



Эндогенность

инструментальные
переменные

Проблема

Важное предположение классической линейной регрессии $Y = X\beta + \varepsilon$
- предположение **экзогенности** регрессоров, то есть некоррелированности регрессоров и случайной ошибки:

$$\text{cov}(X, \varepsilon) = 0 \quad E(\varepsilon | X) = 0 \quad p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X' \varepsilon}{n} = 0$$

Когда регрессоры полагаются *детерминированными*, это предположение удовлетворяется автоматически, если же регрессоры *стохастичны* (как в примерах, которые будут рассмотрены ниже), это предположение следует проверять

Регрессоры, коррелирующие с ошибкой, называются **эндогенными**

Свойства оценок МНК

- Обычные оценки метода наименьших квадратов в этом случае
 - смещены и

- несостоятельны

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta} = \beta + p \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{X'X}{n} \right)^{-1} \frac{X'\varepsilon}{n} \right] =$$

$$= \beta + \left(p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} X'X \right)^{-1} \cdot p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X'\varepsilon}{n} \neq \beta$$

- Содержательная интерпретация ошибочна
- Рекомендации, выработанные на основе модели неверны

Причины эндогенности

1. Пропуск существенных переменных
 2. Ошибки измерения регрессоров
 3. Самоотбор
 4. Одновременность
 5. Автокорреляция ошибок при наличии в уравнении лага зависимой переменной в роли регрессора
- Причины 2-5 по сути есть следствия причины 1
 - Разные источники эндогенности могут иметь место одновременно
 - Источники могут как усиливать, так и компенсировать друг друга

Пропуск существенной переменной (примеры)

Анализ рынка труда

- Пропуск переменной «способности» при оценивании эффекта образования на заработную плату:
- «способности» сильно и положительно коррелируют с образованием и, будучи пропущенными, приводят к смещению оценки эффекта образования вверх

Маркетинговые исследования

При анализе влияния **цен** или **рекламы** на **объемы продаж** пропускаются важные, но ненаблюдаемые характеристики локальных рынков или товаров:

- уровень конкуренции,
- слухи,
- изменения во вкусах,
- доли различных игроков,
- наличие скидок,

Пропуск этих переменных, коррелированных с ценами и реакцией потребителя на рекламу, приводят к смещению оценок влияния последних

Пропуск существенной переменной

- Происходит, если оценивается

модель (1) $Y = X\beta + \varepsilon$

а истинной является

модель (2) $Y = X\beta + Z\gamma + \varepsilon$

Тогда оценка $\hat{\beta}_{(1)}$ будет смещенной

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_{(1)}) &= E[(X'X)^{-1} X'Y] = (X'X)^{-1} X'E(X\beta + Z\gamma + \varepsilon) = \\ &= \beta + (X'X)^{-1} X'Z\gamma \neq \beta \end{aligned}$$

Ошибки измерения регрессоров

Причины ошибок измерения

- Метод измерения
 - Ошибки метода измерения:
 - эффект ореола
 - эффекты интервьюирующего
 - искажения от эффекта социальной желательности(ошибки измерения переменных в обследованиях домохозяйств)
- Инструмент измерения
 - Неудачные шкалы рейтингов для измерения восприятия, вер, отношений, суждений
- Отсутствие физической единицы измерения
 - Ошибки измерения образования:
 - число лет обучения не отражает самообразования
- Ошибки агрегирования
 - Ошибки измерения цены в моделях совокупного спроса
 - потребители сталкиваются с разными ценами и товарными характеристиками

Самоотбор

Возникает, когда индивиды (фирмы) выбирают себе определенное состояние, руководствуясь скрытыми причинами:

- выходить на рынок труда или нет,
- быть или не быть членом бизнес-ассоциации,
- работать в бюджетном секторе или частном;
- или когда опрос ведется через интернет:

$$Y_i = \begin{cases} X_i' \beta + \varepsilon_i, & \text{продажи в магазинах} \\ X_i'(\beta + \delta) + \varepsilon_i, & \text{продажи через интернет} \end{cases}$$

$$Y_i = X_i' \beta + D_i X_i' \delta + \varepsilon_i$$

Тогда в модели

возникает эндогенность, если

$$\exists \text{ cov}(D_i, \varepsilon_i) \neq 0$$

Одновременность

Проявляется, когда переменные правой части регрессионного уравнения определяются одновременно с зависимыми переменными, т.е. эндогенно порождаются процессом

- принятие решения об образовании или о выходе на рынок труда,
- формирование цены и величины спроса
- Кейнсианская модель потребления: $\exists \text{ cov}(Y_t, \varepsilon_t) \neq 0$

в модели $C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_t$ поскольку $Y_t = C_t + I_t$

Чтобы увидеть эту ковариацию, перепишем систему в приведенном виде

$$\begin{cases} C_t = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta} I_t + \frac{1}{1-\beta} \varepsilon_t \\ Y_t = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} I_t + \frac{1}{1-\beta} \varepsilon_t \end{cases}$$

$$\text{cov}(Y_t, \varepsilon_t) = \text{cov}\left(\frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} I_t + \frac{1}{1-\beta} \varepsilon_t, \varepsilon_t\right) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\beta}$$

$$E(\hat{\beta}) = E\left(\frac{\text{cov}(C, Y)}{V(Y)}\right) = E\left(\frac{\text{cov}(C, Y)}{V(Y)}\right) = \beta + \frac{\text{cov}(\varepsilon, Y)}{\sigma_y^2} = \beta + \frac{1}{1-\beta} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}$$

Авторегрессии с автокоррелированными ошибками

- Модель адаптивных ожиданий
- Эффект продажи каталога на вероятность покупки товара из каталога:
 - переменная почтовой рассылки и другие рекламные воздействия на потребителя – функции прошлых продаж

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + v_t$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_{t-1}, \varepsilon_t) &= \text{cov}(\alpha + \beta X_{t-1} + \gamma Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}, \rho \varepsilon_{t-1} + v_t) = \\ &= \rho \sigma_\varepsilon^2 + \rho \gamma \text{cov}(Y_{t-2}, \varepsilon_{t-1}) = \frac{\rho \sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho \gamma} \end{aligned}$$

Методы оценивания

- **Метод инструментальных переменных**

$$\hat{\beta}_{IV} = (Z'X)^{-1} Z'Y, \quad V(\hat{\beta}_{IV}) = \sigma_{\varepsilon}^2 (Z'X)^{-1} Z'Z (Z'X)^{-1}$$

- инструментов Z столько же, сколько регрессоров, для экзогенных регрессоров – инструменты они же сами

- **Двухшаговый МНК** $\hat{\beta}_{TSLS} = (\hat{X}'\hat{X})^{-1} \hat{X}'Y, \quad \hat{X} = Z(Z'Z)^{-1} Z'X,$

$$V(\hat{\beta}_{TSLS}) = \sigma_{\varepsilon}^2 (X'Z(Z'Z)^{-1} Z'X)^{-1}$$

- инструментов больше, чем регрессоров

Инструменты

Некие переменные Z , удовлетворяющие требованиям:

- сильная коррелированность с эндогенным регрессором X

- некоррелированность с ошибкой $p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z'\varepsilon}{n} = 0$

Обобщенный метод моментов

- Стандартный метод инструментальных переменных – это частный случай ОММ (обобщенного метода моментов)
- Если у нас имеется L инструментов, мы можем определить функцию

$$g_i(\beta) = Z_i \varepsilon_i = Z_i (Y_i - X_i' \beta)$$

которая называется моментом и представляет собой вектор размерности L , определенный для каждого наблюдения $i=1, \dots, N$

- Если инструменты экзогенны, то должны быть выполнены *условия ортогональности* или *моментные тождества*

$$E(g_i(\beta)) = 0$$

Обобщенный метод моментов

Выборочный аналог моментного тождества будет иметь вид:

$$\bar{g}(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i (Y_i - X_i' \beta) = \frac{1}{N} Z' \varepsilon$$

Оценка вектора коэффициентов будет решением уравнения (1)

$$\bar{g}(\beta) = 0$$

- Если число моментных тождеств L (которое соответствует числу инструментов) совпадает с количеством регрессоров K , то решение уравнения (1) совпадает с $\hat{\beta}_{IV}$
- Если $L > K$, инструментов больше, чем регрессоров, то вместо уравнения (1)

в рамках ОММ решают задачу оптимизации квадратичной формы вида:

$$J(\beta) = N(\bar{g}(\beta))' W \bar{g}(\beta)$$

где W – некая весовая матрица размера $L \times L$

Оценка ОММ

- Из условия первого порядка: $\frac{\partial J(\beta)}{\partial \beta} = 0$
находят оценку:

$$\hat{\beta}_{ОММ} = (X'ZWZ'X)^{-1} X'ZWZ'Y$$

$$V(\hat{\beta}_{ОММ}) = \frac{1}{N} (X'ZWZ'X)^{-1} X'ZW S W Z'X (X'ZWZ'X)^{-1}$$

- В зависимости от выбора весовой матрицы W таких оценок можно построить множество, но есть оптимальная

$$W_{opt} = S^{-1}, \quad S = \frac{1}{N} E(Z' \varepsilon \varepsilon' Z)$$

Свойства оценок ОММ

В общем случае, если ввести θ - вектор параметров, подлежащих оцениванию,

- ОММ оценка состоятельна: $\hat{\theta}_{ОММ} \rightarrow \theta$
- ОММ оценка асимптотически нормальна

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_{ОММ} - \theta) \rightarrow N(0, V)$$

- Асимптотическая ковариационная матрица оценки имеет вид: $V = (DW_{opt}D')^{-1}$

где
$$D = E \left\{ \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta'} \right\}$$

Достоинства ОММ

- ОММ не требует предположений о распределении остатков
- ОММ учитывает гетероскедастичность неизвестного вида, причем
 - в отсутствии гетероскедастичности $\hat{\beta}_{ОММ}$ асимптотически не хуже $\hat{\beta}_{IV}$
 - при наличии гетероскедастичности $\hat{\beta}_{ОММ}$ эффективнее, чем $\hat{\beta}_{IV}$
- ОММ позволяет оценить параметры даже если их невозможно аналитически вывести из условия 1-го порядка
- При конструировании эмпирического аналога моментного тождества можно провести сглаживание с помощью ядерной функции. Это позволит уменьшить влияние нетипичных наблюдений, поскольку они будут учитываться с меньшими весами, нежели типичные наблюдения.

Тестирование качества инструментов

1. Проверка коррелированности эндогенных регрессоров и инструментов (тестирование релевантности)

Если в модели $Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$

X_1 – эндогенны, Z – инструменты, то необходимо построить регрессии каждого столбца из X_1 на Z и посмотреть на R^2 или на F -статистику, которая должна быть >10 , иначе Z – слабые инструменты

Тестирование качества инструментов

2. Проверка экзогенности инструментов (тестирование валидности)

Тест Хансена:

$$J(\hat{\beta}_{\text{ЭОММ}}) = N(\bar{g}(\hat{\beta}))' \hat{S}^{-1} \bar{g}(\hat{\beta}) \sim \chi^2_{L-K}$$

Его модификация при гетероскедастичности

$$J(\hat{\beta}_{\text{ЭОММ}}) = \hat{\varepsilon}' Z (Z' \hat{\Omega} Z)^{-1} Z' \hat{\varepsilon} \sim \chi^2_{L-K}$$

Его модификация при гомоскедастичности
(тест Саргана)

$$J(\hat{\beta}_{\text{ЭОММ}}) = \frac{1}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2} \hat{\varepsilon}' Z (Z' Z)^{-1} Z' \hat{\varepsilon} \sim \chi^2_{L-K}$$

Тестирование эндогенности регрессоров

- Тест Хаусмана
- Проверяется гипотеза H_0 : $p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X' \varepsilon}{n} = 0$
- на основании статистики

$$\eta = (\hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}_{МНК})' (V(\hat{\beta}_{IV}) - V(\hat{\beta}_{МНК}))^{-1} (\hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}_{МНК}) \stackrel{H_0}{\sim} \chi_k^2$$

- которая сопоставляет две оценки,

$\hat{\beta}_{IV}$ - состоятельную и при H_0 , и при H_A

$\hat{\beta}_{МНК}$ - состоятельную и эффективную при H_0 , и несостоятельную при H_A

Тестирование эндогенности регрессоров

Вместо теста Хаусмана можно проводить процедуру Дарбина-Ву:

пусть в модели $Y = X_1\beta_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$

X_2 - единственный эндогенный регрессор, тогда процедура осуществляется в следующие три шага:

1. Строится вспомогательная регрессия

$$X_2 = X_1\alpha_1 + \gamma Z + v \rightarrow \hat{v}$$

Теперь необходимо выяснить, будет ли X_2 ортогонален ε , но это то же самое, что выяснение ортогональности v и ε

2. Для этого строится регрессия

$$Y = X_1\beta_1 + \beta_2 X_2 + \delta \hat{v} + \varepsilon$$

3. Проверяется значимость влияния \hat{v}

Проблема выбора инструментов

- Инструменты должны браться вне модели
- Требования к инструментам противоречивы:
 - Если Z должны сильно коррелировать с X , а X должны сильно коррелировать с Y , то Z будут сильно коррелировать с Y , а, следовательно, коррелировать с ошибкой
- **Следствия противоречивости требований к инструментам**
 - Либо инструменты экзогенные (нет корреляции с ошибкой), но слабые (слабо коррелируют с X)
 - Либо инструменты сильные (сильно коррелируют с X), но эндогенные (сильно коррелируют с ошибкой)

Выбор числа инструментов

- Лучше не более трех-четырех (для одного эндогенного регрессора)
- Можно использовать метод главных компонент для инструментов и выбирать компоненты, наиболее связанные с X , отбрасывая остальные
- Чем слабее инструменты, тем меньше их должно быть

Источники инструментов

- Если есть панель, то часто инструменты не нужны
- Инструментом может быть переменная группировки (группировка должна различать ненаблюдаемые высокие и низкие значения пропущенной переменной)
- Инструментом может быть лаг высокого порядка
- Можно использовать легкодоступные экзогенные переменные, не включенные в модель



Спасибо за внимание!