Année 2016-2017
Durée: 1 h 30

Contrôle d'Algèbre 3 AP3

Question de cours

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension n et $\{e_1,\ldots,e_n\}$ une base de E. Pour tout entier naturel i, tel que $1 \leq i \leq n$, définissons l'application

$$\begin{array}{rccc} e_i^*: & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j & \mapsto & x_i. \end{array}$$

Montrer que $\{e_1^*,\ldots,e_n^*\}$ est une base de l'espace dual E^*.

Exercice 1

Soit la forme quadratique suivante $q : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$q(x,y,z,t,s) = xy - xt + yz - yt + ys + zt - zs + 2st.$$

1. Effectuer une réduction de Gauss et déterminer le noyau, le rang et la signature de q.
2. Soit $F = vect\left\{ \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$. Trouver une base de $F^\perp$.

Exercice 2

Soit $m \in \mathbb{Z}$ un entier et posons $q_m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique suivante

$$q_m(x_1,x_2,x_3) = (m+1)x_1^2 + 2mx_2^2 + (4m+1)x_3^2 - 2(m+1)x_1x_2 + 2(m+1)x_1x_3 + 2(m-3)x_2x_3.$$

Notons aussi par f_m la forme polaire de q_m, et par $M(f_m)$ la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner explicitement la forme polaire f_m et la matrice $M(f_m)$.
2. Donner les valeurs de m pour lesquelles f_m définit un produit scalaire.
3. Donner les valeurs de m pour lesquelles q_m est dégénérée. $\neq$ ~~non~~ définie positive
4. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la dimension du noyau $N(f_m)$ ne peut être égale à 2.

$m+1=0$
$m+1=0$
$m-3=0$
$m=-1$

CC 2017 : ALGèbre 3. (1)

Question de cours :

Mq $\{e_1^*, \dots e_n^*\}$ est un base duale de E^*.

* e_i^* est une forme lineaire ??

soit $y, x \in E$. $\lambda \in \mathbb{K}$. $x = \sum x_i e_i$, $\sum_i^n y_i e_i$

$e_i^*(x + \lambda y) = e_i^*(x_1 + \lambda y_1, \dots \dots x_n + \lambda y_n)$

$= x_i + \lambda y_i$

$= e_i^*(x) + \lambda e_i^*(y)$.

alors e_i^* est un forme lineaire. $e_i^* \in E^*$.

* $\{e_i^*\}$ est un sev de E^*. $(e_i^*, e_j^*) \in E^*$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{K}$

$x, y \in E$.

$(e_i^* + \lambda e_j^*)(x + \alpha y) = \underbrace{e_i^*}_{\in E^*}(x + \alpha y) + \lambda \underbrace{e_j^*}_{\in E^*}(x + \alpha y)$

donc $(e_i^* + \lambda e_j^*) \in E^*$.

* $\{e_1^*, \dots e_n^*)$ est libre : $x \in E$

soit $\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0$

$\lambda_1 e_1^*(x) + \dots + \lambda_n e_n^*(x) = 0$

a-t-on $\lambda_i = 0$.

$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$

prend $x_1 = 1$, et $x_2 = \dots = x_n = 0$

$\lambda_1 = 0$

et ainsi de suite on trouve $\lambda_i = 0$ $i = 1 \dots n$

alors $\{e_1^*, \dots e_n^*\}$ est une famille libre.

$*$ est elle génératrice :

$x \in E$. $f \in E^*$. $f : E \to \mathbb{K}$.

$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, x_i$

$= \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i^*$.

alors la famille est génératrice.

C/C : $\{e_1^*, \dots e_n^*\}$ est une famille de n'élément, génératrice, libre, de cardinal n, et $\subset E^*$, alors c'est une Base de E^*.

Exercice 1 :

$q(x,y,z,t,s) = xy - xt + yz - yt + ys + zt - zs + 2st$

$= \cancel{xy + x(-t)}\ \cancel{+ y(z \dots)}$

$= xy + x(-t) + y(z - t + s) + zt - zs + 2st$

$= (y-t)(x + z - t + s) + t(z - t + s) + zt - zs + 2st$

$= \frac{1}{4}\left(y - t + x + z - t + s\right)^2 - \frac{1}{4}\left(y - t - x - z + t - s\right)^2 + tz - t^2 + ts + zt - zs + 2st$

$q(s,t,z) = -t^2 + 2zt + 3ts - zs$

$$q(x,y,z,s,t) = xy - xt + yz - yt + ys + zt - zs + 2st$$

$$= xy + x(-t) + y(z - t + s) + zt - zs + 2st$$

$$= (x + z - t + s)(y - t) + t(z - t + s) + zt - zs + 2st$$

$$= \frac{1}{4}(x + z - 2t + y + s)^2 - \frac{1}{4}(x - y + z + s)^2 + tz - t^2 + ts + zt - zs + 2st$$

$$q_1(z,t,s) = -t^2 + 2tz - zs + 3ts$$

$$= -(t^2 - 2tz - 3ts) - zs$$

$$= -\left(t^2 - 2t\left(z + \frac{3}{2}s\right) + \left(z + \frac{3}{2}s\right)^2\right) + \left(z + \frac{3}{2}s\right)^2 - zs$$

$$= -\left(t - z - \frac{3}{2}s\right)^2 + z^2 + 3zs + \frac{9}{4}s^2 - zs$$

$$q_2(z,s) = z^2 + 2zs + s^2 + \frac{5}{4}s^2$$

$$= (z + s)^2 + \frac{5}{4}s^2$$

alors

$$q(x,y,z,s,t) = \frac{1}{4}(x + z - 2t + y + s)^2 - \frac{1}{4}(x - y + z + s)^2 - \left(t - z - \frac{3}{2}s\right)^2 + (z + s)^2 + \frac{5}{4}s^2$$

$$Sg(q) = (3, 2)$$

la matrice de q :

4

$$M_{e_i}(q) = \frac{1}{2}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in N(q)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - t = 0 \\ x + z - t + s = 0 \\ y + t - s = 0 \\ -x - y + z + 4s = 0 \\ y - z + 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t \\ x = -6t \\ s = 2t \\ t = t \\ z = 5t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} -6t \\ t \\ 5t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

alors $N(q) = \text{vect}\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

$m \in \mathbb{Z}$ $\quad q_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$q_m(x_1, x_2, x_3) = (m+1)x_1^2 + 2m\,x_2^2 + (4m+1)x_3^2 - 2(m+1)x_1x_2 + 2(m+1)x_1x_3$$

$+ 2(m-3)\, x_2 x_3.$

5

1 - la forme quadratique.

$$f_m(x,y) = (m+1)x_1y_1 + 2m\, x_2y_2 + (4m+1)x_3y_3$$
$$-(m+1)x_1y_2 - (m+1)x_2y_1 + (m+1)x_1y_3$$
$$+ (m+1)x_3y_1 + (m-3)\, x_2y_3 + (m-3)\, x_3y_2$$

$$M_{e_i}(q_m) = \begin{pmatrix} m+1 & -(m+1) & (m+1) \\ -(m+1) & 2m & (m-3) \\ (m+1) & (m-3) & (4(m+1)) \end{pmatrix}$$

2 - f_m est Bilinéaire symétrique.

Montrons que f_m est defini positif on appliquons reduction carré sur q_m.

$$q_m(x_1,x_2,x_3) = (m+1)\, x_1^2 - 2m\, x_2^2 + (4m+1)\, x_3^2$$
$$- 2(m+1)\, x_1x_2 + 2(m+1)\, x_1x_3 + 2(m-3)\, x_2x_3$$
$$= (m+1)\left(x_1^2 + \tfrac{2x_1}{1}(x_3 - x_2) + (x_3-x_2)^2\right)$$
$$- (m+1)(x_3-x_2)^2 + 2m\, x_2^2 + (4m+1)\, x_3^2$$
$$+ 2(m-3)\, x_2x_3.$$

$$= (m+1)(x_1 - x_2 + x_3)^2 - (m+1)x_2^2$$
$$-(m+1)x_3^2 + 2(m+1)x_2x_3 + 2m x_2^2$$
$$+ (4m+1)x_3^2 + 2(m-3)x_2x_3$$

$$= (m+1)(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (m-1)x_2^2 + 3m x_3^2$$
$$+ 4(m-1)x_2x_3.$$

$$= (m+1)(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (m-1)\left(x_2^2 + 4x_2x_3 + (2x_3)^2\right) + 3m x_3^2 - (m-1)(2x_3)^2$$

$$= (m+1)(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (m-1)(x_2 + 2x_3)^2$$
$$+ 3m x_3^2 - 4m x_3^2 + 4x_3^2$$

$$= (m+1)(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (m-1)(x_2 + 2x_3)^2$$
$$+ (-m+4)x_3^2.$$

q_m est defini positif $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ m-1 > 0 \\ -m+4 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > 1 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{m = \{2, 3\}.}$

3 - pour que q_m soit degeneré.

$\det(M_{e_i}(q_m)) = 0$ -

$$\det M_{e_i}(a)_m = \begin{vmatrix} m+1 & -(m+1) & m+1 \\ -(m+1) & 2m & m-3 \\ m+1 & m-3 & 4m+1 \end{vmatrix}$$

$$-(m+1)\left(\begin{vmatrix} 2m & m-3 \\ m-3 & 4m+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -(m+1) & m-3 \\ m+1 & 4m+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -(m+1) & 2m \\ m+1 & m-3 \end{vmatrix} \right) = 0$$

$\boxed{m = -1}$

$$\begin{vmatrix} 2m & m-3 \\ m-3 & 4m+1 \end{vmatrix} = 2m(4m+1) - (m-3)^2$$

$$= 8m^2 + 2m - m^2 - 9 + 6m$$

$$= 7m^2 + 8m - 9.$$

$$\begin{vmatrix} -(m+1) & m-3 \\ m+1 & 4m+1 \end{vmatrix} = -(m+1)(4m+1) - (m+1)(m-3)$$

$$= -4m^2 - m - 4m - 1 - m^2 + 3m - m + 3$$

$$= -5m^2 - 3m + 2$$

$$\begin{vmatrix} -(m+1) & 2m \\ m+1 & m-3 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - m + 3 - 2m^2 - 2m$$

$$= -3m^2 + 3$$

$\Rightarrow 7m^2 + 8m - 9 - 5m^2 - 3m + 2 - 3m^2 + 3 = 0$ 8

$\Rightarrow \cancel{= -3m^2 + 8m - 26 = 0}$

$\cancel{\Delta = 25 - 4 \times 3 \times 6}$

$\Rightarrow \quad -m^2 + 5m - 6 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1.$

$\boxed{m = \frac{-5-1}{-2} = +3}$ $\boxed{m = \frac{-5+1}{-2} = 2}$

alors q_m est non dégénéré

$m = \{-1, 2, 3\}$

4 – On a

$q_m(x) = (m+1)\,l_1^2 + (m-1)\,l_2^2 + (-m+4)\,l_3^2$

si $m = 1$ ou -1 ou 4

$rg(q_m) = 2 \Rightarrow \dim N(q) = 1.$

si $\forall m \neq 1, -1, 4$

$rg(q_m) = 3 \Rightarrow \dim N(q) = 0.$

alors on a motré que $\forall\, m \in \mathbb{Z}$ le $\dim N(q)$ ne peut etre que 0, ou 1, n'est pas 2.