**一、压缩感知理论的研究现状**

压缩感知（Compressed Sensing）理论由Donoho，Candès，Romberg和Tao提出，这些文献在2006年正式发表。事实上，Kashin创立的范函分析和逼近论为CS理论的某些抽象结论提供了理论依据。然后，由Candès，Romberg，Donoho等人构造实现了相关的算法，并且通过研究将该算法运用于实践，发现这一理论有很高的研究价值。尽管关于压缩感知理论的研究已经有了一定的成果，但是仍然有许多问题存在，并需要进一步研究解决。这些问题概括起来，主要有以下六个方面：

第一，对于已经成熟的重构算法是不是存在一个最优的确定性的观测矩阵；

第二，怎么样找到一种计算复杂度较低的、对观测次数限制较少的并且稳定的重构算法可以精确地恢复信号。由于医学图像低分辨率，灰度分布不均匀，高噪声的特点，重构算法的设计将会有更大的困难；

第三，如何在冗余字典下找到一种有效快速的稀疏分解算法是压缩感知理论的一个难点所在。如何针对医学图像的特点来设计合适的系数字典，也是目前亟待解决的问题；

第四，如何设计有效的软硬件来应用压缩感知理论解决大量的实际问题，这方面还有待进一步的研究；

第五，对于 p范数优化问题的求解研究还有许多不足；

第六，采样过程中收入噪声后的信号重构或含噪信号的重构也是压缩感知理论的一个难点所在，对于这方面的研究结果目前并不理想。此外，压缩感知理论与信号处理其它领域的融合也远远不够，如信号检测、特征提取等。

压缩感知的具体模型如下：

设为一信号或图像，对x进行m次线性测量，得到测量值y相当于：



其中被称作测量矩阵，向量被称作测量向量. 我们主要的研究兴趣是高度的欠采样情形，即当 m<<N时. 如果没有更多的信息，利用y来重构x当然是不可能的，因为会有无穷多个解。但是如果我们有先验条件，即认为x是在某个域稀疏的，上述问题就会有唯一解，当然测量矩阵需要满足某些特定的条件。

一般而言，信号x本身并不是稀疏的。当把x变换到某个域上时，x才会体现出稀疏性（稀疏性是指信号中只有很少的非零元），即



其中是稀疏信号。因此压缩感知问题也可以写为：



其中被称为感知矩阵。

通过上述压缩感知模型，我们可以看出，压缩感知主要有以下三个核心问题：

1. 信号的稀疏表示。对于一个信号x，如何找到某个正交基或者字典D，使其在或D上是最稀疏的；
2. 测量矩阵的设计。如何选择合适的测量矩阵，使得对x进行测量后得到的采样点y中包含了x的主要信息，即在对x进行降维时，并没有破坏信号的能量；
3. 重建算法的设计。如何建立快速、稳定、精确的重建算法，使得能够从y和中重建出x。

压缩感知三个核心问题的现状如下：

**1. 图像的稀疏表示**

近年来，稀疏模型被广泛地应用于信号和图像处理等领域。该模型通过基或字典中很少量元素的线性组合的形式来描述信号。图像的稀疏表示是压缩感知乃至图像处理领域中一个非常核心的问题，它在图像压缩、特征提取、图像检索、图像去噪和图像复原等应用中起着非常关键的作用。自傅里叶首次提出傅里叶变换以来，图像的稀疏表示方法大概经历了以下四个阶段：

1. 傅里叶变换
2. 小波变换

小波变换是继傅里叶变换之后的又一有效的图像表示方法。静态图像压缩标准 JPEG和新一代静态图像压缩标准 JPEG-2000就是该模型最典型的应用。JPEG 标准以 DCT 变换为基础，而 JPEG-2000 则以离散小波变换为基础，这是由于小波变换良好的空间/频率局部特性。DCT 变换中，图像左上角的 DCT系数较大，其余部分系数较小。因此，仅保留左上角 DCT 系数就能较好地对图像内容进行近似，有利于图像的压缩。与 DCT 系数相比，小波系数中幅值较大的系数更少，系数分布更加稀疏。对大部分类型的图像，小波变换能用更少的数据对图像进行近似，JPEG-2000 比 JPEG 获得更好的压缩性能。

1. 多尺度几何分析

多尺度几何分析方法是继小波变换之后，提出的又一类新的图像表示方法。1996 年，Bruno揭示了人类视觉特性的方向性，并提出了具有方向性的图像稀疏表示方法。在这一理论基础上，相继又出现了一些新的图像稀疏表示方法，如 Ridgelet、Curvelet、Bandelet、Contourlet等。这些方法克服了小波方向性问题，为图像的稀疏表示提供更为有效的工具。多尺度几何分析方法的提出主要是为了解决高维空间数据稀疏表示问题。传统的离散小波变换只对具有点状奇异性的图像有很好的稀疏表示，对具有高维奇异性的图像则效果不理想。而Ridgelet对具有直线状奇异的图像具有很好地稀疏表示，Curvelet对具有曲线状奇异的图像具有很好地稀疏表示。图像的多尺度几何分析理论与方法是一个前沿的研究领域，其理论和算法还处在发展之中。在国内，目前图像稀疏表示方面的研究主要集中在多尺度几何分析理论及其应用。

1. 超完备字典

超完备图像稀疏表示是近年来又一新的研究方向和热点。超完备图像稀疏表示的基本思想最早由 Mallat 提出，他采用超完备 Gabor 字典对图像进行稀疏表示，并提出了匹配追踪(Matching Pursuit, MP)算法。随后，Neff等提出了基于 Gabor 字典和匹配追踪算法的视频编码算法。由于超完备稀疏表示理论还不够成熟，算法所涉及的计算十分繁重，因此给实际研究和应用带来一定的困难。在超完备表示理论的基础上，人们通过构造超完备的冗余字典的形式，实现图像的自适应稀疏表示。由于构造的字典更加符合人眼视觉特性，超完备表示能获得更为稀疏的图像表示。2008年2月，H.Rauhut等人将CS理论从正交基空间推广到了冗余字典（即过完备字典），并证明了一个由特定类型的随机矩阵与一个确定性的字典构成的矩阵存在着很小的有限等距常量，人们可以通过一些算法从少量的随机观测值中恢复出这个字典稀疏的信号。文献还进一步用阈值算法作为恢复算法并给出了该算法保证高概率重构的条件。不过，至今对CS理论的研究还大多集中在固定的正交基空间。

目前信号在冗余字典下的稀疏表示的研究集中在两个方面：一是如何构造一个适合某一类信号的冗余字典，二是如何设计快速有效的稀疏分解算法。构造冗余字典的方法分为人工构造和训练学习两种。人工构造的字典有Wavelet 和局部Cosine 函数的级联、各向同性的Gabor字典、各向异性的Refinement-Gaussian混合字典、各向异性的Gabor感知多成分字典等。训练学习的方法主要有MOD（Method of Optimal Directions）、K-SVD（singular value decomposition）、online算法等。目前常用的稀疏分解算法大致可分为匹配追踪（Matching Pursuit）和基追踪（Basis Pursuit）两大类。但是以上所提到的字典很少有在医学图像上的应用，而且训练学习算法速度比较慢，因此，如何设计适合于医学图像的稀疏字典具有重要的意义。

**2. 测量矩阵的设计**

2006年，Candes，Romberg和Tao等人在研究高度欠定的核磁共振成像问题时，得出一个重要的结论：当测量矩阵为部分傅里叶矩阵式，的采样数据量就能将n维空间的K稀疏信号精确重建。2007年，Candes和Romberg将部分傅里叶矩阵推广到任意正交测量矩阵并得到类似的结论。这两项工作表述了同一个问题：低维频域（或时域）信号能够精确重建高维稀疏时域（或频域）信号。但是部分傅里叶矩阵并不普适，即：当检测的信号不是时域或频域稀疏时，部分傅里叶矩阵不能减少测量数。为解决该问题，Candes和Tao等证明：独立同分布的高斯随机测量矩阵可以成为普适的压缩感知测量矩阵。然而高斯随机测量矩阵理论上虽然完美，但无论在硬件实现和重建算法构造上，该测量矩阵均无法实用。2007年，Candes等人提出了著名的等距约束理论（Restricted Isometry Principle， RIP），成为压缩感知奠基性理论。该理论指出，假定x是长度为n，稀疏度为K的信号，测量矩阵为，大小为。向量集合，且集合T中的元素个数小于或等于稀疏度K。矩阵为测量矩阵由集合T中元素所指示的列向量构成的大小为的子矩阵。如果存在常数，使以下不等式成立：



我们就说满足K阶RIP性质。如果



则对于所有稀疏度小于K的信号，都可以精确重建。通常，对于一个K稀疏信号x，可以从y中精确重建出x的充分条件是对于3K稀疏信号x和常数有



成立，其中，。

尽管RIP理论特性完美，然而很难用它来判断某一测量矩阵是否拥有这种特性，并且也很难用它来指导设计测量矩阵。同时RIP是测量矩阵的一个充分条件，而不是必要条件。

为了简化问题，Donoho等人指出，如果测量矩阵和稀疏矩阵是不相干的，则感知矩阵在很大概率上满足RIP性质。相关系数定义为：



不相关是指向量不能用稀疏表示，如果含有相关的列，则相关系数越大，反之越小，相关系数的范围为



相关系数越小，测量样本包含原始信号的信息越多，准确重构的概率越大。

Donoho在文献中给出了压缩感知概念的同时，定性和定量地给出了测量矩阵要满足的三个特征：

1. 由测量矩阵的列向量组成的子矩阵的最小奇异值必须大于一定的常数，也即：测量矩阵的列向量满足一定的线性独立性；
2. 测量矩阵的列向量体现某种类似噪声的独立随机性；
3. 满足稀疏度的阶是满足1范数最小的向量。

这三点性质对矩阵的构造起着重要的作用。

测量矩阵的硬件实现是将压缩感知推向实用的必备条件。在RIP理论的指导下，莱斯大学研制出单相素机。随后，有多种硬件实现相继报道，例如，麻省理工学院研制的MRI RF脉冲设备、编码孔径相机、伊利诺伊州立大学研制的DNA微阵列传感器。中科院研制的压缩感知滤波器和混沌器等。这些测量矩阵的硬件实现将压缩感知向实用化推进了一大步。综上所述，选择测量矩阵时应满足以下条件：

1. 相同稀疏度K时，采集数m越小越好；
2. 便于硬件实现和优化算法实现；
3. 普适，即对大多数稀疏或可压缩信号都适用。

根据以上测量矩阵的性质和条件，一些测量矩阵相继被提出来。这些测量矩阵可以被分为以下三个大类。

1. 高斯随机矩阵、贝努利随机矩阵、亚高斯随机矩阵、非常稀疏投影矩阵等。这些测量矩阵的共同点是，矩阵元素独立地服从某一分布。这类矩阵的优点是与绝大多数稀疏信号不想关，精确重建需要的测量次数较小。但是这类测量矩阵需要较大的存储空间和较高的计算复杂度。
2. 部分傅里叶矩阵、部分哈达玛矩阵和非相关测量矩阵。这类矩阵式在一个正交方阵中随机抽取m行，在对每一列进行归一化处理而得到。其中部分傅里叶矩阵运用了快速傅里叶变换计算速度快的优点，但是这种测量矩阵仅与在时域或频域稀疏的信号不相关。如MR图像等。哈达玛矩阵大小n必须满足的条件，这个极大的限制了哈达玛矩阵的应用。
3. 托普利兹（Toeplitz）矩阵、循环（Circulant）矩阵、二进制稀疏（Binary Sparse）矩阵、Crips测量矩阵、随机卷积形成的感知矩阵等。这类测量矩阵部分是根据某一特定信号而应用的矩阵，如Chirps感知矩阵是由chirp序列来构成感知矩阵的列向量。

以上测量矩阵虽然存在着一定的优势，但有一个共同点，它们大部分都是随机测量矩阵。随机矩阵至少有以下两点不足：一是在仿真实验中存在不确定性。二是随机矩阵在硬件电路中难以实现。所以，确定性测量矩阵成为测量矩阵新的研究方向和研究热点。如针对医学图像，如何设计适合医学图像的确定性测量矩阵便是一个很有挑战性的问题

**3. 重建算法的建立**

信号重建的实质就是利用m维信号y和测量矩阵采用一定的算法重建出n维信号x的过程，其中m<<n。已知信号x具有稀疏性，则满足中的最稀疏的解就是所求的解。自然地，我们可以得到下面的模型：

 s.t. 

我们称这个问题为问题。但是这个问题是个NP-hard问题，无法通过直接进行求解。所以为了求解这个问题，我们有以下几种方法：

1. 贪婪算法

这类算法速度快，但精度低且需要的测量次数多，是工程中常用的重建算法。最早的有匹配追踪（MP）算法和正交匹配追踪（OMP）算法，Needell等在OMP算法基础上提出正则正交匹配追踪（ROMP）算法和压缩感知匹配追踪（CoSaMP）算法。Donoho提出了阶段匹配追踪（StOMP）算法，Dai提出的基追踪（SP），Thong根据稀疏度K未知提出自适应匹配追踪（SAMP）算法，刘亚新提出正则化自适应匹配追踪（RAMP）算法。

以上这些算法的共同思想是：避开直接求解压缩感知在医学图像重建中的应用这个NP-hard问题，根据信号稀疏性这个先验条件，利用观测向量与测量矩阵列向量的相关度大小，从测量矩阵中选择与信号最匹配的列向量来构建稀疏逼近，并求出信号残差，然后继续选择与信号残差最为匹配的列向量，经过一定次数的迭代，信号可以有一些列向量线性表示。在这个过程中，测量矩阵的非相关性是这些重建算法的前提保证，并且测量矩阵的非线性相关性越强，则迭代的次数越少，重建时间越短。

b.范数方法

由于无法直接求解问题，可以将其转化为问题来近似求解。问题如下：

 s.t. 

Candes等证明如果测量矩阵满足RIP性质，那么问题的解就是的解。问题在数学上是一个凸最优问题，可以转化为线性规划（LP）问题加以求解，这种求解方法也成为基追踪方法（BP）。在一定的重建误差范围内，问题可以转化为：

 s.t. 

而上述问题可以利用二阶圆锥规划、内点法、梯度投影法（GPSR）、同伦算法、梯度法、Bregman迭代算法、交替方向法（AMD）、软/硬迭代阈值法（SIT/HIT）等求解。这类算法重建精度高，需要测量次数少，但速度慢且算法复杂度高。

c.最小全变分方法

相对于适合一维信号的问题，Candes等从大量自然图像的离散梯度都是稀疏的角度出发，提出个更适合二维图像重建的最小全变分方法。图像压缩感知的全变分模型如下：

 s.t. 

目标函数为图像离散梯度之和，即



而上式的求解可以转换为二阶锥规划问题。

以上两种算法都是通过逐步迭代逼近真实值，每一步迭代都利用测量矩阵去计算下一个逼近值。在这个过程中，高度稠密的测量矩阵，将使得算法复杂度高，计算速度慢。在医学图像中，由于其本身的复杂性，往往一种范数并不能地刻画医学图像的特征。在实际应用中，会采用多种范数相结合的方法来重构图像。例如，在MR成像中，一种很有效的模型就是TV范数和1范数的模型：



在这个模型的驱动下，产生了大量的算法，如迭代收缩阈值法（ISTA），快速ISTA（FISTA）等。又如，在动态MR成像过程中，目前最前沿的模型是将1范数和核范数（即矩阵奇异值的和）结合起来：

 s.t. 

这个模型可以很好地刻画动态MR成像过程，有很大的应用空间。

d.组合算法

这类算法是针对具有高度结构化的信号的，其应用范围远远不如其他方法。主要的算法有HHS追踪、次线性傅里叶变换等。

**二、压缩感知在医学图像重建中的应用**

**1**.部分并行MRI 图像重建的加速技术

虽然CS 理论在MRI 成像领域已经取得了诸多进展，但是其图像重建速度一直较慢，目前MR重建的一个非常好的模型是基于全变换和*l*1 范数约束条件的如下问题：

 （1）

其中，表示重建图像，N表示图像的像素数。α和β表示相对权重。是部分傅里叶矩阵，由成像设备和数据获取方式决定。通常是一个正交矩阵，可以将重建图像u稀疏化。因为1范数和TV范数都是非光滑的，所以这个问题在解决起来并不是很容易。主要的算法有共轭梯度法（CG）和偏微分方程（PDE）的方法，但是这两种算法的速度很慢，而且不适用与实际的MR图像。算法的速度变成了求解（1）的最大的瓶颈。因此，将压缩感知理论应用与MR图像重建最关键的问题就是提高算法的速度，并且保持算法的精度。

针对于MR图像的其他算法有q拟范数（0<q<1）最优化方法（Ye 2007；Chartrand 2007 2009）。虽然这种方法取得了一定的效果，提高了压缩比率，但由于q范数的非凸性，这种方法并不能总是得到全局最优解，并且算法的速度相对较慢。Trzasko在2009年给出了一种同伦非凸0范数的算法来重构MR图像。算法的速度较q范数有了很大的提高，但依然较慢。重构一张256\*256的图像，需要1-3分钟。最近出现了两种快速算法来解决问题（1）。Ma等人在2008年提出了一种算子分裂算法（operator-splitting algorithm）TVCMRI来解决MR图像的重构问题，Yang等人在2009年体重了一种变量分裂算法（variable splitting method ）来对MR图像进行重构。这两种方法大大降低了计算的复杂度，提高了算法的速度。重构一张256\*256的图像，最多需要10秒钟。

模型（1）可以看成是由保真项和正则项构成的一般凸优化问题的特例。解决这种一般的凸优化问题有两类方法，一种是算子分裂算法，一种是变量分裂算法。算子分裂算法搜索一个x，使得相应的最大单调算子的总和等于0.最常用的算子分裂算法有ISTA（Iterative Shrinkage-Thresholding）和FISTA（Fast ISTA）。这两种算法被成功地应用于信号处理和多任务学习中。变量分裂算法，是基于在一个增强的拉格朗日框架下，交替方向方法（AMD）的联合。两种变量分裂算法，MSA（Multiple Splitting Algorithm）和FaMSA（Fast MSA）最近被用来求模型（1），所有的凸函数都被假设为是光滑的。但是上述所有算法都没与可证明的收敛复杂度。并且，除了ISA/FISA（Beck Teboulle 2009）和MSA/FaMSA（Goldfarb

Ma 2009），其他的算法不能提供迭代复杂度的边界。ISA和MSA都是一阶方法，复杂度为O（1/）,FISA和FaMSA的复杂度为O（1/）.但是ISA和FISA是用来解决简单的正规化问题，对于复合正规化模型（1），这两种方法并不适用。而MSA和FaMSA假定所有的凸函数都是光滑的，所以在使用之前，我们必须先把不光滑的函数光滑化，这在实际应用中会造成很多麻烦。Huang等人在2011利用以上算法的思想，提出了一种新的算法Composite Splitting Algorithm（CSA）。该算法将算子分裂算法和变量分裂算法结合，在算法速度和精度上取得了很好地效果。

综上所述，基于压缩感知模型（1）的MR图像重建算法普遍存在复杂度高，速度慢，精度低的特点，因此如何提高算法的速度与精度是目前亟待解决的问题。

2.加速动态核磁共振成像（dynamic MRI）

2011 年，Lingala 等提出了一种根据欠采样的*k*-*t* 空间数据来重建动态核磁共振图像的新方法，该方法利用了稀疏性和低阶结构。与基于电影核磁共振成像（cine MRI）的传统方法不同，这种新方法在KL 变换域中用紧凑表示（compact representation）来处理数据，从而能够利用数据集内部的相关性。KL 变换使该方法可用于多种动态成像问题。即使成像对象的运动是非周期性的，该方法也能获得良好的重建结果。

通过同时确定全部测量数据的时间基函数和空间权重，本方法可以在一系列的加速中得到高质量的重建结果。利用体素的时域剖面线之间的相关性，这种方法可以加速动态核磁共振成像，将对基和信号的估计转化为一个低阶矩阵的恢复问题，从而获得对时间基函数更准确的估计，得到更高质量的重建结果。

3.医学超声图像中的应用

压缩感知在超声图像中的应用是最新的研究领域，将会很大地改变超声扫描器的发展和设计。压缩感知理论在超声图像中的应用是可行的，有很多很好的应用结果，如CFM/B模型和多普勒的三缸采集、3D成像等，但是这些还远远没有达到其应有的技术应用水平，还有很大的应用空间。

压缩感知最核心的问题之一是图像在某一个正交基或字典下是稀疏的或是可压缩的。对于超声图像而言，超声回波器数据可以被视为图像形成管道的各个阶段的数据。在传统结构中，每个传感器原件所接受到的原始射频信号形成了波束射频信号。施加在后者的检测产生了包络检测图像，而最后得到了相当于B模式的对数包络图像（可能在差值之后）。所以，目前研究的主要特点是图像被重建的类型和超声图像的稀疏表示。另一个重要的特点是对应模型的算法（如贝叶斯模型，确定性基追踪，匹配追踪等）。

对于超声图像而言，主要有以下几种稀疏域的模型：

1. 稀疏扩散映射（Sparse Diffusion Map）；
2. 稀疏原始射频（Sparse RF）；
3. RF图像傅里叶变换的稀疏假设；
4. 多普勒成像。

综上所述，压缩感知应用在超声图像中，最关键的问题有以下几个：

1. 稀疏基或稀疏字典的设计；
2. 与稀疏基或稀疏字典不相关的测量矩阵；
3. 专用的获取图像的材料；
4. 快速鲁棒的重构算法。

特别地，我们也必须保持超声成像实时的特点，这个也是超声图像最大的优点。

4.快速三维MRI 图像重建

Montefusco 等提出了一种基于CS 理论的快速三维MRI 重建方法，该方法可以用较少的频率采样数据得到高分辨率体重建图像。现有三维MRI 重建主要是利用了图像序列的时空相关性，在重建中使用适当的约束条件来获得重建结果。而Montefusco 等提出的新方法利用了体积图像的梯度稀疏性，从而能够把几种现有方法结合起来，并据此将图像重建问题转化为有约束的三维最小化问题。通过利用基于前向后向算子分裂的惩罚逼近算法，可以确保迭代求解过程的收敛性。考虑到测量数据中包含一系列傅立叶域二维数据，该方法构建了一个二维-三维混合约束的最小化问题，其近似解由求解一系列三维全变换（TV）正则化子问题得到。具体的迭代过程包含两步：① 更新过程，这一过程要求更新结果与测得数据的连续性相一致；② 时域三维滤波，这一步利用了图像序列的时空相关性。由此得到的NFCS-3D 算法适用于多种医学图像重建问题，即使在高度欠采样条件下，也可以快速稳定地得到良好的重建结果。

5.核磁共振（MRI）血管造影成像

Çukur 等将CS 理论应用于核磁共振血管造影成像，同时利用信号补偿方法，从而有效地降低了图像重建中的噪声水平。众所周知，CS 理论的应用主要满足下述三个条件：

① 信号具有可压缩性;

② 由欠采样造成的伪影在变换域中具有非相干性;

③ 重建结果与采样数据具有良好的一致性。

而血管造影的信号具有很高的可压缩性，能够很好地满足① ；在相位编码平面使用可变密度随机欠采样方法，可以满足② ；通过Çukur 等采用的无约束非线性优化，可以满足③:



其中，第一项表示重建结果与补偿后的k空间数据之间的差别，称数据一直项；W代表权重,表示重建结果；HY表示补偿后的k空间数据。后两项为正规化项，m代表图像。由于重建仅在相位编码维度进行，所以表示局部傅里叶变换。上式可以给出变换矩阵系数的最大似然估计，满足一致性约束条件。当感兴趣区域（Region of Interest，ROI）具有比背景组织更高的空间频率时，该方法能够显著提高图像对比度。

**6**.基于统计和CS 理论的内部CT

最近几年，内部CT 成像成为CT 研究的新热点，从2007 年开始，Wang 等人陆续发现当ROI 完全位于物体内部时，如果能够满足下面任一条件，就可以实现ROI 的精确重建：① 在ROI 内部有一小区域，其CT 图像已知；② ROI 区域内的图像为分段常数或其分段有限阶导数为常数。现有的内部CT 重建主要分为基于POCS 迭代和基于TV 约束的两类方法，而Xu 等提出了同时基于噪声统计模型和TV 约束的内部CT 重建方法，充分考虑了局部投影数据的噪声统计特性，将核医学成像经常使用的统计方法和CS 约束结合到一起，用于内部CT 图像重建，然后利用交替最小化方法实现最终的最优化处理。该方法可以显著提升低剂量条件下的内部CT 图像重建质量。

7.扩散光层析图像重建技术

扩散光层析技术（Diffuse Optical Tomography，DOT）是新近兴起的一种生物医学无损成像方法，可用于体内组织和血氧水平的实时成像探测，具有灵敏度高、计算量小的特点。但由于光在传播过程中具有很强的扩散性，DOT 重建需要求解的问题通常是病态和高度非线性的。由于非线性迭代方法的计算量很大，Lee 等提出了一种计算量较小的非迭代精确重建方法，将该成像问题转化为联合稀疏恢复问题，利用一般MUSIC 规范和CS 理论，求得范数最优解。

该算法有三大优点：① 与线性方法相似，该算法的非迭代特性使计算过程无需求解数值扩散方程，从而显著减少了计算时间；② 消除了高对比度光学不均匀性引起的波恩近似误差，这种误差在线性方法中非常常见；③ 与传统方法相比，稀疏约束使重建问题的病态程度降低。此外，现有线性方法常假设背景扰动很小，而本方法没有使用这个假设，因此也就不受限于线性方法的限制条件。另外，利用CS 理论进行光层析重建还可以利用混合1、2 范数的惩罚条件，通过适当的稀疏正则化，将结构性先验知识引入DOT 重建过程，将问题转化为凸最优化问题求解，加快迭代算法的收敛速度.

**8**.稀疏脑神经网络重建

偏相关是一种对脑神经网络的连通性测量，但在测得数据数量n 较小，协方差数量p较大的条件（the small-*n* large-*p* situation）下，很难得到对偏相关的准确估计。稀疏约束的引入可以简化问题的求解过程，Lee 等提出了一种新方法，利用含有*l*1 范数惩罚项的稀疏线性回归，即最小绝对值收缩与选择方法（least absolute shrinkage and selection operator，LASSO），来估计稀疏脑部连通性。根据CS 理论，即便测量数据很少并含有噪声，也可以通过LASSO 获得精确稀疏重建。

综上所述，医学图像的压缩感知问题主要有以下几个趋势：

1、建立适合医学图像的稀疏字典。目前的压缩感知理论主要针对于图像在某一正交基下稀疏而展开的，如何建立医学图像的稀疏字典，并将压缩感知理论推广到冗余字典，是目前所要解决的最主要的问题。

2、构建适合于医学图像特点的确定性测量矩阵，在消除测量矩阵的随机性的同时，保证最低阶的测量次数。

3、降低算法的复杂性，提高其执行速度。这是目前压缩感知理论在实际应用中的最大瓶颈。因为医学数字图像的数据量一般很大，算法越复杂，提取的特征就越多，计算量也就越大，对计算机的硬件要求也就越高，在实际应用中就必然会受到一定的限制。

4、提高重构算法的精度。由于医学图像本身的复杂性，在实际应用中，重构算法的精度并不是很高，重构图像的信噪比不是很理想。因此，如何提高算法的精度是目前很重要的目标。

5、提高算法的鲁棒性。由于医学图像的噪声很大，尤其是B超图像本身的乘性斑点噪声，对压缩测量和重构算法的影响很大。如何提高算法对噪声的抑制，提高算法对噪声的鲁棒性，是目前所要解决的问题。

1. **磁共振指纹的研究现状**

磁共振指纹 (magnetic resonance fingerprinting, MRF) 是一种新的数据获取、后处 理以及可视化的框架。与传统 qMRI 一次只能测量一个参数不同，MRF 可以同时快速 的量化多个组织参数，比如 T1，T2，质子密度等，并且提高整个实验的信噪比和扫描效 率。MRF 主要由三个部分组成，分别为信号获取、预定义字典的生成和模式识别重建 参数图。具体来说，首先针对特定的问题，选择一个合适的 MR 序列进行信号采集。然 后利用 MR 成像的数学模型，生成一个信号演化的字典，字典中的每一个原子模拟了 不同参数的组织在该 MR 序列下的信号演化，即包含着组织的参数信息。最后，使用模 式识别算法将采集的信号与字典进行匹配，选择字典中最配的原子，其包含的参数信息 即为该体素的参数。

首先我们应该选取对所需参数敏感的 MR 序列对信号进行采样，并且序列的参数， 如偏转角(flip angle)，重复时间(repetition time, TR)需要随着时间随机变动，使得 组织在 MR 序列中产生指纹状的信号演化。其次，字典中包含着不同参数的组织在该 MR 序列中的模拟演化。最后，模式识别算法用来比较每个像素指纹和字典中原子的匹 配度，重建参数图。

1. 信号获取

信号获取是 MRF 的第一步，我们首先需要根据具体问题，选择合适的 MR 序列进 行信号采集。MR 序列的选取需要满足以下三个 方面。第一，选取的 MR 序列需要对我们所研究的参数敏感，如 T1，T2 等。第二，在 数据采集过程中，采集参数如偏转角，重复时间等需要连续随机变化。第三，每隔 TR 时刻，使用伪随机下采样进行信号采集。这样做的目的是使不同参数的组织可以产生独特的信号演化，我们 称之为指纹，即每个指纹中包含着不同组织的参数信息，以便在后面进行参数图重建。 由于高度的下采样，图像中存在着感强烈的伪影。MRF 重建的目标即是从指纹图像中重建出参数图。

目前常用的 MRF 序列主要有两种。Ma等在MRF 的第一篇文章中使用了平衡稳 态自由进动序列(balanced steady state free precession, bSSFP)，因为目前对 bSSFP 序列的研究最充分。bSSFP 对 T1，T2 和 B0 敏感，并且具有高信噪比、高扫描效率的性质。对于 MRF 来说，bSSFP 是一个适合的序列。另一种常用的序列为 FISP 序列，或者称为非平衡稳态自由进动序列(unbalanced steady state free precession, uSSFP)。 这个序列的特点是在每个 TR 结束之前，加上了一个非平衡的梯度场。Jiang等首先将 uSSFP 序列应用到了 MRF 上 uSSFP 序列有助于消除带状伪影，但是其只对 T1 和 T2 敏感，对 B0 不敏感，因此不能获得 B0 的参数图。

2. 字典生成

MRF 字典中包含了不同参数的组织在 MR 序列中的模拟信号演化，字典中的每一 个原子都包含着一组组织参数。因此，MRF 的精度取决于生成字典所用的模型的精度 和字典的大小。如果字典过小，则会导致重建参数图结果不精确;如果字典过大，生成 字典和之后的匹配算法所需的时间就会增多。因此，需要在字典大小和重建速度之间寻 找平衡。一般来说，对于一个给定的 MRF 序列来说，字典只需要生成一次，并且在之后 的应用中保持不变。需要指出的是，MRF 的字典和字典学习中的字典是不同的。MRF 中字典的原子是组织的时间演化曲线，字典学习中字典的原子是基于图像块的特征。

目前生成字典主要有两种数学模型。Ma使用了简单的 Bloch 方程来模拟 bSSFP 序列中射频场和时序对于单一等色子(isochromat)的影响。模型假设指纹中的 每个体素都由单一等色子构成。Bloch 方程也可以应用在 uSSFP 中，但是会消耗更多 的时间。这是因为在 uSSFP 中，由于非平衡梯度场的存在，指纹中的每个体素都是多 个等色子的平均。因此 Bloch 方程在处理 uSSFP 时的效率不高。

扩展相图(extended phase graph, EPG)是模拟 uSSFP 的另一种常用的模型。 EPG 将体素内的自旋系统中描述为离散的 状态矩阵，可以有效地表示自旋系统在非平衡梯度场的影响下随时间的演化。EPG 的另一个好处是可以在原有模型的基础上，加上其他参 数的影响，如 B0，B1+，磁化转移(magnetization transfer)等。因此 EPG 在 MRF中有着广泛的应用。但是由于 EPG 模型需要计算和存储等色子的状态矩阵，EPG 的运行速度通常比较慢。

1. 参数图重建

MRF 的最后一步是选择合适的匹配算法，将采集到的指纹信号和生成的字典进行 匹配，重建参数图。因此参数图的准确性取决于匹配算法的是否对噪声和下采样伪影具 有鲁棒性。由于 MRF 数据维度一般很大，匹配算法所消耗的时间一般很多。因此目前 MRF 的研究重点在于不降低参数图质量的情况下加速匹配算法。参数图的重建算法一 般可以分成以下四大类。

Ma使用了模板匹配(template matching)的方法来重建参数图。对于每个指纹体素，模板匹配从字典中选择与该体素最配的原子，从而获得该体素的参数值。模板匹配的方法可以精确地重建参数图，并且对噪声和伪影有鲁棒性。通过简单的计算可以看出，模板匹配的计算复杂度正比于字典大小、信号长度和体素个数。一般来说，MRF 信号的时间点 L 通常在 1,000 以上，字典的 个数通常在 10,000 以上，而体素的个数也会达到 10,000 以上。所以模板匹配所消耗的时间长，使用 MALTAB 软件在 CPU 上运行通常需要几十分钟甚至几小时。因此，虽 然模板匹配的方法可以精确地重建参数图，在临床中需要更快速的方法来重建参数图。

第二类方法是降维的思想，先对字典或者数据进行降维处理，然后在降维后的字 典和数据上进行匹配。这类方法本质上是对模板匹配的近似。Cauley 等利用了分组 (grouping)的思想进行 MRF 参数图重建。算法先将字典中的原子分成若干组，使得组 内的原子高度相关，并且用组内所有原子的均值来表示这个组的指纹信号，然后再将指 纹数据与分组之后的字典进行匹配。该算法大大加速了字典匹配的速度，但是由于依然 需要生成字典，字典生成的时间并没有减少。McGivney等人提出了利用奇异值分解(singular value decomposition, SVD)的方法将字典和指纹数据投影到一个低维子空间， 并在子空间中进行匹配。这个方法本质上是压缩了时间方向的维度 L，从而提高了运算 速度。但是这种方法依然需要生成和存储字典，并且相比于模板匹配存在重建误差。

第三类方法是将压缩感知理论应用到 MRF 中，在重建模型中给参数图加上一些先 验信息，以此提高 MRF 的重建效果。Davies等给出了使用压缩感知进行 MRF 重 建的一般框架，将信号的 Bloch 响应流型描述成连续信号，并在这个流型上进行下采样。Cline等改进了 Davies 的模型，将 B0 先验信息加入到了模型中，并用基于压 缩感知的迭代算法求解模型。Pierre等提出了迭代多尺度 MRF 重建算法。该方法 利用了 k-space 的先验信息，在数据项和模式识别之间迭代计算直到收敛。Wang等 使用了基于小波变换的压缩感知框架对指纹数据的每一帧进行估计，然后再将重建后的 图像和字典进行匹配。 综合以上方法可以看出，基于压缩感 知的 MRF 重建在一定程度上取得了良好的效果，主要体现在减少采集时间和提高参数图的精度。

最后一大类方法是利用深度学习的框架来重建参数图。Cohen等利用全连接网络(fully connected neural network, FCNN)来训练和重建参数图, Hoppe和 Fabian等构建了 MRF 的卷积神经网络。虽然这些深度神经网络取得了一定的效 果，但是由于网络均使用了监督学习方法，训练所需的真实值依旧由模板匹配生成。因 此，网络学习的效果也取决于模板匹配的准确性。

综上所述，MRF 参数图的重建需要在精度与速度之间寻求平衡。模板匹配是最基 本的重建方法，重建的参数图的精度最高，但是计算比较耗时。降维和深度学习的方法 提高了重建的速度，但重建的参数图不可避免地存在误差，而且没有解决字典生成速度 慢的问题。压缩感知的方法可以减少扫描时间，但其重建的参数图同样误差偏高。