exo 1 Soient α, a, b des nombres réels tels que $\alpha > 0$ et $0 < a < b$

1) Montrer que la série de terme général défini par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{et } u_n = \dfrac{x}{n^{\alpha}(1 + n x^2)} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

est uniformément convergente sur le segment $[a, b]$

Solution : Pour tout élément $x \in [a, b]$

exo 2 :

(a). Montrer que la série de terme général $x(1-x)^n$ est simplement convergente sur le segment $[0,1]$.

(b) Calculer sa somme.

(c) La convergence est-elle uniforme ?

Sol

- Si $x = 0$ ou $x = 1$

- ... convergente

exo 3 : Soient α un nombre réel tel que $\alpha \nless 2$ et x un nombre réel positif.

On considère la série de terme général défini par $U_0(x) = 0$ et $U_n(x) = x^{2-\alpha} e^{-nx}$ si $n \geq 1$.

1°) Montrer qu'elle est simplement convergente pour tout élément $x \in \mathbb{R}_+$.

2°) Montrer qu'elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ si $\alpha < 1$

3

3°) Que peut-on dire si $\alpha = 1$?

exo 7

soit (U_n) une suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = U_1 = U_2 = 0 \\ U_n = \dfrac{2n-1}{n(n^2-4)} \end{cases}$$

(a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 3} U_n$ est convergente

et que $\sum_{n=3}^{\infty} U_n = \dfrac{89}{96}$]

on a : $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ (donc $\sum U_n$ peut être convergente ou diverge)

. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1)-1}{2n-1} \times \dfrac{n(n^2-4)}{(n+1)((n+1)^2-4)}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{2n}{2n} \times \dfrac{n^3}{n^3} = 1$

donc la règle de d'Alembert ne nous renseigne pas sur la nature de la série

$\sum_{n\geq 3} U_n$.

convergence :

$$U_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{2n}{n(n^2-4)} - \frac{1}{n(n^2-4)}$$

$$= \frac{2}{n^2-4} - \frac{1}{n(n^2-4)} < \frac{2}{n^2-4}$$

$$\frac{2}{n^2-4} \approx \frac{2}{n^2}$$

- $\sum \frac{2}{n^2}$ converge car c'st une série de Rieman ($\alpha = 2$)

donc $\sum \frac{2}{n^2-4}$ converge et par suite

$\sum U_n$ converge

(2) calculer que $\sum_{n=3}^{\infty} U_n = \frac{89}{96}$

on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=3}^{N} U_n = -\frac{3}{8}\left(\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) + \frac{89}{96}$$

on a $U_n = \frac{\frac{1}{4}}{n} + \frac{\frac{3}{8}}{n-2} + \frac{-\frac{5}{8}}{n+2}$

Decomposition

$$U_n = \frac{2n-1}{n(n-2)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-2} + \frac{c}{n+2}$$

$$= \frac{a(n^2-4) + bn(n+2) + c(n(n-2))}{n(n^2-4)}$$

$$= \frac{n^2(a+b+c) + n(2b-2c) - 4a}{n(n^2-4)}$$

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ 2b-2c = 2 \\ -4a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} - 1 + c + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{5}{8} \\ b = 1 + c = \frac{3}{8} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Donc

$$\sum_{n=3}^{N} u_n = \sum_{n=3}^{N} \frac{\frac{1}{4}}{n} + \sum_{n=3}^{N} \frac{\frac{3}{8}}{n-2} + \sum_{n=3}^{N} \frac{-\frac{5}{8}}{n+2}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n} + \frac{3}{8} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n-2} - \frac{5}{8} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n+2}$$

- $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{2} = S_N - \frac{3}{2}$

- $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n-2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} = S_N - \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}$

- $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n+2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}$

$$= S_N - \frac{25}{12} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}$$

- $\displaystyle\sum_{n=3} u_n = \frac{1}{4}\left(S_N - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{8}\left(S_N - \frac{1}{n} - \frac{1}{N-1}\right)$

$$- \frac{5}{8}\left(S_N - \frac{25}{12} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right)$$

$$= \frac{3}{8}\left(-\frac{1}{N} - \frac{1}{N-1}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) + \frac{89}{96}$$

$N \to \infty$ $\boxed{\sum u_n = 89/96}$

exo 6 Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite réelle positive

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k$$

1

1) Montrer que $V_n = U_n - n v_n$

où $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ et $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

2) Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ est convergente

3) Montrer dans le cas de convergence de $\sum u_n$ que $\lim_{n\to\infty} n v_n = 0$

sol : Pour $n=1$, on a $V_1 = v_1 = \frac{1}{2} u_1$

$$U_1 - v_1 = u_1 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{2} u_1$$

on suppose que c'est vrai pour n et montrons le pour $(n+1)$

on a $V_{n+1} = V_n + v_{n+1} = U_n - n v_n + v_{n+1}$

$$= U_n - \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n+1} k u_k$$

$$= U_n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k u_k + \left[\frac{1}{(n+1)} (n+1) u_{n+1}\right] + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n+1} k u_k$$

$$V_{n+1} = U_n + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k u_k \left(\frac{1}{n+2} - 1\right) + u_{n+1}$$

$$= U_{n+1} - \frac{1}{\cancel{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} k u_k \left(\frac{\cancel{n+1}}{n+2}\right) = U_{n+1} - \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} k u_k$$

$$= U_{n+1} - (n+1) v_{n+1}$$ D'où $\forall n \in N^*$ $V_n = U_n - n v_n$

Par la relation de Chales, on a

$$\int_n^{2n} \frac{dt}{2t+1} \leq u_n \leq \int_{n-1}^{2n-1} \frac{dt}{2t+1}$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln(2t+1)\right]_n^{2n} \leq u_n \leq \frac{1}{2}\left[\ln(2t+1)\right]_{n-1}^{2n-1}$$

$2(2n-1)+1$

$4n-2+1$

$4n-1$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4n-1}{2n+1}\right) \leq u_n \leq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4n-1}{2n-1}\right)$$

$2(n-1)+1$

d'ou

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4n-1}{2n+1}\right)$$

$$= \lim \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4n-1}{2n-1}\right)\right)$$

$\frac{2n-1+2n}{2n-1}$

$1+\frac{2n}{2n-1}$

$1+\frac{1}{1-\frac{1}{2n}}$

donc $\boxed{\lim_{+\infty} u_n = \frac{1}{2}\ln 2}$

③

II) Montrons que

$$\sum_{p=n}^{\infty}\left(u_{p+1}-u_p\right) = \ell - u_n$$

avec $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}\ln(2)$ □

③ M.q. $\boxed{u_{p+1}-u_p \sim \frac{1}{32p^3}}$??

exo 6 I Montrer que la suite de terme générale

$$U_n = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+3} \cdots + \frac{1}{4n-1} \quad n \geq 1$$

est convergente et calculer sa limite ℓ.

3

(II) Montrer que

$$\sum_{p=n}^{+\infty} (U_{p+1} - U_p) = \ell - U_n$$

Sol : on a $U_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$

$2(2n-1)+1$
$4n-2+1$
$2(n+1)+1$
$2n-1$

$t \to \frac{1}{2t+1}$ est décroissante

$\forall\ k < t < k+1$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{2t+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2k+1}[t]_k^{k+1} = \frac{1}{2k+1}$$

dans l'autre ~~sens~~ :

$$\forall\ k-1 < t < k \Rightarrow \int_{k-1}^{k} \frac{1}{2t+1} < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{2k+1}$$

donc $\int_k^{k+1} \frac{dt}{2t-1} \leq \frac{1}{2k-1} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{2t-1}$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{2t+1} \leq U_n < \sum_{k=n}^{2n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{2t-1}$$

2) on a $v_n = u_n - n r_n$ et on a

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n r_n \geq 0$ car (u_n) est réelle positive

donc $v_n < u_n$ car

$r_n - u_n < 0 \Rightarrow -n r_n \leq 0$

D'après le théorème de comparaison des séries si la série $\sum u_n$ converge alors $\sum r_n$ converge

3) $v_n = u_n - n r_n \Rightarrow n r_n = u_n - r_n$

u_n converge, donc v_n converge et par suite $n r_n$ converge.

on pose $\lambda = \lim_n n r_n$

. Montrons que $\lambda = 0$

supposons que $\lambda \neq 0$, $\lim_n n r_n = \lambda$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n r_n}{\lambda} = 1$ donc $n r_n \sim \lambda$

donc $\boxed{r_n = \frac{\lambda}{n}}$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum r_n$ diverge ~~aussi~~,

contradiction (car $\sum r_n$ converge)

1ère méthode :

$$\sum_{p=n}^{N}(u_{p+1}-u_p) = \sum_{p=n}^{N} u_{p+1} - \sum_{p=n}^{N} u_p$$

$$= u_{N+1} - u_n$$

$$\sum_{p=n}^{\infty}(u_{p+1}-u_p) = \lim \sum_{p=n}^{N}(u_{p+1}-u_p)$$

$$= \lim_{N\to\infty}(u_{N+1}-u_n)$$

$$= \lim_{N\to\infty} u_{N+1} - \lim_{N\to\infty} u_n$$

$$\sum_{p=n}^{\infty}(u_{p+1}-u_p) = \ell - u_n$$

2ème méthode :

on pose $v_p = u_{p+1} - u_p$

on a d'après la proposition du cours :

$$\sum_{p=0}^{\infty} v_p = -u_0 + \lim_{p\to\infty} u_p = \sum_{p=0}^{n-1} v_p + \sum_{p=n}^{\infty} v_p$$

Donc, $$\boxed{\sum_{p=n}^{\infty} v_p = -u_0 + \lim_{p\to\infty} u_p - \sum_{p=0}^{n-1} v_p} \quad *$$

or $$\sum_{p=0}^{n-1} v_p = \sum_{p=0}^{n-1} u_{p+1} - u_p$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} u_{p+1} - \sum_{p=0}^{n-1} u_p = u_n - u_0$$

En remplaçant ds $(*)$: $$\sum_{p=n}^{\infty} v_p = -u_0 + \ell - (u_n - u_0)$$

$$= \ell - u_n$$