Question de cours

Soient E un \mathbb{K} —espace vectoriel de dimension n et $\{e_1,\ldots,e_n\}$ une base de E. Pour tout entier naturel i, tel que $1 \le i \le n$, définissons l'application

$$e_i^*: E \longrightarrow x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \longrightarrow x$$

Montrer que $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est une base de l'espace dual E^* .

Exercice 1

Soit la forme quadratique suivante $q: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$q(x,y,z,t,s) = xy - xt + yz - yt + ys + zt - zs + 2st.$$

1. Effectuer une réduction de Gauss et déterminer le noyau, le rang et la signature de q.

2. Soit
$$F = vect \left\{ \begin{pmatrix} 4\\3\\2\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\3\\2\\2\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$$
. Trouver une base de F^{\perp} .

Exercice 2

Soit $m \in \mathbb{Z}$ un entier et posons $q_m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique suivante

$$q_m(x_1, x_2, x_3) = (m+1)x_1^2 + 2mx_2^2 + (4m+1)x_3^2 - 2(m+1)x_1x_2 + 2(m+1)x_1x_3 + 2(m-3)x_2x_3.$$

Notons aussi par f_m la forme polaire de q_m , et par $M(f_m)$ la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Donner explicitement la forme polaire f_m et la matrice $M(f_m)$.

 $\sqrt{2}$ Donner les valeurs de m pour lesquelles f_m définit un produit scalaire.

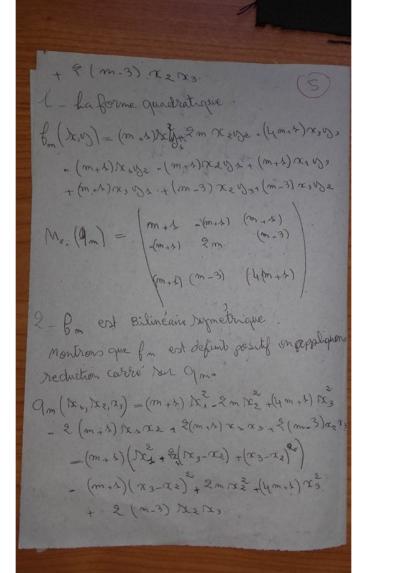
3. Donner les valeurs de m pour lesquelles q_m est dégénérée. + ment de f une pour lesquelles q_m est dégénérée.

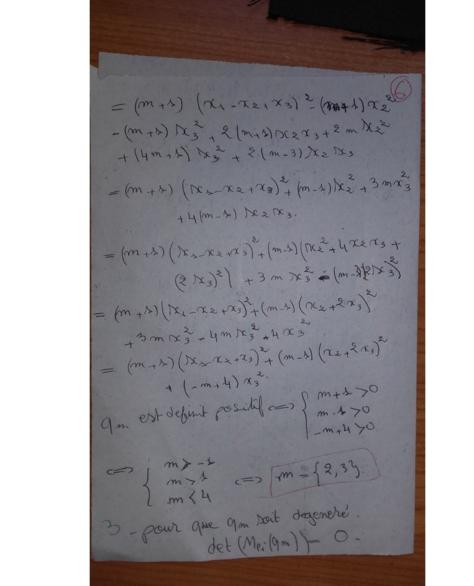
 $\sqrt{4}$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la dimension du noyau $N(f_m)$ ne peut être égale à 2.

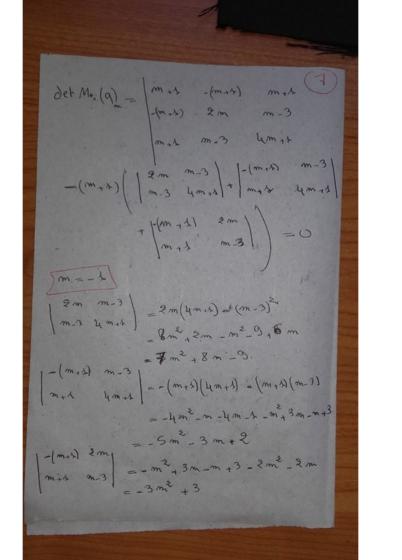
CC2017: ALGèbre 3. (1) Majes, ... en est un torre duale de Et. * e* est une forme lineaire??
SoitypeE & E.K. X= Exig: "Eysei (e; ()2+ /2) = e; (xxx/yx) ant/yn) $= P_{i} + \lambda y_{i}$ $= P_{i}^{*}(X) + \lambda P_{i}^{*}(Y)$ $= P_{i}^{*}(X) + \lambda$ 2. ex(x)+ - + 1 en(x)=0 aton di=0 prond results on transe $\lambda_i = 0$ intermed air in the souther on transe $\lambda_i = 0$ intermediate.

alon fex, en y est une famille hère. THE REET PESK. $f(x) = f(\tilde{z}, x, e_i) = \tilde{z} f(e_i) \lambda_{i,i}$ alors la famille est générative. C/C: {ex, ... Enj est une famille de n'element , génératrice, libre, de cardinal Met CE*, alors c'est une Base de E*. 9 (x, 8, 136) = xy = xt + y8 - yt + y8 - gt -92.5 + 2 St steward of Anglish and =)xy+(x(-t)+y/8-2+5)+8t-85+85+ = /2 (y-t) (x+3-t+3) + t (3-t+5)+8t-88 = 1 (y-t+x+3-t+3)2-1 (y-t-x-3+t-s)2 + t3-t2+t5+3t-35+25t. 9(8, 13) = -12 + 831 + 318 - 38

la matrice de q 4 alors $N(q) = \text{vect} \begin{pmatrix} -6t \\ t \\ st \\ t \\ st \end{pmatrix}$







=> 7 m2 + 8 m -9 -5 m2 -3 m + 2 -3 m2 188 $m = \frac{-5-1}{2} = \frac{3}{2}$ $m = \frac{-5+1}{2} = 2$ alors 9 mest mar desgeneré

m = -1, 2, 3) Qm(x) = (m+x) lx + (m-1) l2 + (-m=4) l3 Di melou es on 4 900 (qm) = 2 => Olim N(01) = 1. wi 4 m ≠ 4, -4, 4 rig (9m) = 3 = din N(9) =0

edors on a motre que V me Z le dim N(a) repent etre que o, on s, n'est pos