Université Abdelmalek Essaâdi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées ENSA de Tanger
Années Préparatoires : 2ème année. SABIL 2018-2019

Analyse Numérique : TD 1

Exercice 1 : On considère l'équation $2x + e^x - 3 = 0$ (E) sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution l dans l'intervalle $[0, 1]$.
2. Trouver le nombre d'itérations nécessaires pour estimer l à une tolérance $\varepsilon = 10^{-11}$ en utilisant la méthode de dichotomie.
3. Trouver une valeur approchée de l avec deux décimales exactes.

Exercice 2 : Méthode de la corde

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ et admet un zéro dans $[a, b]$. Soit $x_0 \in [a, b]$ et soit $(x_n)_n$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{q}$ (1) avec $q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $q \neq 0$.

1. Donner une représentation graphique de la suite $(x_n)_n$.
2. Ecrire (1) sous forme $x_{n+1} = g(x_n)$ en exprimant g en fonction de f.
3. Si f est dérivable, donner une condition suffisante pour que $(x_n)_n$ converge sur $[a, b]$.
4. Soit f de classe C^1. Montrer que sous la condition suffisante précédente, la convergence est linéaire si $f'(\lim_{n\to+\infty} x_n) \neq q$.

Exercice 3 : On considère l'équation $f(x) = x^2 - a = 0$ où a est un nombre positif.
Montrer en initialisant convenablement que la suite $(x_n)_n$ définie par la méthode de Newton converge vers $\sqrt{a}$.

Exercice 4 : Soit f une fonction de classe C^2 définie sur un intervalle $[a, b]$. On note par l une solution de $f(x) = 0$. On note par $(x_n)_n$ la suite définie par une méthode d'approximation et par $e_n = l - x_n$ l'erreur à l'itération $n \in \mathbb{N}$.

1. En utilisant la méthode de Newton, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \zeta_n \in [a, b]$ tel que $e_{n+1} = -\frac{f''(\zeta_n)}{2f'(x_n)} e_n^2$.
2. En utilisant la méthode de Lagrange, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \delta_n, \tau_n \in [a, b]$ tel que $e_{n+1} = -\frac{f''(\delta_n)}{2f'(\tau_n)} e_n e_{n-1}$.

Exercice 5 :

1. On considère la fonction $g_1(x) = x - x^3$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Montrer que pour tout x_0 dans $[-1, 1]$ la suite définie par la méthode de point fixe converge vers 0.
2. On considère la fonction $g_2(x) = x + x^3$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x_0 \neq 0$ la suite définie par la méthode de point fixe diverge.

Exercice 6 : On considère la fonction $f(x) = \tan(x) - 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet l'unique solution $l = \frac{\pi}{4}$ dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$.
2. On suppose que $x_0 \in [0, \pi/4]$. Montrer que la suite $(x_n)_n$ définie par la méthode de Newton converge vers la solution exacte de $f(x) = 0$.
3. Montrer que l'erreur est de même ordre que $|f(x_n)|$.

Exercice 7 : Soit $f(x) = \frac{x-1}{x} - e^{-x}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. En traçant le graphe de f trouver le nombre de zéros de l'équation $f(x) = 0$ et encadrer chaque racine par deux entiers successifs.
2. on considère la fonction $g(x) = 1 + xe^{-x}$. Etudier la convergence de la suite définie par la méthode de point de fixe vers un zéro de f. Préciser le choix de x_0 dans le cas de convergence.

Analyse Numérique : TD 2

Exercice 1 : On donne 4 valeurs d'une fonction f définie sur $[1,4]$.

$$f(1) = -1, \quad f(2) = 5, \quad f(3) = 2, \quad f(4) = 1.$$

1. En utilisant la base de Lagrange, trouver le polynôme de $\mathbb{K}_1[X]$ qui interpole f sur le support $\{1,2\}$. Donner une valeur approchée de $f(1.5)$.
2. En utilisant la base de Lagrange, trouver le polynôme de $\mathbb{K}_2[X]$ qui interpole f sur le support $\{1,2,3,4\}$. Donner une valeur approchée de $f(1.5)$.
3. Traiter ces deux questions en utilisant le forme de Newton (les différences divisées) à la place de la forme de Lagrange.
4. Comparer les deux méthodes et conclure.

Exercice 2 : D'après le cours, l'expression des différences divisées est données par :

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\}, \qquad f[x_0,x_1,\ldots,x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{k} (x_i - x_j)} \tag{1}$$

Calculer la complexité $T_{1,n}$ de (1) et la comparer avec celle de l'algorithme pyramidal vu en cours pour calculer $f[x_0,x_1,\ldots,x_k]$, $k = 0,\ldots,n$ (Ne tenir compte que des opérations élémentaires (produit, somme)). Conclure.

Exercice 3 : Soient les points $x_0 = -4$ et $x_1 = -2$ et $x_2 = 0$ et f une fonction telle que : $f(x_0) = 256$, $f(x_1) = 16$ et $f(x_2) = 0$.

1. Calculer le polynôme de Lagrange qui interpole f sur le support x_0, x_1, x_2 et donner sa valeur en 1.
2. Dresser le tableau des différences divisées et calculer le polynôme de Newton qui interpole f sur le support x_0, x_1, x_2 et donner sa valeur en 1 et en 3.
3. Dresser le tableau correspondant à l'algorithme de Aitken pour calculer la valeur en 1 et en 3 du polynôme qui interpole f sur le support x_0, x_1, x_2.
4. Reprendre les questions précédentes en ajoutant $x_3 = 2$ et $f(x_3) = 16$.
5. Reprendre les questions précédentes en ajoutant $x_4 = 4$ et $f(x_4) = 256$.

Exercice 4 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^3 sur l'intervalle $[a,b]$. $\forall i \in \{0,\ldots,n\}$, on pose $x_i = a + ih$ avec $h = \dfrac{b-a}{n}$.

1. $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, on note $p_{i,1}$ le polynôme de $\mathbb{K}_1[X]$ qui interpole f sur le support $\{x_i, x_{i+1}\}$.
   (a) Exprimer l'erreur $e_{i,1}(x) = f(x) - p_{i,1}(x)$ pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$.
   (b) Majorer $|e_{i,1}(x)|$ indépendamment de i.
   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Déduire de la question précédente un seuil maximal h_{max} du pas h garantissant une précision $\leq \varepsilon$
   (d) Application numérique : Calculer h_{max} pour $a = 1, b = 3, f(x) = e^x, \varepsilon \in \{10^{-4}, 10^{-2}\}$.
2. Travail libre : Faire la même chose en utilisant une interpolation quadratique par morceaux : $\forall i \in \{0, \dots, n-2\}$, on considère $p_{i,2}$ le polynôme de $\mathbb{K}_2[X]$ qui interpole f sur le support $\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$.

Exercice 5 : Trouver en utilisant la méthode de Hermite l'équation de la courbe qui passe par $A = (0,0)$ et $B = (4,2)$ et qui est tangente aux droites $y = 0$ et $y = 2$ en A et B respectivement.

Université Abdelmalek Essaâdi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées ENSA de Tanger
Années Préparatoires : 2ème année. SABIL 2018-2019

Analyse Numérique : TD 3

Exercice 1 : Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

1. Donner une approximation de $\int_0^1 f(x)dx$ en utilisant les méthodes de rectangle, point milieu, trapèze et Simpson.
2. Donner une majoration de la valeur absolue de l'erreur pour chaque méthode.

Exercice 2 : Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^4 et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des points de $[a,b]$ tels que $x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}$ pour $i = 0, \ldots, n-1$.

1. Déterminer le pas maximal h_{max} correspondant à chaque méthode suivante : rectangles composés, points milieu composés, trapèzes composés, simpson composés pour avoir une précision $\leq \varepsilon$ où $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire le nombre minimal de sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ correspondant à chaque méthode pour avoir une précision $\leq \varepsilon$.
3. Application : $f(x) = e^x$ $a = 1$, $b = 3$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

Exercice 3 :

1. En utilisant le support $\{0, 0.5, 1\}$ donner une approximation de la dérivée f' en 0 et en 0.5.
2. Calculer l'erreur en 0 et en 0.5.
3. Faire la même chose pour f''.

Exercice 4 : On considère les points : $\{x_0, x_1, x_2\}$ tels que $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, 1$.

I)

1. Montrer que si $x = x_0$ alors : $f'(x) \approx \dfrac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$ et que l'erreur de dérivation $e_{diff,2} = \frac{h^2}{3} f^{(3)}(t)$ avec $t \in]x, x+2h[$.
2. Montrer que si $x = x_1$ alors : $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ et que l'erreur de dérivation $e_{diff,2} = -\frac{h^2}{6} f^{(3)}(t)$ avec $t \in]x-h, x+h[$.

II) Faites la même chose pour f''. (C.à.d Trouver l'approximation de f'' en x_0 et x_1 ainsi que l'erreur).

Analyse Numérique : TD 4

Exercice 1 : Soit $(P) : \begin{cases} y' = f(t, y(t)) = t + y(t) & t \in [0,1] \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$

1. Montrer que (P) admet une solution unique de classe $C^1([0,1])$.
2. Calculer les 3 premières itérations établies par le schéma d'Euler explicite en utilisant un pas $h = 1/10$ et $y_0 = 1$.
3. Etudier la stabilité et la consistance (ordre de consistance) et ensuite la convergence de ce schéma.
4. Cas général : Soit f de classe $C^2([a,b] \times \mathbb{R})$ et vérifiant la condition de Lipschitz % à la 2ème variable et uniformément % à la 1ère. Montrer que le schéma d'Euler explicite converge et d'ordre 1.
5. Refaire la même chose en utilisant le schéma de Runge-Kutta2.

Exercice 2 : Soit le système linéaire suivant : $Ax = b$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

1. Montrer que ce système admet une solution unique.
2. Résoudre ce système en utilisant les méthodes de Gauss, LU et Gauss-Jordan.

Exercice 3 : Soit M_k une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, et telle que tous les éléments sous la diagonale soient nuls sauf ceux situés sur la colonne k :

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \\ \vdots & & m_{k+1,k} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & m_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'inverse de M_k. Calculer le produit : $\prod_{k=1}^{n} M_k$.

Exercice 4 : Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la factorisation de Cholesky, où : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

TD1 (Analyse numérique)

Exo 1 : $f(x) = 2x + e^x - 3$

1) On montre que $(E) : 2x + e^x - 3$ admet une unique solution ℓ dans $[0,1]$.

Considérant $f(x) = 2x + e^x - 3$

On a $f(0) = 1 - 3 = -2 < 0$ et
$f(1) = e - 1 > 0$

donc $f(0) \cdot f(1) < 0$ or f est continue sur $[0,1]$ donc $f(x)=0$ admet une solution dans $[0,1]$

D'autre part, on a $f'(x) = 2 + e^x > 0$ $\forall x \in [0,1]$, c-à-d, f est strictement croissante d'où l'unicité de la solution.

2/ D'après th (méthode de dichotomie)

$$|x_n - \ell| \le \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

alors pour avoir $|x_n - \ell| < \varepsilon$, il suffit d'avoir $\frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon$

$$\Rightarrow b - a < \varepsilon 2^{n+1}$$

$$\ln(b-a) < \ln(\varepsilon 2^{n+1})$$

$$\ln(b-a) < \ln(\varepsilon) + (n+1)\ln 2$$

$$\ln(b-a) - \ln(\varepsilon) = (n+1)\ln 2$$

$$\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) = (n+1)\ln(2)$$

$$n+1 = \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$$

Il suffit de prendre $n_\varepsilon = E\left(\frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}\right)$

Et on a $\forall n \ge n_\varepsilon$ $|x_n - \ell| < \varepsilon$

$\varepsilon = 10^{-11}$; $n_\varepsilon = 36$

3/ **Rappel :**

$a_0 = a$ et $b_0 = b$

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

avec (a_n) et (b_n) définies par :

Si $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ alors
$a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$

Sinon $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$

c-à-d qu'il faut x_n tq

$$|x_n - \ell| < 10^{-2}$$

	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$
0	0	1	1/2	-2	e-1	-0,51
1	0,5	1	0,75	-0,751	1,718	0,617
2	1/2	0,75	0,625	-0,351	0,617	0,118
3	1/2	0,625	0,5625	-0,351	0,617	0,118
4	0,5625	0,625	0,59375	-0,119	0,118	0,0017
5	0,59175	0,625	0,60375	-0,0071	0,118	0,058

$x_n = 0,6015625$

Donc la solution approché avec 2 décimale exacte est $l = 0,60$

$|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-2}$

$|x_6 - x_5| \leq 10^{-2}$

Exo4: Méthode de Newton.

$$\begin{cases} x_0 \text{ donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Dev de Taylor à l'ordre 2 de f en x_1.

$\exists\, \varepsilon_n \in [a,b]$ tq ~~$f(x_1)$~~

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1) + \boxed{\frac{(x-x_n)^2}{2} f''(\varepsilon_n)}$$

On prend: $x = l$, on obtient:

$$f(l) = f(x_n) + (l - x_n) f'(x_n) + \frac{(l - x_n)^2}{2} f''(\varepsilon_n)$$

$f(l) = 0$ et $e_n = l - x_n$ et

$e_{n+1} = l - x_{n+1}$

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (l - x_n) = \frac{-e_n^2}{2} \frac{f''(\varepsilon_n)}{f'(x_n)}$$

$$l - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = -\frac{e_n^2}{2} \frac{f''(\varepsilon_n)}{f'(x_n)}$$

$$l - x_{n+1} = -\frac{f''(\varepsilon_n)}{2 f'(x_n)} e_n^2$$

$$\left[e_{n+1} = -\frac{f''(\varepsilon_n)}{2 f'(x_n)} e_n^2 \right]$$

2/ Travail personnel

Exo3: $f(x) = x^2 - a$

Rappels Newton $\begin{cases} x_0 \text{ donnée sur } [a,b] \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$

Rappels Th: cond° suffisante de cv de la méthode de Newton.

Soit $f(x) = 0$ $\quad [a,b]$ (E).

Sous les conditions suivantes.

1°/ f est de C^1 sur $[a,b]$

2°/ $f(a) \times f(b) < 0$

3°/ $f'(x_n) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

4°/ $f''(x_n) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

5°/ $x_0 \in [a,b]$ $f(x_0) \times f''(x_0)$

x) Il suffit de prendre $g(x) = x - \frac{f(x)}{q}$ et on aura $x_{n+1} = g(x_n)$

3°) Considérant $(x_n)_n$ tq $x_{n+1} = g(x_n)$ on utilise la méthode du pt fixe

<u>Rappel</u>: <u>Méthode du pt fixe</u>

Pour chercher l, la sol de $f(x)=0$ on cherche g tq $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=x$ la solut° de $f(x)=0$ sera le pt fixe de g qu'on trouve comme limite de (x_n) qui est définie par:

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

<u>Rq</u>: g est choisie tq. les condit° du th de pt fixe soient satisfaites

<u>Rappel</u>: Les condit° du th: condit° suff de cv de la méthode de pt fixe.

Soit $g : [a;b] \longrightarrow [a;b]$ g est dérivable

On suppose que $\exists\, 0 \leq k \leq 1$ tq $|g'(x)| \leq k$; $\forall x \in [a;b]$

alors $(x_n)_n$ qui est définie par:

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

cv vers l'unique pt fixe de g

On a $g(x) = x - \frac{f(x)}{q}$

Les condit° suffisantes de cv sont

$$\begin{cases} g([a,b]) \subset [a,b] \\ |g'(x)| \leq k < 1 \quad \forall x \in \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b \leq \frac{f(a)}{q} \leq 0 \text{ et } 0 \leq \frac{f(b)}{q} \\ \left|1 - \frac{f'(x)}{q}\right| \leq k < 1 \quad ② \end{cases}$$

Alors si f est dérivable, g sera dérivable aussi et alors sous les condit° suffi ① et ②, on peut utiliser le th (cond. suff de cv de pt fixe) pour avoir la cv de $(x_n)_n$

4°) Soit f de C^1. Montrons en utilisant Q3 que la cv est linéaire.

<u>Rappel</u>: Ordre de cv

On dit que la cv d'une suite $(x_n)_n$ vers l est d'ordre $p \geqslant 0$ si $\lim \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c > 0$

avec $e_n = l - x_n \quad \forall n$

Si $p = 1$ alors la cv est linéaire

Si $p = 2$ —— " —— quadratique

<u>Rappels</u> Cours th ordre de cv de pt fixe. Soit $g : [a,b] \to [a;b]$ de classe C^m ; $m \in \mathbb{N}^*$ tq g admet un unique pt fixe $l \in [a;b]$ (...)

Si la méthode du pt fixe cv alors l'ordre de cv = m ssi

$\dots = g^{(m-1)}(\ell) = 0$

$g^{(m)}(\ell) \neq 0$

② Pour notre question, on suppose que les conditions ① et ② sont satisfaites alors $(x_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} x_0 \text{ donnée dans } [a;b] \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases} \quad \text{cv vers } \ell$$

alors d'après th de l'ordre de cv de pt fixe :

Ordre de cv $= 1$ ssi $g'(\ell) \neq 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{f'(\ell)}{q} \neq 0 \Leftrightarrow f'(\ell) \neq q$

donc la cv est linéaire ssi $f'(\ell) \neq q$

Ex 5. TD 1.

Rappel : Th de c.s cv locale de pt fixe (c.s)

Th : CS. cv locale de pt fixe

Soit $g : [a;b] \longrightarrow [a;b]$ de C^1 sur un voisinage $\mathcal{V}(\ell)$ de ℓ tq $\forall x_0 \in \mathcal{V}'(\ell)$ la suite $(x_n)_n$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ cv vers l'unique pt fixe de g dans $\mathcal{V}'(\ell)$.

1) On a $g_1(x) = x - x^3$ sur $[-1;1]$

Rq : 0 est pt fixe de g_1

• On ne peut pas utiliser le th cs cv locale pt fixe car $g_1'(x) = 1 - 3x^2$

$\Rightarrow g'(0) = 1$ donc on a pas la condit° $|g'(\ell)| < 1$.

• Aussi on ne peut pas utiliser CS de cv de pt fixe alors pr mq $\forall x_0 \in [-1;1]$: $(x_n)_n$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ cv vers 0. On procède comme ceci :

Cas 1 : $x_0 \in [0;1]$, on a $x_1 - x_0 = g(x_0) - x_0 = -x_0^3 \leq 0$

donc $x_1 \leq x_0$

Hypothèse de récurrence : On suppose que $x_{n+1} \leq x_n$ et $x_{n+1} \geq 0$ et on montre que $x_{n+2} \leq x_{n+1}$.

On a $x_{n+2} - x_{n+1} = g(x_{n+1}) - x_{n+1}$

$= -x_{n+1}^3 \leq 0$ d'après hyp récurr. donc $x_{n+2} \leq x_{n+1}$

$x_{n+1} \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_0 \leq 1$

$(x_0 \in [0;1])$

donc $0 \leq x_{n+1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x_{n+1} - x_{n+1}^3$

$\Rightarrow x_{n+2} \geq 0$

d'où $x_{n+2} \leq x_{n+1}$ et $x_{n+2} \geq 0$

c/c $(x_n)_n \searrow$ et $x_n \geq 0$

$\Rightarrow (x_n)_n$ cv vers ℓ

$\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = g(\lim(x_n))$

$\Rightarrow \ell = g(\ell) \Rightarrow \ell = 0$

Cas 2 : $x_0 \in [-1;0]$

De la m̂ façon et par récurrence, on mq $(x_n)_n \nearrow$ et majorée par 0 alors $(x_n)_n$ cv vers $\ell = g(\ell) \Rightarrow \ell = 0$

Détail : Travail personnel

etc $\forall x_0 \in [-1,1]$ (x_n) ...

2/ Travail personnel

Ex 6 : sera fait en cours ou Travail perso.

Ex 7 : —— " ——

TD 2 :

Ex 1 : On a 4 valeurs d'une fonct f :

$f(1) = -1$; $f(2) = 5$

$f(3) = 2$; $f(4) = 1$

1/ On considère le support {1, 2}. Trouver le polynôme de l'interpolation en base de Lagrange.

- Le support $\{\overset{x_0}{1}, \overset{x_1}{2}\}$. On commence par calculer les l_0 et l_1.

Rappel : $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-2}{1-2} = 2 - x$

et $l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-1}{2-1} = x - 1$

donc le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1\}$

Rappel : $P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$

Dans notre cas : $P_1(x) = f(x_0) l_0(x) + f(x_1) l_1(x)$

$= f(1) l_0(x) + f(2) l_1(x)$

$\boxed{P_1(x) = 6x - 7}$

* Valeur approchée de $f(1,5)$:

$f(1,5) \simeq P(1,5) = 2$

Polynôme d'interpolation ∈ ...

On calcule d'abord $l_0(x)$, $l_1(x)$, $l_2(x)$; $l_3(x)$

Remarque : l_0 et l_1 calculés sur (1) difficults de l_0 et l_1 en (2) car on n'a pas le m support.

$l_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$

$= \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{-6}$

$l_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$

$= \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{2}$

$l_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$

$= \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{-2}$

$l_3(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$

$= \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{6}$

$P(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) l_i(x)$

$= f(x_0) l_0(x) + f(x_1) l_1(x) + f(x_2) l_2(x) + f(x_3) l_3(x)$

$= \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{6} + 5 \times \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{2}$

$- (x^3 - 7x^2 + 14x - 8) + \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{6}$

Donc pour i fixé, on effectue $2k$ opérations (c le coup d'une opérat°)

or $i = 0, \dots, k$ donc

$$T_k = c \sum_{i=0}^{k} 2k = c\, 2k(k+1)$$

$$T_1(n) = \sum_{k=0}^{n} T_k = 2C\left(\sum_{0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k\right)$$

$$= 2C\left(\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$T_1(n) = 2C\left(\frac{1}{3} n^3 + n^2 + \frac{2}{3} n\right)$$

<u>Asymptotiquement</u>: $T_1(n) \in \Theta(n^3)$

Donc $T_1(n)$ cubique en n.

2/ Mq la complexité de $T_2(n)$ pour calculer $f[x_0], f[x_0, x_1], \dots, f[x_0, x_1, \dots x_n]$ de l'algorithme pyramidal est quadratique

<u>Rappel</u>: <u>L'essentiel de l'algorithme pyramidal</u>:

```
for i = 1 à n faire
    for j = n à i faire
        d(j) = (d(j) - d(j-1)) / (x(j) - x(j-1))      *
    finfor
finfor.
```

Soit $T_i^*(n)$, pour i fixé, la complexité pour effectuer $(*)$.

Donc $T_2(n) = \sum_{i=1}^{n} T_i^*(n)$

Pour i fixé, calculons $T_i^*(n)$

Pour j fixé, on effectue.

2 opérations $(-)$ et 1 opération $(\div)$

Donc la complexité pour j fixé est $3C$.

or j varie de n à i donc

$$T_i^*(n) = \sum_{j=n}^{i} 3C = \sum_{j=i}^{n} 3C = 3C(n-i+1)$$

d'où $T_2(n) = \sum_{i=1}^{n} T_i^*(n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} 3C(n-i+1)$$

$$= 3C \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)$$

$$= 3C\left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n\right) = 3C\left(\frac{\ }{2}\right.$$

$$\Rightarrow T_2(n) \sim \frac{3C}{2} n^2$$

la complexité est quadratique en

$T_2(n) \in \Theta(n^2)$

~~La complexité est~~

3- Quand n est grand $T_1(n) \geqslant T_2(n)$ car $T_1(n)$ cubique alors $T_2(n)$ est quadratique.

<u>Conclusion</u>: L'algorithme pyramidale est plus performant que la formule de 1 pour calculer les differences divisées.

Ex 3:

1/

$x_0 = -4$	$x_1 = -2$	$x_2 = 0$
$f(x_0) = 256$	$f(x_1) = 16$	$f(x_2) = 0$

<u>Lagrange</u>:

Le support $\{x_0, x_1, x_2\}$

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x+2)x}{(-4+2)(-4)}$$

$$= \frac{1}{8}(x^2 + 2x)$$

$$l_1(x) = \frac{(x+4)x}{(-2+4)(-2)} = -\frac{1}{4}(x^2 + 4x)$$

$$l_2(x) = \frac{(x+4)(x+2)}{(0+4)(0+2)} = \frac{1}{8}(x^2 + 6x + 8)$$

$$\Rightarrow P(x) = 256 \times \frac{1}{8}(x^2 + 2x) + 16 \times \left[-\frac{1}{4}(x^2 + 4x)\right]$$

$$\boxed{P(x) = 28x^2 + 48x}$$

$$P(1) = 76$$

De la m façon (À faire).

$$|E^T_{n,e}| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} M_2$$

$$h_{max} = \sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a)M_2}}$$

d) Methode simpson composée

(à faire)

$$|E^S_{n,e}| \leq \frac{h^4(b-a)M_4}{2880}$$

$$\Rightarrow h_{max} = \left(\frac{2880\,\varepsilon}{(b-a)M_4}\right)^{1/4}$$

2/ Nbre minimal de sous-intervalles

$$h = \frac{b-a}{n} \iff n = \frac{b-a}{h}$$

$$n_{min} = \frac{b-a}{h_{max}}$$

Pour chq méthode on remplace par h_{max} correspondant.

3/ ~~App~~ (A faire).

Exo3) $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$

$$\{\overset{x_0}{0} ; \overset{x_1}{0{,}5} ; \overset{x_2}{1}\}$$

1°/ 1ère méthode:

D'après le cours ;

$$f'(x_0) \simeq \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2\times h}$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

D'après le cours: $f'(x_1) \simeq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h}$

$$f'(0{,}5) \simeq \frac{3}{4}$$

2e méthode: Il faut dériver le poly d'interpolat° de f construit à partir de $\{x_0, x_1, x_2\}$

$f'(x) = P_2'(x)$ (À faire)

2°/ L'erreur:

D'après le cours:

a) erreur de dérivation $(n=2)$

$$e_{diff,2} = \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_1) \qquad \xi \in [0,1]$$

$f(x) = x^2$

b) $x = x_1 = 0{,}5$

$$e_{diff,2} = -\frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1) \quad \{\xi_1 \in [0,1]$$

$$= 0$$

3°/ À faire.

TD 1

2) 3) 4) du th cv sont vérifiés.

5| Choix de x_0

1er cas: si $x_0 \in]\sqrt{a}; +\infty[$ on obtient $f(x_0) f''(x_0) = 2(x_0^2 - a) > 0$

• Alors d'après le th cs cv Newton, on a:

(x_n) cv vers l l'unique solt° de $f(x)=0$

c-à-d $f(l)=0 \iff l=\sqrt{a}$

2e cas: si $x_0 \in]0;\sqrt{a}[$

. On Mq $\forall n \geq 1$ $x_n \geq \sqrt{a}$

($\triangle$ $x_0 < \sqrt{a}$)

On a $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2-a}{2x_n} = \frac{(x_n-\sqrt{a})^2}{2x_n} + \sqrt{a}$

$\Rightarrow x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n-\sqrt{a})^2}{2x_n} \geq 0$ car

on montre facilement par récurrence que $x_n > 0$ $\forall n \geq 0$.

De plus, on mq $(x_n)_{n\geq 1}$ est ↘

En effet $x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n^2-a}{2x_n} \leq 0$ $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ est ↘

Par conséquent $(x_n)_{n\geq 1}$ est ↘ et minoré par $\sqrt{a}$

$\Rightarrow (x_n) \to l$ solt° de $f(x)=0$

3e cas: $x_0 = \sqrt{a} \Rightarrow$ évident

c/c $\forall x_0 \in]0;+\infty[$ $x_n \to l = \sqrt{a}$

Ex 2: (TD1) Méthode de la Corde

$\forall n \in \mathbb{N};\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{q}$

avec $q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

I / Représentation graphique

Soit (D) la droite qui passe par $(x_n, f(x_n))$ et de pente q alors

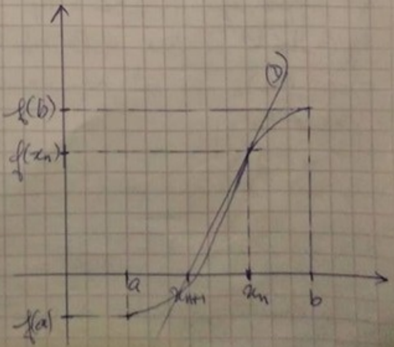
(D): $y = q(x - x_n) + f(x_n)$

(D) $\cap$ (OX), c-à-d $y=0$

$\iff q(x - x_n) + f(x_n) = 0$

$\iff x = x_n - \frac{f(x_n)}{q} = x_{n+1}$

Donc x_{n+1} est l'intersection de (D) avec (OX).



$$= \frac{11}{6}x^3 - \frac{31}{2}x^2 + \frac{119}{3}x - 27$$

Valeur approchée de $f(1,5)$:

$$f(1,5) \simeq P(1,5) = \frac{61}{16} \simeq 3,8125$$

3/-3/a/ Support $\{x_0, x_1\}$:

On cherche le polynôme d'interpolation en utilisant la forme de Newton.

Rappel:

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

Support $\{1,2\}$ $n = 1$

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0)$$

$$f[x_0] = f(x_0) = f(1) = -1$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = 6$$

d'où $P(x) = 6x - 7$

Remarque: On retrouve le même polynôme que dans (1) grâce à l'unicité du polynôme.

3-b/ Support $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$:

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

d'après 3-a/ $f[x_0] = -1$ et $f[x_0,x_1] = 6$

Calculons $f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = -3$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = -\frac{9}{2}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$

Calculons $f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$

$$= 1$$

D'où $f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{1+\frac{9}{2}}{4-1} = \dfrac{11}{6}$

d'où $P(x) = -1 + 6(x-1) + \left(-\frac{9}{2}\right)(x-1)(x-2) + \frac{11}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$

$$P(x) = -1 + 6x - 6 - \frac{9}{2}(x^2-3x+2) + \frac{11}{6}(x-1)(x^2-5x+6)$$

$$= \frac{11}{6}x^3 - \frac{31}{2}x^2 + \frac{119}{3}x - 27$$

Comparaison des deux méthodes et conclusion:

En utilisant les deux méthodes, on retrouve le même polynôme d'interpolation pour le même support. La méthode de Newton est plus avantageuse que celle de Lagrange car on peut réutiliser les coeff calculés pour un support si on ajoute à celui-ci d'autre point.

Exo2: On cherche $T_1(n)$ la complexité pour calculer:

$$\forall k \in \{0,\dots,n\} \quad f[x_0,x_1,\dots,x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)}$$

1°/ Soit T_k la complexité pour calculer $f[x_0,x_1,\dots,x_n]$ donc $T_1(n) = \sum_{k=0}^{n} T_k$

Calculons T_k:

Pour i fixé, on a dans $\dfrac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)}$

une division, $(k-1)$ produits et k différences.

points représentatif... Quelle sera sa valeur si le gaz étai[t] ... manière réversible

x_0/x_2 Tableau diff. divisées : $f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{16-256}{-2+4} = -120$

x_i	$f[x_i]$		
-4	256		
		-120	
-2	16		$+28$
		-8	
0	0		

$P(x) = 256 - 120(x+4) + 28(x+4)(x+2)$

$P(x) = 28x^2 + 48x$

$P(1) = 76$ et $P(3) = 396$

3/ Poly. Aitken :

x_i	$f(x_i)$	P_{ij}		$x_i - x$
-4	256			-7
-2	16	-584		-5
0	0	-192	392	-3

$$\begin{cases} P_{0k} = y_k \\ P_{(k+1),d} = \dfrac{(x_k - x)P_{kd}(x) - (x_d - x)P_{kk}(x)}{x_k - x_d} \end{cases}$$

$$P_{11} = \frac{(x_0 - x)\overset{y_1=16}{P_{01}}(x) - (x_1 - x)P_{00}(x)}{x_0 - x_1}$$

$$= \frac{(-4-3)\times 16 - (-2-3)\times 256}{-4+2} = -584$$

TD3

Ex1 : Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = x^2$

1/ D'après le cours :

$\rightarrow$ la méthode de rectangle :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq I_0^R = f(0)(1-0) = 0$$

$\rightarrow$ la méthode du pt milieu :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq I_0^M = f\left(\frac{1+0}{2}\right)(1-0) = \frac{1}{4}$$

$\rightarrow$ la méthode de Trapèze :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq I_1^T = \frac{f(0)+f(1)}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ la méthode de Simpson :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq I_2^S = \frac{(1-0)}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1+0}{2}\right) + f(1)\right) = \frac{1}{3}$$

2°/ D'après le cours, l'erreur est majorée :

a) Rectangle $|E^R| \leq \frac{(b-a)^2}{2} M_1 = 1$

avec $[a,b] = [0,1]$ et $M_1 = \max_{[0,1]} |f'(x)|$

b/ Point milieu $|E^M| \leq \frac{(1-0)^2}{24} M_2 = \frac{1}{12}$

avec $M_2 = \max_{[0,1]} |f''(x)|$

c/ Trapèze $|E^T| \leq \frac{(1-0)^3}{12} M_2 = \frac{1}{6}$

d/ Simpson $|E^S| \leq \frac{(1-0)^5}{2880} M_4 = 0$

avec $M_4 = \max_{[0,1]} |f^{(4)}(x)|$

Ex2 : $I = \int_a^b f(x)\,dx$

1°/ D'après le cours

a/ Méthode de rectangle composée :

I est approché par $I^R_{n,c}$

$$I^R_{n,c} = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx}_{\text{est approché par méthode de rectangle.}}$$

d'où $I^R_{n,c} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

et l'erreur composée (Rectangle)

$$|E^R_{n,c}| \leq \frac{h}{2}(b-a) M_1$$

$$\frac{h}{2}(b-a)M_1 \leq \varepsilon \iff h \leq \frac{2\varepsilon}{(b-a)M_1}$$

d'où $h_{max} = \frac{2\varepsilon}{(b-a)M_1}$

b/ Méthode du pt milieu

C'est analogue à (a)

$$|E^M_{n,c}| \leq \frac{h^2(b-a)}{24} M_2$$

d'où $h_{max} = \sqrt{\frac{24\varepsilon}{(b-a)M_2}}$