Binôme :

EL AAKKOUCHI Salma TD1

El Younssi Mouna TD2

Devoir libre :

EXO1 : ①

• Justifier pourquoi pour λ assez grand, la loi de Poisson $P(\lambda)$ peut être approchée par la loi normale $N(\lambda, \lambda)$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles tq chaque v.a suit une loi de poisson $P(\lambda)$, $\lambda > 0$. (λ grand)

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi de Poisson $P(n\lambda)$ et elle est une suite de variables indépendantes identiquement distribué. Or, on a pour la loi de poisson : $E(X) = \mu = \lambda$ (espérance)

et $V(X) = \sigma^2 = \lambda$. (variance)

D'où d'après le théorème Central Limite : $Y_n = \dfrac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$

Converge en loi vers une variable aléatoire de loi $N(0,1)$ qui est la loi normale centrée réduite.

or, par l'inverse $X_n = \sqrt{n\lambda}\, Y_n + n\lambda = \sqrt{n}\,\sigma Y_n + n\mu$.

et on sait que $\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \text{ càd } X \sim N(\mu, \sigma^2) \right)$

d'où $X_n \sim N(n\mu, (\sqrt{n}\,\sigma)^2) \Rightarrow X_n \sim N(n\lambda, n\lambda)$

d'après les propriétés de la loi normale.

Ainsi, $X_n \sim P(n\lambda)$ Converge vers $N(n\lambda, n\lambda)$

D'où ce qu'il faut démontré $\left(P(\lambda) \underset{\substack{\lambda > 0 \\ (\text{grand})}}{\sim} N(\lambda, \lambda) \right)$

C.q.f.D

2

EL AAKKOUCHI SALMA & EL Younssi Mouna

Exo2 :

• Dans un village, les coupures de courant se produisent au hasard avec un taux de 3 par an

3

Qst 1 : Trouver la propa. qu'il y ait une année donnée, exactement 7 coupures de courant

Soit X la variable aléatoire tq :

X = { "nombre de corpure de courant pendant une durée de temps fixé, à savoir 1 an" } et qui est représenté comme un succès, et on a aussi l'indépendance entre le passé et le futur puisque la production des coupures de courant se fait au hasard avec un taux de 3 par an. D'où X suit une L. de poisson de paramètre 3, $X \sim P(3)$.

Ainsi, $P(X=7) = \dfrac{\lambda^7 e^{-\lambda}}{7!}$; $\lambda = 3$

$$\boxed{P(X=7) = \frac{3^7 . e^{-3}}{7!} = 0,021604}$$

Qst 2 : (4)

En utilisant une loi de normale, détermine la propa que, dans les 10 prochaines années, le nbr de coupure de courant soit < 20

Soit $\{X_i\}$; $i = \{1, \dots, 10\}$ une suite des variable aléatoire tq représente le nombre de coupure de courant par an et $X_i \sim P(3)$

avec $\{X_i\}_1^{10} = X_1 + \dots + X_{10}$.

- $\{X_i\}_1^{10}$ sont indépendant, car le nbr de coupures de courant dans le passée n'influence pas celle du future
- $\{X_i\}_1^{10}$ sont identiquement distribué, car ils suivent le m̂ loi $(P(3))$.

$\Rightarrow$ D'où les condition du théorème Central limite sont vérifiés, Donc $X \sim$ loi normal $(N(10\mu, 10\sigma^2$

avec $\mu = E(X_1) = \lambda = 3$ } d'après loi de poisson
$\sigma^2 = V[X_1] = \lambda = 3$

5

D'où $X \sim N(30, 30)$

Ainsi ; $P(X < 20) = P(X \leq 20)$ car la loi normal est une loi continue

Soit alors $Y = \dfrac{X - 10\mu}{\sqrt{10} \cdot \sigma} = \dfrac{X - 30}{\sqrt{30}} \sim N(0,1)$

(loi normal centré réduite)

Donc $P(X < 20) = P\left(X \leq \dfrac{20-30}{\sqrt{30}}\right)$

$= P\left(X \leq \dfrac{-10}{\sqrt{30}}\right)$

$= P(X \leq -1,82)$

$\sqrt{30}$

$= P(X \leq -1,82)$

(d'après la propriété de loi normal) $= 1 - P(X \leq 1,82)$

$= 1 - 0,9656$ (d'après la table)

6

$P(X \leq 20) = 0,0344$

EL AAKKOUCHI SALMA

&

EL Younssi Manna

Fin