$$= \sum_{n=-\infty}^{} |C_n(f)|$$

⇒ Exercices :

Exo 1: soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π - périodique de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^p$ par morceau ($p \in \mathbb{N}^*$

Montrer que : $C_n(f) = \frac{1}{(in)^p} C_n(f^{(p)})$

Exo 2: soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 2π - périodique, telle que $\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} (f'(t))^2\,dt$.

Exo 3: soit $f \in D$, Montrer que la série du terme général $\frac{1}{n} C_n(f)$ est absolument convergente

---

⇒ Correction :

... par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$

⇒ Correction :

Ex 1 : Procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$

on a pour $p = 1$; $C_n(f) = \frac{1}{in} C_n(f')$.

on suppose que cette formule est vrai pour $p-1$:

$$\cancel{C_n(f^{(p-1)}) = (in)^{p-1} C_n(f)}$$

$$C_n(f) = \frac{1}{(in)^{p-1}} C_n(f^{(p-1)})$$

et Mq $C_n(f) = \frac{1}{(in)^{p}} C_n(f^{(p)})$

on a : $C_n(f^{(p)}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(p)}(x) e^{-inx} \, dx$

posons $u' = f^{(p)} \longrightarrow u = f^{(p-1)}$

$v = e^{-inx} \longrightarrow v' = -in e^{-inx}$

$$\Rightarrow C_n(f^{(p)}) = \frac{in}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(p-1)} e^{-inx}\,dx$$

$$+ \underbrace{\left[f^{(p-1)} e^{-inx} \right]_0^{2\pi}}_{=0}$$

$$= in\, C_n(f^{(p-1)}) = in\,(in)^{p-1}\, C_n(f)$$

$$= (in)^p\, C_n(f)$$

$$\text{Car } \left(C_n(f^{(p-1)}) = (in)^{p-1}\, C_n(f) \right)$$

$$\Rightarrow C_n(f) = \frac{1}{(in)^p}\, C_n(f^{(p)})$$

Exo1:

Enoncé

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une application $2\pi-$périodique de classe C^1 telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt=0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt,$$

et caractériser l'égalité.

Indication

Corrigé

Le fait de regarder des inégalités concernant des intégrales de fonction prises au carré incite à utiliser l'identité de Parseval. On note $c_n(f)$ les coefficients de Fourier trigonométriques de f. L'énoncé donne $c_n(f)=0$. Par ailleurs, une simple intégration par parties montre que $c_n(f')=inc_n(f)$. L'identité de Parseval appliquée aux deux fonctions f et f' donne donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^2|c_n(f)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt,$$

ce qui donne l'inégalité voulue. Pour qu'il y ait égalité, il faut que partout les inégalités soient des égalités. En particulier, on doit avoir $n^2|c_n(f)|^2=|c_n(f)|^2$ pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$. Ceci entraine en particulier que $c_n(f)=0$ pour $|n|>1$. Comme f est de classe C^1, sa série de Fourier converge normalement vers f, et on obtient donc que $f(t)=ae^{-it}+be^{it}$, avec $a,b\in\mathbb{C}$. Réciproquement, il est facile de vérifier que pour des fonctions de cette forme, il y a égalité.

Conv. abs. et unif. de la série de Fourier (1)

Afin d'établir un résultat de convergence abs. et unif. de la série de Fourier, nous avons besoin de deux résultats préliminaires :

Théorème (Inégalité de Bessel, Exercice 4)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et intégrable (au sens de Riemann) sur $[-\pi, \pi]$ alors les coefficients de Fourier $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{-in\psi}\, d\psi$ respectent l'inégalité

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\phi)|^2\, d\phi$$

Théorème (Coefficients de Fourier de la dérivée, Exercice 5)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue et lisse par morceaux, dont les coefficients de Fourier sont c_n. Les coefficients de Fourier c_n' de la dérivée $f'(\cdot)$ de $f(\cdot)$ sont donnés par $c_n' = inc_n$.

Conv. abs. et unif. de la série de Fourier (2)

Théorème (Conv. abs. et unif. de la série de Fourier)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, lisse par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de $f(\cdot)$, $\lim_{N\to\infty} S_N^f(\cdot)$, converge abs. et unif. vers $f(\cdot)$.

Démonstration.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, il suffit de montrer que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ est convergente. Les coefficients de Fourier c_n' de la dérivée $f'(\cdot)$ de $f(\cdot)$ sont donnés par $c_n' = inc_n$. Donc, pour $n \neq 0$, on a $c_n = \frac{1}{in}c_n'$.

L'inégalité de Bessel appliquée à la dérivée $f'(\cdot)$ donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n'|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(\phi)|^2\, d\phi < \infty$$

vu les hypothèses sur $f(\cdot)$. □

Conv. abs. et unif. de la série de Fourier (3)

Démonstration.

Par application de l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* on obtient donc :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = |c_0| + \sum_{n\neq 0}\left|\frac{c_n'}{n}\right| \leq |c_0| + \left(\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\neq 0}|c_n'|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

vu que $\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$.

CQFD □

Maclaurin de f.

⇒ Exercices :

Exo 1 : Montrer que $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ $\forall x \in]-1,1[$

Exo 2 : Montrer que $\operatorname{Arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $\forall x \in]-1,1[$

Exo 3 : Déterminer le developpement en série entièr à l'origine de $f(x) = \operatorname{Arc\,sin}(x)$

Solution 10. Pour tout réel $u \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} u^n.$$

Soit $x \in]-1,1[$. Le réel $u = -x^2$ est dans $]-1,1[$ et donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}.$$

Par suite, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ puis la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ en tant que primitive d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$.

$(-1)^0 \binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1$ et pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^n \frac{\overbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}^{n \text{ facteurs}}}{n!} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+(n-1)\right)}{n!} = \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 3\times 1}{2^n n!} \\
&= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 3\times 1}{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2} = \frac{(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}{((2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2)^2} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} x^{2n}.$$

En tenant compte de $\operatorname{Arcsin}(0) = 0$, on obtient par intégration

$$\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$