

分类号 TP301

密级

UDC 620

编号

进化策略算法研究及其在气象优化

问题中的应用

(南京信息工程大学理学硕士学位论文)

培 养 单 位: 南京信息工程大学

专 业: 计算机应用技术

申 请 人: 孙 义 杰

指 导 教 师: 耿 焕 同 教 授

二零一一年五月



独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。本论文除了文中特别加以标注和致谢的内容外，不包含其他人或其他机构已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得南京信息工程大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。其他同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了声明并表示谢意。

学位论文作者签名：孙义杰

签字日期：2011年5月27日

关于论文使用授权的说明

南京信息工程大学、国家图书馆、中国学术期刊（光盘版）杂志社、中国科学技术信息研究所的《中国学位论文全文数据库》有权保留本人所送交学位论文的复印件和电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文，并通过网络向社会提供信息服务。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。除在保密期内的保密论文外，允许论文被查阅和借阅，可以公布（包括刊登）论文的全部或部分内容。论文的公布（包括刊登）授权南京信息工程大学研究生部办理。

☒ 公开 ☐ 保密（____年____月）（保密的学位论文在解密后应遵守此协议）

学位论文作者签名：孙义杰

签字日期：2011年5月27日

指导教师签名：Therun J

签字日期：2011.5.28

摘 要

大多数工程实践和科学研究问题最终大都可以归结为优化问题,并且优化问题有着很广泛的应用领域。一些气象问题比如气象反问题以及资料同化问题都属于优化问题的范畴。对气象反问题的研究,有助于提高气象预报模式的准确度;对资料同化问题的研究,有助于提高预报初值的准确度。而准确的预报模式和准确的初值正是提高数值天气预报准确度的前提条件。因此,对这两方面研究有着重要的科学意义和应用价值,有利于提高我国的数值预报水平,达到防灾和减灾的目的,并为经济发展与社会稳定提供强有力的保障。

本研究紧紧围绕进化策略算法与气象优化问题,进行较深入的探索研究,并取得相应的研究成果。具体而言,本文的工作主要有以下三个方面:

1. 针对进化策略算法。应用进化策略算法求解非线性方程组时,发现算法有时会陷入局部最优,搜索不到方程组的真实解。讨论排序过程的思想,分析排序过程中存在的问题,提出一种基于目标的排序方法,改进了原有的排序方法,通过数值实验验证了改进后算法的有效性。

2. 针对预报模式参数反演问题。应用进化策略算法研究对预报模式的参数进行反演,在一维扩散方程和 Lorenz-96 模式上进行了数值实验,验证了进化策略算法在求解参数反演问题的可行性。

3. 针对预报初值问题。在对预报资料进行研究时,应用进化策略算法优化其中的目标函数。先在 Lorenz-63 模式和 Lorenz-96 模式上进行了理想个例实验,然后进一步在正压原始方程上做了数值实验,实验结果验证了进化策略算法在资料同化中应用的可行性。

通过对非线性方程组研究,设计了基于目标值的排序方法;对气象优化问题研究时,设计了求解气象优化问题的进化策略算法。这些工作不仅对进化策略算法的研究有着重要的意义,也对进化策略算法的实际优化应用有着重要的意义。

关键词: 气象优化问题, 气象反问题, 资料同化, 进化策略

Abstract

Most of engineering practice and scientific research programs can conversion into optimization problems. The optimization problems have applied in range of areas widely. Meteorological inverse problem and data assimilation are one kind of optimization problems. One side, researching on meteorological inverse problem is benefit for improving accuracy of forecast model. An other side, researching on data assimilation is benefit for accuracy of initial conditions. Both side is benefit for accuracy of numerical weather prediction. So, it is of Science sense and worth. At the same time, it is useful to preparieding before disaster.

By researching the evolution strategy, the dissertation improve the ranking process. what is more, this paper also researches meteorological inverse problem and data assimilation with evolution strategy. In a word, the works discussed in the dissertation will be given as follows:

1. About evolution strategy. Using evolution strategy solving the nonlinear system of equations, we find that the investigation may converg to the local optimum. By analyzing the ranking process, a new ranking process is given.

2. About the model parameter identification problems. Usually, the parameters is hard to determine. In the dissertation, a new meteorological inverse problems solution based on evolutionary strategy is presented. Two ideal numerical experiments are implemented by using the simple pediction models of one-dimensional diffusion equation and Lorenz-96. The result shows that the algorithm is effective.

3. About initial conditions. Data assimilation is just the method for initial conditions. When researching data assimilation, we use evolution strategy to sovlve the object function. Ideal experiments are given on Lorenz-63 and Lorenz-96. What is more, this dissertation do the numerical experiments on barotropic primitive equations, the resule shows that evolution strategy is effective.

In the dissertation, two questions are discussed. By research nonlinear system of equations, an improved ranking method is proposed. When research meteorological optimization problem, evolution strategy is desigend. The works in this dissertation are very important to the research of the evolutionary strategy and the optimization applications in the real world.

Keywords: meteorological optimization problem, meteorological inverse problem, data assimilation, evolutionary strateg

目 录

第一章 绪 论	1
1.1 研究目的和意义	1
1.2 进化算法介绍	2
1.3 资料同化介绍	4
1.3.1 资料同化方法介绍	4
1.3.2 资料同化研究现状	6
1.4 本论文研究内容	7
1.5 本论文组织安排	8
1.6 本章小结	8
第二章 进化策略算法研究	9
2.1 进化策略算法介绍	9
2.2 进化策略算法基本原理	9
2.3 处理带约束问题的进化策略	11
2.4 本章小结	12
第三章 改进的进化策略算法及其在非线性方程组求解问题中的应用	13
3.1 非线性方程组的定义	13
3.2 进化策略求解非线性方程组存在的主要问题	14
3.2.1 非线性方程组求解过程	14
3.2.2 问题分析	14
3.3 基于适应度的个体概率排序方法	17
3.4 数值实验分析与讨论	19
3.5 带随机排序的进化策略算法研究	20
3.6 本章小结	24
第四章 进化策略算法在预报模式参数反演中的应用	25
4.1 微分方程反问题介绍	25
4.2 微分方程中的反问题求解到函数优化的转化	27

4.3 一维扩散方程中的参数反演实验	28
4.4 LORENZ-96 模式中的参数反演实验	30
4.5 本章小结	31
第五章 进化策略算法在资料同化中的应用	32
5.1 基于进化策略算法的初始场反演	32
5.2 基于进化策略算法的三维变分方法	36
5.3 理想个例实验及分析	37
5.3.1 Lorenz-63 模式中的实验结果与分析	39
5.3.2 Lorenz-96 模式中的实验结果与分析	41
5.4 基于正压原始方程的数值实验	42
5.4.1 正压原始方程介绍	42
5.4.2 实验分析与讨论	44
5.5 本章小结	48
第六章 总结与展望	49
参考文献	50
致 谢	54
作者简介	55
附录 1 标准测试函数	56

第一章 绪论

1.1 研究目的和意义

由于人类活动导致气候改变,灾害性天气在数量上和程度上都比以前增加了,如热浪、风暴和洪水的发生频率显著增长,已经严重影响到社会的平衡发展和人类的生活方式。准确的气象预报有助于人类抗灾、减灾,达到社会稳定发展的目的。

天气预报已从传统的理论方法,发展到了今天以大气科学理论为基础、综合运用科技手段。随着这科学技术的不断发展,数值天气预报技术取得了很大的进步,气象预报水平在不断提高,气象预报与我们社会生活息息相关,成为日常生活中不可或缺的元素。以数值天气预报为基础的综合现代天气预报,为我国社会的稳定发展起了很重要的作用,有利于稳定社会生活,稳定发展经济。

通常准确的天气预报必须满足两个条件:准确的初值和准确的预报模式,即造成预报误差的主要原因是初始条件和预报模式的不准确,因此预报模式的不断完善和高分辨观测资料的不断利用是推动天气预报发展的主要途径^{[1] [2]}。数值预报模式无论是其结构设计还是物理过程方案均在发展和完善之中。通常模式使用时,其中很多参数需要事先设定,往往这些参数的设置取决于经验,通过经验设置的参数对预报结果产生很大的影响,因此对模式中参数进行研究有助于提高预报水平。

另一方面,提高初始资料的准确度也有助于提高数值天气预报水平。气象资料同化是分析处理随空间和时间分布的观测资料为数值预报提供初始场的一个过程,尤其随着观测资料种类增多和观测质量提高,对资料同化技术的研究越来越成为大气科学领域关键的科学问题之一。因此,对气象反问题和资料同化问题的研究具有非常重要的科学意义和应用价值,有利于提高我国中尺度数值模式预报能力和预报水平,达到防灾和减灾的目的。

对于气象类优化问题的研究,目前已有许多求解方法,如一些常用的数值解法:单纯型法、梯度下降法等。但是这些经典算法都存在一定的局限性,往往只能求出问题的局部最优解,或者对初始点的依赖较大。

近年来,智能型算法常被用来研究气象问题。由于这类算法的一些特点,使得该类算法在气象优化问题的研究中取得了较好的结果。

1.2 进化算法介绍

由于众多确定性算法在求解优化问题时,存在诸多的限制。为了解决这类问题,各种启发式算法应运而生,如进化算法,神经网络算法,粒子群算法等,进化算法就是其中最具有代表性的启发式算法之一。这些方法基于生物、社会行为等背景,以适应度为衡量手段,应用概率、统计等随机方式,使得群体进化操作。这些方法对所求函数的性质没有太多要求,不需要导数信息等。由于这类算法适用范围广,使用方便,目前已成功用于求解各类优化问题。

进化算法提供了一种求解复杂系统优化问题的通用框架,其基本着眼点是基于对生物进化工程的模拟,设计一种通用的计算模型。进化算法的基本框架如下图^[5]:

算法 Evolutionary Algorithms

1. 设置进化代数计数器 $t=1$;
2. 随机产生初始群体 $P(t)$;
3. 评价群体 $P(t)$ 的适应度;
4. 个体重组操作: $\text{Recombination}[P(t)] \rightarrow P'(t)$;
5. 个体变异操作: $\text{Mutation}[P'(t)] \rightarrow P''(t)$;
6. 评价群体 $P''(t)$ 的适应度;
7. 个体选择复制操作: $\text{Reproduction}[P(t) \cup P''(t)] \rightarrow P(t+1)$;
8. 终止判断条件。若不满足终止条件,则 $t=t+1$, 转到第 4 步; 若满足终止条件, 则输出当前最优个体, 算法结束。

图 1-1 进化算法框架图

进化算法通过模拟生物自然选择与自然进化的随机搜索算法,它有以下一些特点:

1. 智能性: 进化算法的智能性包含自组织、自适应、自学习等特点。
2. 多解性: 进化算法是基于群体进化搜索的,所以在每个进化阶段都可能存在多个较优解。因此,进化算法适用于多峰值问题。
3. 全局优化: 进化算法是基于群体搜索的,而群体散布于整个搜索区域,复盖面大,利于全局优化,较容易找到全局最优解。
4. 稳健性: 进化算法根据适应值的信息进行搜索,不需要问题的导数等与问题相关的信息,不依赖于求解问题的特定领域知识。
5. 并行性: 进化算法具有一种天然的并行结构,均适合于在并行机或局域网环境中进行大规模复杂问题的求解。

正由于上述提到的诸多优点,使其广泛应用于诸多学科与领域。下面给出进化算法一些主要的应用领域:

1. 函数优化^[6-10]。函数优化是进化算法的经典应用领域,也是对进化算法进行性能评价的常用算例。很多人构造出了各种各样的复杂形式的函数,有连续的也有离散的,有凸函数也有凹函数,有低维的也有高维的,人们用这些几何特性各异的函数来评价进化算法的性能。而对于一些非线性、多模型、多目标的函数优化问题,用其它优化方法较难求解,进化算法却可以方便的得到较好的结果。

2. 组合优化^[11-13]。随着问题规模的扩大,组合优化问题的搜索空间急剧扩大。对于这类复杂问题,人们已意识到应把精力放到寻求其满意解上,而进化算法则是寻求这种满意解的最佳工具之一。实践证明,进化算法对于组合优化中的 NP 完全问题非常有效。例如,进化算法已经在求解旅行商问题、背包问题、图形划分问题等方面得到成功的应用。

3. 生产调度问题^[14-15]。生产调度问题在许多情况下所建立起来的数学模型难以精确求解,即使经过一些简化之后可以求解,也会因简化太多而使得求解结果与实际相差甚远。进化算法已成为解决复杂调度问题的有效工具,在生产规划,任务分配等方面进化算法都得到有效应用。

4. 自动控制在自动控制领域中许多与优化相关的问题需要解决,进化算法的应用日益增加,并显示了良好的效果。例如用进化算法进行航空控制系统优化、人工神经网络的结构优化设计和权值学习、基于进化算法的参数识别等。

5. 机器人智能控制^[16-20]。进化算法已经在移动机器人路径规划、关节机器人运动轨迹规划、机器人逆运动学求解等方面得到应用和研究。

6. 图像处理和模式识别^[21-24]在图像处理过程中,如扫描、特征提取、图像分割等不可避免地会产生一些误差,这些误差会影响图像处理和识别的效果。如何使这些误差最小是使计算机视觉达到实用化的重要要求。进化算法在图像处理中的优化计算方面是完全胜任的。目前已在图像恢复、图像边缘特征提取、几何形状识别等方面得到了应用。

7. 人工生命^[25-28]。人工生命与进化算法有着密切的关系,基于进化算法的进化模型是研究人工生命现象的重要理论基础。进化算法已在其进化模型、学习模型、行为模型等方面显示了初步的应用能力。

8. 机器学习^[29-31]基于进化算法的机器学习,特别是分类器系统,在许多领域得到了应用。例如,遗传算法被用于模糊控制规则的学习,利用遗传算法学习隶属度函数,从而更好的改进了模糊系统的性能。基于遗传算法的机器学习可用于调整人工神经网络的连接权。分类器系统在多机器人路径规划系统中得到了成功的应用。

以上是对进化算法的介绍,下面将对资料同化研究做简单的介绍。

1.3 资料同化介绍

1.3.1 资料同化方法介绍

数值天气预报水平的高低已经成为衡量世界各国气象事业现代化程度的重要标志^[32]。数值天气预报是一个初/边值问题,在给定初始条件和边界条件的情况下,数值求解大气运动基本方程组,由已知的初始时刻大气状态预报未来时刻大气状态。资料同化就是一种将观测资料和短期预报结果统计结合以产生初值的方法。利用各种观测资料以及由模式得到的解(常称为背景场);通过同化过程产生的能够相对准确反映真实情况的一种最优估计,称之为最优分析场^[33-34]。

在资料同化的研究过程中,主要方法有:

1. 多项式插值法。多项式插值法的主要思想是将分析区域划分为许多小的区域,对于某一个小区域 A,用一个多项式来拟合 A 内的气象观测资料。通常使用 A 内的观测资料通过最小二乘法确定多项式的系数。通过将格点的坐标代入该多项式,得到的值就是分析值。

Gilehrist 和 Cressman(1954)^[35]在 Pano 伪 ky 方法的基础上,针对其中不同区域间分析的不连续性,提出了局地多项式插值方法。

2. 逐步订正法。Bergthersson 和 Doos^[36]指出客观分析中应该给出所有格点的初估值来弥补观测的不足,由此发展了逐步订正法^[37]。

逐步订正法采用了短期预报的结果作为初估场,而后继续插入观测,使用这些观测以及给定的影响半径对初估场进行一次订正,然后使用订正后的分析场作为下一次订正的初估场,同时缩小影响半径,进行下一次订正。

$$f_i^0 = f_i^b$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \frac{\sum_{k=1}^{K_i^n} w_{ik}^n (f_k^o - f_k^n)}{\sum_{k=1}^{K_i^n} w_{ik}^n + \varepsilon^2} \quad (1-1)$$

其中 f_i^b 是背景场在第 i 个格点上的值, f_i^0 是格点 i 上零次迭代估计值, f_i^n 是格点 i 上第 n 次迭代估计值, f_k^o 是格点 I 周围的第 K 个观测, ε^2 是观测误差协方差与背景方差协方差的比率的估计。 K_i^n 是距离格点 i 为 R_n 内的观测值总数, w_{ik}^n 为权重。

3. 最优统计插值法。最优统计插值法最早是由控制论的创始人 Wiener^[38]为了解决平稳时间序列的内插问题在 1949 年提出的。Eliassen 在 1954 年推导出观测值和背景场向量的最优统计插值法方程, Bengtman^[39]等在 1951 年进行引用。但是,在 1963 年前苏联的 Gandin 通过引入统计方法,独立推导出多元最优统计插值方程,提出最优统计插值法

(OI), 并第一次将其用于客观分析。Rutherford 和 Schlatter 将该方法扩展到位势高度和风场的多元分析。Lorenc 在 1981 年用矩阵的形式提出了包括高度场、风场和温度场在内的真正意义上的三维最优统计插值方法, 并最终在欧洲中期数值预报中心得以实现。Lorenc 提出了三维变分 (3D-Var) 同化方法并指出 OI 和 3D-Var 是等价的

最优统计插值法的提出使得资料同化方法有了理论基础—统计估计理论, 是资料同化方法发展道路上的一个重要里程碑。

4. 三维变分同化方法。三维变分同化方法通过构造一个模式初始场的代价函数, 该代价函数反映了在给定的时间空间范围内, 分析场与背景场及观测资料的差异。然后通过求解此代价函数, 使得一个测量分析变量与背景场和观测场距离的代价函数达到最小值^[40]。

三维变分同化中代价函数定义为:

$$J(X) = \frac{1}{2}(X - X_b)^T B^{-1}(X - X_b) + \frac{1}{2}(y_o - H(X))^T R^{-1}(y_o - H(X)) \quad (1-2)$$

其中 X 是分析变量; X_b 是背景场; y_o 是观测值; B 是背景场误差协方差矩阵; R 是观测场误差协方差矩阵; H 是观测算子。三维变分分析问题的求解就是寻求最优的分析场 X , 使得上述由背景项和观测项构成的代价函数值极小。

三维变分同化目前在实际的应用中已相当流行, 其原因一方面是它的概念十分简单, 另一方面是它能通过提供算子及相应的切线性伴随这种简单的方式使用复杂的观测算子。此外只要保证目标函数是严格凸的, 在三维变分同化中还可以使用弱的非线性观测算子。另外一个优点是, 三维变分同化系统实现时能够加上较弱的约束, 如平衡特性。

1996 年 1 月底, ECMWF 使用基于三维变分分析方法的同化方案, 取代已经应用于实际业务预报的最优统计插值同化方法。

5. 四维变分方法^[41]。四维变分方法是三维变分方法在时间维上的拓展, 在同化过程中包含了模式的动力学过程, 指出了大气和预报误差在时间上的发展, 考虑观测资料在时间上的分布。四维变分同化方法中的代价函数如下:

$$J(X) = \frac{1}{2}(X - X_b)^T B^{-1}(X - X_b) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - H_i(X_i))^T R_i^{-1}(y_i - H_i(X_i)) \quad (1-3)$$

上式中各个物理量的意义与三维变分中的代价函数相同。

在 90 年代早期, 四维变分同化被认为是最有发展潜力的同化方法, 人们大力发展新的基于变分方法的预报系统。但是由于变分资料同化方程复杂、计算量太大, 仅能

在一些数值实验上进行。随着高性能计算机的发展以及四维变分同化方法的不断改进,才使得四维变分同化业务成为现实。

6. Kalman 滤波^[42]。Kalman 滤波是 Kalman 和 Bucy 两位科学家在 1960 年提出的,随后在自动控制领域得到了广泛的应用。以分析误差的最小方差为标准的一种递归资料处理方法。Kalman 滤波资料同化方法特点是能够不断地将观测资料同化到模式系统中,以数值模式为动力约束条件,在使观测和模式结果误差方差达到最小的条件下,得到基于以前所有观测和当前观测的系统变量的最优线性估计。

最有发展前景的就是集合 Kalman 滤波法。它把集合的思想与最优控制的理论结合到一起,解决了在资料同化领域中对背景场误差协方差难估计的问题。该算法在理论和实际应用中得到广泛认可,2005 年 Moradkhani 等^[43]在水模型中应用了集合卡尔曼滤波方法;2006 年万利颖^[44]将集合同化方法应用在太平洋海洋高度计同化中。

1.3.2 资料同化研究现状

随着数值模式物理过程的改进和大型计算机的计算能力大幅度提高,使得业务大气模式中可以达到更精细的分辨率和更少的近似表达,数值天气预报技巧飞速提高,其在天气预报中的地位变得越来越重要。事实上,数值天气预报可以归结为一个初/边值问题,即给出对当前大气状态的估计(初值)和合适的边界条件,模式将能模拟(预报)出大气的演变结果(Kalnay, 2005)。但是数值预报模式的预报准确性主要取决于模式物理过程的完善程度及模式初边值的准确程度。目前数值模式物理过程已日臻完善,模式误差得到了有效抑制,而数值模式存在对初值极其敏感的问题(丑纪范, 2002),因此预报初值的精度就成了现代数值天气预报成功与否的关键。

在为数值天气预报模式提供准确、合理的初值问题上,资料同化是十分有效可行的方法。气象资料同化是提高数值天气预报质量的一个重要方面,尤其随着观测资料种类增多和观测质量提高,对资料同化技术的研究越来越成为大气科学领域关键的科学问题之一,而对资料同化方法研究已经成为数值预报领域国内外热点研究问题。

我国学者在资料同化方面也作了很多卓有成效的工作。早在 1958 年,顾震潮(1958)就提出在数值预报中引入历史资料的观点;丑纪范(1961)把数值预报中使用多时刻观测问题转化为等价的泛函极值问题,然后拓广解的概念,引进广义解,并且证明在 Hilbert 空间内,广义解比原来作为初值问题的正规解更接近真实。黄思训等将正则化思想引入到变分同化技术中来,分别在不同的海洋数值模式中进行了同化试验,结果表明,无论是目标函数的下降速度还是迭代收敛速度以及解的精确度都得到了明显的改进。庄照荣(2006)、朱江(2006)

对三维变分中的线性平衡改进为非线性平衡方案,分别应用到大气和海洋资料同化中,能够提高强涡旋系统中三维变分同化分析场的质量。这些研究和探讨对建立完整的数值预报和数据同化系统具有极其重要的指导和借鉴意义。

由于智能型算法的诸多特点,目前已在气象方面得到一定的应用。例如,王顺凤^[3]等设计了基于遗传算法的四维变分资料同化方法;胡娅敏^[56]等设计了基于遗传算法的四维变分资料同化系统,提出一种新的 NWP 初始场优化方法,并在简单的二维浅水方程中进行数值实验,验证了遗传算法在资料同化方法中应用的可行性;常慧琳^[57]等设计基于遗传算法的同化系统,并对云导风资料进行了同化;孙桂平^[58]为 MM5 模式设计了 GA 同化系统。

资料同化是准确描述大气运动初始状态并且预报成功的关键。变分方法作为一种极具发展潜力的资料同化技术受到了世界气象科学家们的重视,并得到充分的理论研究及技术开发。目前变分方法已经成为当今资料同化的主流技术,是气象资料同化发展的主要方向。

1.4 本论文研究内容

大多数工程实践和科学研究问题都可以归结为优化问题,由于各问题自身的不同特点,传统的数值求解方法已难以独立解决。而进化算法作为一种基于群体搜索的智能优化方法,鲁棒性强且具有全局搜索能力,十分适合求解约束优化问题。

本文旨在通过对进化策略算法进行深入研究和探索,讨论分析带随机排序的进化策略算法,设计合理的随机排序过程;对于气象优化问题,将进化策略算法应用于气象反问题及资料同化问题的研究中,并通过实验进行分析。具体而言,本文的工作主要有以下三个方面:

1. 针对进化策略算法。应用进化策略算法求解非线性方程组时,发现算法有时会陷入局部最优,搜索不到方程组的真实解.,分析讨论排序过程中存在的问题,提出一种基于目标的排序思想,改进了原有的排序方法。选取非线性方程组进行数值实验。

2. 针对预报模式参数反演。准确的预报模式有助于提高数值预报精度,而模式中一些重要参数的准确与否对模式有很大程度的影响。将进化策略算法应用于预报模式的参数反演问题中,并在在一维扩散方程和 Lorenz-96 预报模式中进行了理想数值实验。

3. 对于预报初值问题。准确的预报初值是准确的的数值预报的前提条件。应用进化策略算法对预报初值进行研究,先在 Lorenz-96 模式上进行了初始场的反演研究,然后再 Lorenz-63 和 Lorenz-96 模式上进行了理想个例的资料同化实验,进一步的在正压原始方程上进行了数值实验。

1.5 本论文组织安排

本论文其余各章节的组织如下:

第二章主要介绍进化策略算法的主要思想,基本操作以及约束处理技术等;

第三章主要介绍了进化策略算法在非线性方程组求解问题中的应用,通过分析进化策略算法在求解问题中出现的问题,改进了原有的随机排序策略,通过实验验证了改进后的进化策略算法在求解非线性方程组时,具体更高的准确率;

第四章介绍了反问题的基本概念和研究意义。将进化策略算法应用于气息反问题的研究中,通过算法求解出合理的预报模式中的参数。并在一维扩散方程和 Lorenz-96 预报模式上进行了数值实验,实验结果验证了进化策略算法在气象反问题研究中可行性;

第五章介绍了气象资料同化问题,给出了进化策略算法在资料同化问题研究中的方法,通过在 Lorenz-63 模式与 Lorenz-96 模式上的理想个例实验,在正压原始方程中的数值实验,验证了进化策略算法在资料同化问题研究中应用的可行性;

第六章是总结与展望,总结本论文的工作,并展望了下一步研究内容。

1.6 本章小结

本章首先介绍本论文的研究立足点,指出了两类气象优化问题:气象反问题和气象资料同化问题的研究价值和研究意义,分析了求解优化问题的数值解法的不足之处,采用了智能型算法中的进化算法研究上述两类优化问题。然后介绍了进化算法和气象资料同化问题的研究背景,接着给出了本论文的研究内容,最后介绍了本论文的组织安排。

第二章 进化策略算法研究

大多数工程问题和科学研究问题都可转化为优化问题，如何准确求解这些优化问题，一直都是学术界和工程界关注的焦点问题。而进化策略算法（Evolutionary Strategy，简称 ES）作为一种基于群体搜索的全局优化算法，十分适合求解复杂优化问题。

下面将对进化策略算法进行详细的介绍。

2.1 进化策略算法介绍

进化策略（Evolution Strategy，简称 ES）^[45]是由德国柏林技术大学的两名学生 I.Rechenberg 和 H.P.Schwefel 在设计一种能够评测在风洞中可弯曲的三维物体最小变形的设备时提出的。当初开发进化策略的主要目的是为了求解多峰值非线性函数的最优化问题。随后，人们根据算法的不同选择操作机制提出了许多不同种类的进化策略，这些不同的进化策略在很多工程问题上都得到了一定程度的应用。另外，有关进化策略的一些理论研究也取得了很多具有积极意义的进展。

2.2 进化策略算法基本原理

进化策略不同于遗传算法，它直接在解空间上直接操作，强调的是搜索方向和步长的自适应调节。进化策略主要适合于求解数值优化问题，非线性问题。但近年来，由于遗传算法也采用浮点数编码技术来求解数值优化问题，这样进化策略与遗传算法之间的相互渗透已使两者之间没有了明显的界限。

进化策略的主要技术如下：

1. 个体表示方法。在进化策略中，搜索空间是一个 n 维空间，与此相对应，搜索点就是 n 维向量 $x \in R^n$ 。算法中，组成进化群体的每一个个体都是由两部分组成的，其中一部分是可以取连续值的向量，另一部分是一个微小的变动量。这个变动量是由步长 $\sigma \in R^n$ （正态分布的标准偏差）和回转角 $\alpha \in R^{n(n-1)/2}$ （正态分布的协方差）所组成的，它们可以用来调整对个体进行变异操作时变异量的大小和方向。即群体中的每一个个体 X 可表示为：

$$X = \{x, \sigma, \alpha\} \quad (2-1)$$

这样对于每一个个体 X ，它都是空间 I 中的一个点，即：

$$X \in R^{n+n(n-1)/2+n} = R^{n+n(n+1)/2} \quad (2-2)$$

一般情况下可以不考虑回转角这个参数，则有：

$$X \in I = R^{2n} \quad (2-3)$$

2. 适应度函数。在进化策略中，设定每个个体的适应度函数值就等于其所对应的目标函数值，而不再对所求优化问题的目标函数值进行变化，即：

$$F(X) = f(x) \quad (2-4)$$

这主要是由于进化策略中的选择中每次都是从当前群体中选择一个或多个适应度值较高的个体保留到下一代群体中，因此只是个体适应度之间大小关系的比较运算。

3. 变异算子。在进化策略中，变异操作是产生新个体的一种最主要的方法。假设群体中某一个个体 $X = \{x, \sigma\}$ 经过变异运算后得到一个新的个体 $X' = \{x', \sigma'\}$ ，则新个体的组成元素是：

$$\begin{aligned} \sigma'_i &= \sigma_i \cdot \exp[\tau \cdot N(0,1) + \tau' \cdot N_i(0,1)] \quad (i=1,2,\dots,n) \\ x'_i &= x_i + N(0, \sigma'_i) \quad (i=1,2,\dots,n) \end{aligned} \quad (2-5)$$

式中， $N(0,1)$ 表示均值为 0，方差为 1 的正态分布随机变量； τ 和 τ' 表示算子集参数，分别表示变异操作时的整体步长和个体步长。

4. 交叉算子。在进化策略中，交叉操作只是一种辅助的搜索运算。假设 $X_a = \{x_a, \sigma_a\}$ 、 $X_b = \{x_b, \sigma_b\}$ 为群体中随机配对的两个个体，则对这两个个体进行交叉操作后可产生出一个新的个体 $X'_a = \{x'_a, \sigma'_a\}$ ，其中的元素 x'_a 可按照下列方式之一来确定：

a. 无交叉： $x'_a = x_a$

b. 直接交叉：
$$x'_a = \begin{cases} x_a & (\text{if } \text{random}(0,1) = 0) \\ x_b & (\text{if } \text{random}(0,1) = 1) \end{cases}$$

c. 加权平均交叉： $x'_a = x_a + \theta (x_b - x_a)$

5. 选择算子。与遗传算法不同，在进化策略中，选择操作时按照一种确定的方式进行的。目前在进化策略中所使用的选择方法有如下两类：

一类是从 λ 个父代中选择出 μ ($\mu \in [1, \lambda]$) 个最优秀的个体，将它们保留到子代群体中。这类选择方法记为 (μ, λ) -ES 进化策略。

另一类是将 μ 个父代个体和其所产生的 λ 个个体合并在一起，并从这合并而成的 $\mu+\lambda$

个最优秀的个体，将它们保留到子代群体中。这类选择方法记为 $(\mu+\lambda)$ -ES 进化策略。

本文主要研究 (μ, λ) -ES 进化策略。

从上述进化策略的主要技术构成，可以总结出，进化策略具有下面的一些主要特点：

1. 进化策略以 n 维实数空间上的优化问题为主要目标；
2. 进化策略的个体中含有随机扰动因素；
3. 进化策略中各个个体的适应度直接取自它所对应的目标函数值；
4. 个体变异运算是进化策略中所采用的主要搜索技术；
5. 进化策略中的选择运算时按照确定的方式进行的。

2.3 处理带约束问题的进化策略

通常，大部分的优化问题都带有约束条件。对约束条件处理，目前有不少方法。包括惩罚函数法和随机排序方法。

惩罚函数法：惩罚函数法是处理带约束问题常用的方法。但是这种方法存在着一定的缺陷，如惩罚系数的准确设置十分困难，往往需要多次试验来确定。惩罚设置的过大或者过小都会影响到算法的性能。若惩罚系数设置过大，将会忽略对不可行个体的合理利用。若惩罚系数设置得过小，群体的收敛速度可能会降低，甚至可能出现不收敛的现象。

随机排序方法：Runarsson 和 Yao 针对带约束的优化问题，提出了随机排序方法^[46-47]，该方法是目前较为经典的基于进化算法的约束处理技术。它很好的均衡了目标函数与罚函数之间的关系，避免了设置了惩罚系数的过程。算法采用了参数 P_f 表示在不可行区域中仅使用目标函数比较个体的概率，即当比较两个相邻个体时，若两个个体都是可行解，则它们之间按照目标函数值进行比较，否则参数 P_f 将决定是否采用目标函数或约束违反程度来比较个体。经过大量的实验验证，在 $P_f=0.45$ 时，算法可以取得理想的优化结果。随机排序思想如图 2-1 所示：

```

1. For i=1 to N do
2.   For j=1 to N-1 do
3.     Sample  $u \in U(0, 1)$ 
4.     If  $(\phi(I_j) = \phi(I_{j+1}) = 0 \text{ or } (u < P_f))$  then
5.       If  $(f(I_j) > f(I_{j+1}))$  then
6.         Swap( $I_j, I_{j+1}$ )
7.       Else
8.         If  $(\phi(I_j) > \phi(I_{j+1}))$  then
9.           Swap( $I_j, I_{j+1}$ )

```

```
10.      End
11.      If no swap done break
12. End
```

图2-1 随机排序策略

其中， N 表示群体规模， u 表示产生的满足一致分布随机数， P_r 表示随机排序概率， I_j 表示进化个体， $\varphi(I_j)$ 表示个体 j 的罚函数值， $f(I_j)$ 表示个体 j 的目标函数值， $\text{Swap}(I_j, I_{j+1})$ 表示交换相邻个体 I_j 和个体 I_{j+1} 。

2.4 本章小结

本章主要介绍了进化策略算法的基本概念，进化策略算法的基本操作及原理，并给出其框架。最后介绍了进化策略算法对带约束问题的处理机制，即随机排序策略。

第三章 改进的进化策略算法及其在非线性方程组求解问题中的应用

非线性方程组的求解一直是科学技术和工程应用中的一个重要问题,如在数值气象预报、石油地震勘探、计算生物化学、计算空气动力学等领域^[48,49]。传统的数学方法包括牛顿迭代法、梯度下降法等方法。但这些方法对方程组具有较高的特性要求,例如牛顿迭代法的收敛性在很大程度上敏感于初始点的选择,初始点选取的好坏将直接影响算法收敛的成败,而对于很多非线性方程组来说,初始点的选择十分困难。而梯度下降法要求方程组可导,但对于一些非线性方程组,很难求其导数或者其导数不存在。所以用这些方法求解一些非线性方程组还存在很大的障碍^[50,51]。

3.1 非线性方程组的定义

在实际应用中,许多工程问题都可转化为非线性方程组的求解问题。下面给出一般非线性方程组的定义,其由 m 个方程组成,包含 n 个控制变量:

$$\begin{cases} f_1(X) = b_1 \\ f_2(X) = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ f_m(X) = b_m \end{cases} \quad (3-1)$$

其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset R^n$, b_1, b_2, \dots, b_m 为常数。

对于非线性方程组求解问题有很多经典解法,如牛顿法,梯度下降法等等。这些方法对问题本身存在许多局限性。有时对于复杂的非线性方程组,难以求出满意的解。

本质上,我们还是将非线性方程组转化为优化问题来求解。为了便于进化算法求解,一般作如下转化,构造相应的单目标函数:

$$\begin{aligned} F(X) &= F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^m (f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_i)^2 \end{aligned} \quad (3-2)$$

此时,就可将非线性方程组的求解问题转化为下列函数的优化问题:

$$\min_{x \in D} F(X) \quad (3-3)$$

其中 D 是 X 的解空间。

如果在 D 内求得解 X^* , 使得 $F(X^*)=0$; 那么 X^* 为非线性方程组的解。

3.2 进化策略求解非线性方程组存在的主要问题

3.2.1 非线性方程组求解过程

在函数优化方面, 进化策略能够得到较好的结果。下面给出用进化策略求解非线性方程组的具体步骤:

1. 产生初始群体。随机产生初始群体, 群体规模为 μ ;
2. 计算适应度值。对所有个体计算其适应度, 适应度函数为 $F(X)$ 。当最小的适应度值 $F(X)$ 小于等于一个很接近 0 的值 η 时, 算法终止;
3. 对群体进行排序。所有个体按照适应度值的大小进行排序, 适应度值较小的个体排在适应度值较大的个体的前面。
4. 选择。当 3 中排序完成后群体中选取前 μ 个个体。
5. 进化。将 4 中选取的 μ 个个体作为父代, 生成 λ 个子代。转到步骤 2。

3.2.2 问题分析

考虑求解下列非线性方程组:

$$\begin{cases} -x_1^3 + 5x_1^2 - x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_2^3 + x_2^2 + -14x_2 - x_1 = 19 \end{cases} \quad (3-4)$$

其中 $x_i \in (0, 10)$, $i=1, 2$ 。

上述非线性方程组的数值解为:

$$\begin{cases} x_1 = 5.0 \\ x_2 = 4.0 \end{cases} \quad (3-5)$$

对上述非线性方程组的例子, 应用进化策略算法求解。算法运行 100 次, 其中参数选取为: 子代规模 $\mu=30$, 产生群体规模 $\lambda=200$, 进化代数 $Gen=200$ 。

算法运行结束时, 搜索到的结果如下表所示:

表 3-1 进化策略搜索结果

搜索到的结果	搜索到此结果的次数
--------	-----------

$\begin{cases} x_1 = 5.0 \\ x_2 = 4.0 \end{cases}$	77
$\begin{cases} x_1 = 0.0977 \\ x_2 = 3.8725 \end{cases}$	23

已知解 $(x_1, x_2) = (5.0000, 4.0000)$ 为正确解。对于进化策略算法搜索到的另一个解 $(x_1, x_2) = (0.0977, 3.8725)$ ，令其为个体 y ，计算个体 y 的适应度值 $F(y)$ ，再计算其附近大量个体的适应度值 $F'(y)$ ，令 $dif = F'(y) - F(y)$ ，将个体 y 及其附近点的 dif 描绘出来。得到结果如下图：

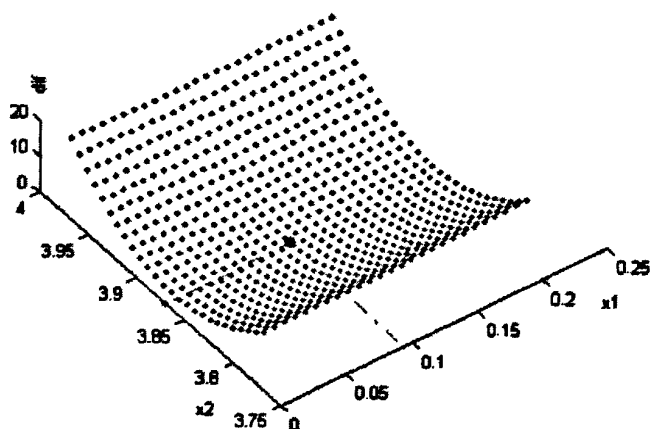


图3-1 局部最优解 y 与其附近解的比较

图 3-1 底部最大的点表示个体 y ，其余各较小点表示为个体 y 周围的点。从图中可以明显的看出图中所有较小点处的 dif 均大于 0，即在个体 y 附近的所有个体中，个体 y 的适应度值最优秀，但是将个体 y 的值代入目标函数 $F(x)$ 中，得 $F(x) = 22.09 > 0$ ，说明个体 y 不是非线性方程组的正确解，进化策略算法没有搜索到非线性方程组的正确解。此实验验证进化策略算法的优化确实个体 y 处陷入局部最优。

在求解问题的过程中，现有的进化策略算法存在不足。通过分析发现现有的个体比较方法存在不足，没有考虑进化过程中，不同方程优化目标间的冲突问题，从而导致易陷入局部最优，无法使目标函数为零，即无法求得原方程的解。为了描述方便，以两个非线性方程构成的方程组为例，分析现有个体比较方法存在的问题。

令非线性方程组为：
$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_2 \end{cases}$$
，设有两个个体 X_1, X_2 。

为了便于描述，对个体 X_1 ，令

$$\begin{cases} F_1(X_1) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_1)^2 \\ F_2(X_1) = (f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_2)^2 \end{cases} \quad (3-6)$$

对个体 X_2 , 令

$$\begin{cases} F_1(X_2) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_1)^2 \\ F_2(X_2) = (f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_2)^2 \end{cases} \quad (3-7)$$

因此, 得到适应度函数如下:

个体 X_1 的适应度函数	$F(X_1) = F_1(X_1) + F_2(X_1)$
个体 X_2 的适应度函数	$F(X_2) = F_1(X_2) + F_2(X_2)$

在得到 2 个个体适应度函数后, 进一步比较 2 个个体的不同方程优化目标时, 会出现如下的 6 种情况:

1	$\begin{cases} F_1(X_1) \geq F_1(X_2) \\ F_2(X_1) \geq F_2(X_2) \end{cases} \text{ 且 } F(X_1) \geq F(X_2)$
2	$\begin{cases} F_1(X_1) \leq F_1(X_2) \\ F_2(X_1) \leq F_2(X_2) \end{cases} \text{ 且 } F(X_1) \leq F(X_2)$
3	$\begin{cases} F_1(X_1) \geq F_1(X_2) \\ F_2(X_1) \leq F_2(X_2) \end{cases} \text{ 且 } F(X_1) \leq F(X_2)$
4	$\begin{cases} F_1(X_1) \leq F_1(X_2) \\ F_2(X_1) \geq F_2(X_2) \end{cases} \text{ 且 } F(X_1) \leq F(X_2)$
5	$\begin{cases} F_1(X_1) \geq F_2(X_2) \\ F_1(X_1) \leq F_2(X_2) \end{cases} \text{ 且 } F(X_1) \geq F(X_2)$
6	$\begin{cases} F_1(X_1) \leq F_1(X_2) \\ F_2(X_1) \geq F_2(X_2) \end{cases} \text{ 且 } F(X_1) \geq F(X_2)$

由于第 5、6 种情况和第 3、4 种情况类似, 故仅考虑第 3、4 种情况。

对于第 1 种情况, 个体 X_1 的第一维目标 $F_1(X_1)$ 大于个体 X_2 的第一维目标 $F_1(X_2)$, X_1 的第二维目标 $F_2(X_1)$ 大于 X_2 的第二维目标 $F_2(X_2)$, 因此有个体 X_1 的目标函数值 $F(X_1)$ 大于个体 X_2 的目标函数值 $F(X_2)$;

同理在第 2 种情况下, 个体 X_1 的 2 个目标均小于个体 X_2 的 2 个目标, 故个体 X_1 的目标函数值 $F(X_1)$ 小于个体 X_2 的目标函数值 $F(X_2)$;

对于第 3 种情况, 个体 X_1 的第一维目标 $F_1(X_1)$ 大于个体 X_2 的第一维目标 $F_1(X_2)$, X_1 的第二维目标 $F_2(X_1)$ 小于 X_2 的第二维目标 $F_2(X_2)$, 并且个体 X_1 的目标函数值 $F(X_1)$ 小于个体 X_2 的目标函数值 $F(X_2)$;

对于第 4 种情况, 个体 X_1 的第一维目标 $F_1(X_1)$ 小于个体 X_2 的第一维目标 $F_1(X_2)$, X_1 的第二维目标 $F_2(X_1)$ 大于 X_2 的第二维目标 $F_2(X_2)$, 并且个体 X_1 的目标函数值 $F(X_1)$

小于个体 X_2 的目标函数值 $F(X_2)$;

对于上述 4 种情况, 为了更直观地描述, 采用图示表示如下:

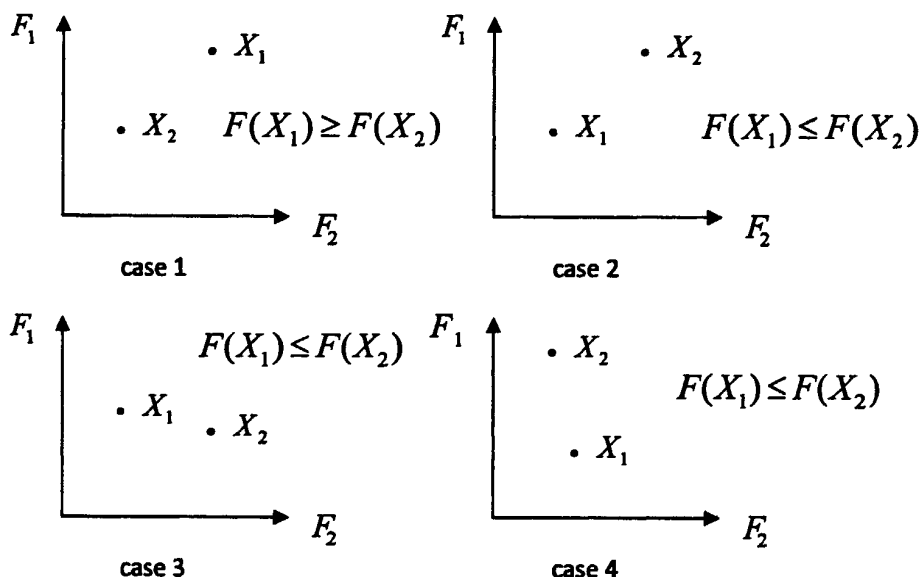


图 3-2 不同目标之间的关系

上图中纵轴为第一维目标 F_1 , 横轴为第 2 维目标 F_2 。改进前的算法会选择按照适应度值 $F(X)$ 大小排序后的前 μ 个个体参与下一代进化。对于第 1、2 种情况, 即在搜索过程中两个目标 $F_1(X)$, $F_2(X)$ 不存在冲突 (同大或同小), 依据现有个体比较方法完全正确。对于第 3、4 种情况, 即在搜索过程中两个目标 $F_1(X)$, $F_2(X)$ 存在冲突 (一大一小), 且满足 $F(X_1)$ 小于 $F(X_2)$, 若依据现有个体比较方法, 将认为个体 X_1 一定优于个体 X_2 , 则排序后个体 X_1 位置在个体 X_2 之前。若个体 X_1 周围有大量与个体 X_2 一样的个体, 则优化将会在个体 X_1 处陷入局部最优。

3.3 基于适应度的个体概率排序方法

分析现有个体比较方法不足, 没有考虑在进化过程中, 不同方程优化目标间的相互冲突问题, 从而易导致陷入局部最优; 为此, 改进现有的排序机制, 提出一种考虑不同方程间存在冲突的个体新排序方法, 基于适应度的个体概率排序方法。

基于适应度的个体概率排序方法: 用个体 X_1 、 X_2 的适应度值构造概率参数 σ ,
$$\sigma = 1 - \frac{F(X_1)}{F(X_1) + F(X_2)}$$
, 随机产生另一参数 $u \in (0,1)$ 。通过比较 u 与 σ 大小对个体 X_1 、

X_2 进行排序, 若 $u \geq \sigma$, 则个体 X_1 排于个体 X_2 之后, 否则个体 X_1 排于 X_2 之前。

新的排序方法在个体比较时, 考虑上述提到的四种情况。在第 1、2 种情况下, 还是按照个体适应度值的大小进行排序; 在第 3、4 种两个目标存在冲突情况时, 利用基于适应度的个体概率排序方法进行排序。若用改进前的排序方法, 个体 X_1 一定排于个体 X_2 之前, 优化易在个体 X_1 处陷入局部最优; 但用改进后的方法, 尽管适应度值 $F(X_1) \leq F(X_2)$, 但个体 X_2 仍有一定几率排于个体 X_1 之前, 优化就难陷入局部最优。若适应度值 $F(X_1) \leq F(X_2)$, 则 $\sigma \geq 0.5$, 此时排序对适应度值小的个体 X_1 更有利, 总体上满足算法选择较优秀个体参与下一代进化这一机制。同时参数 σ 只与个体的适应度值有关, 故改进的排序方法针对由两个非线性方程构成的非线性方程组。若非线性方程组由多个方程组成, 是本文进一步的研究目标, 设计出通用的排序方法。

基于适应度的个体概率排序方法的具体步骤描述如下:

```

 $I_j = j \forall j \in \{1, \dots, \lambda\}$ 
for  $i = 1$  to  $\lambda$  do
  for  $j = 1$  to  $\lambda - 1$  do
    sample  $u \in U(0,1)$ 
    if (  $F_k(X_j) \geq F_k(X_{j+1})$  ) then // case 1
      swap (  $X_j, X_{j+1}$  )
    else if (  $F_k(X_j) \leq F_k(X_{j+1})$  ) then // case 2
      no swap (  $X_j, X_{j+1}$  )
    else // case 3,4,5,6
      if (  $u \geq \sigma$  ) then
        swap (  $X_j, X_{j+1}$  )
      fi
    fi
  od
  if no swap done break fi
od

```

经过 3.2.2 中分析排序时存在的问题, 针对由两个方程组成的非线性方程组, 提出了改进了排序方法。上面的排序方法针对了上文分析的 6 种情况时的个体比较方法。

为了验证改进算法的性能, 进而在 2 个非线性方程组中做了数值实验。

3.4 数值实验分析与讨论

为了测试改进后算法的性能, 采用以下的例子作为方程组:

表 3-2 测试函数

序号	方程组	理论解
1	$\begin{cases} -x_1^3 + 5x_1^2 - x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_2^3 + x_2^2 - 14x_2 - x_1 = 19 \end{cases}$ 其中 $x_1, x_2 \in (0,10)$	$\begin{cases} x_1 = 5.0 \\ x_2 = 4.0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0 \\ x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2^2 + 8 = 0 \end{cases}$ 其中 $x_1, x_2 \in [0,100]$	$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

改进前的进化策略算法（简记为 M1）和改进后的进化策略算法（简记为 M2）都在 MATLAB7.1 上实现，算法独立运行 100 次，实验中算法的具体运行参数如下：子代规模 $\mu = 30$ ，产生群体规模 $\lambda = 200$ ，进化代数 $Gen = 200$ 。

实验结果如表 3-3 所示。

表 3-3 数值实验结果

序号	算法	优化结果	搜索结果
1	M 1	$(x_1, x_2) = (5, 4)$	搜到 77 次
		$(x_1, x_2) = (0.0977, 3.8725)$	搜到 23 次
	M 2	$(x_1, x_2) = (5, 4)$	搜到 100 次
2	M 1	$(x_1, x_2) = (1, 1)$	搜到 33 次
		$(x_1, x_2) = (8, 2.8284)$	搜到 67 次
	M 2	$(x_1, x_2) = (1, 1)$	搜到 78 次
		$(x_1, x_2) = (8, 2.8284)$	搜到 22 次

对例 1 中搜索的解 $(x_1, x_2) = (0.0977, 3.8725)$ ，通过章节 3.2.2 中的图形及分析，证明解 $(x_1, x_2) = (0.0977, 3.8725)$ 是局部最优解。在例 2 中，将解 $z = (x_1, x_2) = (8, 2.8284)$ 代入目标函数 $F(x)$ ，得到 $F(x) > 0$ ，说明 z 不是例 2 的正确解。再对解 z 按照章节 3.2.2 中的方法，画出 z 及其周围大量点的 dif 值，得到结果如下图 3-2 所示。从图中可以看出解 z 确实为例 2 的一个局部最优解。

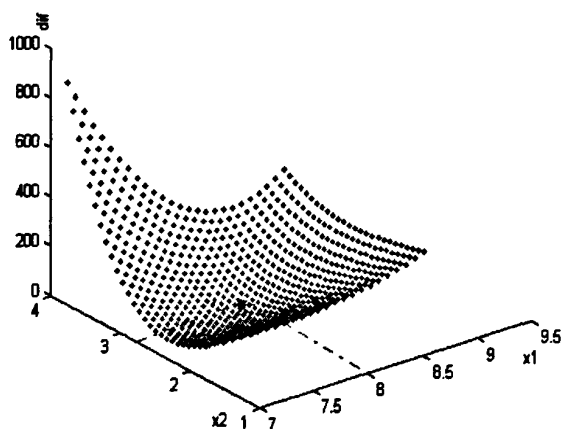
图3-2 局部最优解 z 与其附近解的比较

表 3-3 给出了改进前 M1 算法与改进后的 M2 算法 100 次独立实验结果。在 100 次独立实验中, M1 搜索到非线性方程组正确解的次数要少于 M2, 特别是在求解例 2 时, M1 搜索到正确解的概率在 30% 左右, 而 M2 搜索到正确解的概率接近 80%。由此我们可以得出算法 M2 的搜索结果及搜索成功率均明显优于算法 M1。

而从上面的图中可以看出, M1 算法的搜索过程更容易陷入局部最优, 如在求解例 1 时, 会搜索到局部最优解 $(x_1, x_2) = (0.0977, 3.8725)$; 求解例 2 时, 会搜索到局部最优解 $(x_1, x_2) = (8, 2.8284)$ 。

综上所述, 在求解非线性方程组问题时, 改进后的算法性能确实要优于改进前的算法。说明对算法排序过程的改进是可行的。

3.5 带随机排序的进化策略算法研究

上述求解非线性方程组问题是不带约束的优化问题, 因此在个体比较时, 只需考虑目标函数值间的关系。针对带约束的优化问题, 研究了 Runarsson 和 Yao 提出的带随机排序的进化策略算法, 并对随机排序过程进行了分析。

通过以上分析, 可以看出进化策略中个体比较方法存在不足。个体比较这一过程在算法的排序过程中进行。因此本文对算法的随机排序过程作了进一步的分析。

通常, 在进化过程中, 希望较优秀的个体能作为父代, 用于产生下一代个体。但在进行随机排序时, 群体中较优秀的个体位置有可能比较靠后。当排序结束时, 若这些较优秀个体未被选中作为父代, 那么父代个体的质量将会受到影响, 进而可能会影响算法的性能。为了便于描述, 本文用可行个体替代较优秀个体。

假设现有一规模为 λ 的群体, 群体中唯一的一个可行个体 a 位于群体的最后一个并且其

目标函数值比其余的非可行个体都要大。算法采用 (μ, λ) 策略，群体中唯一的可行个体若要被选为父代，则必须在随机排序结束时能排在前 μ 个。

可行个体 a 的当前位置为 λ ，若要从位置 λ 提前到位置 μ ，只有在个体 a 与其前一个体比较时，产生随机数 $u > 0.45$ ，个体 a 的位置才提前一位，则至少产生 $\lambda - \mu$ 次 $u > 0.45$ ，又 λ 远大于 μ ，必须在剩下的比较过程中不能落到后面，显然这是一个很小的概率。

若将个体 a 放在群体的第一个，只有在个体 a 与其后一个体比较时，产生随机数 $u < 0.45$ ，个体 a 的位置才后退一位；其留在群体前 μ 个位置的概率更大，其成为父代的概率将大大增加。故在进行随机排序操作时，个体在群体中的位置对排序的结果有影响。

为了验证上述结论，以求最小值为例子，设计如下的实验，：

实验1：随机生成两组数 f 与 φ ($\varphi > 0$)，两组数的规模为 N 。表示 N 个不可行个体的目标函数值与惩罚函数值。然后再将数组 φ 上后 M 个数设为 0，同时在数组 f 中选 M 个最大的数，将其位置移到最后，即表示将 M 个目标值最大的不可行个体转化为可行个体，同时将其位置放在群体的最后。再对群体进行随机排序。

实验2：使用与实验1相同的群体，但将 M 个可行个体移到群体的最前面，然后对群体进行随机排序实验。

为了直观的将实验1和实验2中，可行个体与不可行个体位置展示出来。设 P 为所有可行个体的集合，集合 P 中个体数量为 M ； Q 为所有不可行个体的集合， Q 中个体数量为 $N-M$ 。则实验1与2中，可行个体与不可行个体排序值前在群体中位置如下图所示：

Q_1
Q_2
\vdots
Q_{N-M}
P_1
P_2
\vdots
P_M

图3-3 实验1中个体位置

P_1
P_2
\vdots
P_M
Q_1
Q_2
\vdots
Q_{N-M}

图3-4 实验2中个体位置

实验中 N 取 200， M 从 1 取到 10，产生的群体重复排序 q 次 (q 取 10)，实验采用选择策略 $(\mu, \lambda) = (30, 200)$ ，排序结束时前 30 个个体的组成如表 3-4 所示：

M每取值一次,产生的群体独立重复排序10次。在排序结束时,统计10次排序中,可行个体排在前30个位置的比例。所以统计结果中,分母: $\mu * q = 300$,分子为 $\sum_{i=1}^J q_i$,其中 q_i 为每1次排序结束时,前30个个体中可行个体的个数。

表3-4 排序结束时可行个体在前30个个体中所占比例

M/N	理想结果	实验1的结果	实验2的结果
1/200	10/300	0/300	10/300
2/200	20/300	0/300	20/300
3/200	30/300	0/300	30/300
4/200	40/300	0/300	40/300
5/200	50/300	0/300	50/300
6/200	60/300	0/300	59/300
7/200	70/300	0/300	70/300
8/200	80/300	0/300	80/300
9/200	90/300	0/300	89/300
10/200	100/300	0/300	99/300

理想的排序结果是,无论随机排序前可行个体的位置如何,但在排序结束时能使得所有的可行个体都在前30个个体中,这样才能被选为父代,参加下一代的进化,对算法的收敛速度有利。但做实验时情况如下:在实验1中,将可行个体位置移到群体后面,排序结束时,这些可行个体都不会被选为父代,算法的收敛速度肯定大受影响。相反,若将可行个体放在群体的前面,如实验2所示,排序结束时,可行个体所占比例大大增加,几乎与理想情况相同,这种情况下,算法的收敛速度肯定大大加快。显然个体在群体中位置影响其排序结果。

实验1与实验2中人为的使得可行个体目标值大于非可行个体目标值,但通常情况下,可行个体与非可行个体的目标函数大小是随机的,故为了进一步研究个体在群体中的位置对其排序的影响,我们设计如下的实验:

实验3:随机生成N个不可行个体,再任意选M个不可行个体,将其转化为可行个体。然后对群体进行随机排序;

实验4:群体与实验1的群体相同,再将M个可行个体移到群体的后M个位置,然后对群体进行随机排序;

实验5:群体与实验1的群体相同,再将M个可行个体移到群体的前M个位置,然后对群体进行随机排序。

产生的群体重复排序10次,排序结束时前30个个体的组成如下所示:

表3-5 排序结束时可行个体在前30个个体中所占比例

M/N	理想情况	实验3的结果	实验4的结果	实验5的结果
-----	------	--------	--------	--------

1/200	10/300	10/300	10/300	10/300
2/200	20/300	10/300	1/300	20/300
3/200	30/300	30/300	10/300	30/300
4/200	40/300	32/300	10/300	40/300
5/200	50/300	33/300	11/300	50/300
6/200	60/300	47/300	6/300	59/300
7/200	70/300	70/300	13/300	70/300
8/200	80/300	71/300	38/300	80/300
9/200	90/300	71/300	18/300	90/300
10/200	100/300	70/300	13/300	100/300

从表3-5中可以明显看出：将可行个体位置移到群体后面，随机排序对可行个体很不利，排序结束时前30个个体中可行个体占的比例很小；但将可行个体的位置放群体前面再进行随机排序，排序结束时前30个个体中可行个体所占比例大大增加，几乎与理想的结果相同。在通常的情况下，可行个体在群体中位置是随机的，如同实验2所示，随机排序的结果并不是所有的可行个体都排在群体的前30个，这样当算法执行选择操作时，就有部分可行个体未被选中，从而可能影响算法收敛速度。

综上所述个体在群体中的位置对随机排序的结果是有影响的，个体在群体中的位置越靠前，排序结果对其越有利；位置越靠后，排序结果对其越不利，进而影响父代个体的质量，从而影响算法的性能。那么在随机排序操作之前，对群体中的较优秀个体（可行个体与惩罚函数值较小的个体）的位置进行处理，将其提前。具体处理过程如下：

步骤1：对群体中的所有个体按照惩罚函数值 ϕ 进行排序；

步骤2：选出惩罚函数值最小的前 η 个个体作为较优秀的个体，放入群体的最前面；

步骤3：其余个体位置后移。

实验在 MATLAB 7.1 上进行，进化策略应用 $(\mu, \lambda) - (30, 200)$ ，参数 $\eta < 10$ 。

实验函数选择常用 13 个测试函数（见附录 1）进行了验证，能达到预期的效果，其中在测试函数 1 和测试函数 10 中效果特别明显。数值结果如表 3-6 所示：

表 3-6 算法运行 100 代的结果

测试函数	最优解	处理前的结果	处理后的结果
1	-15.000	-12.981	-13.787
10	7049.331	9271.897	7113.153

将数值结果用图形表示如下：

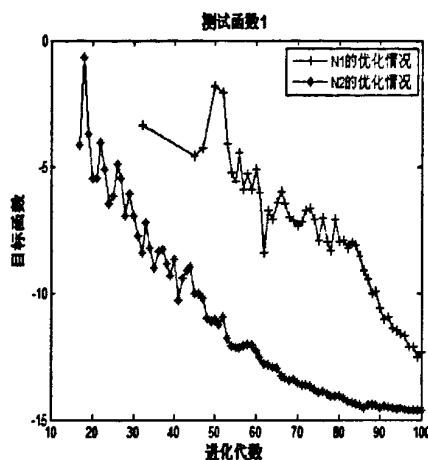


图3-5 在测试函数1中的对比

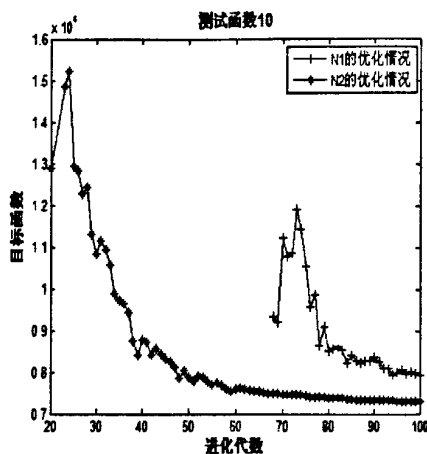


图3-6 在测试函数10中的对比

为了表述方便，上图中由“+”组成的曲线表示未经处理的群体进化情况，在图中记为 N1；由“*”组成的曲线表示经过处理的群体进化情况，在图中记为 N2。

上述 2 幅图中将 2 个测试函数的数值实验结果展示出来。图中，纵坐标为目标函数值，横坐标为进化代数。在进化过程中，若某代产生可行解，则在图中按照进化代数和其目标函数输出最优可行个体，否则不输出。图中所有的点表示为其相应代数上的最优可行个体。

上述 2 幅图大体趋势如下：1. 线段 “*” 大体上出现的更早，即在进化代数更少的情况下，N2 更先搜索到可行个体；2. 同等进化代数下，线段 “*” 在线段 “+” 的下方，即线段所代表的目标函数值更小。说明在同等代数下（前 100 代），N2 的优化结果要优于 N1 的优化结果。总体来说还是改进后的群体实验结果更加理想，其收敛速度得到了提高。

3.6 本章小结

本章主要介绍了进化策略算法在非线性方程组中的应用。发现进化策略算法在求解优化问题时排序过程可能存在的问题，分析了算法随机排序的性能，对随机排序过程作了一些改进。通过非线性方程组实验，验证了改进后的算法在求解问题的性能上有了很大程度的提高，并且在求解原有测试函数时，优化结果也很理想。再次验证了算法改进的有效性。

第四章 进化策略算法在预报模式参数反演中的应用

气象学中的天气预报是在一定的模式大气条件下,根据初值条件,用数值方法求解模式方程组的过程。造成预报误差的主要原因是初始条件的不准确和预报模式的不准确,因此模式的不断完善和高分辨观测资料的不断利用是推动天气预报发展的主要途径^[52]。在实际预报业务中,往往先利用已有物理规律和观测资料,对模式参数调整和初始场修正,这属于微分方程组求解中的反问题研究范畴;真正作数值天气预报时,实为正问题的求解^[53,54]。

本章利用进化策略在微分方程组反问题求解中的优势,结合气象问题,提出了一种基于进化策略的气象学反问题求解算法,用于预报模式中参数识别问题的求解中。当利用微分方程作为预报模式进行实际预报时,利用已有观测数据对原模式的预报参数进行反演以便改善预报水平;最后运用该方法对一维扩散方程和 Lorenz-96 简单预报模式中进行模拟实验。

4.1 微分方程反问题介绍

自然科学发展的主旋律一直是在复杂、多样的自然现象中寻找简单、和谐的规律性,并力求以直观的形式来表述。科学研究通常都是按照这种规律去探索,这是学术研讨的传统途径。然而,现实世界是丰富而奇异的,以往的科学分析对很多现象已无法描述。因而需要人们改变局限、片面的科学目标,从另一个方向去思维,从另一种程序去求知。反问题的求解就是这样一个典型。反问题在信息工程、自然科学规律的发现等领域有着广泛的应用,例如,地震勘探、地下水水质研究、材料内部裂纹的确定等。

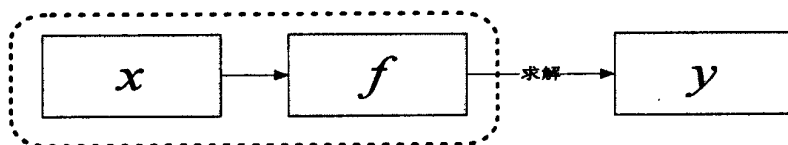
在实际生产、生活中,很多应用中的难题不能通过传统的科学研究去解决,它们向科学家们寻求新的解答方法。比如要探求位于不能触及之处的物质变化规律,根据特定的功能对产品进行设计,按照某种目的对流程进行控制,在工业生产中希望得到某种新材料等等。由此而派生出一个新兴的分支学科——反问题研究。

反问题的研究起源于数理方程,其反演算法中包含了微分方程数值解法、最优化方法和概率统计等方面的许多思想和技巧。近年来,计算科学在计算机技术飞速进步的基础上,结合解决科学与工程中的计算问题,构造和发展新型算法,取得了丰硕的成果,也为解决反问题提供了重要的条件。反问题是从各个领域,各个学科的实际需求中提出的,因此反

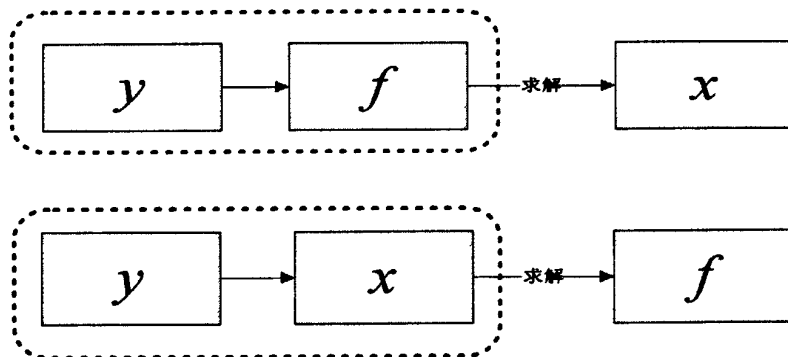
问题研究是一门交叉性学科, 解决反问题必须进行跨学科、多领域的携手合作。作为一门新兴学科, 反问题与人类生产、生活密切相关。反问题的出现, 为传统数学物理方程的研究开辟了新的领域, 也推动了科技工作者积极参与解决生产和生活中的实际问题。

在自然科学和工程应用中, 许多模型都可以用微分方程来描述。微分方程的形成和发展是和力学、天文学、物理学, 以及其他科学技术的发展密切相关的。通常微分方程的求解是寻找满足定解问题初、边值条件的微分方程的解, 又称为正问题。其特点是由“原因”推出“结果”, 是自然探索的一种传统途径。微分方程的反问题是指由“结果”推出“原因”。假设原因为 x , 结果为 y , x 与 y 之间存在着关系模式 f , 即 $y=f(x)$ 。即已知微分方程的解, 去求方程中的未知部分。

正问题为原因 x 通过模式 f 得到结果 y 。正问题中原因、结果以及模式的关系图如下所示 (其中虚线框内为已知部分):



而反问题是已知结果 y 和模式 f , 去求解原因 x , 或者已知结果 y 和原因 x , 去求解模式 f 。反问题求解中, 原因、结果及模式的关系图如下所示 (其中虚线框内为已知部分):



在本文中, 设所研究的微分方程反问题由微分方程, 初始条件, 边界条件及一些附加条件组成。通常, 微分方程的一般形式如下:

微分方程: $Ku(x, t)=f(x, t), x \in \Omega, t \in (0, \infty)$

初始条件: $Iu(x, 0)=\varphi(x), x \in \Omega$

边界条件: $Bu(x, t)=\Phi(x, t), x \in \partial\Omega$

附加条件: $Au(x, t)=\Psi(x, t); x \in \partial\Omega$

其中 $u(x, t)$ 为偏微分方程的解, $f(x, t)$ 为右端项, $\varphi(x)$ 、 $\Phi(x, t)$ 、 $\Psi(x, t)$ 分别为初始条件、边界条件和附加条件。K、I、B、A 分别为微分算子、初始算子、边界算子和附加算子。

当上述这些已知量中有一个变为未知时, 就构成了偏微分方程的反问题。

1. 当微分算子 K 为未知时, 称为算子识别反问题。通常情况下算子结构已知, 未知的是算子中的参数。这类问题称为参数反演、参数识别问题。在自然科学和实际应用中, 这类问题最为常见。

2. 当右端项 $f(x, t)$ 为未知时, 称为源的反问题。

3. 当初始条件 $\varphi(x)$ 未知时, 称为初始条件反问题。在附加条件中往往给出系统在某一时刻的状态, 即在后某一时刻去确定初始的状态, 所以也称为逆时间过程的反问题。

4. 当边界条件 $\Phi(x, t)$ 未知时, 工程上称为边界控制反问题。

5. 当区域的边界 $\alpha\Omega$ 为未知时, 称这类问题为几何反问题。工程中的某些定向设计问题常归为这类问题。一维几何反问题是确定端点的位置, 二维、三维的反问题则是确定曲线的形状。

确定了微分方程反问题类型之后, 下面介绍将微分方程反问题求解转化为函数优化问题的方法, 进而可以应用进化策略算法研究微分方程反问题。

4.2 微分方程中的反问题求解到函数优化的转化

以基于以上定义的偏微分方程(除若干参数待调整外)预报系统为例, 只要输入初始场及模式参数值, 模式即可输出未来某一时刻的预报, 以向量 B_m 表示 $t=t_m$ 时刻的初始场, 实向量 K 表示模式参数, 向量 O_m 表示 $t=t_m+\tau$ 时刻模式的输出, 则预报过程可表示如下:

$$M(K, B_m) = O_m \quad (4-1)$$

若 M 模式已知, 但模式中的参数 K 未知, 即为参数反演问题。利用观测场 O (或部分元素) 的观测值 O_{ob} , 在参数 K 的容许区间内找到最佳近似 K_{best} , 使模式输出与相应的观测值之差最小。

$$\|M(K_{best}, B) - O_{ob}\| = \inf \|M(K, B) - O_{ob}\| \quad (4-2)$$

在模式未知的情况下, 将式 4-2 作为目标函数, 即将参数反演问题转化为函数优化问题, 根据提供的观测值对模式中的参数进行调整, 使得目标函数取得最小值, 从而得到参数的最优估计值。

综上所述, 令目标函数 $f = \inf \|M(K, B) - O_{ob}\|$, 将反问题的求解等价转化为函数优化问题。即根据所提供的观测资料采用进化策略优化方法, 调整模式参数使 $\|M(K, B) - O_{ob}\|$ 取得最小值, 以得到模式参数的最优估计值。

将微分方程反问题的求解转化为函数优化问题之后,就可以应用进化策略算法去求解微分方程反问题,下面将在一维扩散方程和 Lorenz-96 预报模式中进行预报模式参数反演的数值实验。

4.3 一维扩散方程中的参数反演实验

考虑求解如下问题:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] &= S(x, t), 0 \leq x \leq 1, t > 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) &= \frac{\partial}{\partial x} u(1, t) = 0, u(x, 0) = 2 + \sin 2\pi x. \end{aligned} \quad (4-3)$$

取 $s = 0.05 \cos(2\pi x - 0.1t)$, 正问题是给出扩散参数 $k(x)$ 后, 用差分方法求出离散解 $u_{i,m} = u(i\Delta x, m\Delta t)$ 。反问题是给出 $u(x, t)$ 的观测值 $u_{i,m}$, $i=0,1,2,\dots,20, m=50$, 要求确定扩散参数 $k(x)$ 。试验中取一般中央差格式, $\Delta x=0.05$, $\Delta t=0.01$ 。

试验采用的 $k(x)$ 的真值如图 4-1 所示 (实线), 有强的间断性。依据文献[55]中对 $k(x)$ 的估计函数形式:

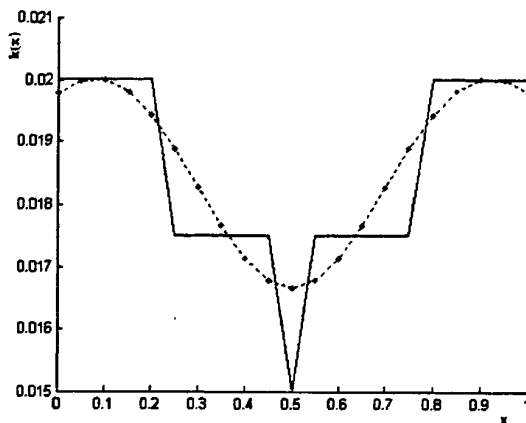
$$k^*(x) = a_1 + \sum_{k=2}^3 (a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x) \quad (4-4)$$

这样问题转化为对 a_1, a_2, a_3, b_2, b_3 等 5 个参数的反演。

为了便于进化计算求解, 构造如下目标函数:

$$f = \left\{ \frac{1}{20} \times \sum_{i=0}^{20} [u^*(i\Delta x, m\Delta t) - u_{ob}(i\Delta x, m\Delta t)]^2 \right\}^{1/2} \quad (4-5)$$

式中 u_{ob} 为观测值。此时, 就可将参数反演问题转化为下列函数优化问题。若求得解 $(a_1, a_2, a_3, b_2, b_3)$, 将其带入式 $k(x)$ 的估计函数形式中, 得到 $k^*(x)$, 通过中央差格式求得 $u^*_{i,m}$, 使得 $f=0$ (或者 f 为接近 0 的数), 那么 $k^*(x)$ 为扩散参数的最优估计。

图 4-1 一维扩散方程参数 $k(x)$ 反演结果

算法在 MATLAB7.1 上实现, 运行参数设置如下: 子代规模 $\mu=30$ 、父代规模 $\lambda=200$, 应用 $ES-(\mu, \lambda)$ 进化策略。为了更好地与真值 $k_T(x)$ 比较, 评价指标采用:

统计参数均方误差:

$$\sigma_k^n = \left\{ \frac{1}{20} \sum_{i=0}^{20} [k_n^*(i\Delta x) - k_T(i\Delta x)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4-6)$$

模式预报的均方差:

$$\sigma_u^n = \left\{ \frac{1}{20} \times \sum_{i=0}^{20} [u^*(i\Delta x, m\Delta t) - u_{ob}(i\Delta x, m\Delta t)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4-7)$$

经过 100 代进化得到的参数 $k(x)$ 的估计值:

$$\begin{aligned} k^*(x) = & 0.0185005 + 0.0012855 \cos(2\pi x) - 0.0000044 \cos(3\pi x) \\ & - 0.0000061 \sin(2\pi x) + 0.0005611 \sin(2\pi x) \end{aligned}$$

相应的结果见图 4-1 所示, 实线表示待定参数 $k(x)$ 的真值, 带点虚线表示通过进化策略算法求得参数 $k(x)$ 的最优估计值, 此时模式预报的均方误差为 1.996×10^{-3} 。

本文用文献[56]中用最优 $k(x)$ 估计值:

$$\begin{aligned} k'(x) = & 0.0185100 + 0.0014184 \cos(2\pi x) + 0.0000188 \cos(3\pi x) \\ & - 0.0000167 \sin(2\pi x) + 0.0003841 \sin(2\pi x) \end{aligned}$$

重新计算得模式预报均方差为 2.075×10^{-3} 。因此本文通过进化策略求得模式 $k(x)$ 参数估计值的预报均方差更小。

4.4 Lorenz-96 模式中的参数反演实验

Lorenz-96 模式是 LORENZ 和 EMANUEL 于 1996 从动力模式中推导并简化出的新的动力模型, 已被广泛用来验证各类同化算法。该模型仍然具有 Lorenz 模型的特点, 对初值极端敏感, 且有很强的非线性。该模式是一个可变尺度的低阶动力学系统, 模式中包含 n 个状态变量 X_1, X_2, \dots, X_n , 均匀分布在同一纬圈上。模式的控制方程为:

$$dX_i / dt = (X_{i+1} - X_{i-2})X_{i-1} - X_i + F \quad (4-8)$$

式中 i 为循环标号, 参数 $F=8$, N 一般取 40。使用 4 阶 Runge-Kutta 差分格式来求解该模式, 时间步长 $t=0.05$, $T=m\Delta t$, m 取 20。

在 Lorenz-96 模式中, 预计进行 2 类实验。对 Lorenz-96 预报模式中的模式参数进行反演。

对于 Lorenz-96 模式参数反演实验。在数值实验开始阶段, 将预报模式设为:

$$dX_i / dt = a_1(a_2X_{i+1} - a_3X_{i-2})a_4X_{i-1} - a_5X_i + a_6F \quad (4-9)$$

这样对模式参数的反演就转化为对 (a_1, \dots, a_6) 等 6 个参数的反演。为了便于进化策略算法求解, 构造如下的目标函数:

$$f = \left\{ \frac{1}{39} \sum_{i=1}^{40} [X_i^* - Y_i^*]^2 \right\}^{1/2} \quad (4-10)$$

首先确定一组初始状态变量 X_1, X_2, \dots, X_n , 按照正确的模式进行预报, 通过差分格式得到 T 时刻的状态变量 $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ 。若求得 (a_1, \dots, a_6) , 将其带入实验 1 中设定的模式, 再用给定的初始状态变量进行预报, 得到 T 时刻的状态变量 $Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*$, 使得 $f=0$ (或者 f 为很接近 0 的数), 那么 (a_1, \dots, a_6) 为所求的参数, 将其带入设定的模式中, 得到反演的结果。

算法在 MATLAB7.1 上实现, 运行参数如下: 子代规模 $\mu=30$ 、父代规模 $\lambda=200$, 应用 ES- (μ, λ) 进化策略。算法独立运行 10 次, 均得到结果 $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=1$, $a_6=8$ 。将结果代入式 4-11 中有:

$$dX_i / dt = (X_{i+1} - X_{i-2})X_{i-1} - X_i + 8 \quad (4-11)$$

显然结果与真实的 Lorenz-96 的模式相同。此实验验证了进化策略算法在 Lorenz-96 模式参数反演中的有效性。

4.5 本章小结

在研究数值预报时,提出了一种基于进化策略的气象学反问题求解算法,并借助预报模式中的参数识别问题,通过问题转化变成等价函数优化问题,进而采用进化策略算法求解。为验证方法的有效性,通过一维扩散方程和 Lorenz-96 预报模式中的反问题进行理想个例数值试验,实验结果表明应用进化策略求解预报模式中的参数识别问题是可行的,算法都能求解到理想的结果。

第五章 进化策略算法在资料同化中的应用

准确的天气预报需要准确的初值与准确的预报模式。上一章主要是针对模式参数的研究,本章是对预报中初值的研究。在为数值天气预报模式提供准确、合理的初值问题上,资料同化是十分有效可行的方法。气象资料同化是提高数值天气预报质量的一个重要方面,尤其随着观测资料种类增多和观测质量提高,对资料同化技术的研究越来越成为大气科学领域关键的科学问题之一,而对资料同化方法研究已经成为数值预报领域国内外热点研究问题。

本章节将从两个方面对初始场进行研究:1.基于反问题的研究思想,将初始场求解作为初初始场反演问题进行研究;2.基于资料同化研究方法,应用资料同化方法研究初值。

5.1 基于进化策略算法的初始场反演

本节研究内容是基于反问题的研究思想,对预报初值进行研究。

以基于偏微分方程预报系统为例,只要输入初始场及模式参数值,模式即可输出未来某一时刻的预报,以向量 B_m 表示 $t=t_m$ 时刻的初始场,向量 K 表示模式参数,向量 O_m 表示 $t=t_m + \tau$ 时刻模式的输出,预报过程在公式(4-1)已给出,为

$$M(K, B_m) = O_m.$$

由于是对初始场的研究,故为初始场反问题。利用场 O (或其中部分元素)的观测值 O_{ob} 在观测变量参数 B 的容许区间内找到最佳近似初始场(或分析场) Ba , 使模式输出与相应的观测误差最小。

$$\|M(K, B_o) - O_{ob}\| = \inf \|M(K, B) - O_{ob}\| \quad (5-1)$$

因此,可以令目标函数 $f = \inf \|M(K, B) - O_{ob}\|$, 即将初始场反问题转化为函数优化问题,根据观测值调整参数 B , 使 $\|M(K, B) - O_{ob}\|$ 取得最小值时,就得到初始场的最优估计值。

为了验证进化策略算法在初始场反演中的可行性,在 Lorenz-96 模式中进行了数值实验。

正问题是确定一组初始状态变量 X_1, X_2, \dots, X_n , 通过差分格式求解 T 时刻的状态

变量 $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ 。反问题是给出 T 时刻的状态变量 $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$, 要求确定初始状态变量 X_1, X_2, \dots, X_n 。为了便于进化策略算法求解, 构造如下目标函数:

$$f^* = \left\{ \frac{1}{39} \times \sum_{i=1}^n (X_i^* - Y_i^*)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5-2)$$

显然若求得解 $Y=(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, 将其代入上式, 通过 4 阶 Runge-Kutta 差分格式求出 $Y^*=(Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*)$, 并且 Y^* 满足 $f^*=0$ (或者 f 为接近 0 的数)。那么解 $Y=(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 为所求初始状态变量的最优估计。

理想试验方法如下: 首先在预先给定理想初始场 B_m , 借助正问题进行预报, 获得 T 时刻的理想预报场 $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$; 然后随机产生初始场 B , 通过预报获得 T 时刻的预报场 (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) ; 最后与理想个例 $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$ 的误差来调整和优化初始场, 进而得到最优的初始分析场 B_a 和 T 时刻相应的预报场 $Y^*=(Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*)$ 。

算法在 MATLAB7.1 上实现, 运行参数如下: 子代规模 $\mu=30$ 、父代规模 $\lambda=200$, 应用 $ES-(\mu, \lambda)$ 进化策略。做以下两组理想试验:

1. 进化代数 $Gen=3000$, 10 次独立试验, 每次试验的初始场 B 不同;
2. 最大进化代数 Gen 分别设为 1000, 2000, 3000, 4000; 在不同最大代数 Gen 下, 分别独立进行试验。为了更好地与理想个例比较, 评价指标采用:

分析场与理想初始场间均方差:

$$\sigma_m = \left\{ \frac{1}{39} \sum_{i=1}^{40} [B_m(i) - B_a(i)]^2 \right\}^{1/2} \quad (5-3)$$

T 时刻的分析预报场与理想预报场间均方差:

$$\sigma_T = f^* = \left\{ \frac{1}{39} \times \sum_{i=1}^n (X_i^* - Y_i^*)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5-4)$$

实验 1 的结果如表 5-1 所示:

表 5-1 实验 1 中的 T 时刻预报、分析场与理想个例间的均方差

Num	预报均方差 σ	分析场均方差 σ_m
1	0.033456	0.089845
2	0.078476	0.28623
3	0.088882	0.299247
4	0.088882	0.126439
5	0.029998	0.089479

续表 5-1

6	0.032910	0.107071
7	0.091759	0.37932
8	0.078808	0.250421
9	0.030803	0.109281
10	0.030801	0.112692

算法独立运行 10 次, 每次的分析场 B 不同。从表 5-1 中优化结果可以看出, 模式预报均方差已经较小, 同时理想初始场 B_m 与分析场 B_a 的均方差也较小。即在不同的初始场下, 算法的求解结果都非常理想, 说明进化策略对初始场不敏感, 算法的收敛性不受初始条件的取值范围影响。其次, 分析场均方差均大于模式预报均方差, 即在分析场均方差较大的情况下 (分析场均方差均大于模式预报均方差), 模式预报的均方差反而较小, 从而验证了 Lorenz-96 模式具有非线性的特征。

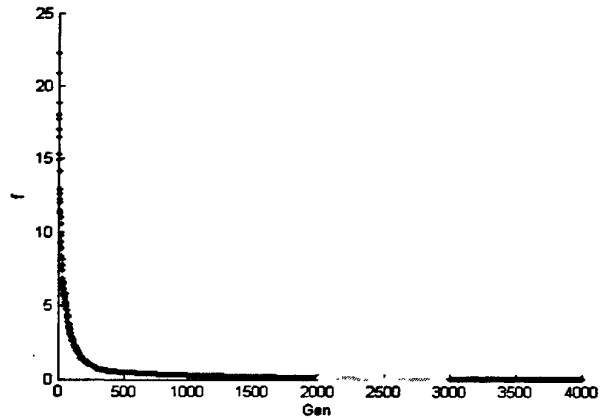
实验 2 中, 所有试验的初始场 B 均相同, 在不同进化代数下, 算法运行 10 次得到的实验结果如表 5-2 所示:

表 5-2 不同进化代数下的 T 时刻预报、分析场与理想个例间的均方差

Gen	平均值(σ_T)	方差(σ_T)	平均值(σ_m)	方差(σ_m)
1000	0.17988	0.060991	0.611662	0.248552
2000	0.108828	0.048074	0.401818	0.204267
3000	0.042555	0.025765	0.156567	0.094807
4000	0.032773	0.016733	0.123944	0.063182

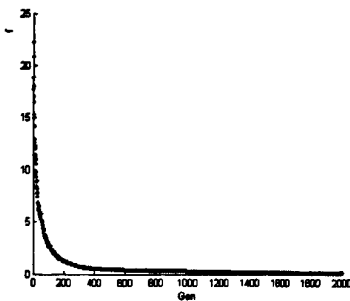
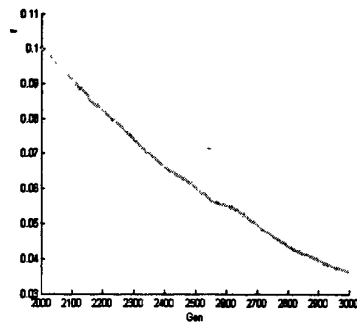
从表 5-2 中的试验结果可以看出, 在不同的进化代数下, 经过算法优化, 预报均方差的平均值、初始群体均方差的平均值都很小, 再次说明算法的有效性。另外, 从预报均方差的方差、分析场均方差的方差均很小看出算法在求解问题时非常稳定; 同时随着进化代数的增加, 预报均方差的平均值及分析场均方差的平均值越小, 即算法优化结果越好, 即分析场 B_a 越接近理想初始场 B_m 。

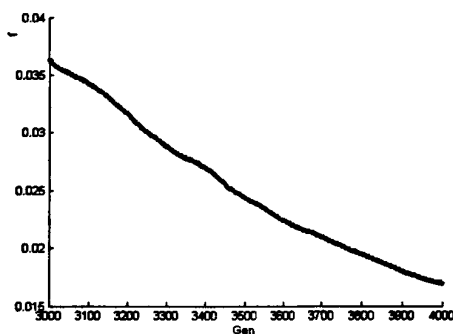
为了更好地展示预报误差调整初始场 B 的过程, 以 Gen=4000 试验中某次试验为例, 给出进化代数和预报误差的关系图, 如图 5-1 所示:

图 5-1 预报误差 f^* 与进化代数 Gen 的关系图

其中纵坐标为预报误差 f^* ，横坐标为进化代数 Gen。上图中，随着进化代数 Gen 的增加，预报误差 f^* 的总体趋势逐渐减小，虽然在某些代数上存在较小的波动，但这符合 ES 采用的选择策略 (μ, λ) 特性。在算法结束时，预报误差 f^* 已经调整的较小，即 ES 反演出 Lorenz-96 模式的初始状态与实际的初始状态很接近，表明应用进化策略求解 Lorenz-96 模式的初始场反问题是可行的。

当进化代数到 2000 代以后时，纵坐标的数值之间差别较小。为此，将上图分为三部分，分别展示出来。仍然做出目标函数 f 与进化代数 Gen 的关系图，其中 Gen 分别为 1-2000，2001-3000，3001-4000 代。

图 5-2 f 与 Gen (1-2000) 的关系图图 5-3 f 与 Gen (2001-3000) 的关系图

图 5-4 f 与 Gen (3001-4000) 的关系图

将 Gen 为 4000 时的预报误差 f 与进化代数 Gen 的关系图拆分成三部分展示出来, 可以明显的看出, 随着进化代数的增长, 算法搜索到结果的精度仍在提高, 即算法搜索到的初始场与实际的初始场越接近。

以上内容是在反问题的框架下研究初值问题, 下面将应用资料同化方法对初值进行研究, 资料同化方法是目前研究预报初值问题的主要方法之一。

5.2 基于进化策略算法的三维变分方法

近年来, 业务 NWP 中心通常使用一种观测资料和短期预报结果的统计结合的方法来产生初值。这种方法就是人们越来越熟悉的资料同化。资料同化的目的, 正如 Talagrand 所定义的那样, 在于“利用现有的所有信息来定义一个最大可能精确的运动状态。”本文主要研究资料同化方法中的三维变分方法。

三维变分同化方法 (3Dvar) 因其简便易行和计算省时等优点被世界各国的业务中心和科研机构广泛使用。在三维变分方法中, 通过构造一个模式初始场的代价函数, 该代价函数反映了在给定的时间空间范围内, 模式解和观测资料的差异。然后通过求解此泛函在约束下的最小值, 使得求解的分析场与背景场和观测场的代价函数达到最小值。三维变分方法的代价函数如下:

$$J(X) = \frac{1}{2}(X - X_b)^T B^{-1}(X - X_b) + \frac{1}{2}(y_o - H(X))^T R^{-1}(y_o - H(X)) \quad (5-5)$$

三维变分方法 (3Dvar) 分析问题的求解就是寻求最优的模式状态 x , 使得由背景项和观测项构成的代价函数值极小。

设式 (5-4) 中 $J(x)$ 在 $x=x_o$ 时有极小值, 即分析值可用下式表示:

$$\nabla_x J(x_o) = 0 \quad (5-6)$$

假设分析是一个接近于真值的近似, 因而分析也较为接近观测值, 可以在背景值附近

将 H 线性化:

$$y_0 - H(x) = y_0 - H[x_b + (x - x_b)] = \{y_0 - H(x_b)\} - H'(x - x_b) \quad (5-7)$$

将 (5-7) 代入公式 (5-5) 中, 得到的目标函数是 $(x - x_b)$ 的二次函数, 因此可以求出梯度为:

$$\nabla J(x) = B^{-1}(x - x_b) + H^T R^{-1} H(x - x_b) - H^T R^{-1} \{y_0 - H(x_b)\} \quad (5-8)$$

置式 (5-8) 为 0 以保证 J 极小, 于是得到关于 $(x_a - x_b)$ 的方程:

$$x_a = x_b + (B^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \{y_0 - H(x_b)\} \quad (5-9)$$

形式上, 这是三维变分问题的解。但是在实际过程中, 为了求解最小值, 一般利用代价函数的梯度信息, 通过梯度法或者牛顿法求解。但是正如前面所提, 常规的数值解法存在一些缺陷, 如梯度法容易受到所选初值的影响, 在求解过程中容易陷入局部最优, 进而影响求解结果。

由于进化算法在求解这些数值问题方面的优越性, 故将进化策略算法应用到变分同化方法中。将三维变分方法中的代价函数作为进化策略算法优化的目标函数, 应用进化策略算法去优化此目标函数, 以求得最优分析场。

5.3 理想个例实验及分析

为了评估进化策略算法在资料同化中的性能, 分别在 Lorenz-63 与 Lorenz-96 模式中做了理想个例实验。

Lorenz-63 模式具有非线性系统的特点, 具有混沌的特性, 外围较小的扰动都会对结果造成很大的影响。而 Lorenz-96 模式具有 Lorenz 模式的特点, 对初值极端敏感, 且有很强的非线性, 是一个可变尺度的低阶动力学系统。由于 Lorenz-96 模式在上一章中已经介绍了, 故在这一章节中就不再重复, Lorenz-63 的控制方程如下所示:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma (y - x) \\ \dot{y} &= r x - y - x z \\ \dot{z} &= x y - b z \end{aligned} \quad (5-10)$$

理想个例实验的流程如下所示:

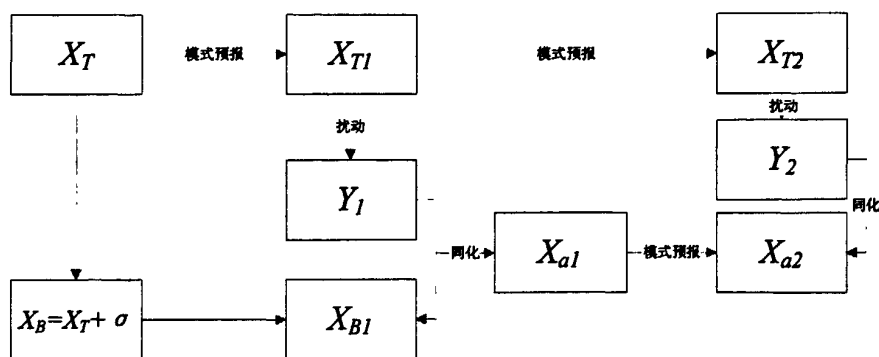


图 5-5 理想个例实验方案

在 Lorenz-63 和 Lorenz-96 模式中，理想个例实验设计方案相同。

1. 构造真实场。构造初始值，记为 X_T 。再利用初值 X_T 及模式（Lorenz-63 模式或者 Lorenz-96 模式）进行预报，得到后续时刻的值，分别记为 X_{T1} （ X_{T2} 、 X_{T3} 等）。这组由 X_T 预报得到的预报值 X_{T1} 至 X_{Tn} 为真实场。

2. 构造背景场。在初始值 X_T 的基础上增加扰动得到 X_B ， $X_B = X_T + \sigma_1$ 。再利用 X_B 及模式进行预报，得到后续时刻的值，记为 X_{B1} 。 X_{B1} 为背景场（后续各时刻的背景场为最优分析场 X_a 经过模式预报所得的场，在图中标记为 X_{B2} 的场就是由最优分析场 X_a 经过预报得到的背景场）。

3. 构造观测场。在真实场的基础上构造观测场，对应的观测场的值为对应真实场场的值加上扰动。 $Y_i = X_{Ti} + \sigma_i$ ，在图中标记为 Y_i 的场均为观测场。

4. 求解最优分析场。利用（2）和（3）中得到的背景场与观测场，通过变分方法得到最优分析场 X_a ，图中标记 X_{a1} 的场就为最优分析场。对于每个时刻的真实场 X_{Ti} ，都构造同一时刻的观测场 Y_i 以及背景场 X_{Bi} ，再利用构造好的观测场与背景场同化出最优分析场 X_{ai} （即在每个预报的时刻上进行一次同化。因此，在理想个例实验的预报的整个时间段中，可以进行多次同化，而上面流程图只是给出整个同化过程中的一部分）。

在对资料同化的过程中，应用进化策略求解最优分析场 X_a 的具体步骤：

1. 产生初始群体。采用实数编码，随机产生初始群体，设群体规模为 μ ；
2. 计算适应度值。对所有个体将其目标函数作为适应度，适应度函数为 f ；
3. 对群体进行排序。所有个体按照适应度值的大小进行排序，适应度值较小的个体排在适应度值较大的个体的前面；
4. 从排序结束的群体中，选取前 μ 个个体；
5. 进化操作。将选取的 μ 个个体作为父代，进行正态分布的变异遗传操作，生成 λ 个子代；
6. 终止判断条件。判断优化是否终止，如果终止输出最优解；否则继续步骤 2。

将在 Lorenz-63 和 Lorenz-96 模式分别做理想个例实验。在实验中, 测试算法性能的主要步骤是图中所标同化这一过程, 我们将应用进化策略算法对观测场以及背景场进行同化。算法均在 Matlab7.1 上运行, 其中进化算法部分的参数设置为子代规模 $\mu=30$ 、父代规模 $\lambda=200$, 应用 ES- (μ, λ) 进化策略。

5.3.1 Lorenz-63 模式中的实验结果与分析

在 Lorenz-63 模式中, 理想个例实验设置初始值 $x=[10 \ 20 \ 30]$, 在整个预报过程中对观测场及背景场资料同化 100 次。而在同化过程中分别使用三维变分方法、带随机排序的进化策略算法以及改进后的进化策略算法。

在同化结束时, 分别得到如下的结果图:

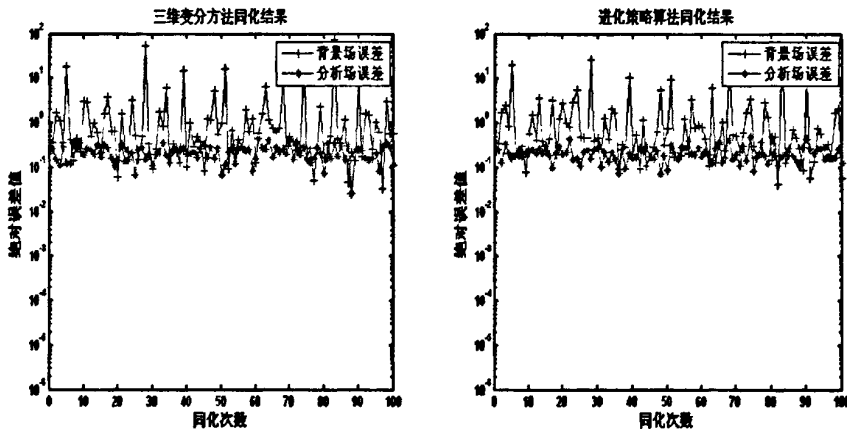


图 5-6 3Dvar 在 Lorenz-63 中的同化结果 图 5-7 ES 在 Lorenz-63 中的同化结果

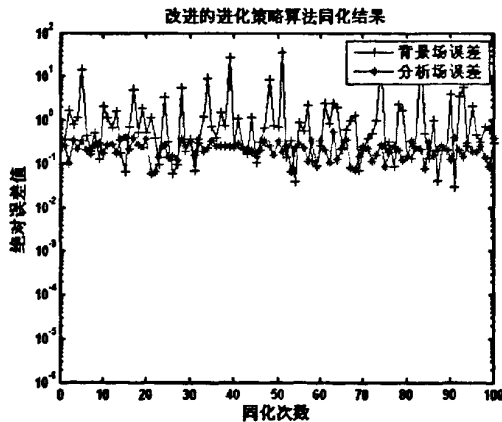


图 5-8 改进的 ES 在 Lorenz-63 中的同化结果

上图中, 横轴为同化次数, 纵轴为绝对误差值, 由线段“+”组成的部分表示为背景场与真实场的绝对误差, 由点“*”组成的部分表示分析场与真实场的绝对误差。从图中,

可以明显看出这样的趋势, 在相同的同化次数下, 点 “*” 部分位置多在线段位置的下方, 即同化后得到的分析场与真实场的绝对误差更小, 分析场更接近真实场, 说明了在资料同化实验中, 三种方法都是有效的。

为了进一步分析上述提到三种同化方法的性能, 分别用上述 3 种方法, 在同化 100 次结束时, 得到 3 个最优分析场, 将得到的最优分析场与真实场比较, 采用如下的评价指标:

$$\sigma_{x_a} = \sum_{\substack{m=3 \\ n=100 \\ i=m, m=1 \\ j=n, n=1}}^{m=3, n=100} \left| X_{i,j} - X_{T,i,j} \right| / \left| X_{T,i,j} \right| \quad (5-11)$$

统计上述评价指标得到如下表:

为了便于描述, 令 X1 为三维变分方法, X2 为进化策略算法, X3 为改进的进化策略算法 (第三章中改进的算法)。

表 5-3 100 次同化结果误差分析

所用方法	X1	X2	X3
评价指标值	15.7865	15.7565	11.4621

从上表中很明显可以看出, 改进后的进化策略算法 X3 的评价指标最小, 改进前的进化策略算法 X2 的评价指标次之, 三维变分方法 X1 的评价指标最大。说明智能型算法在实验中的同化结果比传统的数值解法性能要优秀, 即进化策略算法 X2、X3 的同化结果与真实场的差距更小。而在改进前进化策略算法 X2 的基础上, 改进后进化策略算法 X3 的同化结果的误差又得到进一步降低, 即算法 X3 的同化结果与真实场更加接近。

在预报过程中同化 100 次, 每一次得到分析场 X_a 中有 3 个自变量, 则最后得到的最优分析场共有 300 个变量。选取评价标准 $\sigma_{x_a}=15.7865$, 则对应每个变量的评价指标值 $\sigma_{\text{ind}}=15.7865/300=5.3\%$, 即最优分析场的每个变量与真实场的每个变量只有 5.3% 的偏差, 再次说明了在预报中, 对背景场和观测场进行同化处理是有意义的。

在第一次同化的时候, 三种方法使用相同的背景场, 观测场。对三种方法第一次同化结果按照评价指标进行比较, 得到结果如下表。在同化 100 次时, 评价指标公式中的 n 取 100, 只比较第 1 次同化结果的误差时, n 取 1。

表 5-4 Lorenz-63 模式中第 1 次同化评价指标分析

所用方法	X1	X2	X3
评价指标值	0.0640	0.0640	0.0639

从上表中可以明显看出最后的评价指标数值均很小, 说明三种方法通过对背景场和观测值同化之后得到的最优分析场与真实场之间的差距很小, 三种方法在资料同化中是可行

的。其次 X3 方法中的评价指标值要更小, 说明改进后的 X3 算法同化结果最好。

5.3.2 Lorenz-96 模式中的实验结果与分析

在 Lorenz-96 模式中, 整个预报过程中对观测场及背景场资料同化 100 次。而在同化过程中分别使用三维变分方法、带随机排序的进化策略算法以及改进后的进化策略算法。

在算法同化结束时, 对比背景场-真实场之间误差 σ_1 , 分析场与真实场之间误差 σ_2 , 得到如图:

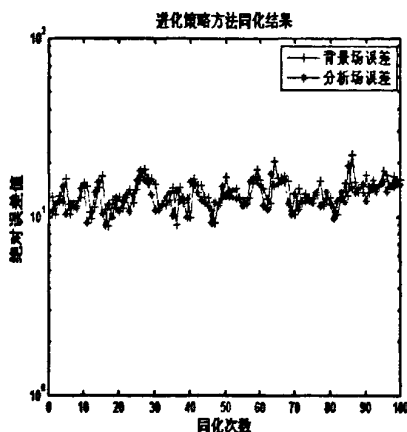
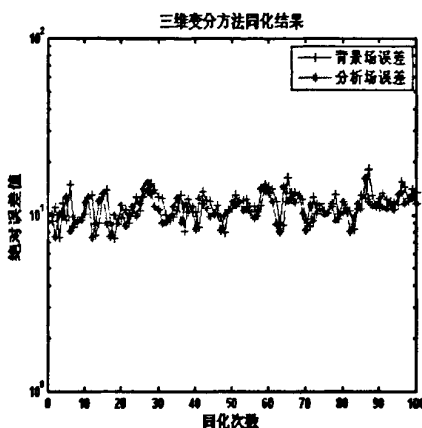


图 5-9 3Dvar 在 Lorenz-96 中的同化结果 图 5-10 ES 在 Lorenz-96 中的同化结果

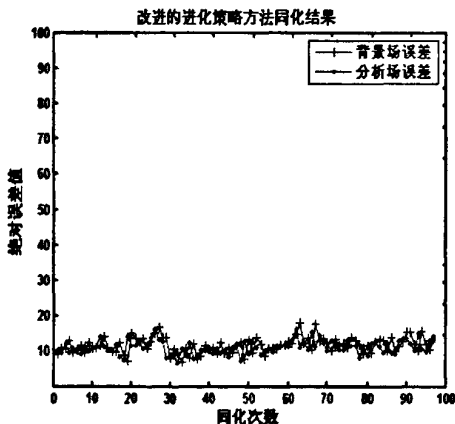


图 5-11 改进的 ES 在 Lorenz-96 中的同化结果

上图中, 横轴为同化次数, 纵轴为绝对误差值, 由线段“-”组成的部分表示背景场与真实场的绝对误差, 由点“*”组成部分表示分析场与真实场的绝对误差。由“*”组成的线段多数在“-”组成的线段下方, 但是两者相差较小, 而且曲线走势较接近。说明与背景场相比, 最优分析场与真实场更为接近。

为了进一步分析上述提到三种方法的同化效果, 分别用上述 3 种方法, 在同化结束时,

得到 3 个最优分析场，将得到的最优分析场与真实场比较，采用如下的评价指标：

$$\sigma_{X_s} = \sum_{\substack{i=m, m=1 \\ j=n, n=1}}^{m=40, n=1} |X_{i,j} - X_{T,i,j}| / |X_{T,i,j}| \quad (5-12)$$

在 Lorenz-96 模式中，选取 40 个控制变量，故 m 取 40。又在第一次同化的时候，三种方法使用相同的背景场，观测场，第一次同化结果的指标分析更能比较说明三种方法在对背景场及观测场进行同化的性能。故选取在第一次同化结束时进行分析， n 取为 1。对三种方法同化的结果进行比较，得到如下表：

表 5-5 Lorenz-96 模式中第 1 次同化评价指标分析

所用方法	X1	X2	X3
评价指标值	2.9676	2.9678	2.9044

从上表中可以看出最后的评价指标数值较小，说明三种方法通过对背景场和观测值同化之后得到的最优分析场与真实场之间的差距较小，即在 Lorenz-96 预报模式中使用上述三种方法对资料进行同化是可行的。其次 X3 方法中的评价指标值要更小，说明改进后的 X3 算法性能要更加优越。

但是对比表 5-5 与表 5-4 中的评价指标值，发现表 5-5 中的值更大。造成这种情况的原因有：1. Lorenz-96 模式中的控制变量更多，控制变量个数为 40；而 Lorenz-63 模式中的变量为 3。2. Lorenz-96 模式有很强的非线性，对优化结果也存在一定的影响。

5.4 基于正压原始方程的数值实验

实际大气运动包含有两种最基本的动力学过程，即准地转演变过程和地转适应过程。原始方程模式中既有缓慢移动的大气长波，又有快速移动的重力惯性波。因此，这种模式不但可以模拟准地转过程，还可以模拟地转适应过程。正压原始方程模式是最简单的原始方程模式，该模式在低纬度地区台风路径的预报中仍然得到应用^[55]。

5.4.1 正压原始方程介绍

地图投影坐标系中的正压原始方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -m(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) + f^* u - mg \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -m(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) - f^* v - mg \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial t} = -m^2(u \frac{\partial}{\partial x}(\frac{z}{m}) + v \frac{\partial}{\partial y}(\frac{z}{m}) + \frac{z}{m}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})) \end{cases} \quad (5-13)$$

原始方程模式与准地转模式不同，它不但要求给出初始位势高度场，而且还需要给出初始风场。理论分析和预报实践证明，直接用观测的风场和高度场作为原始方程模式的初始值容易产生高频振荡，使数值积分变得不稳定。这是由于观测的风场与高度场之间的不平衡，以及风场、高度场与模式之间的不协调所致。因此，在应用原始方程模式制作数值天气预报之前，必须对初始资料加以处理，即所谓的资料初始化。采用静力场初始化资料的方法，假定风场、气压场（位势高度场）之间满足某种平衡关系，根据这种关系由其中一个场来确定另一个场。

应用正压原始方程组制作有限区域 500hPa 位势高度场和风场预报的具体步骤如下：

1. 输入 500hPa 初始位势高度场 $z_{i,j}^0$ ；
2. 计算地转放大系数 $m_{i,j}$ 和科氏系数 $f_{i,j}$ ；
3. 计算初始地转风场 $u_{i,j}^0$ 和 $v_{i,j}^0$ ，其中 $u_{i,j}^0$ 为水平风场， $v_{i,j}^0$ 为径向风场；
4. 计算风场和位势高度场的变化倾向 $E_{i,j}$ 、 $G_{i,j}$ 和 $H_{i,j}$ ；
5. 分别采用欧拉—后差和中央差格式进行时间积分，作出预定时刻位势高度场和风场的预报。

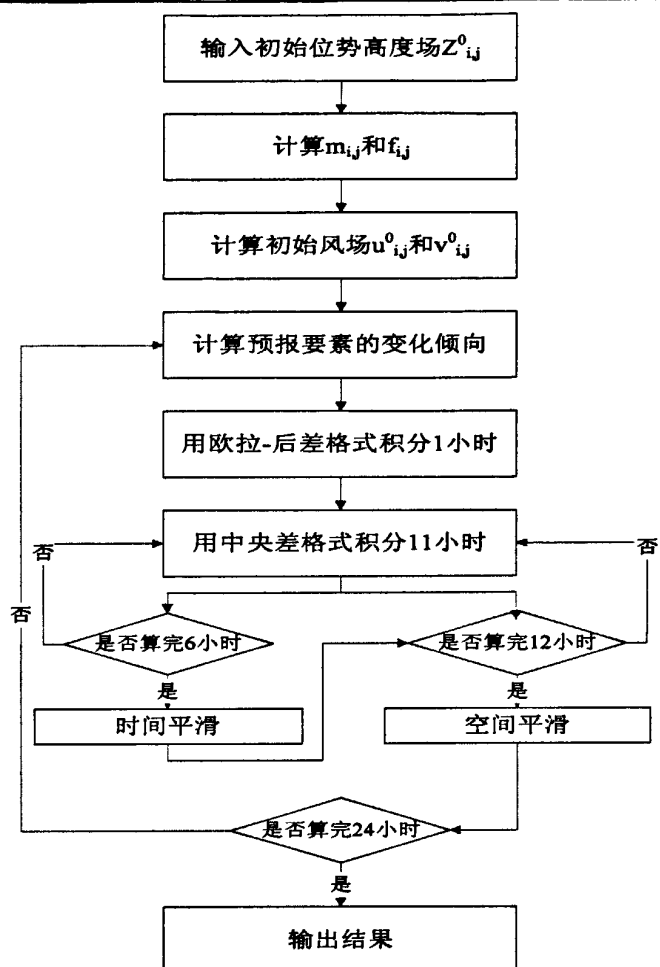


图 5-12 正压原始方程流程图

5.4.2 实验分析与讨论

在正压原始方程中进行同化实验。同化实验的基本流程如下：

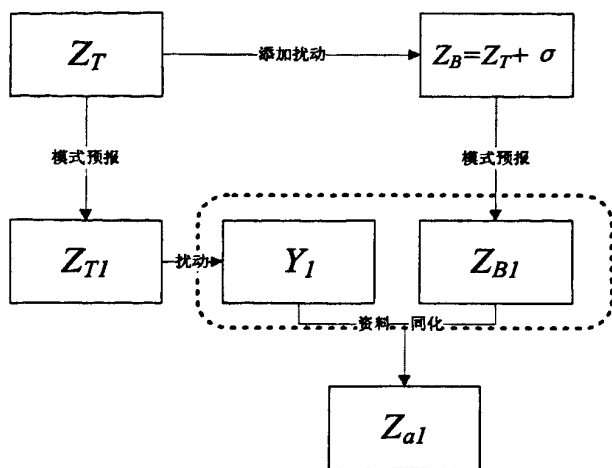


图 5-13 同化实验设计流程图

在正压原始方程同化方法的实验中，具体步骤为：

1. 构造真实场。首先读入初始场数据 Z_T ，以 Z_T 通过正压原始方程预报一次得到 24 小时后的场 Z_{T1} ，场 Z_{T1} 为真实场；
2. 构造背景场。在初始场 Z_T 的基础上添加扰动得到 Z_B ，以 Z_B 为初值通过正压原始方程预报一次得到 24 小时后的场 Z_{B1} ，场 Z_{B1} 为背景场；
3. 构造观测场。在真实场的基础上添加扰动，构造观测场 Y_1 ；
4. 同化求解最优分析场。对上述构造好的背景场和观测场进行同化实验，得到最优分析场 Z_{a1} 。

将进化策略算法应用于正压原始方程的预报中，将在上图 6-2 中红色方框内资料同化这一过程使用进化策略算法。

进化策略算法的求解步骤为：

1. 产生初始群体。采用实数编码，随机产生初始群体，每个个体即可视为一个分析场（算法最后搜索到的最优个体即为最优分析场），设群体规模为 μ ；
2. 计算适应度值。对所有个体计算其适应值，将个体的值代入三维变分方法的代价函数中，计算出相应代价函数值。将此代价函数值作为个体的适应度函数值；
3. 对群体进行排序。所有个体按照适应度值的大小进行排序，适应度值较小的个体排在适应度值较大的个体的前面；
4. 从排序结束的群体中，选取前 μ 个个体；
5. 进化操作。将选取的 μ 个个体作为父代，进行正态分布的变异遗传操作，生成 λ 个子代；
6. 终止判断条件。判断优化是否终止，如果终止输出最优解；否则继续步骤 2。

在数值实验中, 分别使用三维变分方法和进化策略算法对资料进行同化实验。算法运行结束时, 对最优分析场及真实场按照下列指标, 进行比较分析。

$$\sigma_{Z_s} = \sum_{\substack{i=m, m=1 \\ j=n, n=1}}^{m=20, n=16} \left| Z_{a1i,j} - Z_{T1i,j} \right| / \left| Z_{T1i,j} \right| \quad (5-14)$$

上式中 m 表示纬向格点数, 取 20; n 表示经向格点数, 取 16。因此, 资料 Z 中共有 $20 \times 16 = 320$ 个格点。若用进化策略算法直接搜索规模为 320 的分析场, 则初始化的个体中必须包含 320 个变量, 因此可能导致算法陷入局部最优, 而且优化效果不理想。故在实验中将规模为 320 的场分成 10 个部分, 分 10 次优化, 每次优化其中的 1 个部分。等 10 次优化结束, 在将 10 次结果合并得到最优分析场。这样初始化的个体中只包含 32 个变量, 便于进化策略算法求解。

分别使用三维变分方法和进化策略算法进行同化实验。同化结束时, 为了直观的比较同化结果, 应用绘图工具 GrADS, 将正压原始方程中的位势高度场 z 、水平风场 u 和径向风场 v 展示如下:

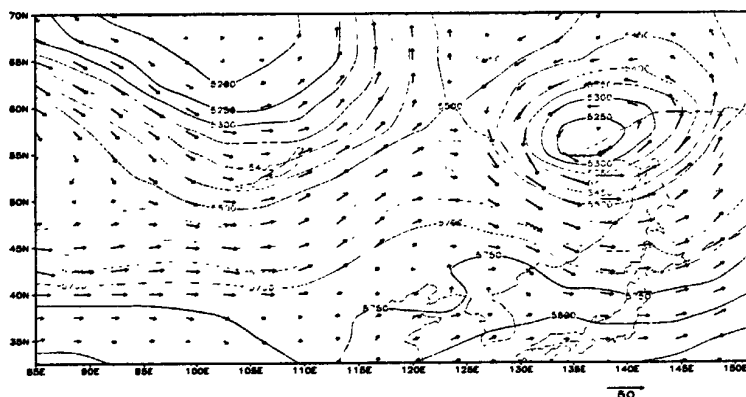


图 5-14 初始时刻的位势高度场、水平风场、径向风场

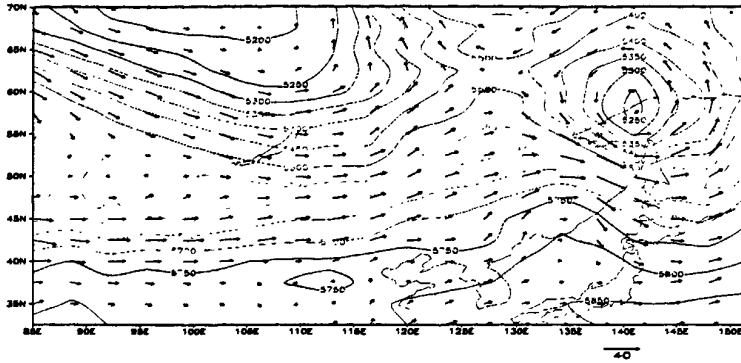


图 5-15 预报时刻 (24h) 的位势高度场、水平风场、径向风场

图 5-14 为初始时刻图, 图中非常好地反映出位势高度场和风场具有明显的地转特征; 经过 24 小时预报, 得到预报时刻的结果, 如图 5-15 所示, 其具有明显的地转特征, 并且图 6-4 为使用真实场数据得到的图。

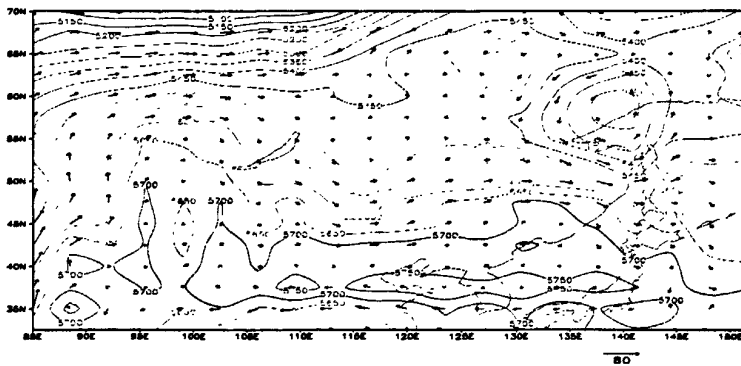


图 5-16 进化策略算法同化结果

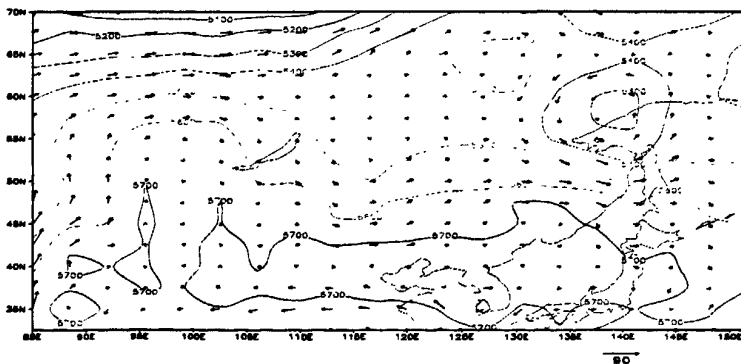


图 5-17 三维变分方法同化结果

图 5-16 和 5-17 分别为进化策略算法和三维变分方法同化结果, 这两幅图的形状相似, 表明两种算法同化效果接近。虽然都与图 5-15 有着一定的差异, 但是仍能从图 5-16 和 5-17 中发现一定的地转特征。其中图 5-16 与图 5-15 走势更为接近, 图 5-16 上半部分有较明显的地转特征, 且与图 5-15 有较大的相似之处。

进一步分析 2 种方法的实验结果, 对 2 种方法的同化结果比较如下表。为了便于描述, 令 X1 为三维变分方法, X2 为进化策略算法。

表 5-6 同化结果误差分析

所用方法	X1	X2
评价指标值	4.7220	4.7230

从上表中可以看出, 同化结束时, 两种方法求得的最优分析场与真实场之间的误差值均较小。因为三维变分方法在资料同化技术中切实可行, 结合本节给出的图示以及上述表格中的误差分析值, 比较进化策略算法与三维变分方法的同化结果, 我们不难发现, 进化策略算法在正压原始方程中同化实验中的应用是有效的。

对于图 5-16 与 5-15 仍存在一定的差异的现象, 说明进化策略算法优化得到的最优分析场与真实场之间仍存在差异。经分析, 导致误差较大可能是以下 2 个原因:

1. 预报模式正压原始方程为非线性系统, 预报初值较小的改动都有可能对预报结果造成较大的影响;

2. 在实际预报过程中, 资料中变量之间存在一定的运算关系; 而应用进化策略求解时, 对变量之间的关系考虑不足。可以考虑, 通过添加适当的约束条件来强化变量间的关系, 达到协调资料, 提高进化策略算法优化结果精度的目标。

5.5 本章小结

本章介绍了资料同化方法的基本概念和一些主要的资料同化方法。主要介绍了三维变分方法, 并将进化策略算法引入到资料同化方法中。分别在 Lorenz-63 和 Lorenz-96 模式以及正压原始方程中进行了实验。实验结果表明, 进化策略算法在数值实验中的应用是可行的, 验证了进化策略算法在资料同化方法中应用的可行性。

当然依据现有的计算机水平, 目前的工作还只停留在探索阶段, 不能满足实际预报的需要, 暂且不能直接应用于当前的业务预报需求。主要是因为进化算法在求解过程中需要进行频繁评估, 并且业务预报模式非常复杂, 对其评估一次非常耗时, 无法满足预报时效性。但是我们相信, 随着现在计算机性能的提高, 以及并行算法的进一步发展, 进化算法也会为气象研究和发展做出贡献。

第六章 总结与展望

在各种工程实践和科学研究中,大量问题最终都可归结为优化问题。优化问题,即找到某个或者若干个控制变量的合理取值,使得最终优化的目标达到最优,因此对优化问题的研究有着很重要的科学意义和实际应用价值。气象反问题与资料同化问题就属于优化问题的范畴。

由于传统的算法在求解各类优化问题时存在诸多限制。而另一类启发式算法常被用来解决各类优化问题,并取得较好的成果。进化算法作为典型的启发式算法之一,其具有全局搜索能力,鲁棒性强,在优化问题求解中受到越来越多的关注。

本文正是从以上研究立足点出发,做了以下工作:

1. 对进化算法中的带随机排序的进化策略算法进行了深入的探索和研究,然后对进化策略算法的排序过程进行了分析和研究,发现存在的问题,对进化策略算法的排序过程进行了改进;

2. 讨论了气象反问题,研究了预报模式参数反演与初始场的反演问题,将进化策略算法应用到这两类反问题的研究中,在一维扩散方程和 Lorenz-96 模式上进行了数值实验,实验结果验证了进化策略算法在气象反问题研究中的可行性;

3. 对气象资料同化问题进行了研究和分析,在 Lorenz-63 模式和 Lorenz-96 预报模式中进行了理想个例实验,表明进化策略算法在资料同化中应用的可行性。进而在正压原始方程上进行了同化实验。

文章第 2,3 项工作还仅仅是探索性的研究,所做的简单数值实验是为了验证进化策略算法在气象反问题与资料同化问题中研究的可行性。但是离实际复杂的应用还有一定的距离。

尽管本论文在进化优化方面取得了一定的成果,但仍很多工作有待进一步加强和深入:

1. 对进化策略的随机过程改进中,只考虑了目标函数中组成部分较少的情况,目标函数中组成部分较多情况下的研究,将是下一步的工作;

2. 当然依据现有的计算机水平,目前的工作还只停留在探索阶段,不能满足实际预报的需要,暂且不能直接应用于当前的业务预报需求。进化策略求解问题非常耗时,无法满足预报时效性。

参考文献

- [1] 任宏利,丑纪范. 数值模式的预报策略和方法研究进展[J]. 地球科学进展.2007,22(4):376-385.
- [2] Kalnay E. Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [3] 王顺风,沈桐立,张建伟.基于进化方向遗传算法的四维变分资料同化方法[J].南京气象学院学报,2002,25(6):740-746.
- [4] T. Back H. P. Schwefel. An overview of evolutionary algorithms for parameter optimization. Evolutionary Computation, 1993, 1(1):1-23.
- [5] 周明,孙树栋.遗传算法原理及应用[M],国防工业出版社,2005.
- [6] K. Vaisakh, P. Kanta Rao. Differential Evolution Based Optimal Reactive Power Dispatch For Voltage Stability Enhancement[C], Journal of Theoretical Applied Information Technology 2005-2008 JATIT.
- [7] T. P. Runarsson, X.Yao. Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization. IEEE Transactions on Evolutionary Computation[J], 2000, 4(3):284-294.
- [8] T. Back H. P. Schwefel. An overview of evolutionary algorithms for parameter optimization. Evolutionary Computation[J], 1993, 1(1):1-23.
- [9] S. Huband, L. Barone, L. While, P. Hingston. A scalable multiobjective test problem toolkit, in Proceedings of the 3rd International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Berlin, Germany, 2005. 280-294.
- [10] D. A. V. Veldhuizen. Multiobjective Evolutionary Algorithms: Classifications, Analyses, and New Innovations[C], Ph. D. Thesis, Department of Electrical and Computer Engineering, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1999.
- [11] 陈国良,王煦法,庄镇泉,王东生.遗传算法及其应用[M].北京:人民邮电出版社,1996.
- [12] Z. Michalewicz, M. Schoenauer. Evolutionary algorithms for constrained parameter optimization problems, Evolutionary Computation, 1996, 4(1):1-32.
- [13] Y.Y. Haimes, L. S. Lasdon, D. A. Wismer. On a bicriterion formulation of the problems of integrated systems identification and system optimization, IEEE Transactions System ,Man ,Cybernetics, 1971,1(3): 296-297.
- [14] L. A. Zadeh. Optimality and nonscalar-valued performance criteria[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 1963, 8(1):59-60.
- [15] A.M. Geoffrion. Proper efficiency and the theory of vector maximization.Journal of Mathematical Analysis and Application, 1967, 41(series A): 491-502.
- [16] J. P. Ignizio.A review of goal programming,a tool for multi-objective analysis Journal of the Operational Research Society, 1978, 29(11): 1109-1119.
- [17] S. M. Lee.Goal Programming for Decision Analysis.Philadelphia: Auerbach.1972.

- [18] C. Romero. Handbook of Critical Issues in Goal Programming. Oxford, UK: Pergamon Press, 1991.
- [19] R. S. Rosenberg. Simulation of genetic populations with biochemical properties, Ph. D. Thesis, University of Michigan, Michigan, 1967.
- [20] D. A. V. Veldhuizen, G. B. Lamont. Evolutionary Computation and Convergence to a ParetoFront[C], in Late Breaking Papers at the Genetic Programming 1998 Conference, Stanford University, California, 1998.221-228.
- [21] M. Laumanns, L. Thiele, E. Zitzler, Running Time Analysis of Multiobjective Evolutionary Algorithms on Pseudo-Boolean Functions, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, April 2004,8(2):170-182.
- [22] M. Laumanns, L. Thiele, E. Zitzler. Running time analysis of evolutionary algorithms on a simplified multiobjective knapsack problem, Natural Computing, 2004, 3(1): 37-51.
- [23] Yuanchong Zhang ,William B. Rossow, Andrew A. Lacis, Valdar Oinas, and Michael I. Mishchenko. Calculation of radiative fluxes from the surface to top of atmosphere based on ISCCP and other global data sets: Refinements of the radiative transfer model and the input data. Journal of Geophysical Research, 2004, 109(D19105):1-27.
- [24] C. A. C. Coello, D.A. V. Veldhuizen, G. B. Lamont. Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems[C]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [25] G. Rudolph, A. Agapie. Convergence Properties of Some Multi-Objective Evolutionary Algorithms, in Proceedings of the 2000 Conference on Evolutionary Computation, Piscataway, New Jersey, 2000.1010-1016.
- [26] G. Rudolph. Some Theoretical Properties of Evolutionary Algorithms under Partially Ordered Fitness Values, in Proceedings of the Evolutionary Algorithms Workshop (EAW-2001), Bucharest, Romania, 2001.
- [27] T. Hanne. On the convergence of multiobjective evolutionary algorithms, European Journal of Operational Research, 1999, 117(3): 553-564.
- [28] J. Knowles, D. Corne. Properties of an Adaptive Archiving Algorithm for Storing Non-dominated Vectors, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2003,7(2): 100-116.
- [29] H. P. Benson. Existence of efficient solutions for vector maximization problems, Journal of Optimization Theory and Applications, 1978, 26(4): 569-580.
- [30] A. Charnes, W. W. Cooper, R. O. Ferguson, Optimal estimation of executive compensation by linear programming Management Science. 1955,1(2): 138-151.
- [31] J. P. Ignizio. Goal Programming and Extensions. Lexington: Lexington, MA, 1976.
- [32] 赵军.数值天气预报资料同化关键技术及并行计算研究[D].国防科学技术大学,2007.
- [33] 杨永淘.气象资料变分同化高效优化算法研究及并行实现[D]. 国防科学技术大学,2005.
- [34] 官元红,周广庆,陆维松,陈建萍.资料同化方法的理论发展及应用综述[J].气象与减灾研究,2007,30(4):
- [35] Gilchrist B., Cressman G, An experiment in objective analysis[J]. Tellus, 1954(6):p.309-318.
- [36] Berghorsson P., Doos B., Numerical weather map analysis[J]. Tellus, 1955,7:p.329-340.

- [37] Cressman, An operational objective analysis system. Monthly Weather Review[J]. 1959, 97: p. 367-374.
- [38] Wiener N., Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series[C]. 1949, New York.
- [39] Bergman K H., Multivariate analysis of temperatures and winds using optimum interpolation[J]. Monthly Weather Review, 1979, 107: p. 1423-1443.
- [40] 张爱忠, 齐琳琳, 纪飞, 李俊. 资料同化方法研究进展[J]. 气象科技, 2005年10月, 第22卷(第5期): p. 385-390.
- [41] Thompson, Philip D. Reduction of analysis error through constraints of dynamical consistency [J]. J Apple Meteor, 1969, 8(5): 738-742.
- [42] Kalman R E. A new approach to linear filter and prediction problems[J]. J Basic Eng, 1960, 82(3): 35-45.
- [43] Moradkhani H, Sorooshian S, Gupta H V, et al. Dual state-parameter estimate of hydrological models using ensemble kalman filter[J]. Adv Water Res, 2005(28): 135-147.
- [44] 万利颖. 集合同化方法在太平洋海洋高度计资料同化中的应用研究[D]. 北京: 中国科学院物理研究所, 2006.
- [45] Fogel, D.B. Evolutionary computation: toward a new philosophy of machine intelligence[C]. IEEE Neural Networks Council. New York: IEEE Press. 1995.
- [46] Thomas Philip Runarsson and Xin Yao. Search biases in constrained evolutionary optimization[J]. IEEE Transactions on systems, 2005, 5(2): 233-243.
- [47] T. P. Runarsson, X. Yao. Stochastic Ranking for Constrained Evolutionary Optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2000, 4(3): 284-294.
- [48] 杨庚. 一类求解非线性方程组算法的并行性能分析[J]. 计算机学报, 2000, 23(10): 1035-1039.
- [49] Kasdin J N, Gurfil P. Characterization and design of out-of-ecliptic trajectories using deterministic algorithms. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering[J]. 2002, 191(19-20): 2169-2186.
- [50] 孙家泽, 张建科. 求解非线性方程组的社会认知算法[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(28): 42-46.
- [51] Dong C. Liu and Jorge Nocedal. On the limited memory BFGS method for large scale optimization[J]. Mathematical Programming, 1989: 503-528.
- [52] 郇吉东, 丑纪范. 数值天气预报中两类反问题及一种数值解法[J]. 气象学报, 1994, 52(2): 129-137.
- [53] 邱崇践, 丑纪范. 预报模式的参数优化方法[J]. 中国科学, 1990, 2(2): 218-224.
- [54] 熊盛武, 李元香, 康立山, 陈毓屏. 抛物型方程的演化参数识别方法[J]. 计算物理. 2000, 17(5): 511-517.
- [55] 薛胜军, 耿焕同. Fortran 语言程序设计[M]. 北京: 气象出版社, 2009.
- [56] 胡娅敏, 丁一汇, 沈桐立. 基于遗传算法的四维变分资料同化技术的研究. 大气科学, 2006, 30(2): 248-256.
- [57] 常惠琳, 沈桐立, 朱伟军. 云导风资料在遗传算法同化系统中的应用. 热带气象学

报,2008,24(4):423-429.

- [58] 孙桂平.遗传算法同化系统在 MM5 模式中的应用研究.南京:南京信息工程大学大气科学系,2005.

致 谢

时光如梭，我在南京信息工程大学三年的硕士生活很快就要结束了，在论文完成之际，我向所有关心和帮助过我的老师和同学致以最诚挚的感谢。

首先，衷心地感谢我的导师耿焕同教授。在三年的研究生学习期间，耿老师给予了我精心的指导，他渊博的学识、严谨的科研作风令我在做人和学习上受益匪浅，必将对我以后的工作产生深远的影响。值此硕士论文完成之际，感激之情难以言表，我将永远铭记导师给予我的指导和鼓励。

感谢人工智能及其应用实验室的老师和同学。他们是吴婷婷老师，张明、王利鑫、谭振、孙凯、郑锐、朱海峰、路有兵、张建、黄艳红等。感谢他们在我学业及生活上的帮助。

感谢三年的研究生学习期间，指导过我的老师。谢谢他们对我学习上的帮助，思想上的指引。

感谢我的父母，家人多年来对我无私的奉献以及对我学业的全力支持。我的学习生活离不开他们的关心和辛劳。感谢陈慧三年来对我的帮助和支持。衷心地祝愿他们身体健康、万事如意！

最后，感谢在百忙中评审论文和参加答辩的老师们。

作者简介

姓名: 孙义杰

性别: 男

出生年月: 1987 年 01 月

籍贯: 安徽省滁州市

研究方向: 人工智能-进化算法

学习经历:

2004 年 9 月~2008 年 6 月 淮海工学院, 数学与应用数学, 获得学士学位

2008 年 9 月~2011 年 6 月 南京信息工程大学计算机与软件学院, 计算机应用与技术专业, 攻读硕士研究生

在三年的攻读硕士期间, 学习课程 19 门、获得总学分 35 分, 其中学位课程分数为 21 分。

发表论文:

1. 耿焕同, 孙义杰, 张建, 闵锦忠. 一种基于进化策略的气象学反问题求解算法研究[J]. 大气科学学报, 2010, 33(1): 34-39.
2. GENG Huan-Tong, SUN Yi-Jie, SONG Qing-Xi, WU Ting-Ting. Research of Ranking Method in Evolution Strategy for Solving Nonlinear System of Equations, The 1st International Conference on Information Science and Engineering.
3. GENG Huan-Tong, SONG Qing-Xi, JIAO Feng, SUN Yi-Jie. An Evolution Strategy With Stochastic Ranking For Solving Reactive Power Optimization. The 2nd Conference on Power Electronics and Intelligent Transportation System (PEITS 2009)..pages:14 - 17.
4. 专利, 一种基于进化策略算法和三维变分的资料同化方法。(申请中)。

参与项目:

1. 江苏省博士后基金 (No.0801024B): 演化多目标优化算法在气象资料同化中的应用研究;
2. 中国博士后基金 (No.20080431114): 基于多目标演化求解的资料同化方法研究;
3. 2008 年 10 月—2009 年 2 月参与南京六都科技项目: 引用随机序列的进化算法用于无功优化, 负责算法测试;
4. 2010 年 1 月—2010 年 5 月中科大国祯信息科技有限公司项目: 面向云数据再被服务的运维服务综合管理系统, 负责日志管理与权限管理子系统;
5. 2010 年 7 月—2010 年 9 月南京六都科技有限公司项目: 六都变压器经济运行在线分析与决策系统, 负责核心控制算法的编写。

附录 1 标准测试函数

函数 g01 (min):

$$f(x) = 5 \sum_{i=1}^4 x_i - 5 \sum_{i=1}^4 x_i^2 - \sum_{i=5}^{15} x_i$$

其中 $0 \leq x_i \leq 1 (i=1, \dots, 9, 13), 0 \leq x_i \leq 100 (i=10, 11, 12)$

约束条件:

$$g_1(x) = 2x_1 + 2x_2 + x_{10} + x_{11} - 10 \leq 0$$

$$g_2(x) = 2x_1 + 2x_3 + x_{10} + x_{12} - 10 \leq 0$$

$$g_3(x) = 2x_2 + 2x_3 + x_{11} + x_{12} - 10 \leq 0$$

$$g_4(x) = -8x_1 + x_{10} \leq 0$$

$$g_5(x) = -8x_2 + x_{11} \leq 0$$

$$g_6(x) = -8x_3 + x_{12} \leq 0$$

$$g_7(x) = -2x_4 - x_5 + x_{10} \leq 0$$

$$g_8(x) = -2x_6 - x_7 + x_{11} \leq 0$$

$$g_9(x) = -2x_8 - x_9 + x_{12} \leq 0$$

当 $x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1)$ 时, $f(x) = -15$, 其中约束条件 g_1, g_2, g_3, g_7, g_8 和 g_9 成立。

函数 g02 (max):

$$f(x) = \frac{\left| \sum_{i=1}^n \cos^4(x_i) - 2 \prod_{i=1}^n \cos^2(x_i) \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n i x_i^2}}$$

其中 $n = 20, 0 \leq x_i \leq 10 (i = 1, \dots, n)$

约束条件:

$$g_1(x) = 0.75 - \prod_{i=1}^n x_i \leq 0$$

$$g_2(x) = \sum_{i=1}^n x_i - 7.5n \leq 0$$

目前已知的最优解为 $f(x) = 0.803619$, 其中约束条件 $g_1 = -10^{-8}$ 。

函数 g03 (max):

$$f(x) = (\sqrt{n})^n \prod_{i=1}^n x_i$$

其中 $n=10, 0 \leq x_i \leq 1 (i=1, \dots, n)$

约束条件:

$$h_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 = 0$$

当 $x=1/\sqrt{n} (i=1, \dots, n)$ 时, 全局最优解 $f(x) = 1$ 。

函数 g04 (min):

$$f(x) = 5.3578547x_3^2 + 0.8356819x_1x_5 + 37.293239x_1 - 40792.141$$

其中 $78 \leq x_1 \leq 102, 33 \leq x_2 \leq 45, 27 \leq x_i \leq 45 (i=3, 4, 5)$

约束条件:

$$g_1(x) = 85.334407 + 0.0056858x_2x_5 + 0.0006262x_1x_4 - 0.0022053x_3x_5 - 92 \leq 0$$

$$g_2(x) = -85.334407 - 0.0056858x_2x_5 - 0.0006262x_1x_4 + 0.0022053x_3x_5 \leq 0$$

$$g_3(x) = 80.51249 + 0.0071317x_2x_5 + 0.0029955x_1x_2 + 0.0021813x_3^2 - 110 \leq 0$$

$$g_4(x) = -80.51249 - 0.0071317x_2x_5 - 0.0029955x_1x_2 - 0.0021813x_3^2 + 90 \leq 0$$

$$g_5(x) = 9.300961 + 0.0047026x_3x_5 + 0.0012547x_1x_3 + 0.0019085x_3x_4 - 25 \leq 0$$

$$g_6(x) = -9.300961 - 0.0047026x_3x_5 - 0.0012547x_1x_3 - 0.0019085x_3x_4 + 20 \leq 0$$

当 $x = (78, 33, 29.995256025682, 45, 36.775812905788)$ 时, $f(x) = -30665.539$ 。约束条件 g_1 和 g_6 成立。

函数 g05 (min):

$$f(x) = 3x_1 + 0.000001x_1^3 + 2x_2 + (0.000002/3)x_2^3$$

其中 $0 \leq x_1 \leq 1200, 0 \leq x_2 \leq 1200, -0.55 \leq x_3 \leq 0.55, -0.55 \leq x_4 \leq 0.55$

约束条件:

$$g_1(x) = -x_4 + x_3 - 0.55 \leq 0$$

$$g_2(x) = -x_3 + x_4 - 0.55 \leq 0$$

$$h_3(x) = 1000 \sin(-x_3 - 0.25) + 1000 \sin(-x_4 - 0.25) + 894.8 - x_1 = 0$$

$$h_4(x) = 1000 \sin(x_3 - 0.25) + 1000 \sin(x_4 - 0.25) + 894.8 - x_2 = 0$$

$$h_5(x) = 1000 \sin(x_4 - 0.25) + 1000 \sin(x_4 - x_3 - 0.25) + 1294.8 = 0$$

当 $x = (679.9453, 1026.067, 0.1188764, -0.3962336)$ 时, $f(x) = 5126.4981$ 。

函数 g06 (min):

$$f(x) = (x_1 - 10)^3 + (x_2 - 20)^3$$

其中 $13 \leq x_1 \leq 100, 0 \leq x_2 \leq 100$

约束条件:

$$g_1(x) = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 + 100 \leq 0$$

$$g_2(x) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 5)^2 - 82.81 \leq 0$$

当 $x = (14.095, 0.84296)$ 时, $f(x) = -6961.81388$, 所有约束条件都成立。

函数 g07 (min):

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 14x_1 - 16x_2 + (x_3 - 10)^2 + 4(x_4 - 5)^2 + (x_5 - 3)^2 \\ + 2(x_6 - 1)^2 + 5x_7^2 + 7(x_8 - 11)^2 + 2(x_9 - 10)^2 + (x_{10} - 7)^2 + 45$$

其中 $-10 \leq x_i \leq 10 (i = 1, \dots, 10)$

约束条件:

$$g_1(x) = -105 + 4x_1 + 5x_2 - 3x_7 + 9x_8 \leq 0$$

$$g_2(x) = 10x_1 - 8x_2 - 17x_7 + 2x_8 \leq 0$$

$$g_3(x) = -8x_1 + 2x_2 + 5x_9 - 2x_{10} - 12 \leq 0$$

$$g_4(x) = 3(x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 3)^2 + 2x_3^2 - 7x_4 - 120 \leq 0$$

$$g_5(x) = 5x_1^2 + 8x_2 + (x_3 - 6)^2 - 2x_4 - 40 \leq 0$$

$$g_6(x) = x_1^2 + 2(x_2 - 2)^2 - 2x_1 x_2 + 14x_5 - x_6 \leq 0$$

$$g_7(x) = 0.5(x_1 - 8)^2 + 2(x_2 - 4)^2 + 3x_5^2 - x_6 - 30 \leq 0$$

$$g_8(x) = -3x_1 + 6x_2 + 12(x_9 - 8)^2 - 7x_{10} \leq 0$$

$x = (2.171996, 2.36368, 8.773926, 5.295984, 0.9906548, 1.430574, 1.321644, 9.828726, 8.280092, 8.375927)$ 时, $g07(x) = 24.3062091$, 约束条件 $g1$ 至 $g6$ 成立。

函数 g08 (min):

$$f(x) = \frac{\sin^3(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2)}{x_1^3(x_1 + x_2)}$$

其中 $0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 10$

约束条件:

$$g_1(x) = x_1^2 - x_2 + 1 \leq 0$$

$$g_2(x) = 1 - x_1 + (x_2 - 4)^2 \leq 0$$

当 $x = (1.2279713, 4.2453733)$ 时, $f(x) = 0.095825$, 解位于不可行区域。

函数 g09 (min):

$$f(x) = (x_1 - 10)^2 + 5(x_2 - 10)^2 + x_3^4 + 3(x_4 - 11)^2 + 10x_5^6 + 7x_6^2 + x_7^4 - 4x_6x_7 - 10x_6 - 8x_7$$

其中 $-10 \leq x_i \leq 10 (i=1, \dots, 7)$

约束条件:

$$g_1(x) = -127 + 2x_1^2 + 3x_2^4 + x_3 + 4x_4^2 + 5x_5 \leq 0$$

$$g_2(x) = -282 + 7x_1 + 3x_2 + 10x_3^2 + x_4 - x_5 \leq 0$$

$$g_3(x) = -196 + 23x_1 + x_2^2 + 6x_6^2 - 8x_7 \leq 0$$

$$g_4(x) = 4x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 2x_3^2 + 5x_6 - 11x_7 \leq 0$$

当 $x = (2.330499, 1.951372, -0.4775414, 4.365726, -0.6244870, 1.038131, 1.594227)$ 时, $f(x) = 680.6300573$, 其中约束条件 g_1 和 g_4 成立。

函数 g10 (min):

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{其中 } 100 \leq x_1 \leq 10000, 1000 \leq x_i \leq 10000 (i=2, 3), 10 \leq x_i \leq 1000 (i=4, \dots, 8)$$

约束条件:

$$g_1(x) = -1 + 0.0025(x_4 + x_6) \leq 0$$

$$g_2(x) = -1 + 0.0025(x_5 + x_7 - x_4) \leq 0$$

$$g_3(x) = -1 + 0.001(x_8 - x_5) \leq 0$$

$$g_4(x) = -x_1x_6 + 833.33252x_4 + 100x_1 - 83333.333 \leq 0$$

$$g_5(x) = -x_2x_7 + 1250x_5 + x_2x_4 - 1250x_4 \leq 0$$

$$g_6(x) = -x_3x_8 + 1250000 + x_3x_5 - 2500x_5 \leq 0$$

$x = (579.3167, 1359.943, 5100.071, 182.0174, 295.5985, 217.9799, 286.4162, 395.5979)$ 时, $f(x) = 7049.3307$, 其中约束条件 g_1, g_2, g_3 成立。

函数 g11 (min):

$$f(x) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$$

$$\text{其中 } -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1$$

约束条件:

$$h(x) = x_2 - x_1^2 = 0$$

当 $x = (\pm 1/\sqrt{2}, 1/2)$ 时, $f(x) = 0.75$ 。

函数 g12 (max):

$$f(x) = (100 - (x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 - (x_3 - 5)^2) / 100$$

其中 $0 \leq x_i \leq 10 (i=1, 2, 3), p, q, r = 1, 2, \dots, 9$

约束条件:

$$g(x) = (x_1 - p)^2 + (x_2 - q)^2 + (x_3 - r)^2$$

当 $x = (5, 5, 5)$ 时, $f(x) = 1$, 解位于不可行区域。

函数 g13 (min):

$$f(x) = e^{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}$$

其中 $-2.3 \leq x_i \leq 2.3 (i=1, 2), -3.2 \leq x_i \leq 3.2 (i=3, 4, 5)$

约束条件:

$$h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 10 = 0$$

$$h_2(x) = x_2 x_3 - 5 x_4 x_5 = 0$$

$$h_3(x) = x_1^3 + x_2^3 + 1 = 0$$

当 $x = (-1.717143, 1.595709, 1.827247, -0.7636413, -0.763645)$ 时, $f(x) = 0.0539498$