Гетероскедастичность и автокорреляция

Обобщенный МНК

План лекции

- Обобщенная линейная регрессионная модель
- Последствия для оценок МНК
- Оценивание
- Гетероскедастичность
  - Оценивание
  - Тестирование
    - Тест Голдфельда-Квандта
    - Тест Бройша-Пагана
    - Тест Уайта

План лекции

- Автокорреляция
  - Определение стационарности
  - Типы автокорреляции
    - AR(1)
    - AR(p)
    - MA(q)
    - ARMA(p,q)
  - Оценивание при AR(1)
  - Тестирование автокорреляции
    - Тест Дарбина-Уотсона
    - Q-тест Бокса-Льюнга
    - Тест Бройша-Пагана (Годфри) / Тест множителя Лагранжа (AR(p), MA(q))

Обобщенная линейная регрессионная модель

- Пусть $Y = X\beta + \varepsilon$
- X для простоты пока детерминированная матрица
- Предположения об ошибке:

$$E(\varepsilon) = 0$$

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \Sigma = \sigma_\varepsilon^2 \Omega$$

где Σ симметричная положительно определенная матрица

- Рассмотрим детально два случая: гетероскедастичность и автокорреляцию

Обобщенная линейная регрессионная модель

- Ошибки гетероскедастичны, если они имеют разную дисперсию для различных наблюдений. Это явление характерно для пространственных (cross-section) выборок, когда масштаб зависимой переменной о объясняющая сила модели варьируются от наблюдения к наблюдению

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \begin{cases} \sigma_i^2 & если\ i = j \\ 0 & если\ i \neq j \end{cases}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Обобщенная линейная регрессионная модель

- Ошибки автокоррелированы, если их корреляция не равна нулю.. Это явление характерно для временных рядов (time-series), когда зависимая переменная имеет «память» и ее изменения от периода к периоду взаимосвязаны.

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_s) \neq 0 \quad \text{если } t \neq s$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Для} \quad AR(1)$$

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t,$$

$$|\rho| < 1, u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$$

Последствия для оценок МНК

- Как изменятся свойства оценок МНК, если нарушено предположение 3 теоремы Гаусса-Маркова ?
- Теперь, когда $E(\varepsilon\varepsilon') = \Sigma \neq \sigma_\varepsilon^2 I$
  - Оценки $\hat{\beta}_{МНК}$ остаются несмещенными, т.к.

$$E\left(\hat{\beta}_{МНК}\right) = \beta + (X'X)^{-1} X'E(\varepsilon) = \beta$$

  - Ковариационная матрица изменится, т.к.

$$V\left(\hat{\beta}_{МНК}\right) = V\left((X'X)^{-1} X'Y\right) = V\left((X'X)^{-1} X'\varepsilon\right) =$$

$$= (X'X)^{-1} X'V(\varepsilon) X (X'X)^{-1} =$$

$$= (X'X)^{-1} X'\Sigma X (X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} X'\Omega X (X'X)^{-1} \neq \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}$$

Последствия для оценок МНК

- Стандартные t- и F- тесты будут давать неверные выводы
- Оценки МНК теряют эффективность (больше не BLUE)

- Есть три пути решения проблемы:
  - использовать другой метод – обобщенный МНК (ОМНК)
  - использовать оценки МНК $\hat{\beta}_{МНК}$ для коэффициентов, но с откорректированной ковариационной матрицей

$$V\left(\hat{\beta}_{МНК}\right)=\left(X'X\right)^{-1}X'\Sigma X\left(X'X\right)^{-1}$$

  - Менять спецификацию уравнения, т.к. часто корень проблемы лежит в пропущенных переменных или неверно выбранной функциональной форме регрессионной зависимости

ОМНК

- Идея метода: трансформировать модель так, чтобы в новой ошибки подчинялись теореме Гаусса-Маркова
- Так как Ω положительно определенная матрица, то

$$\Omega = C\Lambda C', \quad C'C = I$$

$$\Omega^{-1} = C\Lambda^{-1}C' = P'P, \quad P = C\Lambda^{-1/2}C'$$

- С помощью матрицы преобразования Р можно трансформировать модель $PY = PX\beta + P\varepsilon$

$$\tilde{Y} = \tilde{X}\beta + \tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{Y} = PY, \tilde{X} = PX, \tilde{\varepsilon} = P\varepsilon$$

ОМНК

- Ошибки новой модели будут удовлетворять условиям теоремы Гаусса-Маркова

$$E(\tilde{\varepsilon}) = E(P\varepsilon) = PE(\varepsilon) = 0$$

$$V(\tilde{\varepsilon}) = V(P\varepsilon) = PV(\varepsilon)P' = \sigma_\varepsilon^2 P\Omega P' = \sigma_\varepsilon^2 P(P'P)^{-1} P' =$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 PP^{-1}P'^{-1}P' = \sigma_\varepsilon^2 I$$

- МНК оценка трансформированной модели называется оценкой ОМНК и будет BLUE

$$\hat{\beta}_{OMHK} = \left(\tilde{X}'\tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}'\tilde{Y} = \left(X'P'PX\right)^{-1} X'P'PY =$$

$$= \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}Y = \left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1} X'\Sigma^{-1}Y$$

Свойства оценки ОМНК

- Оценки будут несмещенными, т.к.

$$E\left(\hat{\beta}_{OMHK}\right)=E\left(\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}\left(X\beta+\varepsilon\right)\right)=$$

$$=\beta+\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}E\left(\varepsilon\right)=\beta$$

- Ковариационная матрица оценок

$$V\left(\hat{\beta}_{OMHK}\right)=V\left(\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}Y\right)=V\left(\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}\varepsilon\right)=$$

$$=\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}V\left(\varepsilon\right)\Omega^{-1}X\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}=$$

$$=\sigma_{\varepsilon}^{2}\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}\Omega\Omega^{-1}X\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}=$$

$$=\sigma_{\varepsilon}^{2}\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}=\left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1}$$

Доступный (реализуемый) ОМНК

- На практике, вид матрицы Ω неизвестен, и она подлежит оцениванию
- Тогда вместо $\hat{\beta}_{ОМНК}$ используется

$$\hat{\beta}_{РОМНК} = \left(X'\hat{\Omega}^{-1}X\right)^{-1} X'\hat{\Omega}^{-1}Y$$

- Подходы к оценке Ω зависят от вида гетероскедастичности или автокорреляции

Гетероскедастичность

Оценивание и тестирование

Гетероскедастичность (оценивание ОМНК)

- Матрица преобразования при г/ск

$$P=\begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1/\sigma_n \end{pmatrix}$$

- Вид преобразованной модели $\dfrac{Y_i}{\sigma_i}=\left(\dfrac{X_i}{\sigma_i}\right)'\beta+\dfrac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$
- Оценка ОМНК (взвешенного МНК)

$$\hat{\beta}_{OMHK}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}X_iX_i'\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}X_iY_i$$

Гетероскедастичность (оценивание РОМНК)

- На практике используется

$$\hat{\beta}_{POMHK} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\hat{\sigma}_i^2} X_i X_i' \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\hat{\sigma}_i^2} X_i Y_i$$

- Оценки получаются из следующих соображений
  - Если $\sigma_i^2 = Z_i'\alpha$,

    то состоятельные оценки $\hat{\sigma}_i^2 = Z_i'\hat{\alpha}$

    $$где\, \hat{\alpha}: \; \hat{\varepsilon}_i^2 = Z_i'\alpha + u_i$$

  - Если $\sigma_i^2 = \sigma_\varepsilon^2 \exp\left(Z_i'\alpha\right)$,

    то состоятельные оценки $\hat{\sigma}_i^2 = \exp\left(Z_i'\hat{\alpha} + \ln \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \right)$

    $$где\, \hat{\alpha}: \; \ln \hat{\varepsilon}_i^2 = Z_i'\alpha + \ln \sigma_\varepsilon^2 + u_i$$

Гетероскедастичность (оценки МНК с поправками Уайта)

- Используются $\hat{\beta}_{МНК} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y$
- Но с ковариационной матрицей

$$V\left(\hat{\beta}_{МНК}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i X_i'\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 X_i X_i'\right) \left(\sum_{i=1}^{n} X_i X_i'\right)^{-1}$$

- В работе Уайта (1980) показано, что

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 X_i X_i'$$

- состоятельная оценка для

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 X_i X_i'$$

Гетероскедастичность (тестирование)

- Для тестирования г/ск используются квадраты остатков МНК
  - Полезно строить графики остатков от переменных - предполагаемых «виновников» г/ск
  - В большинстве тестов строятся вспомогательный регрессии квадратов остатков МНК на предполагаемых «виновников» г/ск

Тест Голдфельда-Квандта (1965)

- Выбирается предполагаемый «виновник» г/ск и тестируются

$$H_0: \quad \sigma_i^2 = \sigma_\varepsilon^2 \quad для \quad \forall i, \quad H_A: \quad \sigma_i^2 = \sigma_\varepsilon^2 X_i^2$$

- Для построения тестовой статистики выборка разбивается на две группы размерами n1 и n2 предположительно с высокой и низкой дисперсией ошибок
- По каждой подвыборке оценивается МНК регрессия и вычисляются

$$s_1^2 = RSS_1/(n_1 - k - 1), \; s_2^2 = RSS_2/(n_2 - k - 1)$$

- Строится статистика

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \overset{H_0}{\sim} F\left(n_1 - k - 1, n_2 - k - 1\right)$$

- Основная гипотеза отвергается, если $F > F_\alpha\left(n_1 - k - 1, n_2 - k - 1\right)$

Тест Бройша-Пагана/Годфри (1980)

- Выбирается предполагаемый «виновник» г/ск и тестируются

$$H_0: \quad \sigma_i^2 = \sigma_\varepsilon^2 \quad для \quad \forall i,$$

$$H_A: \quad \sigma_i^2 = f\left(\alpha_0 + Z_i'\alpha\right)$$

- Для построения тестовой статистики оценивается МНК исходная регрессия, из которой извлекаются остатки
- По квадратам остатков исходной регрессии оценивается МНК вспомогательная регрессия

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \gamma_0 + Z_i'\gamma_1 + u_i$$

- и вычисляется статистика $nR^2 \overset{H_0}{\sim} \chi_p^2$
- где p – число регрессоров вспомогательной регрессии
- Основная гипотеза отвергается, если $nR^2 > \chi_{p,\alpha}^2$

Тест Уайта (1980)

- Тестируются

$$H_0: \quad \sigma_i^2 = \sigma_\varepsilon^2 \quad для \quad \forall i,$$
$$H_A: \quad иначе$$

- Для построения тестовой статистики оценивается МНК исходная регрессия, из которой извлекаются остатки
- По остатков исходной регрессии оценивается МНК вспомогательная регрессия на все исходные регрессоры, их квадраты и перекрестные произведения
- и вычисляется статистика

$$nR^2 \overset{H_0}{\sim} \chi_p^2$$

- где p – число регрессоров вспомогательной регрессии (исключая константу)
- Основная гипотеза отвергается, если $nR^2 > \chi_{p,\alpha}^2$

Автокорреляция

Оценивание и тестирование

Определение слабой стационарности

- Случайный процесс Y_t называется слабо стационарным, если выполнены следующие условия:

- $E(Y_t)$ не зависит от t
- $V(Y_t) > 0$ конечна и не зависит от t
- $\operatorname{cov}(Y_t, Y_s)$ конечная функция t-s, но не t и не s

Характеристики ошибок при слабой стационарности

- Ожидаемое значение $E(\varepsilon_t) = 0$
- Автоковариация $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = \gamma_s$
- Автокорреляция

$$corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = \frac{E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s})}{\sqrt{V(\varepsilon_t)V(\varepsilon_{t-s})}} = \rho_s$$

- Существует множество типов автокорреляции, каждая приводит к специфическому виду $V(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 \Omega$

Автокорреляция типа AR(1)

- Наиболее популярная форма а/к ошибок – авторегрессионный процесс 1-го порядка

$$Y_t = X_t'\beta + \varepsilon_t, \quad t = 1,\dots,T$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim iid\left(0, \sigma_u^2\right)$$

- Условие стационарности этого процесса

$$|\rho| < 1$$

- Это предположение обеспечивает конечность и положительность дисперсии
- Ситуация $|\rho| = 1$ называется «единичный корень»

Свойства ошибок при AR(1)

- Можно представить ошибки в виде $\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j u_{i-j}$
- Тогда

$$V(\varepsilon_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{2j} V(u_{i-j}) = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}$$

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = \operatorname{cov}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j u_{i-j}, \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j u_{i-s-j} \right) = \frac{\sigma_u^2 \rho^{|s|}}{1-\rho^2}$$

$$V(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 \Omega = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Автокорреляция AR(p)

- Когда мы имеем дело с квартальными или ежемесячными данными, ошибки в один и тот же период, но в разные годы могут коррелировать
- Например, для квартальных данных

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-4} + u_t,$$

$$\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \rho_3\varepsilon_{t-3} + \rho_4\varepsilon_{t-4} + u_t$$

- В общем случае

$$\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \rho_p\varepsilon_{t-p} + u_t$$

Автокорреляция типа MA(1)

- В некоторых случаях экономическая теория предполагает, что только отдельные компоненты ошибки коррелированы, а остальные нет
- Такая ситуация описывается процессом скользящего среднего MA(q)

$$\varepsilon_t = u_t + \lambda_1 u_{t-1} + \lambda_2 u_{t-2} + \ldots + \lambda_q u_{t-q}$$

- Для процесса MA(1)

$$V(\varepsilon) = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda & 1+\lambda^2 & \lambda & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1+\lambda^2 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Процесс ARMA(p,q)

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \rho_p \varepsilon_{t-p} + u_t +$$
$$+ \lambda_1 u_{t-1} + \lambda_2 u_{t-2} + \ldots + \lambda_q u_{t-q}$$

Оценивание в случае AR(1) ОМНК

- Преобразование Кокрена-Уоркутта

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \left(X_t - \rho X_{t-1}\right)' \beta + u_t, \quad t = 2,\ldots,T$$

- Поправки для первых наблюдений Прайса-Уинстона $\sqrt{1-\rho^2}Y_1 = \sqrt{1-\rho^2}X_1'\beta + u_1$
- Матрица преобразования исходных переменных

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

Оценивание в случае AR(1) РОМНК

- Для трансформации исходных переменных необходима оценка параметра а/к
- Оценив исходную модель МНК и вычислив ее остатки, можно получить

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}$$

РОМНК
итерационная процедура

- На 1-ом шаге МНК оценивается исходная модель
- По остаткам регрессии 1-го шага вычисляется оценка параметра а/к
- Исходная модель трансформируется и оценивается МНК

$$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = \left(X_t - \hat{\rho} X_{t-1}\right)' \beta + u_t, \quad t = 2,\dots,T$$

$$\sqrt{1-\hat{\rho}^2}\, Y_1 = \sqrt{1-\hat{\rho}^2}\, X_1' \beta + u_1$$

- По остаткам регрессии 3-го шага вычисляется оценка параметра а/к и т.д.

Оценки МНК с поправками Ньюи-Уэста

- Используются $\hat{\beta}_{МНК} = (X'X)^{-1} X'Y$
- С ковариационной матрицей

$$\hat{V}\left(\hat{\beta}_{МНК}\right) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{T}X'X\right)^{-1} S \left(\frac{1}{T}X'X\right)^{-1}$$

- где

$$S = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2 X_t X_t' + \frac{1}{T}\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=l+1}^{T} w_l \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-l}\left(X_t X_{t-l}' + X_{t-l} X_t'\right)$$

- веса $w_l = 1 - \dfrac{l}{L+1}$

Тестирование а/к

- Тест Дарбина-Уотсона для AR(1)
  - Проверяются $H_0: \quad \rho = 0, \quad H_A: \quad \rho \neq 0$
  - На 1-ом шаге МНК оценивается исходная модель
  - По остаткам регрессии 1-го шага вычисляется статистика Дарбина-Уотсона

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2} \approx 2(1-\rho) \qquad E(DW) \approx 2 + \frac{2(k-1)}{n-k}$$

  - С помощью специальных таблиц выясняется, в какую зону попадает DW и делается вывод

Тестирование а/к

- Ограничения теста Дарбина-Уотсона

  - работает только для AR(1)
  - в регрессии должна быть константа
  - в регрессии не должно быть стохастических регрессоров, например, лага Y
  - наличие зон неопределенности

Тестирование а/к

- Тест Бройша-Пагана/Годфри (1978) на AR(p), MA(q)
  - Тест позволяет использовать лаги Y в модели
  - Проверяются $H_0: \quad \text{нет} \quad \text{автокорреляции},$
    $H_A: \quad \varepsilon_t = AR(p) \quad \text{или} \quad \varepsilon_t = MA(q)$
  - Оценивается исходная регрессия МНК
  - По остаткам исходной модели строится вспомогательная регрессия

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t'\gamma + \delta_1\hat{\varepsilon}_{t-1} + \delta_2\hat{\varepsilon}_{t-2} + \ldots + \delta_p\hat{\varepsilon}_{t-p} + u_t$$

  - и вычисляется статистика $LM = nR^2 \overset{H_0}{\sim} \chi_p^2$
- где p – число регрессоров вспомогательной регрессии
- Основная гипотеза отвергается, если $nR^2 > \chi_{p,\alpha}^2$

Тестирование а/к

- Тест Льюнга-Бокса на ARMA(p,q)
  - Тестовая статистика

$$Q_k = T(T+2)\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{T-k} \hat{\rho}_k^2$$

$$\hat{\rho}_k = \frac{\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-k}}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}$$

Если верна основная гипотеза $Q_k \sim \chi^2_{k-p-q}$

Тестирование а/к

- Диаграммы AC и PAC
  - AC автокорреляционная функция (АКФ)

$$\hat{\rho}_k = \frac{\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-k}}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2}$$

  - PAC частная автокорреляционная функция (ЧАКФ), определяется из системы

линейных уравнений Юла-Уокера, связывающей значения АКФ и частной АКФ

$$\begin{cases} \rho_1 = \varphi_{k1}\cdot 1 + \varphi_{k2}\rho_1 + \varphi_{k3}\rho_2 + .. + \varphi_{kk}\rho_{k-1} \\ \rho_2 = \varphi_{k1}\rho_1 + \varphi_{k2}\cdot 1 + \varphi_{k3}\rho_1 + .. + \varphi_{kk}\rho_{k-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho_k = \varphi_{k1}\rho_{k-1} + \varphi_{k2}\rho_{k-2} + \varphi_{k3}\cdot\rho_{k-3} + .. + \varphi_{kk}\cdot 1. \end{cases}$$

Автокорреляционная функция (АС)

Пусть X – некоторый временной ряд, тогда его теоретическая АКФ имеет вид:

$$\rho(\tau) = \frac{1}{Var(X_t)} E\{(X_t - \mu)(X_{t-\tau} - \mu)\}$$

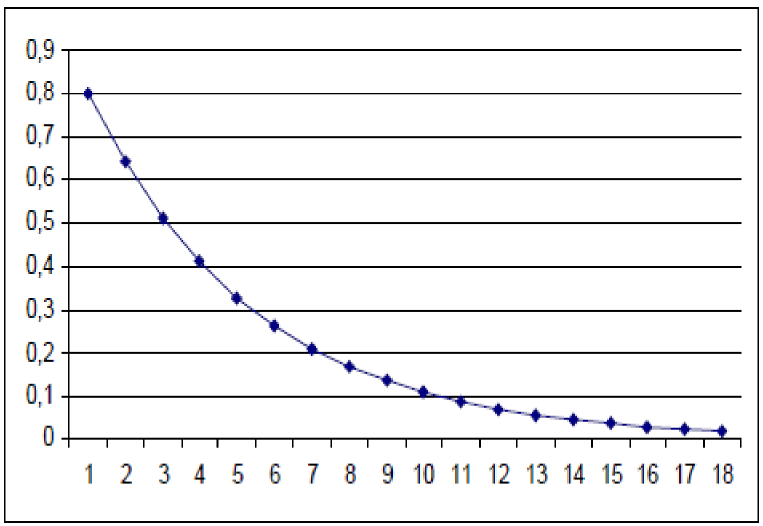


Рис. 1. Значения автокорреляционной функции процесса AR(1) при значении коэффициента равном 0,8

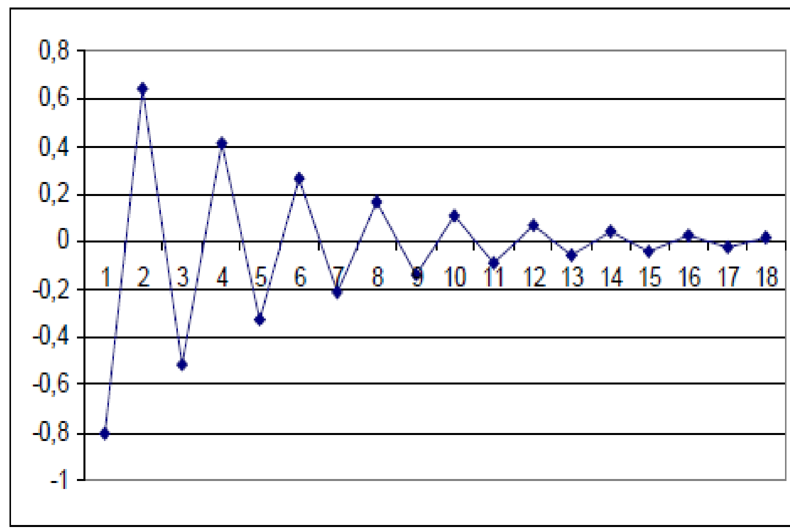
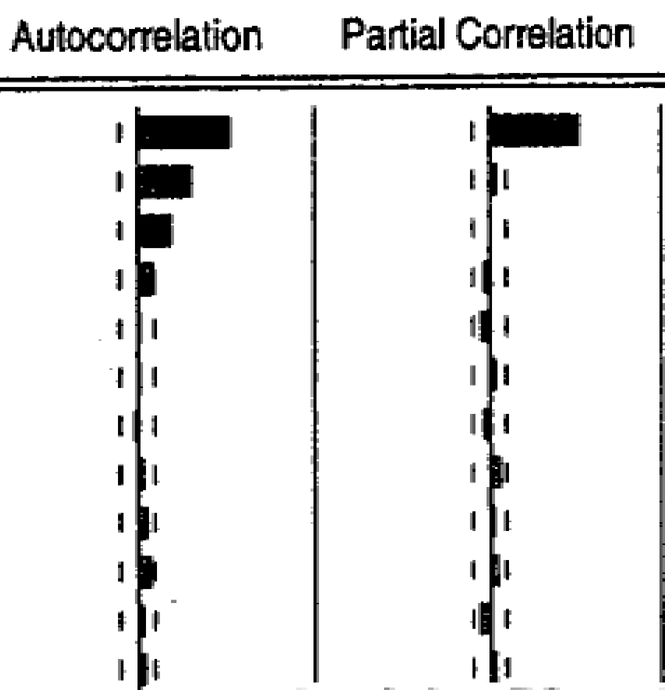


Рис. 2. Значения автокорреляционной функции процесса AR(1) при значении коэффициента равном −0,8

Идентификация параметров ARMA (Магнус, Катышев,Пересецкий)

Вид коррелограмм AC и PAC для ρ>0

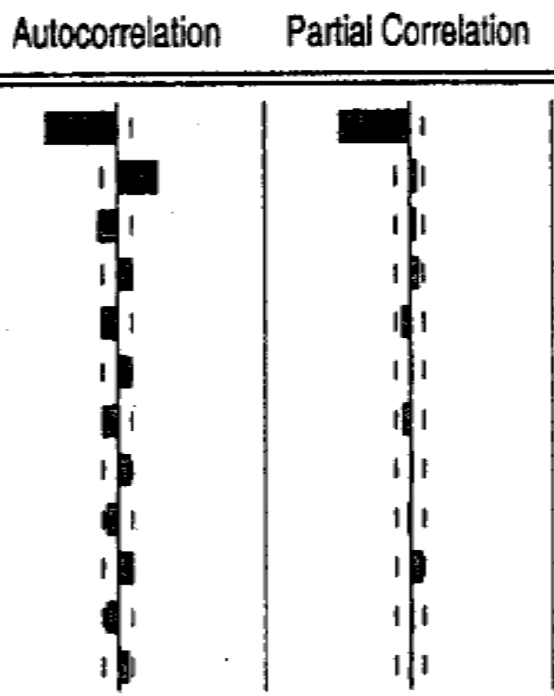


	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.539	0.539	116.40	0.000
2	0.319	0.041	157.37	0.000
3	0.190	0.004	171.91	0.000
4	0.092	-0.029	175.35	0.000
5	0.014	-0.044	175.43	0.000
6	0.012	0.033	175.50	0.000
7	-0.013	-0.026	175.56	0.000
8	0.025	0.059	175.81	0.000
9	0.042	0.018	176.52	0.000
10	0.069	0.042	178.47	0.000
11	0.027	-0.051	178.78	0.000
12	0.036	0.028	179.32	0.000

AR(1). $Y_t = 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Идентификация параметров ARMA (Магнус, Катышев,Пересецкий)

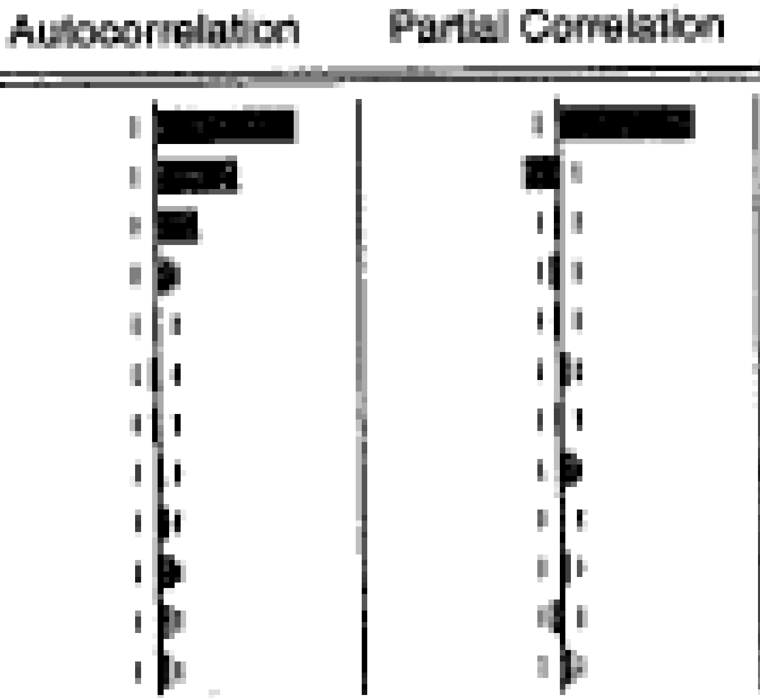
Вид коррелограмм AC и PAC для ρ<0



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.500	-0.500	100.19	0.000
2	0.281	0.041	131.88	0.000
3	-0.125	0.041	138.15	0.000
4	0.104	0.063	142.49	0.000
5	-0.106	-0.049	147.01	0.000
6	0.090	0.009	150.33	0.000
7	-0.096	-0.043	154.11	0.000
8	0.080	0.011	156.70	0.000
9	-0.068	-0.010	158.57	0.000
10	0.103	0.074	162.91	0.000
11	-0.081	0.009	165.60	0.000
12	0.063	-0.002	167.23	0.000

AR(1). $Y_t = -0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$

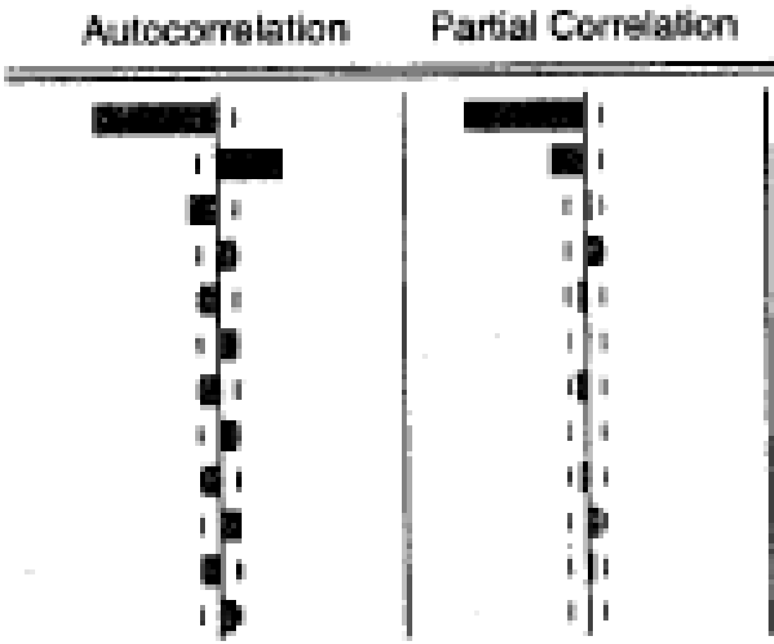
Идентификация параметров ARMA (Магнус, Катышев,Пересецкий)



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.700	0.700	196.54	0.000
2	0.403	-0.171	261.80	0.000
3	0.203	-0.016	278.34	0.000
4	0.072	-0.037	280.46	0.000
5	-0.006	-0.023	280.47	0.000
6	-0.021	0.035	280.64	0.000
7	-0.022	-0.016	280.84	0.000
8	0.017	0.071	280.95	0.000
9	0.049	0.006	281.93	0.000
10	0.071	0.025	283.99	0.000
11	0.051	-0.043	285.05	0.000
12	0.048	0.045	286.00	0.000

$$\mathrm{AR}(2).\quad Y_t = 0.8Y_{t-1} - 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t.$$

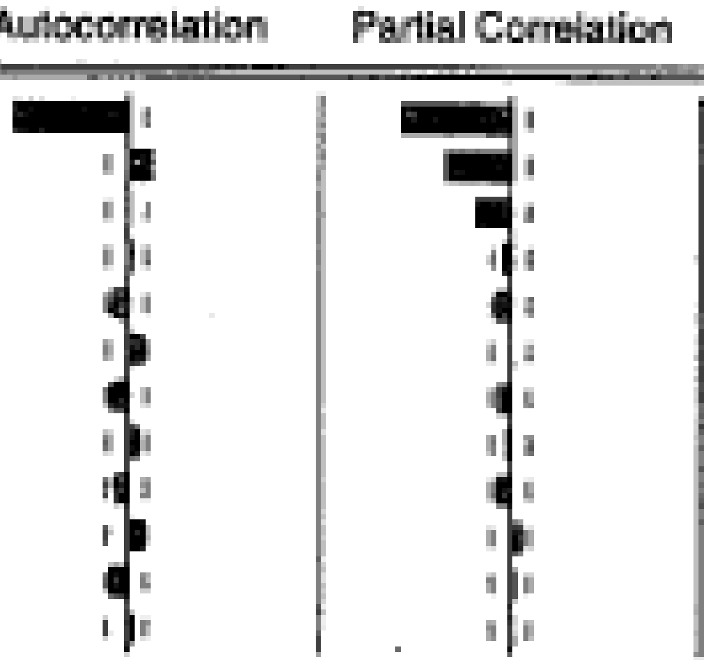
Идентификация параметров ARMA (Магнус, Катышев,Пересецкий)



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.670	-0.670	179.75	0.000
2	0.353	-0.173	229.82	0.000
3	-0.147	0.028	238.48	0.000
4	0.087	0.083	241.55	0.000
5	-0.088	-0.032	244.67	0.000
6	0.090	0.009	247.99	0.000
7	-0.097	-0.042	251.78	0.000
8	0.088	0.007	254.96	0.000
9	-0.086	-0.030	257.98	0.000
10	0.106	0.062	262.57	0.000
11	-0.092	0.029	266.04	0.000
12	0.071	0.010	268.12	0.000

$$\mathrm{AR}(2). \quad Y_t = -0.8Y_{t-1} - 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

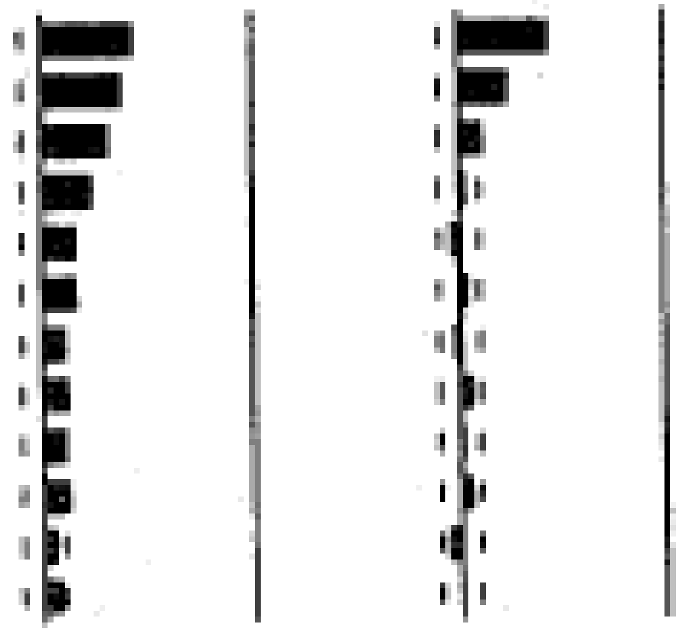
Идентификация параметров ARMA (Магнус, Катышев,Пересецкий)



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.593	-0.593	140.88	0.000
2	0.124	-0.351	147.01	0.000
3	0.004	-0.185	147.02	0.000
4	0.026	-0.034	147.29	0.000
5	-0.069	-0.068	149.21	0.000
6	0.076	0.003	151.55	0.000
7	-0.074	-0.050	153.79	0.000
8	0.056	-0.014	155.06	0.000
9	-0.055	-0.058	156.32	0.000
10	0.088	0.050	159.47	0.000
11	-0.077	0.024	161.89	0.000
12	0.035	0.010	162.40	0.000

$$\text{MA}(2).\quad Y_t = \varepsilon_t - 0.9\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2}.$$

Идентификация параметров ARMA (Магнус, Катышев,Пересецкий)



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.449	0.449	90.885	0.000
2	0.389	0.234	141.60	0.000
3	0.320	0.108	182.89	0.000
4	0.246	0.025	207.30	0.000
5	0.162	-0.037	217.92	0.000
6	0.161	0.040	226.44	0.000
7	0.100	-0.021	232.54	0.000
8	0.121	0.053	238.50	0.000
9	0.102	0.019	242.73	0.000
10	0.123	0.052	248.91	0.000
11	0.057	-0.053	250.23	0.000
12	0.067	0.002	252.10	0.000

$$\text{ARMA}(1,1).\quad Y_t = 0.8Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}.$$

Спасибо за внимание!