ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES - TANGER

UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAÂDI

Topologie dans $\mathbb{R}^n$

Analyse3-AP2 **Nov. 2018-2019**

Excercice 1:

On considère les normes N_1, N_2 et N_∞ définies sur l'e.v. $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels et à degré quelconque par:

$N_1(P) = \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$, $N_2(P) = \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2}$, $N_\infty(P) = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$ avec $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $n \in \mathbb{N}$,

Montrer que N_1, N_2 et N_∞ ne sont pas équivalentes dans $\mathbb{R}[X]$

(Ind: considérer la famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par: $P_n = \sum_{i=0}^{n-1} X^i$).

Excercice 2:

Les assertions suivantes sont-elles vraies ? (Démonstration ou contre-exemple selon les cas.)

1. Toute partie non ouverte de $\mathbb{R}^n$ est fermée.
2. Une union quelconque de fermés de $\mathbb{R}^n$ est fermée.
3. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^4 < 1\}$ est ouvert ? fermé ? borné ?
4. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = x(1 - 2x)\}$ est ouvert ? fermé ? borné ?

Excercice 3:

Établir les propriétés suivantes de l'adhérence d'un ensemble dans un espace vectoriel normé:

1. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
2. si $A \subset B$ alors $\bar{A} \subset \bar{B}$
3. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
4. montrer que la formule $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ n'est pas vraie en général
5. montrer que la formule 3. n'est pas vrai en général pour une infinité d'ensembles.

Excercice 4:

Soit $(x_n)_n$ une suite convergente dans $\mathbb{R}^p$, avec $p \geq 1$, de limite x. Soit $A = \{x_n |\ n \in \mathbb{N}\}$.

Montrer que $A \cup \{x\}$ est compact.

Excercice 5:

Soit F un fermé, et C un compact de $\mathbb{R}^n$. On note $G = F + C = \{x + y|\ x \in F\ et\ y \in C\}$.

1. Montrer que G est fermé.
2. Montrer que G n'est pas en général fermé si C est supposé fermé non borné.

Excercice 6:

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante d'ensembles compactes et non vides de $\mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$,

1. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n \neq \emptyset$
2. Vérifier que le résultat précédent est généralement faux si les F_n ne sont pas compactes.