Année 2017-2018 **AP3**

Durée: 1 h 30 min **Contrôle d'Algèbre 3**

Exercice 1

Montrer que $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, on a

$$(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n)^2 \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right).$$

Étudier le cas de l'égalité.

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$. Notons $\{e_1', e_2', e_3'\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application bilinéaire symétrique définie par

$$g(x,y) = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 2(x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + x_3 y_3;$$

où $x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{3} y_i e_i \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que g est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice $M(g)_{e_i}$ de g relativement à la base $\{e_i\}$.
3. Posons $x = \sum_{i=1}^{3} x_i' e_i'$ et $y = \sum_{i=1}^{3} y_i' e_i' \in \mathbb{R}^3$. Écrire l'expression de $g(x,y)$ en fonction de $x_1', x_2', x_3', y_1', y_2'$ et y_3'.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.

1. On définit l'application $f : E \times E \to \mathbb{R}$ par
$$f(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt.$$
Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2. Posons $H = Vect(1, X, X^2)$. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt sur $\{1, X, X^2\}$ et trouver une base orthonormée de H.
3. Écrire la matrice de la projection orthogonale $p_H : E \to E$ sur H dans la base $\{1, X, X^2, X^3\}$.
4. Déterminer les valeurs de a, b et $c \in \mathbb{R}$ pour que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t}\,dt$$
soit minimale.

CC - 2015/2016

Exercice 3 :

soit $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$. Notons $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base
$\det \neq 0$!!!

Soit $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longrightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 3(x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + x_3 y_3$

où $x = \sum_{i=1}^{3} x_i e'_i$ et $y = \sum_{i=1}^{3} y_i e'_i \in \mathbb{R}^3$

1/ on mq g est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$

symétrie : $g(x, y) = 2(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 3(x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + x_3 y_3$

$= 2(y_1 + y_2 + y_3)(x_1 + x_2 + x_3) + 3(y_2 + y_3)(x_2 + x_3) + y_3 x_3$

$2(2)(2) + 3$ ✓

Alors g est symétrique

bilinéaire :

soit $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ $\lambda \in \mathbb{R}$ ✓

$g(x + \lambda y, z) = g\big((x_1, x_2, x_3) + \lambda(y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)\big)$

$= g\big((x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3), (z_1, z_2, z_3)\big)$

~~$= 2(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3)(z_1, z_2, y_3$~~

$= 2(x_1 + \lambda y_1 + x_2 + \lambda y_2 + x_3 + \lambda y_3)(z_1 + z_2 + z_3)$
$+ 3(x_2 + \lambda y_2 + x_3 + \lambda y_3)(z_2 + z_3)$
$+ (x_3 + \lambda y_3) z_3$

$= 2(x_1 + x_2 + x_3)(z_1 + z_2 + z_3) + 3(x_2 + x_3)(z_2 + z_3)$
$+ x_3 z_3 + \lambda\big[2(y_1 + y_2 + y_3)(z_1 + z_2 + z_3) + 3(y_2 + y_3)$
$(z_2 + z_3) + y_3 z_3\big]$

$= g(x, z) + \lambda g(y, z)$

positif $\quad x=(x_1,x_2,x_3) \quad y=(y_1,y_2,y_3)$

$$g(x,x) = 2(x_1+x_2+x_3)^2+3(x_2+x_3)^2 + x_3^2 \geqslant 0$$

défini positif

$$g(x,x)=0 \iff 2(x_1+x_2+x_3)^2+3(x_2+x_3)^2+x_3^2=0$$

$$\iff \begin{cases} (x_1+x_2+x_3)^2=0 \\ (x_2+x_3)^2=0 \\ x_3^3=0 \end{cases}$$

$$\iff x=(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)=0_{\mathbb{R}^3}$$

Alors g est un produit scalaire

2/ on détermine la matrice $M(g)_{e_i'}$ de g relativement à la base $\{e_i'\}$

$$M(g)_{e_i'} = \begin{pmatrix} g(e_1',e_1') & g(e_1',e_2') & g(e_1',e_3') \\ g(e_2',e_1') & g(e_2',e_2') & g(e_2',e_3') \\ g(e_3',e_1') & g(e_3',e_2') & g(e_3',e_3') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 14 \\ 0 & 3 & 6 \\ 14 & 6 & 34 \end{pmatrix}$$

3/ Déterminons $M_g(e_i) \rightarrow P_{e_i'\to e_i}$

$$M_g(e_i) = {}^tP_{e_i'\to e_i} M_g(e_i') P_{e_i\to e_i'}$$

$$e_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 - e_2 + e_3$$

$$e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2$$

$$e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_3$$

$$\begin{cases} e_1' = 2e_1 - e_2 + e_3 & (1) \\ e_2' = -e_1 + e_2 & (2) \\ e_3' = e_1 + 2e_3 & (3) \end{cases} \Rightarrow \cancel{e_1'+e_2' = e_2+2e_3 \quad (1)+(3)} \quad \cancel{e_1'-2e_3' = -3e_3 \quad (1)+2(3)}$$

$$\Rightarrow \boxed{e_3 = -\frac{1}{3} e_1' + \frac{2}{3} e_3'}$$

$$e_1 = e_3' - 2e_3$$
$$= e_3' - \frac{2}{3} e_1' - \frac{4}{3} e_3'$$

$$\boxed{e_1 = -\frac{2}{3} e_1' - \frac{1}{3} e_3'}$$

$$(2) \Rightarrow e_2 = e_2' + e_1$$
$$= e_2' - \frac{2}{3} e_1' - \frac{1}{3} e_3'$$

$$\boxed{e_2 = -\frac{2}{3} e_1' + e_2' - \frac{1}{3} e_3'}$$

$$M_{e_i}(g) = {}^tP\, M_{e_i'}(g)\, P_{e_i' \to e_i}$$

$$M_{e_i'}(g) = {}^tP\, M_{e_i}(g)\, P_{e_i \to e_i'}$$

$$P_e = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc|c} e_1' & e_2' & e_3' & \\ \end{array}$$

$$P_e = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

$$(2) + (3) \Rightarrow e_2' + e_3' = e_2 + 2e_3 \qquad A$$
$$(1) - 2(3) \Rightarrow e_1' - 2e_3' = -e_2 - 3e_3 \qquad B$$
$$(1) + (2) \Rightarrow e_1' + e_2' = e_1 + e_3 \qquad C$$

$$A + B \Rightarrow -e_3 = e_1' + e_2' - e_3' \Rightarrow \boxed{e_3 = -e_1' - e_2' + e_3'}$$

$$C \Rightarrow e_1 = e_1' + e_2' - e_3 \Rightarrow \boxed{e_1 = 2e_1' + 2e_2' - e_3'}$$

$$A \Rightarrow e_2 = e_2' + e_3' + 2e_1' + 2e_2' - 2e_3' \Rightarrow \boxed{e_2 = 2e_1' + 3e_2' - e_3'}$$

$$P_{e_i' \to e_i} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array}$$

$${}^tP_{e_i' \to e_i} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(g)_{e_i} = {}^tP_{e_i' \to e_i}\, M_{e_i'}(g)\, P_{e_i' \to e_i} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M_{g\{e_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(e_1, e_1) & g(e_1, e_2) & g(e_1, e_3) \\ g(e_2, e_1) & g(e_2, e_2) & g(e_2, e_3) \\ g(e_3, e_1) & g(e_3, e_2) & g(e_3, e_3) \end{pmatrix}$$

$$g(x', y') = \sum_{i=1}^{3} x'_i \, y'_j \, g(e'_i, e'_j)$$

$$= x'_1 y'_1 g(e'_1, e'_2) + x'_1 y'_2 g(e'_1, e'_2) + x'_1 y'_3 g(e'_1, e'_3)$$
$$+ x'_2 y'_1 g(e'_2, e'_2) + x'_2 y'_2 g(e'_2, e'_2) + x'_2 y'_3 g(e'_2, e'_3)$$
$$+ x'_3 y'_1 g(e'_3, e'_1) + x'_3 y'_2 g(e'_3, e'_2) + x'_3 y'_3 g(e'_3, e'_3)$$

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(e_i, e_j) \, x_i y_j$$

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g(e'_i, e'_j) \, x'_i y'_j$$

$$= g(e_1, e_1) x'_1 y'_1 + g(e_1, e_2) x'_1 y'_2$$

$$\begin{matrix} 2x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{matrix}$$

Exercice 1

soit $n \geq 1$ Pour tous polynômes P et Q ds $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 t\, P(t)\, Q(t)\, dt$$

1/ Mq c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

symétrie $\quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 t\, Q(t)\, P(t)\, dt$

$$= \langle Q, P \rangle$$

bilinéaire

soit $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle P + \lambda Q, R \rangle = \int_0^1 t (P + \lambda Q)(t)\, R(t)$$

$$= \int_0^1 t P(t) R(t) dt + \lambda \int_0^1 t\, Q(t) . R(t)$$

$$= \langle P, R \rangle + \lambda \langle Q, R \rangle$$

positive

$$\langle P, P \rangle = \int_0^1 t P^2(t)\, dt \geq 0$$

définie positive

$$\langle P, P \rangle = 0 \iff \int_0^1 t P^2(t)\, dt = 0$$

$$\iff P^2(t) = 0$$

$$\iff P = 0$$

$\langle P, Q \rangle \leq \|Q\| . \|P\|$ cas dc

2) a/ Mq $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\left(\int_0^1 t^n P(t)\, dt \right)^2 \leq \frac{1}{2n} \int_0^1 t P^2(t)\, dt$$

$$\int_0^1 t^n P(t) dt = \underbrace{\int_0^1 t\, t^{n-1} P(t)\, dt}_{|\langle P, Q \rangle|} \leq \|Q\|\ \|P\|$$

$$\leq \sqrt{\int_0^1 t (t^{n-1})^2 dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 t P^2(t)\, dt}$$

$$\leq \sqrt{\int_0^1 t^{2n-1}} \cdot \sqrt{\int_0^1 t P^2(t)\, dt}$$

$$\leq \sqrt{\left[\frac{1}{2n} t^{2n}\right]_0^1} \cdot \sqrt{\int_0^1 t P^2(t)\, dt}$$

$$\boxed{\left(\int_0^1 t^n P(t) dt \right) \leq \frac{1}{2n} \int_0^1 t P^2(t)\, dt}$$

b/ cas d'égalité

$P = \lambda Q$ colinéaires

Remarque

⚠ les fonctions $f = cte$

les vecteurs / les polynomes $P_1 = \lambda Q_1$

3/ on determine la base orthonormale du sous-espace $F = \mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 t\, P(t) Q(t)\, dt$

on applique Gram shmidt sur $(1, X)$

on pose $\varepsilon_1 = 1$

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = X + \lambda \varepsilon_1 \\ \langle \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\langle \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle = \langle X + \lambda \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle X, \varepsilon_1 \rangle + \lambda \|\varepsilon_1\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-\langle X, \varepsilon_1 \rangle}{\|\varepsilon_1\|^2}$$

$$\begin{cases} \langle X, \varepsilon_1 \rangle = \langle X, 1 \rangle = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}[x^3]_0^1 = 1/3 \\ \|\varepsilon_1\|^2 = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 x\, dt = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-1/3}{1/2} = -2/3$$

Alors $\boxed{\varepsilon_2 = X - 2/3}$

$B = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1, X - 2/3)$ base orthogonale de F

$\|\varepsilon_1\| = \sqrt{\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle} = \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\|\varepsilon_2\| = \sqrt{\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle} = \sqrt{\langle X - \frac{2}{3}, X - \frac{2}{3} \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x(x - \frac{2}{3})^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{9}x\, dx}$

$= \sqrt{\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{18}x^2\right]_0^1} = \sqrt{1/36} = \frac{1}{6}$

D'où $B = \left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \frac{\varepsilon_2}{\|\varepsilon_2\|}\right) = (\sqrt{2}, 6X - 4)$

base orthonormée de F

4/ Determiner le projeté orthogonal $P_F(X^2)$ de X^2 sur F

$$P_F(X^2) = \langle X^2, \sqrt{2} \rangle \sqrt{2} + \langle X^2, 6X-4 \rangle 6X-4$$

- $\langle X^2, \sqrt{2} \rangle = \int_0^1 X^3 \sqrt{2}\, dX = \sqrt{2}\left[\frac{1}{4}X^4\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
- $\langle X^2, 6X-4 \rangle = \int_0^1 X(X^3)(6X-4)\, dX = \int_0^1 6X^4 - 4X^3\, dX = 6\left[\frac{1}{5}X^5\right]_0^1 - 4\left[\frac{1}{4}X^4\right]_0^1$

$$= \frac{6}{5} - 1 = 1/5$$

$$\Rightarrow P_F(X^2) = \frac{1}{2} + \frac{6X}{5} - \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow P_F(X^2) = \frac{6X}{5} - 3/10$$

5/ calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 t(t^2 - at - b)^2\, dt = \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 t\left(t^2 - \frac{(at+b)}{P(X)}\right)^2$

$$d(X^2, P) = \|X^2 - P(X^2)\| = \|X^2 - \frac{6X}{5} - 3/10\|$$

$$= \int_0^1 x\left(x^2 - \frac{6}{5}x + 3/10\right)^2 dX$$

$$= \underline{\qquad\qquad}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_4 = v_4 + \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \lambda_3\varepsilon_3 \\ \langle \varepsilon_4, \varepsilon_1\rangle = 0 \quad \langle \varepsilon_4, \varepsilon_2\rangle = 0 \quad \langle \varepsilon_4, \varepsilon_3\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -\frac{\langle v_4, \varepsilon_1\rangle}{\|\varepsilon_1\|^2} = -\frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\langle v_4, \varepsilon_2\rangle}{\|\varepsilon_2\|^2} = -\frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\lambda_3 = -\frac{\langle v_4, \varepsilon_3\rangle}{\|\varepsilon_3\|^2} = -\frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\2/3\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{4/3} = \frac{-\left(2/3 - 2/3\right)}{4/3} = 0$$

$$\varepsilon_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 - 4/3 \\ -1 - 1/3 + 4/3 \\ 2 - 1/3 - 4/3 \end{pmatrix}$$

$4/3 - 1$

$-5/3 + 2$

$$\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad e_3 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad e_4 = \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\0\\1/3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

- $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

  $\left(\|e_1\| = \sqrt{\langle e_1, e_1\rangle} = \sqrt{3}\right)$

- $\varepsilon_2 = \dfrac{e_2}{\|e_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$

  $\|e_2\| = \sqrt{3}$

- $\varepsilon_3 = \dfrac{e_3}{\|e_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

  $\|e_3\| = \dfrac{2}{3}\sqrt{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

- $\varepsilon_4 = \dfrac{e_4}{\|e_4\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

  $\|e_4\| = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

3/ Posons $F = \text{vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale P_F sur F

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Posons $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$$P_F(X) = \langle X, \varepsilon_1\rangle \varepsilon_1 + \langle X, \varepsilon_3\rangle \cdot \varepsilon_3$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}(x_1 + x_3 + x_4)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}(-x_1 + x_2 + x_3)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}x_1 + x_3 + x_4\\0\\x_1 + x_3 + x_4\\x_1 + x_3 + x_4\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}x_1 - x_2 - x_3\\-x_1 + x_2 + x_3\\-x_1 + x_2 + x_3\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x_1 - x_2 + x_4\\-x_1 + x_2 + x_3\\x_2 + 2x_3 + x_4\\x_1 + x_3 + x_4\end{pmatrix}$$

$$P_F(e_1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad P_F(e_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \quad P_F(e_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} \quad P_4(e_4) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$M(P_F) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 1\\1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

4/ Déduire les valeurs $\inf_{u \in F} \|u - w\|$ et $\inf_{u \in F^\perp} \|u - w\|$ $\qquad w = \begin{pmatrix}7\\8\\3\\10\end{pmatrix}$

$$\inf_{u \in F} \|u - w\| = \|w - P_F(w)\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix}7\\8\\3\\10\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}16\\10\\36\\26\end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix}5/3\\14/3\\-3\\4/3\end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{3}\left\| \begin{pmatrix}5\\14\\-3\\4\end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{318}$$

$$\inf_{u \in F^\perp} \|u - w\| = \|w - p_{F^\perp}(w)\| = \|p_F(w)\| = \left\| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 36 \\ 26 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2\sqrt{582}}{3}$$

car $w = p_F(w) + p_{F^\perp}(w)$

5/ Donner la matrice ds la base canonique de la symétrie orthogonal s_F par rapport à F

$$s_F(w) = 2\, p_F(w) - w$$

$$\Rightarrow \quad M(s_F) = 2\, M(p_F) - Id$$

$$M(s_F) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$