Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées-Tanger

**Contrôle final**
Durée: 01h30

Matière: Analyse numérique

Enseignant: Pr. Amal Bergam

---

**1. La présentation et la qualité de la rédaction seront prises en compte.**

---

**Exercice 1.** (6 pts)
Soit $f$ la fonction, définie par:

$$f(x) = x^3 - 4x + 1.$$

1. Montrer que la fonction $f$ admet trois différentes racines réelles $\alpha_1$, $\alpha_2$ et $\alpha_3$.
2. Pour chaque racine, proposer une méthode de résolution pour l'équation $f(x) = 0$.
3. Vérifier que ces itérations convergent.
4. Calculer, pour chaque racine, les trois premières estimations et donner les valeurs des erreurs en ces points.

**Exercice 2.** ( 4 pts)

On considère le système linéaire $Ax = b$, où la matrice $A$ est définie par

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

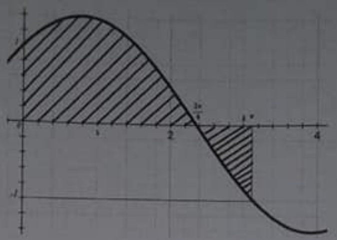
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a$ pour que la méthode de Jacobi converge.

**Exercice 3.** ( 5 pts)
On suppose que $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange $p$ aux points 0; 1 et 8.
2. Calculer les erreurs d'interpolation aux points suivants: $a = 0.5$ ; $b = 0.95$ ; $c = 1$ et $d = 1.5$.

**Exercice 4.** ( 5 pts)

Soit $f$ une fonction continue sur $[0; \pi]$ définie par le graphe suivant:




Avec: $f(0) = 1$; $f(\pi/4) = \sqrt{2}$; $f(\pi/2) = 1$; $f(3\pi/4) = 0$; $f(7\pi/8) = -0.5411$ et $f(\pi) = -1$

1. Donner une approximation de l'aire de la partie hachurée de la figure, en utilisant la méthode des trapèzes sur $[0; 3\pi/4]$ et la méthode des rectangles à droite sur $[3\pi/4; \pi]$. On suppose que le pas $h = \frac{1}{3}$ sur $[0; 3\pi/4]$ et $h = \frac{1}{2}$ sur $[3\pi/4; \pi]$.
2. Le graphe ci-dessus est la représentation graphique de la fonction $cos(x) + sin(x)$. Etablir l'erreur d'intégration numérique entre 0 et $\pi$.