ECOLE NATIONALE DES SCIENCES
APPLIQUEES - TANGER

UNIVERSITE ABDELMALEK
ESSAÂDI

Contrôle Continu 2 (Durée: 1h30min)

AP32: Analyse 3

January 9, 2018

****** Tous les documents et les appareils électroniques sont interdits ******

****** Une réponse sans justification ne rapportera aucun point ******

Excercice 1:

Trouver les extremums absolus de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2(1-x)$ sur sur la région fermée R délimitée par les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$ et la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 4$. **(8 pts)**

Excercice 2:

On considère la fonction suivante: $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$.

1. Déterminer l'équation du chemin suivant la plus forte pente et passant par le point $(1,2)$.
2. Déterminer l'ensemble $L_k(f)$, courbe de niveau de la fonction f d'hauteur k. **(5 pts)**

Excercice 3:

Par intégration multiple, calculer le volume du corps délimité par les surfaces: $4 = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$ et $z = 0$. **(7 pts)**

CC 2018 Analyse 3 : (1)

Exercice 1 :

$f(x,y) = x^2 + y^2(1-x)$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x=0, y=0, x^2+y^2=4\}$.

* f est une fonction polynomiale, alors les seuls point critique, sont les solutions du système $\nabla f = (0,0)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y^2 = 0 \\ 2y(1-x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y^2 = 0 \\ \text{et} \\ x=1 \text{ ou } y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y^2 = 0 \text{ et } x = 1 \\ 2x - y^2 = 0 \text{ et } y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \quad y = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \quad y = 0 \end{cases}$$

alors les points critique de f sont $(0,0)$ $(1, \sqrt{2})$, et $(1, -\sqrt{2})$ sur $\mathbb{R}^2$

* classification des point critique :

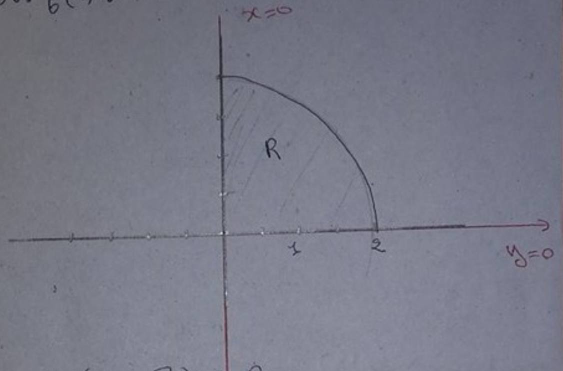
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 - 2x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2y$ (f de C^2)

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2

alors $f(0,0) = 0$ est un min relatif de f



le point $(1, -\sqrt{2}) \notin R$.

$$H_f(1, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(H_f - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & (2-2\sqrt{2})-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)((2-2\sqrt{2})-\lambda) - 8$$

$$= 2(2-2\sqrt{2}) - 2\lambda - (2-2\sqrt{2})\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$= 2(2-2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$= \lambda^2 + 2\sqrt{2}\lambda - (4+4\sqrt{2}) = 0$$

$$H_f(1,\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$ 3

$$Det\left(H_f(1,\sqrt{2}) - \lambda I_2\right) = (2-\lambda)(-\lambda) - 8$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

$\Delta = 4 + 32 = 36$

$\sqrt{\Delta} = 6$

$\lambda_1 = \frac{2-6}{2} = -2 < 0$

$\lambda_2 = \frac{2+6}{2} = 4 > 0$

alors $(1, \sqrt{2})$ est un point selle

Etudions la fct f sur les frontières:

$D_1 = \{(x,y),\ x=0,\ y \in [0,2]\}$

$D_2 = \{(x,y),\ y=0;\ x \in [0,2]\}$

$D_3 = \{(x,y),\ y = \sqrt{4-x^2},\ x \in [0,2]\}$

Sur D_1:

on pose $g(x) = f(0,x) = x^2$

$g'(x) = 2x$

$g'(x) = 0 \iff x = 0$

(4)

x	0		2
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$f(0,2)=g(2)=4$

$g(0)=f(0,0)=0$

0 est un min.

$f(0,2)=4$ max.

Sur D_2:

on pose $T(x)=f(x,0)=x^2$

on a $T(x)=g(x)$ sur $[0,2]$

alors les deux on les mêmes extremum.

et la même variation.

Sur D_3:

on pose $h(x)=f(x,\sqrt{4-x^2})$ $x\in[0,2]$

$h(x)=x^2+(4-x^2)(1-x)$

$=+x^3-4x+4$

$h'(x)=+3x^2-4$.

~~$h'(x)=+3x^2-4=0 \Leftrightarrow 3x^2=4$~~

~~$\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}$~~

~~pas de solution~~

~~x~~	~~0~~		~~2~~
~~$h'(x)$~~		~~$+$~~	
~~$h(x)$~~	~~$h(0)=4$~~	~~$\nearrow$~~	~~$h(2)=-12$~~

~~$h(0)=$~~ (5)

alors $h'(x)=0 \Rightarrow x^2=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

x	0		$2/\sqrt{3}$		2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	4	$\searrow$	$h(2/\sqrt{3})$	$\nearrow$	4

$h(0)=f(0,2)=4$

$h\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=f\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{4-\frac{4}{3}}\right)$

$=\frac{4}{3}+\left(4-\frac{4}{3}\right)\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$h\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{3}\left(\qquad\right)\geq 0=f(0,0)$

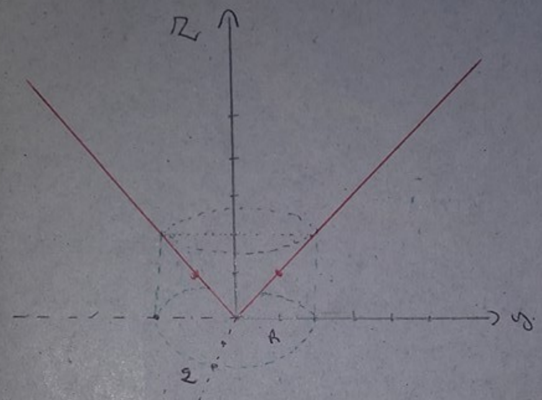
* alors $f(0,0)=0$ est le min absolu de f dans B.

* $4=f(0,2)=f(2,0)$ est le max absolu de f sur B.

Exercice 3 :

$Q = \{ 4 = x^2 + y^2 \quad z = \sqrt{x^2+y^2}$ (6)

$\text{et } z = 0. \}$



$V = \iiint_Q dV = \iint_R \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \, dA$

$R = \{ (r, \theta) \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$

$r^2 = x^2 + y^2$

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_0^{r} dz \, r \, dr \, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} r^2 \, dr \, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right] d\theta = 2\pi \cdot \frac{8}{3}$

$= \boxed{\frac{16}{3} \pi}$

1. Déterminons l'équation du chemin suivant la plus forte pente et passant par $A(1,2)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{-4y}{-2x} = \frac{2y}{x}$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y$

$\frac{\partial f}{\partial x} =$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

$$\Rightarrow dy\,x = 2y\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln(y) = 2\ln(x) + c$$

$A(1,2)$

$$c = \ln(2) - 2\ln(1)$$

$$c = \ln(2)$$

$$\Rightarrow \ln(y) = 2\ln(x) + \ln(2)$$

$$\Rightarrow \ln(y) = \ln(x)^2 + \ln(2)$$

$$\Rightarrow \ln(y) = \ln(2 \cdot x^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot x^2}$$