Définition.

On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ... si f est ...
morceaux et développable en série de Fourier ... série de Fourier.

Théorème : "Égalité de Parseval"

Soit : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π périodique, continue par morceaux, Alors, les séries de termes généraux $|a_n|^2$, $|b_n|^2$, $|c_n|^2$, $|c_{-n}|^2$, sont convergentes

et : $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n|^2$$

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π périodique de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux ($p \in \mathbb{N}^*$) montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}^*$.

$$c_n(f) = \frac{1}{(in)^p} c_n(f^{(p)})$$

Solution : On a $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$

Démonstration par récurrence pour $p = 1$:

On a $c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx$

Par une intégration par partie on pose :

$u'(x) = f'(x) \Rightarrow v(x) = e^{-inx}$

donc $u(x) = f(x)$ et $v(x) = -in e^{-inx}$

$$\text{donc } 2\pi\, c_n(f') = \int_0^{2\pi} f(x)\, in e^{-inx} dx + \left[f(x) e^{-inx}\right]_0^{2\pi}$$

$$= in\, 2\pi\, c_n(f) + (f(2\pi) - f(0))$$

puisque f est 2π périodique alors $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$.

Supposons que : $c_n(f) = \frac{1}{(in)^{p-1}} c_n(f^{(p-1)})$

et Mque : $c_n(f) = \frac{1}{(in)^p} c_n(f^{(p)})$

Par une intégration par partie on obtient :

En remplaçant $a_n(f')$ et $b_n(f')$ ds l'égalité ...

on trouve $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'^2(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left[a_n^2(f) + b_n^2(f)\right]$

$$\geq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(f) + b_n^2$$

$$\geq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt$$

D'où $\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)\,dt$.

<u>Ex 3</u> Soit $f \in D$, montrer que la série de terme général

$\frac{1}{n} C_n(f)$ est absolument convergente.

<u>Solution</u> $\frac{1}{n} C_n(f)$ est absolument convergente

$$\| \sum \frac{1}{n} C_n(f) - \frac{1}{n} C_n(f) \| \longrightarrow 0$$

$$|C_n(f)| = |\langle e_n / f\rangle|$$

$$\sum |\langle e_n / f\rangle|^2 \leq \|f\|_D^2$$

$\sum \frac{1}{n} |C_n(f)|$ est convergente.

$$\left|\frac{1}{n} C_n(f)\right| \leq \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2}|C_n(f)|^2$$

on a $|C_n(f)| = |\langle e_n / f\rangle|$

Par l'inegalité de Bessel, on a prouvé que $\sum |\langle e_n / f\rangle|^2$ cv donc $\sum |C_n(f)|^2$ est convergente et par le théorème de comparaison [s]érie à termes réels positifs, on a le résultat.

$2\pi\, c_n(f^{(p)}) = in\, 2\pi\, c_n(f^{(p-1)}) + (f^{(p-1)}(2\pi) - f^{(p-1)}(0))$

Il que en général que si f est 2π périodique $f^{(p)}$ l'est aussi

On a $p = 1$, montrons que $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $f'(x_0 + 2\pi)$

$$f'(x_0 + 2\pi) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + 2\pi + h) - f(x_0 + 2\pi)}{h}$$

$$= \lim \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Supposons que $f^{(p-1)}$ est 2π périodique et montrons que :

$f^{(p)}(x_0 + 2\pi) = f^{(p)}(x_0)$, On a : $f^{(p)}(x_0 + 2\pi) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(p-1)}(x_0 + h) - f^{(p-1)}(x_0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f^{(p-1)}(x_0 + 2\pi + h) - f^{(p-1)}(x_0 + 2\pi)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f^{(p-1)}(x_0 + h) - f^{(p-1)}(x_0)}{h} = f^{(p-1)}(x_0)$$

d'où $c_n(f) = \frac{1}{(in)^p} c_n(f^{(p)})$

Ex 2 : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 2π périodique telle que $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$

Mq que $\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)\,dt$

Par l'égalité de Parseval : on a :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(f) + b_n^2(f)$$

$$\text{et } \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'^2(x)\,dx = \frac{a_0^2(f')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(f') + b_n^2(f')$$

On a $a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(0x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$

$a_0(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos(0x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\right]_0^{2\pi} = 0.$

On a : $a_n(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx$

on va utiliser une intégration par parties :

On a $\begin{cases} u = \cos nx \\ v' = f'(x) \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = -n\sin nx \\ v = f(x) \end{cases}$

donc $\int_0^{2\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx = \left[f(x)\cos(nx)\right]_0^{2\pi} + n\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

$= n\, b_n(f)$.

D'où $a_n(f') = n\, b_n(f)$.

De même on a : $b_n(f') = -n\, a_n(f)$