ENSA
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES - TANGER

UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAÂDI

Contrôle Continu 2 (2h)

AP32: Analyse 3 (21 Fév. 2017)

**** Tous les documents et les appareils électroniques sont interdits ****

**** Une réponse sans justification ne rapportera aucun point ****

Excercice 1:

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, et lesquelles sont fausses (***Justifier par contre exemple si l'assertion est fausse et par démonstration si elle est vraie***):

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit f est une fonction scalaire définies sur $\mathbb{R}^p$ dont les dérivées partielles au point a existent. Alors:
$$\lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^p}} \frac{f(a+h) - f(a) - \nabla f(a).h}{\| h \|} = 0 \Longleftrightarrow f \text{ est différentiable en } a. \text{ (2pts)}$$
2. Si f admet une dérivée directionnelle suivant tout vecteur non nul alors f est différentiable. (2.5pts)
3. Soit f une fonction scalaire définie sur $\mathbb{R}^2$. Si f admet un seul extremum relatif alors cet extremum est absolu. (2.5pts)
4. Si A est connexe par arcs alors A est étoilée. (3pts)

Excercice 2:

Soit $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

1. Déterminer les points critiques de la fonction f. (2pts) $(0,0)$
2. Déterminer les extremums absolus de la fonction f sur la région $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid \| (x, y) \|_1 \leq 1\}$. (3pts)

Excercice 3:

Soit le corps Q délimité par les graphes: $z + y = 2$, $z + x = 2$, $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$.

1. Dessiner le corps Q dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en utilisant les courbes de niveaux $k = 0, 1, 2$. (2pts)
2. Calculer l'intégrale: $I = \iiint\limits_{Q} y e^{(2-z)^2} dV$. (3.pts)

$\sqrt{1-x^2-y^2}$

les points critiques

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0 \\ \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $(0,0)$ point critique ~~quelconque~~

~~2- les extremums absolus~~ la nature du point

~~on a D =~~

on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{x^2}{(1-x^2-y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{y^2}{(1-x^2-y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}}$

on a $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -1 \end{cases}$

donc $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ $-1<0$ $-1<0$

donc $(0,0)$ est un maximum relatif

2- les extremums absolus

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad \|(x,y)\| \leq 1$

$\Rightarrow |x| + |y| \leq 1$

$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

donc on a $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x^2-(1-x)^2}$

$= \sqrt{2x-2x^2}$

$f'(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{2x-2x^2}}$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
f'	‖	$+$	0	$-$	‖
f	0	↗	$f(\frac{1}{\sqrt{2}})$	↘	0

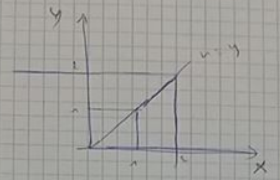
on a $f(0,0) = 1 < f(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}$

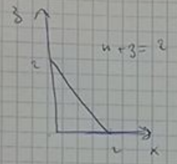
on a $f(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})$

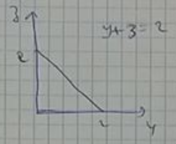
max absolu

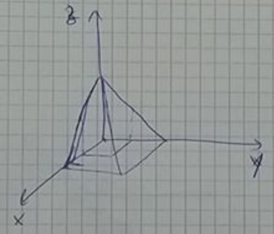
[illegible]

$$\begin{cases} z = 2 - y \\ z = 2 - x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ x = 2 - x \end{cases}$$









$$\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{2-z} y\, e^{(2-z)^2}\, dx\, dz\, dy$$

$$\int_0^2 \int_0^{2-y} y(2-z)\, e^{(2-z)^2}\, dz\, dy$$

$$\int_0^2 -\frac{y}{2} \int_0^{2-y} -2(2-z)\, e^{(2-z)^2}\, dz\, dy$$

$$\int_0^2 -\frac{y}{2} \left[e^{(2-z)^2} \right]_0^{2-y} dz\, dy$$

$$\int_0^2 -\frac{y}{2} \left(e^{(2-2+y)^2} - e^4 \right) dy$$

$$\int_0^2 -\frac{y}{2} \left(e^{y^2} - e^4 \right) dy = \frac{1}{4} \int -2y\, e^{y^2} + \frac{e^4}{2} \int_0^2 y\, dy$$

$$= -\frac{1}{4} \left[e^{y^2} \right]_0^2 + \frac{e^4}{2} \left(\frac{y^2}{2} \right)_0^2$$