ECOLE NATIONALE DES SCIENCES
APPLIQUEES - TANGER

UNIVERSITE ABDELMALEK
ESSAÂDI

Fonctions de Plusieurs Variables

Analyse3-AP2 **Oct. 2018-2019**

Excercice 1:

Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en (0,0) des fonctions suivantes:

1. $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$
2. $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Excercice 2:

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^5}{x^4+x^2y^2+y^4}$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+y)}{x^2+2xy+y^2-1}$

Excercice 3:

Soit la fonction f définie pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Etudier la continuité de f sur D.

Excercice 4:

On considère la fonction suivante:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 2x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2>1 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Excercice 5:

Montrer que toutes les normes définies sur l'e.v. $\mathbb{R}^n$, avec $n\in\mathbb{N}^*$, sont équivalente.

Excercice 6:

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et y_1, y_2 deux réels distincts tels que $[y_1, y_2] \subset f(\mathbb{R})$. Soient a et b, respectivement, des antécédents de y_1 et y_2, avec $a < b$.

1. Peut-on dire que $[y_1, y_2] = f([a, b])$? Justifier votre réponse.
2. On considère $\Gamma = \{|x_1 - x_2|;\ a \leq x_1, x_2 \leq b,\ f(x_1) = y_1 \ \text{ et } \ f(x_2) = y_2\}$. Montrer l'existence de l'$\inf \Gamma$.
3. Montrer qu'ils existent $a^* \in f^{-1}(\{y_1\}) \cap [a, b]$ et $b^* \in f^{-1}(\{y_2\}) \cap [a, b]$ tels que $\inf \Gamma = |a^* - b^*|$.
4. Supposons que $a^* < b^*$. Justifier pourquoi $f([a^*, b^*])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
5. Montrer que $[y_1, y_2] = f([a^*, b^*])$.

Excercice 7:

Soient $A \in \mathbb{R}^2$ défini par $A := B_f(O, 2) \cup S((2, 0), 1)$. Montrer que A est connexe

Excercice 8:

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'ensemble $A = \{(x, \sin(1/x)); 1 \geq x > 0\}$.

1. Montrer $\overline{A} = A \cup \{(0, y) | -1 \leq y \leq 1\}$.
2. Montrer que $\overline{A}$ est connexe.
3. Montrer que $\overline{A}$ n'est pas connexe par arcs.