TD2

Exercice 1 :

Determiner le rang et le noyau de la forme bilinéaire suivante :

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4))$$
$$= 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_4y_4 + x_1y_4 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + x_4y_1 + x_2y_4 + x_4y_2 + x_3y_4 + x_4y_3$$

$$M_{e_i}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• Le noyau :

Soit $\lambda = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ tq $\lambda \in N(f)$

$$M_{e_i}(f) \cdot \lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y + t = 0 \\ 4x + y + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{N(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

• Le rang :

$\dim E = rg f + \dim N(f)$

$\boxed{rg f = 4}$

Exercice 2 :

Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ muni de $Q : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$
$(M, N) \longrightarrow Tr(MN - NM)$

1) Mq Q est bilinéaire et dire si c'est un produit scalaire

2) Calculer la matrice de Q et dire si elle est dégénerée ou pas ?

Exercice 3 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vect.

* On note $S_2(E)$ l'espace des applications bilinéaires symétriques de $E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$

* On note $A_2(E)$ l'espace des applications bilin antisymétriques de $E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$

* On note $\mathcal{L}_2(E)$ l'espace des applications bilinéaires $E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$

$g : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$

$\alpha f + g : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$

$(\alpha f + g)(x+y, z) = \alpha f(x+y, z) + g(x+y, z)$

$= \alpha f(x, z) + g(x, y)$

Mq $\mathcal{L}_2(E) = S_2(E) \oplus A_2(E)$

$$f(x,y) = \underbrace{\frac{f(x,y)+f(y,x)}{2}}_{g_1} + \underbrace{\frac{f(x,y)-f(y,x)}{2}}_{g_2}$$

$g_1 : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$; $g_2 : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$

$(x,y) \longrightarrow \frac{f(x,y)+f(y,x)}{2}$; $(x,y) \longrightarrow \frac{f(x,y)-f(y,x)}{2}$

Exercice 4 :

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \rightarrow y^2 - 2xz$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Trouver $M_{v_i}(q)$

2) Trouver $M_{e_i}(q)$,

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$

$[q(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) - q(x_1, x_2, x_3) - q(y_1, y_2, y_3)]$

$x_2 y_2 - x_1 y_3 - x_3 y_1$

$M_{v_i}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

on sait que $M_{e_i}(q) = {}^tP_{\{v_i\} \to \{e_i\}} \times M_{v_i}(q) \times P_{\{v_i\} \to \{e_i\}}$

on a $P_{\{v_i\} \to \{e_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc :

${}^tP_{\{v_i\} \to \{e_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$[\text{illegible}] \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

$q : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$

$q(x) = 3x_1^2 - 2(1+i)x_2^2 - 2i\, x_1 x_2$
$\quad + x_1 x_3 + (5-i)\, x_2 x_3$

Ecrire la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$

$q(x) = 3x_1^2 - 2(1+i)x_2^2 - 2i\, x_1 x_2 + x_1 x_3 (5-i) x_2 x_3$

$f = 3x_1 y_1 - 2(1+i)x_2 y_2 - i x_1 y_2 - i x_2 y_1 + \frac{1}{2} x_1 y_3$
$\quad + \frac{1}{2} x_1 y_3 + \frac{1}{2} x_3 y_1 + \frac{(5-i)}{2} x_2 y_3 + \frac{(5-i)}{2} x_3 y_2$

$$M_{ei} = \begin{pmatrix} 3 & -i & 1/2 \\ -i & -2(i+1) & \frac{5-i}{2} \\ 1/2 & \frac{5-i}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 :

q forme quadratique et s sa forme polaire Mq

$$S(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right)$$

$q(x+y) - q(x-y) = S(x+y, x+y) - S(x-y, x-y)$
$\quad = S(x,x) + 2S(x,y) + S(y,y) - S(x,x) + 2S(x,y) - S(y,y)$
$\quad = 4\, S(x,y)$

donc : $\boxed{S(x,y) = \frac{1}{4}\left[q(x+y) - q(x-y)\right]}$

Exercice 7 :

Soit q une forme quadratique non dégénéré et s sa forme polaire

Mq : $\forall z \in E,\ S(x,z) = S(y,z) \Rightarrow x = y$

On a $S(x,z) = S(y,z)$

$\Rightarrow \begin{cases} S(x-y, z) = 0 \\ \forall z \in E \end{cases} \rightarrow x - y \in N(s) = \{0\}$ car s est non dégénerée

$\Rightarrow x = y$

Exercice 8 :

$Q : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad P, Q \longrightarrow P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$

Dire si Q est dégenerée ? Trouver son noyau.

Soit $P = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ et $Q = b_1 + b_2 x + b_3 x^2$

$Q(P,Q) = a_1 b_1 + (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$
$\quad = 2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3$
$\quad + a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3$

$$M_{ei}(Q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det M_{ei}(Q) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ donc $\boxed{Q \text{ est degenerée}}$

on a $M_{ei}(Q)\lambda = 0$ soit $\lambda = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_3 = -a_2 \end{cases}$$

alors $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc

$$\boxed{N(Q) = \mathrm{Vect}(u - u^3)}$$

Exercice 9.

1) $f_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \longrightarrow x_1 y_1 + 13 y_2 x_2 + 6 x_3 y_3 - 2x_1 y_2$$
$$- 2x_2 y_1 - y_1 x_3 - x_1 y_3 - x_2 y_3 - x_3 y_2$$

Est ce que cette forme bilinéaire, symétrique produit scalaire ?

2) $f_4 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \longrightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2x_3 y_3 + x_1 y_2$$
$$+ x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2$$

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2 x_3$$
$$= x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2 x_3$$
$$= (x_1 + x_2)^2 + 2\left(x_3^2 + 2x_3 \cdot \frac{x_2}{2} + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2\right) - \frac{x_2^2}{2}$$
$$= (x_1 + x_2)^2 + 2\left(x_3 + \frac{x_2}{2}\right) - \frac{1}{2} x_2^2$$

Exercice 10.

$b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \longrightarrow 2x_1 V_1 + 4x_1 V_2 + 4x_2 V_1 - x_2 V_2 + 3x_3 V_3$$

1) Ecrire la forme quadratique q associé à b.

2) Ecrire la matrice M(q).

3) b est-elle definie positive ?

1) La forme quadratique : $2U_1^2 - U_2^2 + 3U_3^2 + 8U_1U_2$

2) La matrice $M(q) : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3) Verifions si b est un produit scalaire.

$$b : 2U_1^2 + 8V_1 V_2 - V_2^2 + 3V_3^2$$
$$= 2(U_1^2 + 4U_1 U_2) - V_2^2 + 3V_3^2$$
$$= 2(U_1^2 + 4U_1 U_2 + 4U_2^2) - 8U_2^2 - U_2^2 + 3U_3^2$$
$$= 2(U_1 + 2U_2)^2 - 9U_2^2 + 3U_3^2 \quad (3,0) \neq (2,1)$$

donc b n'est pas un produit scalaire car elle n'est pas def $\oplus$

Exercice 12:

Determiner une base orthogonale pour.

1) $g(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$

$q(x) = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 6x_2x_3$

$= (x_1 + x_2)^2 + 3(x_1^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2) + 9x_3^2$

$= (x_1 + x_2)^2 + 3(x_2 + x_3)^2 - 6x_3^2$

Alors $\ell_1(x) = x_1 + x_2$

$P_2(x) = x_2 + x_3 \quad , (3,0)$

$P_3(x) = x_3$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}\, {}^t(P')$

avec $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

et $\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc la base orthogonal

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

2) $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 10x_2x_3$

Exercice 12 :

Déterminer une base orthogonale pour.

1) $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$

$q(x) = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 6x_2x_3$

$= (x_1 + x_2)^2 + 3(x_1^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2) + 9x_3^2$

$= (x_1 + x_2)^2 + 3(x_2 + x_3)^2 - 6x_3^2$

Alors $\ell_1(x) = x_1 + x_2$

$\ell_2(x) = x_2 + x_3$, $(3,0)$

$\ell_3(x) = x_3$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1} = \frac{1}{\det P}\, {}^t(P')$

avec $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

et $\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc la base orthogonale

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

2) $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 10x_2x_3$

Exercice 14 :

$$q : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longrightarrow \int_0^1 P(u)\,P''(u)\,du$$

determiner son rang, sa signature décomp

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tq $P(X) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$

On a $P'(X) = a_1 + 2a_2 X \Rightarrow P''(X) = 2a_2$

$Q(P) = \int_0^1 (a_0 + a_1 u + a_2 u^2)\, 2a_2\, du$

$= \frac{2}{3} a_2^2 + a_1 a_2 + 2a_0 a_2$

$= \frac{2}{3}\left(a_2 + \frac{3}{2}a_0 + \frac{3}{4}a_1\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}a_0 + \frac{3}{4}a_1\right)^2$

donc : $\mathrm{sign}(Q) = (1,1)$

$\varphi(P,Q) = \frac{2}{3}a_2 b_2 + \frac{a_1 b_2}{2} + \frac{a_2 b_1}{2} + a_0 b_2 + a_2 b_0$

$M(Q) = M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$

$P \in N(Q) \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{2}{3}a_2 = 0 \\ a_0 = -\frac{1}{2}a_1 \end{cases}$

donc $P = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{2} \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Q : \mathbb{R}_2[X] = E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \longrightarrow \frac{2}{3}a_2^2 + a_1 a_2 + 2a_0 a_2$$

$$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a_0, a_1, a_2), (b_0, b_1, b_2)$$

Exercice 15 :

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longrightarrow xy + yz + zx$$

on pose $q(u) = u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_1 u_3$

$= (u_1 + u_3)(u_2 + u_3) - u_3^2$

$= \frac{(u_1 + u_3 + u_2 + u_3)^2 - (u_1 + u_3 - (u_2 + u_3))^2}{4} - u_3^2$

$= \frac{(u_1 + u_2 + 2u_3)^2}{4} - \frac{(u_1 - u_2)^2}{4} - u_3^2$

Donc $\mathrm{sign}(1,2)$