$$a(x) \overset{sign}{=} (\langle w, x\rangle + w_0)$$

$$y = \{-1; 1\}, \quad x \in R^d$$

$$a(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle w, x\rangle + w_0 > 0 \\ -1, & \text{если } \langle w, x\rangle + w_0 < 0 \end{cases}$$

$\in R^{d+1}$

$$\underline{\langle w, x\rangle + w_0} = \langle \tilde{w}, \tilde{x}\rangle$$

Задача 1 $x = (x_1, x_2)$

$$a(x) = sign(\langle \underset{(w_1, w_2)}{w}, x\rangle + w_0)$$

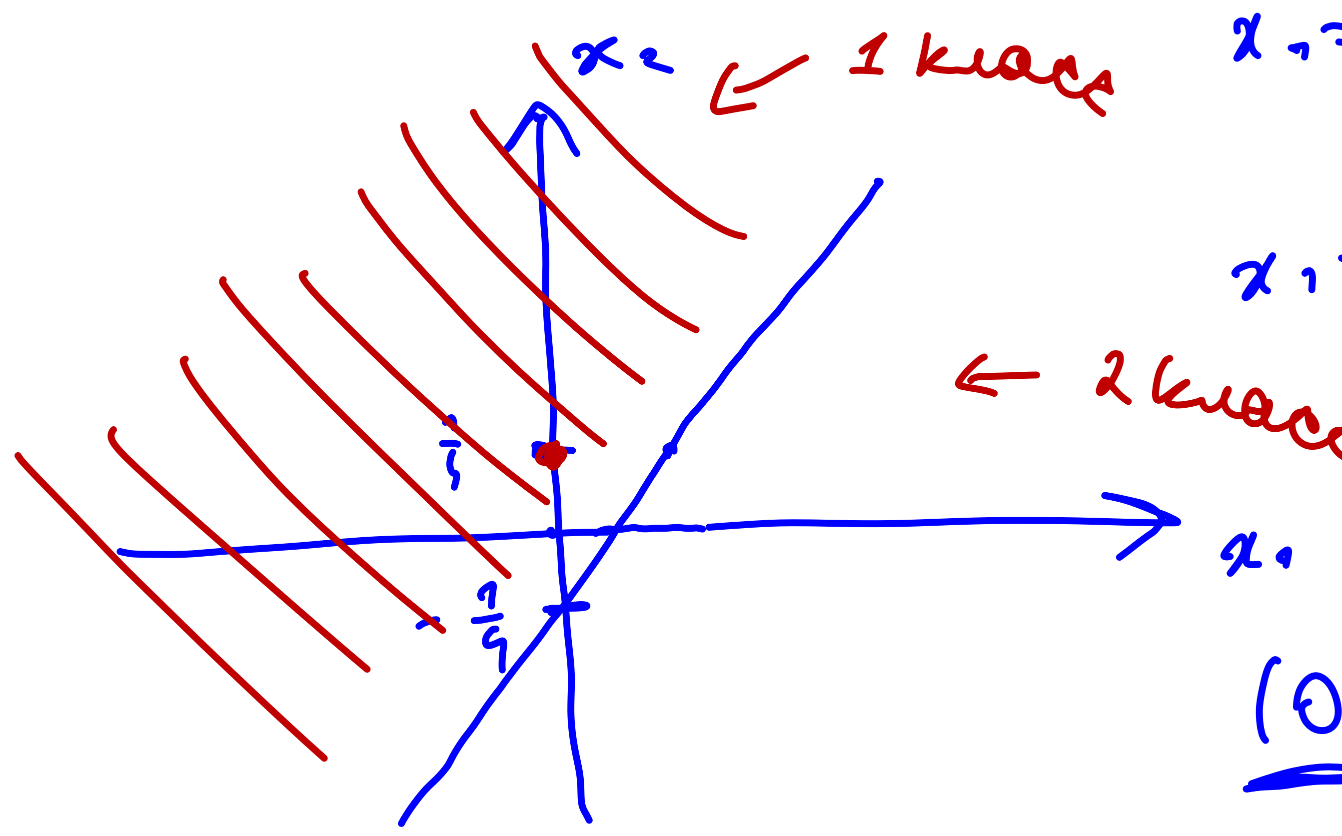
$$\hat{w} = (-1, 2)$$

$$\hat{w}_0 = 0.5$$

разделяющая поверхность

$$\boxed{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_0 = 0}$$

$$-x_1 + 2x_2 + 0.5 = 0$$



$x_1 = 0 \to 2x_2 = -\frac{1}{2}$

$x_2 = -\frac{1}{4}$

$x_1 = 1$, $-1 + 0.5 = -2x_2$

$x_2 = \frac{1}{4}$

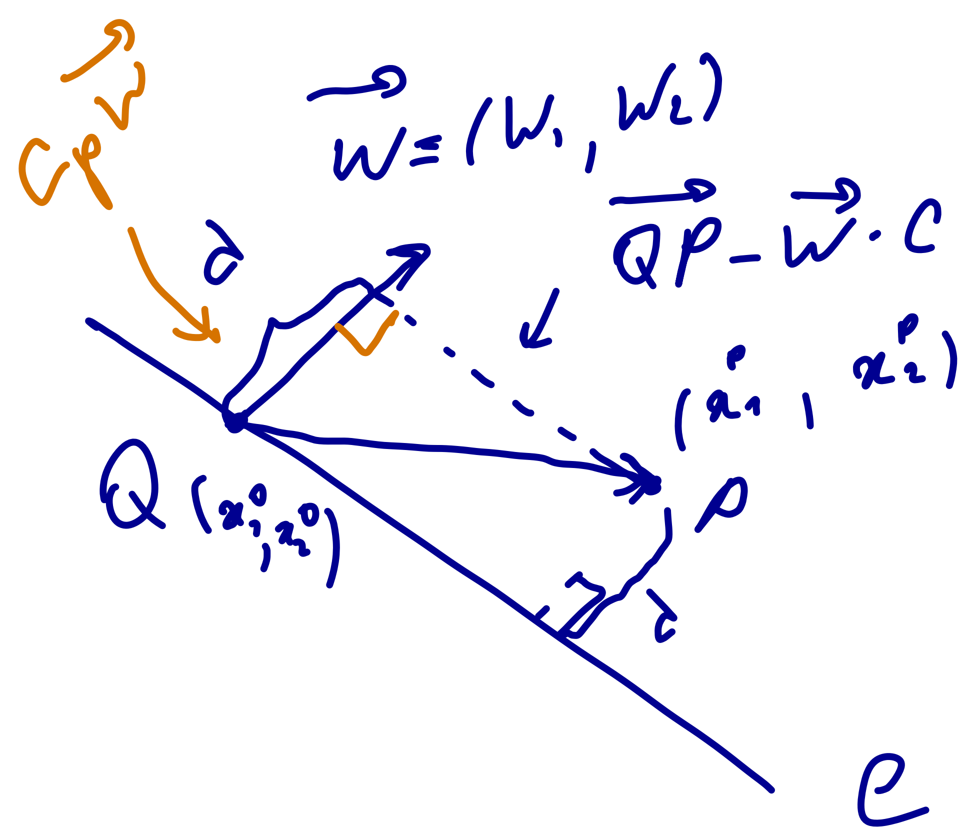
$\underline{(0, \frac{1}{4})}$: $0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 > 0$

здесь веса

$$Q = \sum_{i=1}^{l} [a(x_i) \ne y_i]$$

домножили

$$Q = \sum_{i=1}^{l} [\underbrace{y_i \overbrace{w^T x_i}^{M_i}}_{\text{отступ}} < 0]$$



$$l: \boxed{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_0 = 0}$$

Посчитаем расст. P до l

$$\vec{n} = (w_1, w_2)$$

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \in l$$

$$w_1 \underbrace{(x_1 - x_1^{(i)})} + w_2 \underbrace{(x_2 - x_2^{(i)})} = 0$$

$$\|\vec{w}\|_2^2 = \left(\sqrt{w_1^2 + w_2^2}\right)^2$$

$$\langle \vec{QP} - c\vec{w} ; \vec{w} \rangle \; 0$$

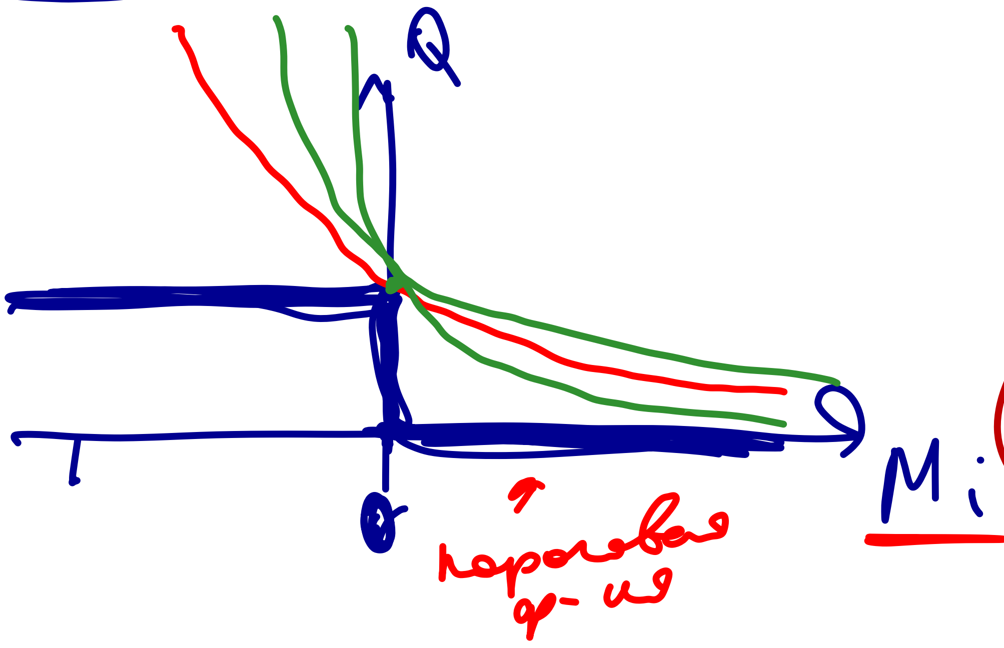
$$\langle \vec{QP}, \vec{w} \rangle - c \underbrace{\|\vec{w}\|^2} = 0$$

$$c = \frac{\langle \vec{QP}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2}$$

$proj_{\vec{w}} \vec{P}$ (проекция ~~нормали~~ вектора QP на нормаль)

$$\vec{d} = \underbrace{\frac{\langle \vec{QP}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2}}_{c_p} \cdot \vec{w} = c_p \vec{w}$$

$$\|\vec{d}\| = c_p \cdot \|\vec{w}\| = \overbrace{\frac{\langle \vec{QP}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|}}^{\text{чем больше скал. пр. тем больше расст.}}$$



$$Q = \sum [M_i < 0] \to \min_w$$

$$L(M_i) \le \tilde{L}(M_i) \quad \forall M_i$$

логистич. ф-ия потерь

$$L_i = \ln(1 + \exp(-M_i))$$

Экспон.

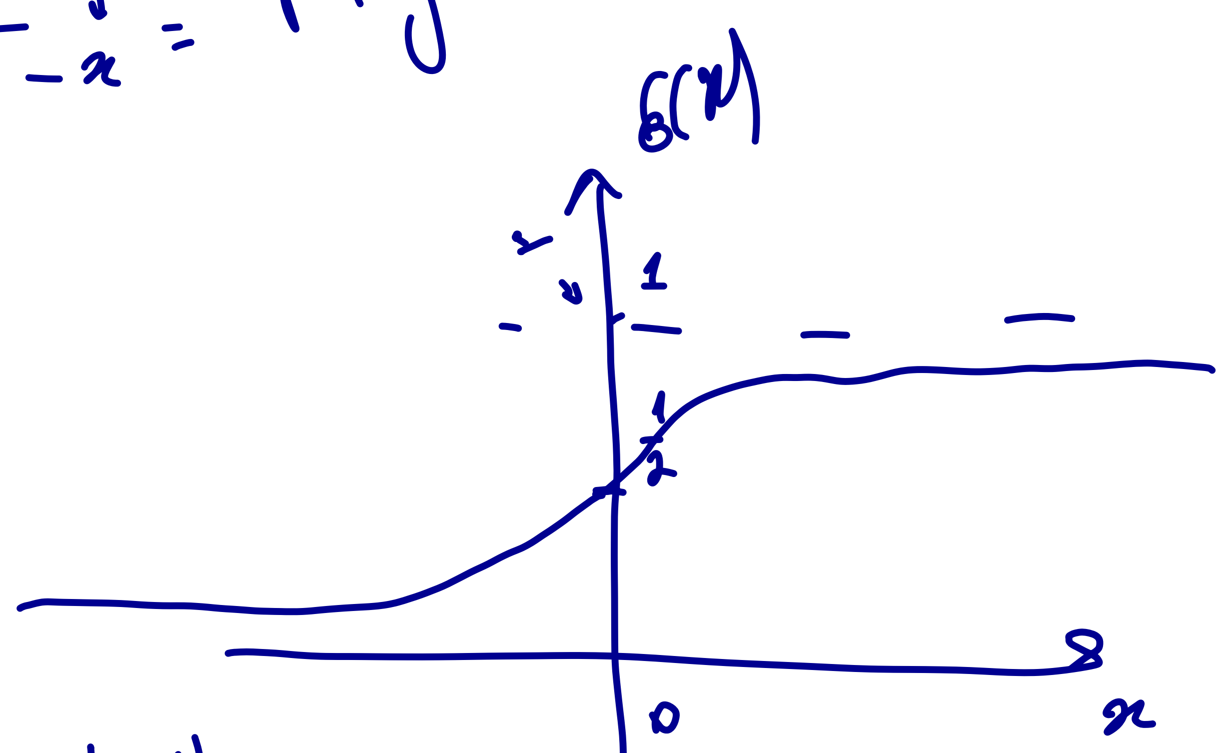
$$L_i = \exp(-M_i)$$

на подумать: д/з

$$\boxed{\hat{L}(M_i) = \frac{9}{10} - \frac{1}{\pi}\arctan M_i}$$

Логистическая регрессия

$$\sigma(X) = \frac{1}{1+e^{-\overset{w^T x}{\overset{\downarrow}{x}}}} = P(y=1|X)$$



① $P(y=0|X) = 1 - \sigma(X) =$

$$= 1 - \frac{1}{1+e^{-X}} = \frac{1+e^{-X}-1}{1+e^{-X}} =$$

$$= \frac{e^{-X}}{1+e^{-X}} = \frac{1}{1+e^{X}} = \sigma(-X)$$

$$\boxed{1 - \sigma(X) = \sigma(-X)}$$

$$\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)'_x = +(1+e^{-x})^{-2} e^{-x}$$

$\sigma'(x)$ vs $\sigma'(-x)$

$=$

$$= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

$$\left(\frac{1}{1+e^{-wx}}\right)'_w = +(1+e^{-wx})^{-2} e^{-wx} \cdot x =$$

$$= \frac{e^{-wx}}{(1+e^{-wx})^2} \cdot x$$

$$\left(\frac{1}{1+e^{wx}}\right)'_w = -\frac{e^{+wx}}{(1+e^{+wx})^2} \cdot x$$

✓ $p'(y=1|X)$

$$\boxed{\sigma'_w(wx) = -\sigma'_w(-Xw)}$$

$\sigma(2)+\sigma(-2)=1$

$$Lik = \prod_{i=1}^{\ell} \sigma(\underbrace{w^T x}_{2})^{y_i} (1-\sigma(\underbrace{w^T x}_{2}))^{1-y_i}$$

$y_i = 1$

В нашем случае

$$Lik = \prod_{i=1}^{\ell} \sigma(2)^{[y_i=1]} \sigma(-2)^{[y_i=-1]}$$

$\frac{1}{1+e^{-2}}$ $\ln(1+e^{-2})^{-1}$

$$\ell = \sum_{i=1}^{\ell} [y_i=1] \ln\sigma(2) + [y_i=-1] \ln(1+e^{-2}) + 0$$

$\frac{1}{1+e^{2}}$

$$\ln\sigma(-2) = -\left[\sum_{i=1}^{\ell} [y_i=1] \ln(1+e^{-2}) \cdot 1 + [y_i=-1] \ln(1+e^{2})\right] =$$

$$=$$

$$\ln x^n = n \ln x$$

$$\sum [y_i=1] \ln\left(\frac{1}{1+e^{-2}}\right) + \ldots$$

$$\sum [y_i=1] \ln(\underbrace{1+e^{-2}}_{x})^{-1} + \ldots$$

$y_i=-1$

$y_i \cdot 2 = 2 \to \max$

$y_i=-1$

$-y_i 2 = -2$

$$= -\sum_{i=1}^{\ell} \log(1+e^{-y_i 2})$$

для одного объекта

$y_i = 1 \to [y_i=1]=1$, $[y_i=-1]=0$ $\quad \boxed{1 \cdot \ln(1+e^{-2}) + 0}$

$y_i = -1 \to [y_i=1]=0$, $[y_i=-1]=1$ $\quad 0 + 1 \cdot \ln(1+e^{2})$

$$-\sum_{i=1}^{\ell} \ln\left(1+e^{-y_i z}\right) \text{ - log правдоподобия} \to \max_{w}, \quad z = w^T x$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \ln\left(1+e^{-y_i z}\right)}_{\text{логистическая функция потерь}} \to \min_{w}$$

Градиентный спуск

(на подумать: д/з)

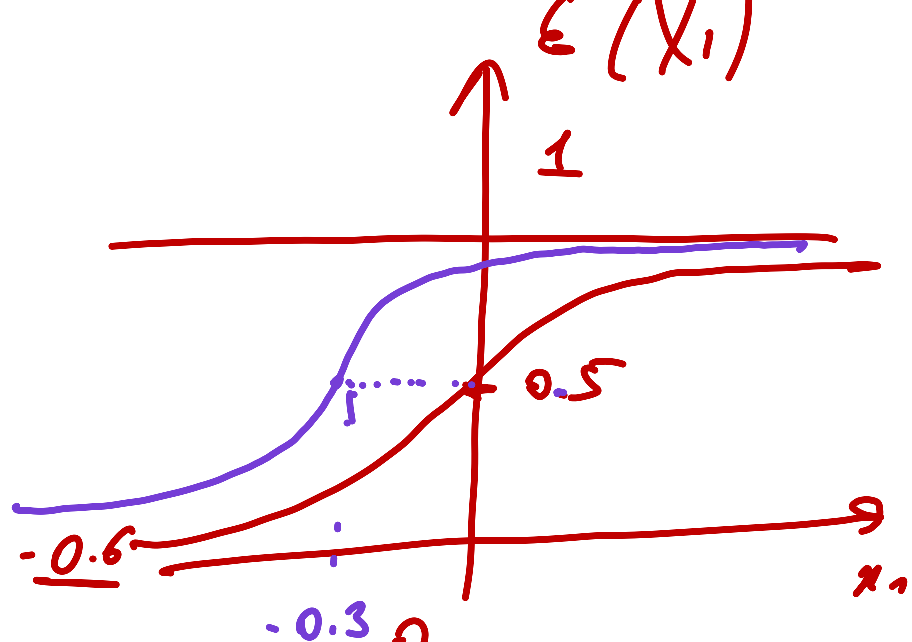
$$\boxed{\text{посчитать градиент} \quad \Big(\underset{n\times 1}{\sigma(z)} - \underset{n\times 1}{y}\Big)^T X_{n\times d}}$$

Задача 2

$w_1 = 2$, $w_0 = 0.6$

$z = 2x_1 + 0.6$

$$\sigma(x_1) = \frac{1}{1+e^{-2x_1 - 0.6}}$$



$\Rightarrow$ для всех $x_1 > -0.3 \to 1$ класс

для всех $x_i < -0.3 \to -1$ класс

Градиентный спуск для лог. регрессии

$$L = -\sum [y_i = 1] \log \sigma(z) + [y_i = -1] \log \sigma(-z), \quad z = w^T x$$

$$\frac{\partial \log \sigma}{\partial w_j} = \frac{x_j (e^{-w^T x} + 1)}{(1 + e^{-w^T x})^2} = x_j \cdot \sigma(w^T x)$$

$$\frac{\partial \log \sigma(-z)}{\partial w_j} = -x_j (1 - \sigma(z))$$

$$\log(1 - \sigma(z)) = \log(\sigma(-z)) = -\log(1 + e^{z}) = -\log(1 + e^{w^T x})$$

$$- \frac{x_j e^{w^T x}}{1 + e^{w^T x}} = -$$

$$L'_{w_j} = -\sum [y_i = 1] \cdot x_j (1 - \sigma(z)) + [y_i = -1] \cdot \left(- \frac{x_j e^{w^T x}}{1 + e^{w^T x}}\right)$$

$$L'_{w_j} = \sum_{i=1}^{\ell} (\sigma(z) - y_i)\, x_{ij}$$

доделать обязательно

и чекнуть, что все правильно