最小生成树-Prim算法和Kruskal算法

Prim算法

1.概览

普里姆算法（Prim算法），图论中的一种算法，可在加权连通图里搜索最小生成树。意即由此算法搜索到的边子集所构成的树中，不但包括了连通图里的所有顶点（英语：Vertex (graph theory)），且其所有边的权值之和亦为最小。该算法于1930年由捷克数学家沃伊捷赫·亚尔尼克（英语：Vojtěch Jarník）发现；并在1957年由美国计算机科学家罗伯特·普里姆（英语：Robert C. Prim）独立发现；1959年，艾兹格·迪科斯彻再次发现了该算法。因此，在某些场合，普里姆算法又被称为DJP算法、亚尔尼克算法或普里姆－亚尔尼克算法。

2.算法简单描述

1).输入：一个加权连通图，其中顶点集合为V，边集合为E；

2).初始化：V_{new} = {x}，其中x为集合V中的任一节点（起始点），E_{new} = {},为空；

3).重复下列操作，直到V_{new} = V：

a.在集合E中选取权值最小的边<u, v>，其中u为集合V_{new}中的元素，而v不在V_{new}集合当中，并且v∈V（如果存在有多条满足前述条件即具有相同权值的边，则可任意选取其中之一）；

b.将v加入集合V_{new}中，将<u, v>边加入集合E_{new}中；

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

我的标签

笔试(4)
OS(2)
C str(1)
排序(1)
new malloc(1)
C/C++ const(1)
二叉树(1)
SVM(1)
DFS BFS(1)
聚类(1)
更多

随笔分类

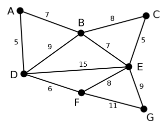
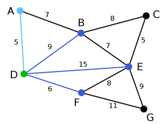
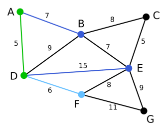
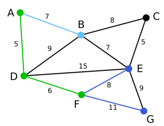
APUE专题(15)
C/C++(30)
Hadoop/MapReduce(13)
Java(1)
OS/Linux(15)
笔试面试题集锦(16)
基础机器学习算法(9)
其他(3)
数据结构与算法(29)
网络及UNP(19)

随笔档案

2015年7月(1)

4).输出：使用集合V_{new}和E_{new}来描述所得到的最小生成树。

下面对算法的图例描述

图例	说明	不可选	可选	已选(V_{new})
	此为原始的加权连通图。每条边一侧的数字代表其权值。	–	–	–
	顶点D被任意选为起始点。顶点**A**、**B**、**E**和**F**通过单条边与**D**相连。**A**是距离**D**最近的顶点，因此将**A**及对应边**AD**以高亮表示。	C, G	A, B, E, F	D
	下一个顶点为距离**D**或**A**最近的顶点。**B**距**D**为9，距**A**为7，**E**为15，**F**为6。因此，**F**距**D**或**A**最近，因此将顶点**F**与相应边**DF**以高亮表示。	C, G	B, E, F	A, D
	算法继续重复上面的步骤。距离**A**为7的顶点**B**被高亮表示。	C	B, E, G	A, D, F
	在当前情况下，可以在**C**、**E**与**G**间进行选择。**C**距**B**为	无	C, E, G	A, D, F,

2015年3月(1)
2014年11月(1)
2013年5月(1)
2012年11月(4)
2012年10月(7)
2012年9月(17)
2012年8月(59)
2012年7月(59)

阅读排行榜

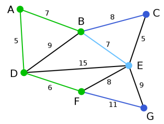
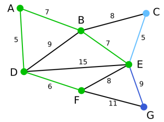
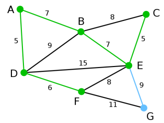
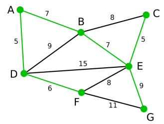
1. 最短路径—Dijkstra算法和Floyd算法(665293)
2. 最小生成树-Prim算法和Kruskal算法(286613)
3. HTTP请求报文和HTTP响应报文(151399)
4. Linux写时拷贝技术(copy-on-write)(97940)
5. 决策树算法总结(90993)

评论排行榜

1. 最短路径—Dijkstra算法和Floyd算法(49)
2. 最小生成树-Prim算法和Kruskal算法(17)
3. HTTP请求报文和HTTP响应报文(12)
4. C++ STL中的vector的内存分配与释放(10)
5. Linux写时拷贝技术(copy-on-write)(10)

推荐排行榜

1. 最短路径—Dijkstra算法和Floyd算法(89)
2. 最小生成树-Prim算法和Kruskal算法(45)

	8，E距B为7，G距F为11。E最近，因此将顶点E与相应边BE高亮表示。			B
	这里，可供选择的顶点只有C和G。C距E为5，G距E为9，故选取C，并与边EC一同高亮表示。	无	C, G	A, D, F, B, E
	顶点G是唯一剩下的顶点，它距F为11，距E为9，E最近，故高亮表示G及相应边EG。	无	G	A, D, F, B, E, C
	现在，所有顶点均已被选取，图中绿色部分即为连通图的最小生成树。在此例中，最小生成树的权值之和为39。	无	无	A, D, F, B, E, C, G

3.简单证明prim算法

反证法：假设prim生成的不是最小生成树

1).设prim生成的树为G_0

2).假设存在G_{min}使得$cost(G_{min})<cost(G_0)$　则在G_{min}中存在$<u,v>$不属于G_0

3).将$<u,v>$加入G_0中可得一个环，且$<u,v>$不是该环的最长边(这是因为$<u,v>\in G_{min}$)

4).这与prim每次生成最短边矛盾

3. Linux写时拷贝技术(copy-on-write)(37)
4. HTTP请求报文和HTTP响应报文(25)
5. C++ STL 一般总结(19)

最新评论

1. Re:HTTP请求报文和HTTP响应报文
学习了！ 较个真儿，标题“1. 请求头”应该为"1. 请求行"吧？要是把一级标题做的比二级标题大一些，再优化下排版，就更好了。
--同勉共进
2. Re:TF-IDF及其算法
以上总结成下面的几句话：
总文件数： 10000，出现词car的文件100， 当前文件词数300， 出现car的次数是3
TF=3/300=0.01
IDF=log(10000/100)=log(10...
--川洋
3. Re:Linux写时拷贝技术(copy-on-write)
@懒洋洋晒月亮 不是取消read-only，而是触发异常之后会陷入kernel的一个中断例程。中断例程中，kernel就会把触发的异常的页复制一份，于是父子进程各自持有独立的一份。...
--Ryanwin
4. Re:HTTP请求报文和HTTP响应报文
2年后再看，马上要撤了
--郝姬友

5).故假设不成立，命题得证.

4.算法代码实现(未检验)

```
#define MAX  100000
#define VNUM  10+1                                             //这里没有ID为0的点,so id号范围1~10

int edge[VNUM][VNUM]={/*输入的邻接矩阵*/};
int lowcost[VNUM]={0};                                         //记录Vnew中每个点到V中邻接点的最短边
int addvnew[VNUM];                                             //标记某点是否加入Vnew
int adjecent[VNUM]={0};                                        //记录V中与Vnew最邻近的点


void prim(int start)
{
     int sumweight=0;
     int i,j,k=0;

     for(i=1;i<VNUM;i++)                                      //顶点是从1开始
     {
        lowcost[i]=edge[start][i];
        addvnew[i]=-1;                                         //将所有点至于Vnew之外,V之内，这里只
     }

     addvnew[start]=0;                                        //将起始点start加入Vnew
     adjecent[start]=start;

     for(i=1;i<VNUM-1;i++)
     {
```

5. Re:Linux写时拷贝技术(copy-on-write)

求解，写时复制你说的是拷贝一块新的给子进程，这个时候父进程的内存页是read-only啊，怎么修改的呢？触发异常页会取消掉这块内存页的read-only?

--懒洋洋晒月亮

```
        int min=MAX;
        int v=-1;
        for(j=1;j<VNUM;j++)
        {
            if(addvnew[j]!=-1&&lowcost[j]<min)                 //在Vnew之外寻找最短路径
            {
                min=lowcost[j];
                v=j;
            }
        }
        if(v!=-1)
        {
            printf("%d %d %d\n",adjecent[v],v,lowcost[v]);
            addvnew[v]=0;                                      //将v加Vnew中

            sumweight+=lowcost[v];                             //计算路径长度之和
            for(j=1;j<VNUM;j++)
            {
                if(addvnew[j]==-1&&edge[v][j]<lowcost[j])
                {
                    lowcost[j]=edge[v][j];                     //此时v点加入Vnew 需要更新lowcost
                    adjecent[j]=v;
                }
            }
        }
    }
    printf("the minmum weight is %d",sumweight);
}
```

5.时间复杂度

这里记顶点数v，边数e

邻接矩阵:O(v^2)   邻接表:O($e\log_2 v$)

Kruskal算法

1.概览

Kruskal算法是一种用来寻找最小生成树的算法，由Joseph Kruskal在1956年发表。用来解决同样问题的还有Prim算法和Boruvka算法等。三种算法都是贪婪算法的应用。和Boruvka算法不同的地方是，Kruskal算法在图中存在相同权值的边时也有效。

2.算法简单描述

1).记Graph中有v个顶点，e个边

2).新建图$Graph_{new}$，$Graph_{new}$中拥有原图中相同的e个顶点，但没有边

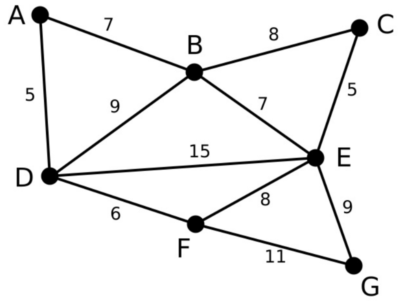
3).将原图Graph中所有e个边按权值从小到大排序

4).循环：从权值最小的边开始遍历每条边 直至图Graph中所有的节点都在同一个连通分量中

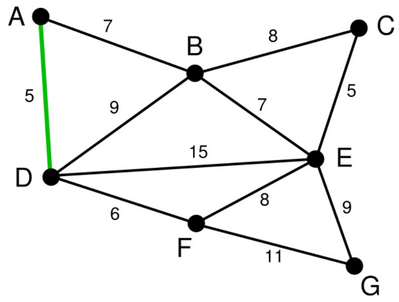
if 这条边连接的两个节点于图$Graph_{new}$中不在同一个连通分量中

添加这条边到图$Graph_{new}$中

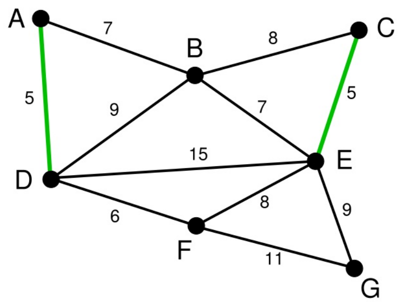
图例描述：



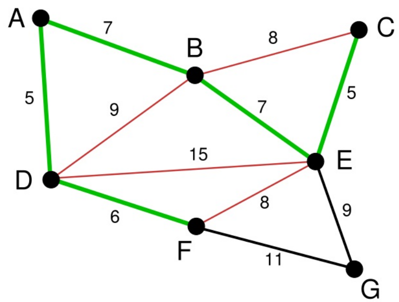
首先第一步，我们有一张图Graph，有若干点和边



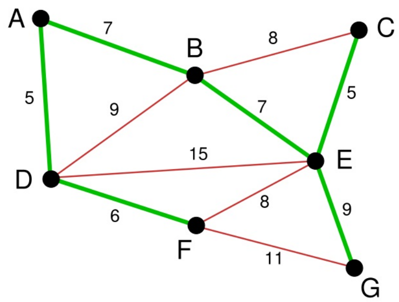
将所有的边的长度排序，用排序的结果作为我们选择边的依据。这里再次体现了贪心算法的思想。资源排序，对局部最优的资源进行选择，排序完成后，我们率先选择了边AD。这样我们的图就变成了右图



在剩下的变中寻找。我们找到了CE。这里边的权重也是5



依次类推我们找到了6,7,7，即DF，AB，BE。



下面继续选择， BC或者EF尽管现在长度为8的边是最小的未选择的边。但是现在他们已经连通了（对于BC可以通过CE,EB来连接，类似的EF可以通过EB,BA,AD,DF来接连）。所以不需要选择他们。类似的BD也已经连通了（这里上图的连通线用红色表示了）。

最后就剩下EG和FG了。当然我们选择了EG。最后成功的图就是右：

3.简单证明Kruskal算法

对图的顶点数n做归纳，证明Kruskal算法对任意n阶图适用。

归纳基础：

n=1，显然能够找到最小生成树。

归纳过程：

假设Kruskal算法对n≤k阶图适用，那么，在k+1阶图G中，我们把最短边的两个端点a和b做一个合并操作，即把u与v合为一个点v'，把原来接在u和v的边都接到v'上去，这样就能够得到一个k阶图G'(u,v的合并是k+1少一条边)，G'最小生成树T'可以用Kruskal算法得到。

我们证明T'+{<u,v>}是G的最小生成树。

用反证法，如果T'+{<u,v>}不是最小生成树，最小生成树是T，即W(T)<W(T'+{<u,v>})。显然T应该包含<u,v>，否则，可以用<u,v>加入到T中，形成一个环，删除环上原有的任意一条边，形成一棵更小权值的生成树。而T-{<u,v>}，是G'的生成树。所以W(T-{<u,v>})<=W(T')，也就是W(T)<=W(T')+W(<u,v>)=W(T'+{<u,v>})，产生了矛盾。于是假设不成立，T'+{<u,v>}是G的最小生成树，Kruskal算法对k+1阶图也适用。

由数学归纳法，Kruskal算法得证。

4.代码算法实现

```
typedef struct
{
    char vertex[VertexNum];                                //顶点表
    int edges[VertexNum][VertexNum];                       //邻接矩阵,可看做边表
    int n,e;                                               //图中当前的顶点数和边数
}MGraph;

typedef struct node
{
    int u;                                                 //边的起始顶点
    int v;                                                 //边的终止顶点
    int w;                                                 //边的权值
}Edge;

void kruskal(MGraph G)
{
    int i,j,u1,v1,sn1,sn2,k;
    int vset[VertexNum];                                    //辅助数组，判定两个顶点是否连通
```

```
    int E[EdgeNum];                                          //存放所有的边
    k=0;                                                     //E数组的下标从0开始
    for (i=0;i<G.n;i++)
    {
        for (j=0;j<G.n;j++)
        {
            if (G.edges[i][j]!=0 && G.edges[i][j]!=INF)
            {
                E[k].u=i;
                E[k].v=j;
                E[k].w=G.edges[i][j];
                k++;
            }
        }
    }
    heapsort(E,k,sizeof(E[0]));                             //堆排序，按权值从小到大排列
    for (i=0;i<G.n;i++)                                     //初始化辅助数组
    {
        vset[i]=i;
    }
    k=1;                                                    //生成的边数，最后要刚好为总边数
    j=0;                                                    //E中的下标
    while (k<G.n)
    {
        sn1=vset[E[j].u];
        sn2=vset[E[j].v];                                   //得到两顶点属于的集合编号
        if (sn1!=sn2)                                       //不在同一集合编号内的话，把边加入最小生成树
        {
            printf("%d ---> %d, %d",E[j].u,E[j].v,E[j].w);
            k++;
            for (i=0;i<G.n;i++)
            {
                if (vset[i]==sn2)
                {
```

```
                    vset[i]=sn1;
                }
            }
        }
        j++;
    }
}
```

时间复杂度：$e\log_2 e$ e为图中的边数

分类: 数据结构与算法