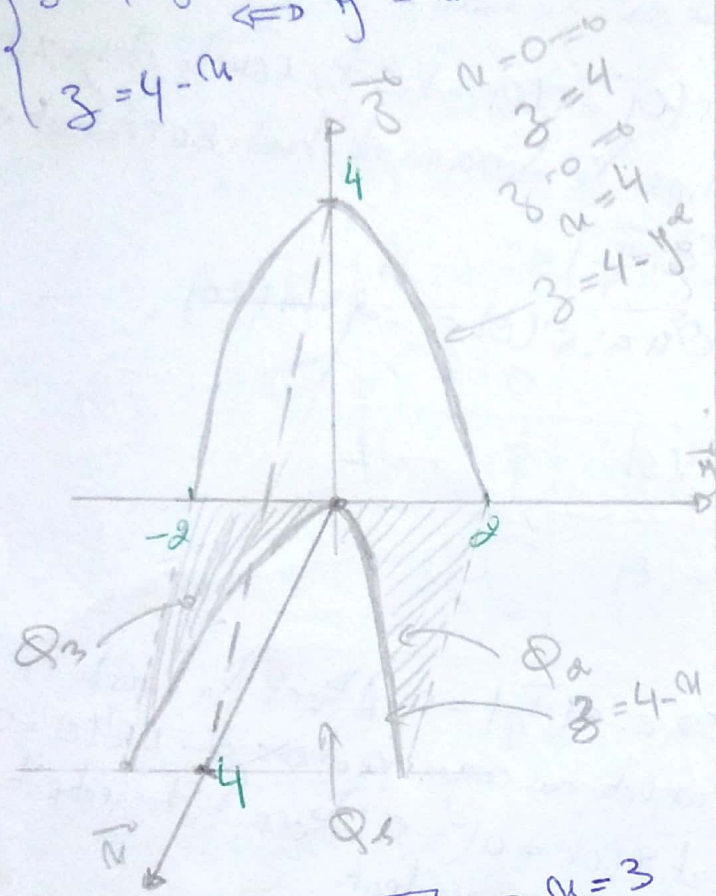
$= \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 3 : Calculons le volume (2)

du corps délimité par les graphes :

$z = 4 - y^2$, $x + z = 4$, $x = 0$ et $z = 0$

$$\begin{cases} z = 4 - y^2 \\ z = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = x$$



Pour $z = 1$, $y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 3$

$k = 4 - y^2 \Rightarrow y^2 = 4 - k \Rightarrow y = \pm\sqrt{4-k}$

avec $0 \leq k \leq 4$

$k = 4 - x \Rightarrow x = 4 - k$.

Pr $k = 0$, on a : $y = \pm 2$ et $x = 4$.

$k = 1$ On a : $y = \pm\sqrt{3}$ et $x = 3$

$k = 2$ On a : $y = \pm\sqrt{2}$ et $x = 2$

$k = 3$ On a : $y = \pm 1$ et $x = 1$

$$\iiint_Q 1 \, dV = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z}} \int_0^{4-z} dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^4 \left(\int_{-\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z}} (4-z)\, dy \right) dz$$

$$= \int_0^4 \left[4y - zy \right]_{-\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z}} dz$$

$$= \int_0^4 4(\sqrt{4-z}) - z(\sqrt{4-z}) + 4\sqrt{4-z} - z\sqrt{4-z}\, dz$$

$$= \int_0^4 2(4-z)\cdot\sqrt{4-z}\, dz$$

$$= 2\int_0^4 (4-z)^{\frac{3}{2}} dz = -2\int_0^4 -(4-z)^{\frac{3}{2}} dz$$

$$= -2\left[\frac{(4-z)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = -2 \times -\frac{64}{5} = \frac{2 \times 64}{5}$$

Exercice 4 : Calculons : $I = \iiint_Q dV$ tq :

$$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{18 - x^2 - y^2}\}$$

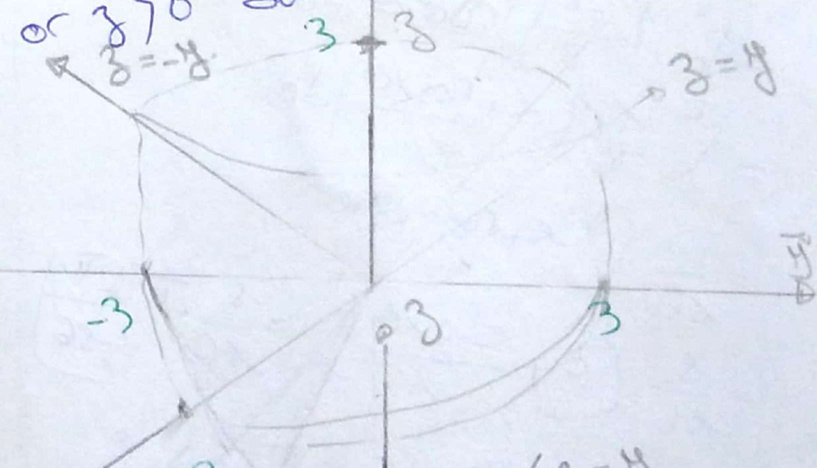
$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} & : \text{Cône} \\ z = \sqrt{18 - x^2 - y^2} & : \text{sphère} \end{cases}$$

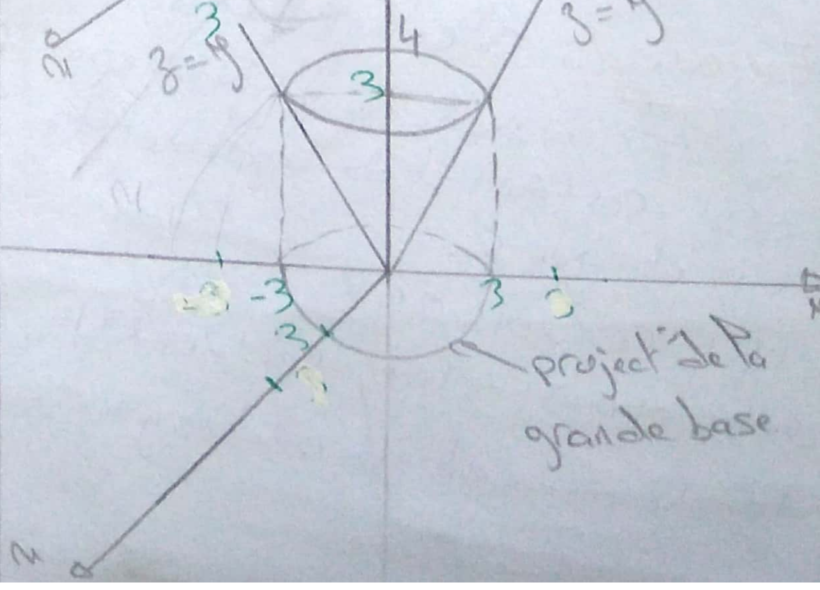
$\cap \Rightarrow$ il faut chercher (x,y,z)

$$\Rightarrow \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z^2 = 18 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \text{ équ cercle} \\ y = \pm\sqrt{9 - x^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow 2z^2 = 18 \Rightarrow z = \pm 3.$

or $z > 0$ donc $z = 3$. $z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{9} = 3$





$$I=\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$$

Coor. cylindrique: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\underline{r^2=x^2+y^2}$

avec $r\in[0,3]$ et $\theta\in[0,2\pi[$.

$$\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}\int_0^3\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} dz\right) r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^3\left(\sqrt{18-r^2}-r\right) r\,dr\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^3 r\sqrt{18-r^2}-r^2\,dr$$

$$=-\pi\int_0^3 -2r\sqrt{18-r^2}-r^2\,dr$$

$$I=-\pi\left[\frac{(18-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right]_0^3$$

Exercice 5:

Calculons l'intégrale:

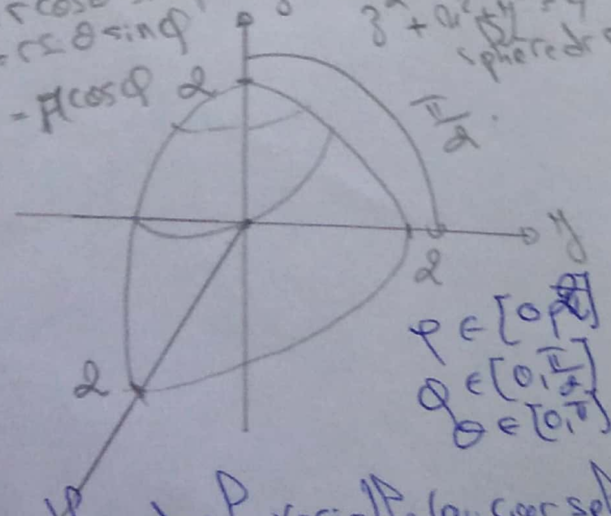
$$\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2+y^2+z^2\,dz\,dy\,dx$$

$-2\leq x\leq 2$; $0\leq y\leq\sqrt{4-x^2}$

$z=0$, $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \\ z=0\end{cases}$

$\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\varphi\end{cases}$

$z^2+x^2+y^2=4$ sphère de $r=2$



$\rho\in[0,2]$
$\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$
$\theta\in[0,\pi]$

D'après thm de ch. variable (au coor sph)

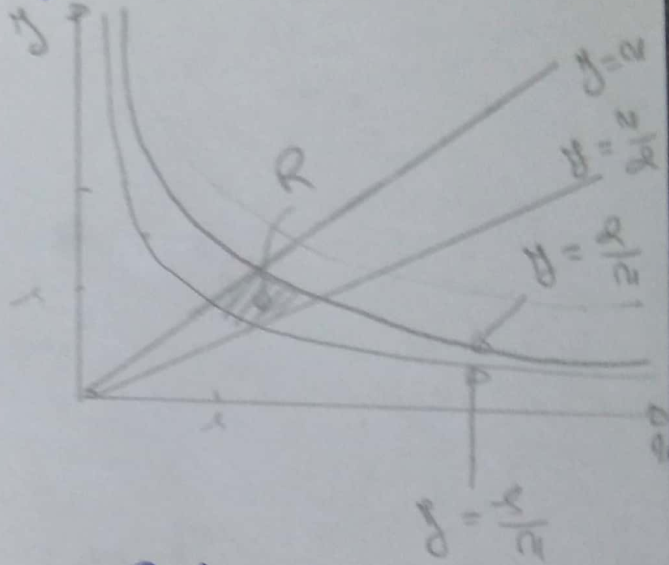
On a: $\int_0^{\pi}\int_0^{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\rho^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\rho\,d\theta$

$$=\int_0^2\rho^4\,d\rho\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi$$

$$=\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2\,\pi\cdot\left[-\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 6: Par ch. variable,

Calculons $J=\iint_R e^{xy}\,dA$ où R la région délimitée par les graphes: $y=\frac{x}{2}$, $y=x$, $y=\frac{1}{x}$ et $y=\frac{2}{x}$.



Soit $(x,y)\in R$:

$\frac{x}{2}\leq y\leq x$ et $\frac{1}{x}\leq y\leq\frac{2}{x}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{y}{x}\leq 1$ et $1\leq xy\leq 2$ $(x,y)>0$

$(u,v)\in S$ tq: $u=\frac{y}{x}$ et $v=xy$

et $S=[\frac{1}{2},1]\times[1,2]$

d'où $T^{-1}: R\longrightarrow S$ (bijective)

$(x,y)\longmapsto(u=\frac{y}{x}, v=xy)$

Ainsi: $T: S\longrightarrow R$ (bij).

$(u,v)\longmapsto\left(x=\sqrt{\frac{v}{u}}, y=\sqrt{u.v}\right)$

$J_T(u,v)=($