Exercice 1 On définit sur $\mathbb{R}_2[x]$ l'application bilinéaire symétrique

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_2[x]\times\mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \longmapsto & P(1)Q'(1)+Q(1)P'(1). \end{array}$$

Écrire la matrice de f dans la base canonique $(1,X,X^2)$. Cette application bilinéaire est-elle dégénérée ?

Exercice 2
Soit $m\in\mathbb{Z}$ un entier et posons $q_m:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ la forme quadratique suivante

$$q_m(x_1,x_2,x_3)=(m+1)x_1^2+(m+4)x_2^2+4x_3^2+2(m+1)x_1x_2+2mx_1x_3+2x_1x_3+8x_2x_3.$$

Notons aussi par f_m la forme polaire de q_m, et par $M(f_m)$ la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner explicitement la forme polaire f_m et la matrice $M(f_m)$.
2. Donner les valeurs de m pour lesquelles f_m définit un produit scalaire.
3. Donner les valeurs de m pour lesquelles q_m est dégénérée.
4. Donner toutes les valeurs possibles de la dimension du noyau $N(f_m)$.

Exercice 3
Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace Euclidien et $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E. Montrer que le rang de la matrice du produit scalaire $M(\langle,\rangle)_{e_i}$ est égal à n.

1)

CC 2017 : Algèbre

Exo 1 :

Soit

$$f : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(P, Q) \longmapsto P(1)Q'(1) + Q(1)P'(1)$$

•/ La matrice de f dans la $B_c = (1, X, X^2)$

on a : $$M_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(X,1) & f(X^2,1) \\ f(1,X) & f(X,X) & f(X^2,X) \\ f(1,X^2) & f(X,X^2) & f(X^2,X^2) \end{pmatrix}$$

rq : $f(1,1) = 1.0 + 1.0 = 0$

$f(X,X) = 1.1 + 1.1 = 2$

$f(X^2,X^2) = 1.2 + 1.2 = 4$

$f(1,X) = f(X,1) = 1.1 + 1.0 = 1$

$f(1,X^2) = f(X^2,1) = 1.2 + 1.0 = 2$

$f(X,X^2) = f(X^2,X) = 1.2 + 1.1 = 3$

d'où

$$M_{B_c}(f) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} 1 & X & X^2 \end{array}$$
$$M_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

•/ f est-elle dégénérée ?

on a : $$\det(M_{B_c}(f)) = \begin{vmatrix} \overset{\oplus}{0} & \overset{\ominus}{1} & \overset{\oplus}{2} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \det(M_{B_c}(f)) = 2 - 2 = 0$

d'où f est dégénérée

Exo 2 :

Soit

$q_m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$: forme quadratique tq

$$q(x_1,x_2,x_3) = (m+1)x_1^2 + (m+4)x_3^2 + 4x_2^2 + 2(m+1)x_1x_2 + 2m\,x_1x_3 + 2x_1x_3 + 8x_3x_2$$

•1/ • La forme polaire f_m de q_m :

Soit $x = (x_1,x_2,x_3)$ et $y = (y_1,y_2,y_3)$

on a :

$$f_m(x,y) = (m+1)x_1y_1 + (m+4)x_3y_3 + 4x_2y_2 + (m+1)(x_1y_2 + y_1x_2) + (m+1)(x_1y_3 + y_1x_3) + 4(x_3y_2 + y_3x_2)$$

• La matrice $M(f_m)$

$$M(f_m) = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$
$$M(f_m) = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 & m+1 \\ m+1 & m+4 & 4 \\ m+1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}$$

•2/ Les valeurs de m pour lesquelles $f_m \to$ P.S

La forme polaire f_m est bilinéaire symétrique

Vérifions pour quelle valeur de m, f_m est définie positive.

alors ; on a : $f_m(x,x) = q_m(x)$

$$\Rightarrow f_m(x,x) = (m+1)x_1^2 + (m+4)x_3^2 + 4x_2^2 + 2(m+1)x_1x_2 + 2(m+1)x_1x_3 + 8x_3x_2$$

d'où

$f_m(x,x) = (m+1)x_1^2 + 2(m+1)x_1x_2 + 2(m+1)x_1x_3$
$+ (m+4)x_3^2 + 4x_2^2 + 8x_3x_2$

$= (m+1)(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3)$
$+ mx_3^2 + 4(x_3^2 + 2x_3x_2 + x_2^2)$

$= (m+1)\left[(x_1+x_2+x_3)^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2\right]$
$+ mx_3^2 + 4(x_3+x_2)^2$

$= (m+1)\left[(x_1+x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2\right]$
$+ mx_3^2 + 4(x_2+x_3)^2$

$f(x) = (m+1)(x_1+x_2+x_3)^2 + (3-m)(x_2+x_3)^2$
$+ mx_3^2$

on sait que :
q est définie positive $\Leftrightarrow$ $\operatorname{sing} q = (n,0)$

d'où $f_m(x,x)$ est définie positive pour

$m+1 > 0$ et $3-m > 0$ et $m > 0$; $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $m > -1$ et $m < 3$ et $m > 0$; $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $m \in \left]0, 3\right[$ $\Rightarrow$ $m = 1$ ou $m = 2$

Ainsi pour $m = 1$ ou $m = 2$; on a
$\operatorname{sing} f_{m=\{1,2\}}(x,x) = (3,0)$; d'où $f_{m=\{1,2\}}(x,x)$ est
un produit scalaire

3/ les valeurs de m pour que q_m soit dégénéré

on sait que :
q est non dégénérée $\Leftrightarrow$ $\operatorname{sing} q = (p, n-p)$
avec p = nbr des $(+)$; $n-p$ = nbr des $(-)$

Donc, pour que q_m soit non dégénéré nous devons avoir : $\operatorname{sing} q = \begin{cases}(3,0)\\(2,1)\\(1,2)\\(0,3)\end{cases}$

D'où pour que q_m soit dégénéré nous devons avoir :

$$\operatorname{sing} q \neq \begin{cases}(3,0)\\(2,1)\\(1,2)\\(0,3)\end{cases}$$

Pour que q_m soit dégénéré ; nous devons avoir : $\det M_{B_c}(q) = \det M_{B_c}(f) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} m+1 & m+1 & m+1 \\ m+1 & m+4 & 4 \\ m+1 & 4 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -3 & m-3 \\ m+1 & m+4 & 4 \\ m+1 & 4 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1' = L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & m-3 & m-3 \\ 0 & 0 & -m \\ m+1 & 4 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1' \\ L_2' = L_2 - L_3 \\ L_3 \end{matrix} = 0$$

$$\Rightarrow (m+1) \begin{vmatrix} m-3 & m-3 \\ 0 & -m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow m(m+1)(m-3) = 0$$

3)

$\Rightarrow m = 0$ ou $m = -1$ ou $m = 3$

d'où q_m est dégénéré pour $m = 0$ ou $m = -1$ ou $m = 3$

4) Ttes les valeurs possible pour $\dim N(f_m)$

Th de rang : $\dim E = rg f + \dim N(f)$

d'où $\dim N(f) = \dim E - rg f$

$\dim N(f) = 3 - rg f$

- Calculons le $rg f$ selon m :

on a d'après Qst 2 :

$f_m(x, x) = (m+1)(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (3-m)(x_2 + x_3)^2 + m x_3^2$

- pour $m \neq \{-1, 3, 0\}$

on a $rg f = 3$

$\Rightarrow \dim N(f) = 0$

- pour $(m = -1)$ ou $(m = 3)$ ou $(m = 0)$

on a $rg f = 2$

$\Rightarrow \dim N(f) = 1$

EX 03 :

Soit $(E, \langle . \rangle)$ un e.e et $\{e_1, \dots, e_n\}$ sa base

- Mq $rg(M(\langle . \rangle)) = n$

Soit $f : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longrightarrow \langle . \rangle \end{array}$; $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

définit un produit scalaire et $\dim E = n$

on a $rg(M\langle \rangle) = rg(f)$

alors, comme f définit un produit scalaire, f est définie positive, d'où

$sing\, f = (n, 0)$

$\Rightarrow rg f = n$

d'où $rg(M(\langle . \rangle)) = n$

CQFD

Fin