Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA de Tanger .
AP2

Algèbre 3 : Série 2

EXERCICE 1. Soient les matrices suivantes associées à des formes bilinéaires :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Écrire l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune de ces matrices. Déterminer le rang et le noyau de ces formes bilinéaires.

EXERCICE 2. Soit la forme bilinéaire $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur la base canonique par :

$$b(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 6x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2.$$

Écrire la matrice de b dans la base canonique. Calculer $N(b)$, $rg(b)$, et $b(z,w)$ où : $z = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Écrire la matrice de b dans la base $\{v_1,v_2,v_3\}$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 3. Soit E un espace vectoriel. Soient $L_2(E)$, $S_2(E)$ et $A_2(E)$ les ensembles des formes bilinéaires, des formes bilinéaires symétriques et des formes bilinéaires anti-symétriques sur E, respectivement.

1. Montrer que $L_2(E)$, $S_2(E)$ et $A_2(E)$ sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que $L_2(E) = S_2(E) \oplus A_2(E)$.

EXERCICE 4. Quelle est la matrice de la forme quadratique $(x,y,z) \longrightarrow y^2 - 2xz$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$? Quelle est sa matrice dans la base $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (1,1,1)$?

EXERCICE 5. Déterminer la forme polaire de la forme quadratique $q : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$q(x) = 3x_1^2 - 2(1+i)x_2^2 - 2ix_1x_2 + x_1x_3 + (5-i)x_2x_3.$$

Écrire la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

EXERCICE 6. Soit q une forme quadratique et s sa forme polaire. Montrer que :

$$s(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)).$$

EXERCICE 7. Soit q une forme quadratique non dégénérée et s sa forme polaire. Montrer que :

$$s(x,z) = s(y,z), \forall z \in E \Longrightarrow x = y.$$

EXERCICE 8. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels. Calculer la matrice dans la base $(1,X,X^2)$ de la forme bilinéaire symétrique

$$(P,Q) \longrightarrow P(0)Q(0)+P(1)Q(1).$$

Est-ce que cette forme bilinéaire symétrique est dégénérée ? Quel est son noyau ?

EXERCICE 9. Parmi les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, lesquelles sont des formes bilinéaires, des formes bilinéaires symétriques, des produits scalaires ?

1. $f_3 : (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \longmapsto x_1y_1+13x_2y_2+6x_3y_3-2x_1y_2-2x_2y_1-y_1x_3-x_1y_3-x_2y_3-x_3y_2$.
2. $f_4 : (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \longmapsto x_1y_1+x_2y_2+2x_3y_3+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_3+x_3y_2$.

EXERCICE 10. Soit la forme bilinéaire (symétrique) de $\mathbb{R}^3$:

$$b(u,v) = 2u_1v_1+4u_1v_2+4u_2v_1-u_2v_2+3u_3v_3.$$

1. Écrire la forme quadratique q associée à b.
2. Écrire la matrice de q.
3. La forme q est-elle définie positive ?

EXERCICE 11. Soit la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$: $q(u) = 2u_1^2+2u_1u_2+u_2^2+u_3^2$.

1. Écrire la forme bilinéaire b associée, et la matrice de q.
2. Est-elle définie positive ?

EXERCICE 12. Déterminer une base orthogonale et la signature pour les formes quadratiques $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

1. $q(x) = x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+2x_1x_2+6x_2x_3$.
2. $q(x) = x_1^2+3x_2^2+8x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3-10x_2x_3$.
3. $q(x) = 5x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$.

EXERCICE 13. Soit

$$q : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \text{dét}\, A. \end{array}$$

Montrer que q est une forme quadratique. Déterminer son rang et sa signature.

EXERCICE 14. On définit sur $\mathbb{R}_2[x]$ la forme quadratique :

$$q(P) = \int_0^1 P(x)P''(x)\,dx.$$

Déterminer son rang, sa signature et son noyau.

EXERCICE 15. Décomposez en carrés la forme quadratique $(x,y,z) \longrightarrow xy+yz+zx$ sur $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa signature ?