Подборка контрольных работ и экзаменов по математической статистике

Вардикян Ася, Кабанова Юля, Петрова Дарина
БЭК182

7 июня 2020 г.

1 Промежуточный экзамен 2016-2017 гг

1. Вероятность того, что первой вытянутой картой окажется тройка, равна: $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

   Безусловная вероятность события B считается по формуле:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{A_4^1 \cdot A_3^1 + A_{48}^1 \cdot A_4^1}{A_{52}^2} = \frac{4 \cdot 3 + 48 \cdot 4}{2652} = \frac{17}{221},$$

   где A_{52}^2 – общее число исходов испытания,
   A_4^1 — число исходов, когда вытянута одна из 4 семерок (первый раз вытянута не семерка),
   A_3^1 — число исходов, когда во второй раз вытянута одна из трех оставшихся семерок (первой вытянутой картой была семерка),
   A_{48}^1 – число исходов, когда вытянута первый раз вытянута не семерка.

   Если А произошло, то перед извлечением второй карты останется 51 карта, из которых 4 являются семерками, следовательно, $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{4}{51}$.

   Так как $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{4}{51} \neq \frac{17}{221} = \mathbb{P}(B)$, то события A и B являются зависимыми.

   Аналогично, B и C являются зависимыми:

   Безусловная вероятность события C (первый и второй раз вытянута не дама пик, третий раз – дама пик) считается по формуле:

$$\mathbb{P}(C) = \frac{51}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{52}$$

   Вероятность того, что событие C произошло при условии, что B произошло (при этом первый раз должна быть вытянута не дама пик):

$$\mathbb{P}(C \mid B) = \frac{51}{52} \cdot \frac{17}{221} \cdot \frac{1}{5} = \frac{867}{574600} \neq \mathbb{P}(C) = \frac{1}{52}$$

   следовательно, C и B зависимы.

   Ответ: B

2. Согласно свойствам функции плотности, она:

   1) Больше или равна нулю, следовательно, А и В неверно.
   2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

   Так как в С:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d} = \left.\frac{-1}{x}\right|_1^{\infty} = 1,$$

   то

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \in [1; +\infty) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

   может являться функцией плотности.

   Так как в Е:

$$\int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3} \neq 1,$$

   то

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; 2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

   не может являться функцией плотности (Е неверно).

   $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2x}$ не может являться функцией плотности, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1$$

(D неверно).

Ответ: C

3. По свойству

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

получается:

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) + \operatorname{Cov}(X, Y) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$$

Ответ: A

4.

$$\operatorname{Corr}(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X) \cdot \operatorname{Var}(Y)}} = \frac{2}{\sqrt{12 \cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ответ: A

5.

$$\operatorname{Var}(2X - Y + 4) = 2^2 \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2 \operatorname{Cov}(2X, -Y) = 2^2 \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) - 2 \cdot 2 \operatorname{Cov}(X, Y) = 4 \cdot 12 + 1 - 4 \cdot 2 = 41$$

Ответ: E

6. Ковариационная матрица для X и Y в общем виде:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Var}(X) & \operatorname{Corr}(X, Y) \\ \operatorname{Corr}(X, Y) & \operatorname{Var}(Y) \end{pmatrix}$$

Так как ковариационная матрица является единичной, значит, она имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0, \operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(Y) = 1, \operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

По свойству ковариации, если $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$, то случайные величины X и Y являются независимыми.

Ответ: D

7.

$$\operatorname{Corr}(X + Y, 2Y - 7) = \frac{\operatorname{Cov}(X + Y, 2Y - 7)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X + Y) \cdot \operatorname{Var}(2Y - 7)}} = \frac{\operatorname{Cov}(X, 2Y - 7) + \operatorname{Cov}(Y, 2Y - 7)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2 \operatorname{Cov}(X, Y) \operatorname{Var}(2Y)}} =$$
$$= \frac{2 \operatorname{Cov}(X, Y) + 2 \operatorname{Cov}(Y, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2 \operatorname{Cov}(X, Y) 4 \operatorname{Var}(Y)}} = \frac{2 \operatorname{Cov}(X, 2) + 2 \operatorname{Var}(Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2 \operatorname{Cov}(X, Y) 4 \operatorname{Var}(Y)}}$$

Так как по условию

$$\operatorname{Corr}(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X) \operatorname{Var}(Y)}} = 0.5 \text{ и } \operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(Y),$$

то

$$\operatorname{Corr}(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X) \cdot \operatorname{Var}(Y)}} = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\operatorname{Var}(X)} = 0.5,$$

следовательно,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0.5 \,\mathrm{Var}(X)$$

Тогда:

$$\mathrm{Corr}(X+Y, 2Y-7) = \frac{2 \cdot 0.5 \,\mathrm{Var}(X) + 2 \,\mathrm{Var}(X)}{\sqrt{[2 \,\mathrm{Var}(X) + 2 \cdot 0.5 \,\mathrm{Var}(X)] \cdot 4 \,\mathrm{Var}(X)}} = \frac{3 \,\mathrm{Var}(X)}{\sqrt{12 \,\mathrm{Var}(X)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: B

8.
$$\mathbb{P}(0.2 < \xi < 0.7) = F(0.7) - F(0.2)$$

Так как при функция распределения при $x \in [0; 1] : F_\xi(x) = \frac{x-0}{1-0} = x$, то:

$$F(0.7) = 0.7; F(0.2) = 0.2$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}(0.2 < \xi < 0.7) = 0.7 - 0.2 = 0.5$$

Ответ: D

9. Согласно центральной предельной теореме, если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены, то:

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ при } n \to \infty$$

где $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n; \mathbb{E}(S_n) = n(\xi_i); \mathrm{Var}(S_n) = n \cdot \mathrm{Var}(\xi_i)$

Тогда функция плотности у предела стандартизированных сумм имеет вид:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{s\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} > 1 \right) = \int_1^{+\infty} f_\xi(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Ответ: B

10. $\mathbb{E}(X_i) = 400, \mathrm{Var}(X_i) = 400, n = 100.$

Так как $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, следовательно:

$$\mathbb{E}(S_n) = n \cdot \mathbb{E}(X_i) = 40000$$
$$\mathrm{Var}(S_n) = n \cdot \mathrm{Var}(X_i) = 40000$$

Согласно ЦПТ:

$$\mathbb{P}(S_n > 40400) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{40400 - 40000}{\sqrt{40000}} \right) = \mathbb{P}(Z > 2) = 1 - \mathbb{P}(Z < 2) = 1 - 0.97725 = 0.022750132$$

Ответ: D

11. $\mathbb{E}(X_i) = 10000$. Согласно неравенству Маркова:

$$\mathbb{P}(X_i \geqslant 50000) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X_i)}{50000}$$
$$\mathbb{P}(X_i \geqslant 50000) \leqslant \frac{10000}{50000} = 0.2$$

Ответ: A

12. События являются несовместными, если они не содержат общих исходов, то есть наступление одного из этих событий исключает наступление другого.

    События A и C являются несовместными, так как если произойдет C (все три раза выпал орёл), то A не произойдет (решка не может выпасть хотя бы 1 раз).

    Так как монетка подбрасывается три раза, то один раз может выпасть решка и другой раз – орел, следовательно, A и B являются совместными.

    Ответ: A

13. $\mathbb{E}(X_i) = 50000$, $\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)} = 10000$. Согласно неравенству Чебышева:

$$\mathbb{P} = (|X_i - \mathbb{E}(X_i)| \leqslant 20000) \geqslant 1 - \frac{\mathrm{Var}(X_i)}{20000^2} = 1 - \frac{10000^2}{20000^2} = 1 - 0.25 = 0.75$$

    Ответ: C

14.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p = 0.6 \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - p = 0.4 \end{cases}$$

    Следовательно,

$$\xi_i^{2016} = \xi_i,$$

    значит,

$$\frac{\xi_1^{2016} + \ldots + \xi_n^{2016}}{n} = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} = \overline{\xi} = \frac{(0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0)}{n} = 0.6$$

    Таким образом,

$$\operatorname*{plim}_{n \to \infty} \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} = \operatorname*{plim}_{n \to \infty} (0.6) = 0.6$$

    Ответ: A

15. Пусть вероятность успеха (выпало 6) в одном испытании равна $p = \frac{1}{6}$, тогда вероятность неудачи (выпало не 6): $1 - p = \frac{5}{6}$. Следовательно, по формуле Бернулли:

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k \cdot^k (1-)^{n-k}$$

    где $n = 5, k = 2$. Тогда:

$$\mathbb{P}(X = 2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{5^3}{6^5} = \frac{2 \cdot 5^4}{6^5} = \frac{2 \cdot 5^4}{2 \cdot 3 \cdot 6^4} = \frac{5^4}{2^4 \cdot 3^5}$$

    Ответ: нет правильного ответа

16. Так как вероятность успеха (выпало 6) в одном испытании равна $p = \frac{1}{6}$, тогда вероятность неудачи (выпало не 6): $1 - p = \frac{5}{6}$. Число бросков $n = 5$.

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$
$$\mathrm{Var}(X) = n \cdot \cdot (1 - p) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

    Ответ: нет правильного ответа

17. Наиболее вероятное число шестерок считается как медиана m по формуле:

$$np - (1 - p) \leqslant m \leqslant np + p$$

    Число бросков $n = 5$. Так как вероятность успеха (выпало 6) в одном испытании равна $p = \frac{1}{6}$, тогда вероятность неудачи (выпало не 6): $1 - p = \frac{5}{6}$.

    Следовательно,

$$5 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \leqslant m \leqslant 5 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$
$$0 \leqslant m \leqslant 1$$

Значит, наиболее вероятное число шестерок 0 и 1

Ответ: E

18. Условие:

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$ – математическое ожидание выпавших очков за 1 бросок.
Следовательно, математическое ожидание суммы выпавших очков за 5 бросков равно: $5 \cdot \mathbb{E}(X) = 5 \cdot 3.5 = 17.5$

Ответ: E

19. Общий вид функции плотности двумерного нормального распределения:

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\right)\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)},$$

где $\rho = \operatorname{Corr}(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{Cov}(\xi,\eta)}{\sigma_x\sigma_y}$

$$\xi \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$$
$$\eta \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$$

Так как по условию $\mu_x = \mu_y = 0, \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1, (\xi,\eta) = 0.5, \rho = \operatorname{Cov}(\xi,\eta) = 0.5$, следовательно, функция плотности имеет вид:

$$f_{(\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-0,25}} e^{(\frac{-4}{2\cdot 3})(x^2-xy+y^2)} = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{(-\frac{2}{3})(x^2-xy+y^2)}$$

Чтобы найти a и b, должны выполняться условия:

$$\begin{cases} \pi\sqrt{3} = 2\pi\alpha \\ -\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2) = -\frac{2}{3}(x^2-bxy+y^2) \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на 2π, получаем $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда второе уравнение примет вид:

$$-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2) = -\frac{2}{3}(x^2-bxy+y^2)$$

Значит, $b = 1$.

Ответ: C

20.

$$\mathbb{E}(\xi - 0.5\eta) = \mathbb{E}(\xi) - 0.5\,\mathbb{E}(\eta) = 0 - (0.5)\cdot 0 = 0$$
$$\operatorname{Var}(\xi - 0.5\eta) = \operatorname{Var}(\xi) + 0.25\operatorname{Var}(\eta) - 2\cdot(0.5)\operatorname{Cov}(\xi,\eta) = 1 + 0.25\cdot 1 - 0.5 = 0.75$$
$$\operatorname{Cov}(\xi - 0.5\eta, \eta) = \operatorname{Cov}(\xi,\eta) - 0.5\cdot\operatorname{Cov}(\eta,\eta) = 0.5 - (0.5)\cdot 1 = 0$$

Следовательно, компоненты вектора z некоррелированы и независимы (C и D неверно),

$$\xi - 0.5\eta \sim \mathcal{N}(0; 0.75) \Rightarrow \text{E неверно}$$

A неверно, так как случайные величины зависимы

B верно, так как $z = (\xi - 0.5\eta; \eta)^T$ является двумерным нормальным вектором (распределение $\mathcal{N}\begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$

Ответ: B

21. $\mathbb{E}(\xi) = 0 = \mathbb{E}(\eta), \mathrm{Var}(\xi) = 1 = \mathrm{Var}(\eta), \mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 0.5$ по условию

$$\rho = \mathrm{Corr}(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi, \eta}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0.5}{1 \cdot 1} = 0.5$$

$$\mathbb{E}(\xi | \eta = 1) = \mathbb{E}(\xi) + \rho \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi)}}{\sqrt{\mathrm{Var}(\eta)}}(1 - \mathbb{E}(\eta)) = 0 + (0.5) \cdot 1 \cdot (1 - 0) = 0.5$$

$$\mathrm{Var}(\xi | \eta = 1) = \mathrm{Var}(\xi)(1 - \rho^2) = 1 \cdot (1 - 0.25) = 0.75$$

Ответ: C

22. Заполним таблицу на основе данных условия:

$X \mid Y = 0$	0	2
$\mathbb{P}(X \mid Y = y)$	$1/2$	$1/2$

$$\mathbb{P}(X = 0 \mid Y = 0) = \frac{\mathbb{P}(X = 0 \cap Y = 0)}{\mathbb{P}(Y = 0)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = 0.5$$

$$\mathbb{P}(X = 2 \mid Y = 0) = \frac{P(X = 2 \cap Y = 0)}{\mathbb{P}(Y = 0)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = 0.5$$

$$\mathbb{E}(X \mid Y = 0) = 0 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5 = 1$$

Ответ: A

23.
$$\mathbb{P}(X = 0 \mid Y < 1) = \mathbb{P}(X = 0 \mid Y = -1) + \mathbb{P}(X = 0 \mid Y = 0)$$

$$\mathbb{P}(X = 0 | \mid Y < 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 0 \cap Y < 1)}{\mathbb{P}(Y < 1)} = \frac{0 + \frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = 0.25$$

Ответ: B

24. По свойству дисперсии: $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(Y)]^2$

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$	$\sum$
$X = 0$	0	$1/6$	$1/6$	$1/3$
$X = 2$	$1/3$	$1/6$	$1/6$	$2/3$
$\sum$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

$$\mathbb{E}(Y^2) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{E}(Y)^2 = \left((-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} \right)^2 = 0$$

Следовательно, $\mathrm{Var}(Y) = \frac{2}{3}$

Ответ: A

25. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

Условие:

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$	$\sum$
$X=0$	0	1/6	1/6	1/3
$X=2$	1/3	1/6	1/6	2/3
$\sum$	1/3	1/3	1/3	1

Составим таблицу на основе условия:

XY	-2	0	2
$\mathbb{P}(XY)$	1/3	1/2	1/6

$$\mathbb{E}(XY) = (-2)\cdot\frac{1}{3} + 0 + 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$\mathbb{E}(Y) = (-1)\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = 0$$

Следовательно, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{-1}{3} - 0 = \frac{-1}{3}$

Ответ: B

26.

$$\int\limits_0^{0.5}\int\limits_0^{0.5} 9x^2y^2\,dx\,dy = 9\int\limits_0^{0.5}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{0.5}\,dy = 3\int\limits_0^{0.5}\frac{1}{8}y^2\,dy = \frac{3}{8}(\frac{y^3}{3}\Big|_0^{0.5}) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{64}$$

Ответ: D

2 Промежуточный экзамен 2017-2018 гг

1.

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}[(X)]^2 \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = 6+4 = 10$$

По неравенству Маркова:

$$\mathbb{P}(X^2 \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X^2)}{\alpha}$$

$$\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100) \leqslant \frac{10}{100} = 0.1$$

Ответ: A

2. Распределение Пуассона $\Rightarrow \mathbb{E}(\xi) = \lambda, \mathrm{Var}(\xi) = \lambda \Rightarrow \mathbb{E}(\xi^2) = \mathrm{Var}(\xi) + [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda+1)$

Ответ: E

3.

$$\mathrm{Corr}(X+Y,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X+Y,Y)}{\sqrt{Var(X+Y)\cdot\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathrm{Cov}(X+Y)+\mathrm{Var}(Y)}{\sqrt{[\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)]\cdot\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{-3+9}{\sqrt{9\cdot(9+4-6)}} = \\ = \frac{6}{\sqrt{63}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

Ответ: C

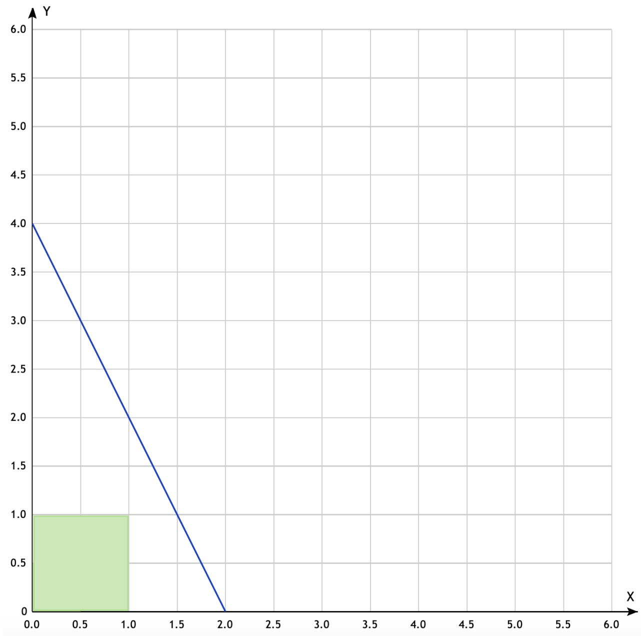
4. Стандартное нормальное распределение $\Rightarrow \xi \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow$ функция плотности: $f_\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

$$\mathbb{P}(\xi \in [-1,2]) = \int\limits_{-1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx$$

Ответ: B

5.
$$(X, Y) \sim \mathcal{U}$$

$$f_{X,Y}(1,1) = \frac{S_{\text{квадрата}}}{S_{\text{треугольника}}} = \frac{1}{4}$$



Ответ: A

6. По определению независимых событий в совокупности.

Ответ: B

7. .

$$\xi \sim U[0;4] \Rightarrow \mathrm{F}_\xi = \begin{cases} \xi - 0\frac{}{4-0} & \xi \in [0;4] \\ 0 & \xi < 0 \\ 1 & \xi > 4 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(\xi \in [3;6]) = \mathbb{P}(\xi \in [3;4]) = 1 - \mathbb{P}(\xi \in [0;3]) = 1 - \frac{3-0}{4-0} = 1 - 0.75 = 0.25$$

Ответ: B

8. $X = -5, \dots, 5$
$Y = -1, \dots, 1$

Y	-1	0	1
$\mathbb{P}(Y = y)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Y^2	0	1
$\mathbb{P}(Y = y)$	$1/3$	$2/3$

X	-5	$\dots$	5
$\mathbb{P}(Y = y)$	$1/11$	$\dots$	$1/11$

$$Y^2 = 0 \Rightarrow X = 2$$
$$Y^2 = 1 \Rightarrow X = 1$$
$$\mathbb{P}(X + Y^2 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{11} + \frac{1}{11} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{11}$$

Ответ: C

9. $\Pi = 180 \Rightarrow \frac{\pi}{3} = 60 \Rightarrow 6$ секторов

   $\mathbb{P}_{\text{попасть в нужный сектор}} = \frac{1}{6}$

   Ответ: E

10.
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.6$$
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(B) = 0.6 + 0.2 - 0.3 = 0.5$$

Ответ: B

11.
$$\operatorname{Var}(2X + Y + 1) = 4\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) - 4\operatorname{Cov}(X, Y) = 16 + 9 + 12 = 37$$

Ответ: B

12.
$$\mathbb{E}(X_i^2) = \operatorname{Var}(X_i) + [\mathbb{E}(X_i)]^2 = 1 + 0 = 1$$

По ЗБЧ:

$$\operatorname*{plim}_{x \to \infty} \frac{\sum X_i^2}{n} = \mathbb{E}(X_1^2) = 1$$

Ответ: B

13.
$$f_Y(y) = \int\limits_0^1 6xy^2\,dx = 3x^2y^2\Big|_0^1 = 3y^2$$

$$F_{X|Y} = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{6x \cdot 0.25}{3 \cdot 0.25} = 2x, & x \in [0; 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Ответ: C

14.
$$\overline{X} = \frac{\sum X_i^2}{n}$$
$$\mathbb{E}(X) = 4, \operatorname{Var}(X) = 100$$
$$\mathbb{E}(\overline{X} = 4), \operatorname{Var}(\overline{X}) = \frac{100}{n} = 1 \Rightarrow \overline{X} \sim \mathcal{N}(4, 1)$$

По ЦПТ:

$$\mathbb{P}(\overline{X} \leqslant 5) = \frac{\overline{X} - 4}{1} \leqslant \frac{5 - 4}{1} = \mathbb{P}(Z \leqslant 1) = 0.8413$$

Ответ: C

15.
$$\operatorname{Cov}(X + 2Y, 2X + 3) = 2\operatorname{Var}(X) + 4\operatorname{Cov}(X, Y) = 8 - 12 = -4$$

Ответ: A

16.
$$\mathbb{E}((X-1)Y) = \mathbb{E}(XY - Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y) = \operatorname{Cov}(X,Y) + \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y) = -3-2-2 = -7$$

Ответ: B

17. .

$$X_i = \begin{cases} 1, & \mathbb{P} = \frac{1}{6} \\ 0, & \mathbb{P} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$X1 + X2 = 1 \Rightarrow X_1 = 1 \text{ и } X_2 = 0 \left(\mathbb{P} = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{36}\right) \text{ или } X_1 = 0 \text{ и } X_2 = 1 \left(\mathbb{P} = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{36}\right)$$
$$\frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{10}{36}$$

X_i	0	1
$\mathbb{P}$	1/2	1/2

Ответ: B

18.
$$\mathbb{P}(X+Y<3)$$

Пусть

$$Z = X + Y$$

Тогда

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2 + 1 = 3$$
$$\operatorname{Var}(Z) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y) = 7$$

ЦПТ:

$$\mathbb{P}\left(\frac{Z-3}{\sqrt{7}} < \frac{3-3}{\sqrt{7}}\right) = \mathbb{P}(Z<0) = 0.5$$

Ответ: C

19.
$$\mathbb{P}_{\text{честный}|\text{выпала 6}} = \frac{\mathbb{P}_{\text{честный}\cap\text{выпала 6}}}{\mathbb{P}_{\text{выпала 6}}} \cdot \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}} = \frac{5}{11}$$

Ответ: C

20. По свойствам ковариационной матрицы: варианты D и E отпадают (не симметричные), A и B не подходят, т.к. отрицательно определены.

Ответ: C

21.
$$\mathbb{E}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \alpha\,\mathbb{E}(X) + (1-\alpha)\,\mathbb{E}(Y) = 0$$
$$-\alpha + (1-\alpha)2 = 0$$
$$2 - 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

Ответ: A

22.

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = C_0^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{1-3}{4}\right)^2 = \frac{2!}{2!} \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

Ответ: B

23.

$$\mathbb{P}(k \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(k = 1) - \mathbb{P}(k = 0) = 1 - \frac{4}{1!} \cdot e^{-4} \cdot \frac{-1}{0!} \cdot e^{-4} = 1 - e^{-4}$$

Ответ: C

24.

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \mathrm{Var}(\xi) + [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \mathbb{P}(1-\mathbb{P}) + \mathbb{P}^2 = \mathbb{P} - \mathbb{P}^2 + \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$$
$$\text{Бернулли} \Rightarrow \mathrm{Var}(\xi) = \mathbb{P}(1-\mathbb{P}), \mathbb{E}(\xi) = \mathbb{P}$$

Ответ: B

25. Экспоненциальное распределение $\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Ответ: A

26. $\frac{\pi}{3} = 600 \Rightarrow 6$ секторов

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$$

A) $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} \neq 1 \Rightarrow$ не полная группа событий
B) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$
C) Они зависимы, т.к. не могут произойти враз
D) Вероятности событий равны
E) Они несовместны (не могут произойти враз)

Ответ: E

27.

$$\mathbb{E}(XY) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 xy6xy^2 \, dy \, dx = \int\limits_0^1 2xy^3y^3 \Bigg|_0^1 dy = \int\limits_0^1 2y^3 \, dy = \frac{y^4}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

28.

$$\mathrm{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \alpha^2 Var(X) + (1-\alpha)^2 \mathrm{Var}(Y) + 2\alpha \cdot (1-\alpha) \mathrm{Cov}(X, Y) = 19\alpha^2 - 24\alpha + 9$$
$$\alpha_{\text{вершины}} = \frac{24}{38} = \frac{12}{19}$$

Ответ: нет правильного ответа

29.

$$\mathbb{P}_{\text{без рюкзака}} = \frac{50}{200} \cdot \frac{1}{2} + \frac{55}{200-50} \cdot \frac{150}{200} = \frac{1}{8} \cdot \frac{11}{40} = 0.4$$

Ответ: B

30.

$$\mathbb{E}(X) = 2, \mathrm{Var}(X) = 6$$

По неравенству Чебышева:

$$\mathbb{P}(|2 - X| \leqslant 10) 1 - \frac{6}{100} = 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} = 0.94$$
$$\mathbb{P}(|\mathbb{E}(X) - X| \leqslant 10) = 1 - \mathbb{P}(|\mathbb{E}(X) - X| \leqslant 10)$$

Ответ: C

3 Выборочные задачи из контрольных работ

1. **Контрольная работа №2 (2018-2019гг). Задача 6.**

А) $R_A = \frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{2} + 0 \cdot R_3$ – доходность портфеля А
$R_B = \frac{R_2}{2} + \frac{R_3}{2} + 0 \cdot R_1$ – доходность портфеля В
$\mathbb{E}(R_A) = \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 10 = 7.5$ – ожидаемая доходность портфеля А
$\mathbb{E}(R_B) = \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 15 = 12.5$ – ожидаемая доходность портфеля В

Б) Найдем риски портфелей А и В:
$\operatorname{Var}(R_A) = \operatorname{Var}(\frac{R_1}{2}+\frac{R_2}{2}) = \operatorname{Var}(\frac{R_1}{2})+\operatorname{Var}(\frac{R_2}{2})+2\operatorname{Cov}(\frac{R_1}{2}, \frac{R_2}{2}) = \frac{\operatorname{Var}(R_1)+\operatorname{Var}(R_2)}{4}+\frac{\operatorname{Cov}(R_1,R_2)}{2} = \frac{50}{4}+\frac{100}{4}+\frac{20}{2} = 47.5$
$\operatorname{Var}(R_B) = \operatorname{Var}(\frac{R_2}{2}+\frac{R_3}{2}) = \operatorname{Var}(\frac{2_1}{2})+\operatorname{Var}(\frac{R_3}{2})+2\operatorname{Cov}(\frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{2}) = \frac{\operatorname{Var}(R_2)+\operatorname{Var}(R_3)}{4}+\frac{\operatorname{Cov}(R_2,R_3)}{2} = \frac{100}{4}+\frac{150}{4}-\frac{10}{2} = 57.5$
Так как риск портфеля равен $\sqrt{\operatorname{Var}(R_i)}$, то риск портфеля $A = \sqrt{47.5} \approx 6.89$; риск портфеля $B = \sqrt{57.5} \approx 7.58$

В) Портфель В имеет большую ожидаемую доходность, так как $\mathbb{E}(R_B) = 12.5 > \mathbb{E}(R_A) = 7.5$
Портфель А имеет меньший риск, так как $\sqrt{\operatorname{Var}(R_B)} \approx 7.58 > \sqrt{\operatorname{Var}(R_A)} \approx 6.89$

$$\operatorname{Corr}(R_A, R_B) = \frac{\operatorname{Cov}(R_A, R_B)}{\sqrt{\operatorname{Var}(R_A)\operatorname{Var}(R_B)}} = \frac{\operatorname{Cov}(\frac{R_1}{2}+\frac{R_2}{2}, \frac{R_2}{2}+\frac{R_3}{2})}{\sqrt{47.5}\cdot\sqrt{57.5}} = \frac{\operatorname{Cov}(\frac{R_1}{2}, \frac{R_2}{2}+\frac{R_3}{2}) + \operatorname{Cov}(\frac{R_2}{2}, \frac{R_2}{2}+\frac{R_3}{2})}{\sqrt{47.5}\cdot\sqrt{57.5}} =$$
$$= \frac{\operatorname{Cov}(\frac{R_1}{2}, \frac{R_2}{2}) + \operatorname{Cov}(\frac{R_1}{2}, \frac{R_3}{2}) + \operatorname{Cov}(\frac{R_2}{2}, \frac{R_2}{2}) + \operatorname{Cov}(\frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{2})}{\sqrt{47.5}\cdot\sqrt{57.5}} = \frac{\frac{\operatorname{Cov}(R_1,R_2)}{4} + \frac{\operatorname{Cov}(R_1,R_3)}{4} + \frac{\operatorname{Cov}(R_2,R_2)}{4}\frac{\operatorname{Cov}(R_2,R_3)}{4}}{\sqrt{47.5}\cdot\sqrt{57.5}} =$$
$$= \frac{\frac{20}{4} + \frac{-10}{4}\frac{Var(R_2)}{4} + \frac{-10}{4}}{\sqrt{47.5}\cdot\sqrt{57.5}} = \frac{\frac{100}{4}}{\sqrt{47.5}\cdot\sqrt{57.5}} \approx 0.48$$

Г) Чтобы собрать собственный портфель R_c, обладающий доходностью не меньшей, чем портфели А и В, но меньшим риском, нужно минимизировать риски (т.е. нужно решить задачу минимизации $\operatorname{Var}(R_c)$) при условии, что сумма долей ценных бумаг равна 1:

$$\begin{cases} \min \operatorname{Var}(R_c) = 50w_1^2 + 100w_2^2 + 150w_3^2 + 40w_1w_2 - 20w_1w_3 - 20w_2w_3 \\ s.t.\mathrm{w}_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

Составим вспомогательную функцию Лагранжа:
$L(w, \lambda) = 50w_1^2 + 100w_2^2 + 150w_3^2 + 40w_1w_2 - 20w_1w_3 - 20w_2w_3 + \lambda(w_1 + w_2 + w_3 - 1)$

Необходимым условием экстремума функции Лагранжа является равенство нулю ее частных производных по переменным w_i и неопределенному множителю λ.

Составим систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w_1} = 100w_1 + 40w_2 - 20w_3 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial w_2} = 40w_1 + 200w_2 - 20w_3 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial w_3} = -20w_1 - 20w_2 + 300w_3 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = w_1 + w_2 + w_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100w_1 + 40w_2 - 20w_3 = -\lambda \\ 40w_1 + 200w_2 - 20w_3 = -\lambda \\ -20w_1 - 20w_2 + 300w_3 = -\lambda \end{cases}$$

$100w_1 + 40w_2 - 20w_3 = 40w_1 + 200w_2 - 20w_3 = -20w_1 - 20w_2 + 300w_3$
$5w_1 + 2w_2 - w_3 = 2w_1 + 10w_2 - w_3 = -w_1 - w_2 + 15w_3$ (уравнения 1,2 и 3 соответсвенно)

Выразим из 1 и 2 уравнений $w_2 = \frac{3w_1}{8}$ и из 2 и 3 $w_3 = \frac{11w_2+3w_1}{14}$, подставим w_2 в w_3 и получим $w_3 = \frac{19\cdot 3w_1}{14\cdot 8}$.
Подставим выраженные через w_1 уравнения в ограничение системы:

$$w_1 + \frac{3w_1}{8} + \frac{19 \cdot 3w_1}{14 \cdot 8} = 1$$

Приводим подобные слагаемые в левой части уравнения:

$$\frac{211w_1}{112} = 1$$

Следовательно, $w_1 = \frac{112}{211}, w_2 = \frac{42}{211}, w_3 = \frac{57}{211}$

$$\mathrm{Var}(R_c) = 29.27944$$

$$\sqrt{Var(R_c)} = 5.411048 \text{ˇриск портфеля С}$$

$\mathbb{E}(R_c) = \frac{112}{211} \cdot 5 + \frac{42}{211} \cdot 10 + \frac{57}{211} \cdot 15 = 8.696682$ – ожидаемая доходность портфеля С

Так как риск портфеля С меньше рисков портфелей А и В, а ожидаемая доходность портфеля С больше ожидаемой доходности портфеля А (то есть не имеет не меньшую доходность, чем портфели А и В), то найденный портфель С с долями ценных бумаг $w_1 = \frac{112}{211}, w_2 = \frac{42}{211}, w_3 = \frac{57}{211}$ является искомым.

2. **Контрольная работа №3 (2018-2019гг). Задача 8.**

   а. $\mathbb{E}(\hat{\theta_n}) = \theta$ условие несмещенности
   $\mathbb{E}(\hat{\theta_n}) = \mathbb{E}(\frac{3}{2}\bar{X}) = \frac{3}{2} \cdot \mathbb{E}\left(\frac{\sum X}{n}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot n\,\mathbb{E}(X_i) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \theta = \theta \Rightarrow$ несмещенная
   $\mathbb{E}(X^2) = \int\limits_0^\theta \frac{2x^2}{3\theta^2}\,dx = \frac{2x^3}{3\theta^2}\Big|_0^\theta = \frac{2}{3}\theta$

   б. $\mathbb{E}(X^2) = \int\limits_0^\theta \frac{2x^3}{4\theta^2}\,dx = \frac{2x^4}{\theta^2}\Big|_0^\theta = \frac{\theta^2}{2} - \frac{4}{9}\theta^2 = \frac{\theta^2}{18}$
   $\mathrm{Var}(\hat{\theta_n}) = \mathrm{Var}(\frac{3}{2}\bar{X}) = \frac{9}{4n}\,\mathrm{Var}(X_i) = \frac{9}{4n} \cdot \frac{\theta^2}{18} = \frac{\theta^2}{8n}$

   в. Так как оценка несмещенная, то для установления состоятельности достаточно одного условия:
   $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta_n}) = 0$
   $\lim_{n\to\infty} \frac{\theta^2}{8n} = 0 \Rightarrow$ оценка состоятельна

   г. $\mathbb{E}(\max(X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{E}(X_{max}) = \mathbb{E}(X_i) = \frac{2}{3}\theta \neq \theta \Rightarrow$ смещенная
   Величина смещения:$x = \frac{2}{3}\theta - \theta = \frac{1}{3}\theta$

   д. $MSE(\hat{\theta_n}) = \mathbb{E}(\frac{3}{2} - \theta)^2 = \mathbb{E}(\frac{9}{4}\bar{X}^2 - 3\bar{X}\theta + \theta^2) = \frac{9\theta^2}{4\cdot 2} - 3\theta \cdot \frac{2}{3}\theta + \theta^2 = \frac{\theta^2}{8}$
   $MSE(\hat{T}) = \mathbb{E}(\max(X_1, \ldots, X_n) - \theta)^2 = \mathbb{E}(X_{max} - \theta)^2 = \mathbb{E}(X_{max}^2) - 2\theta\,\mathbb{E}(X_{max}) + \theta^2 = \frac{\theta^2}{2} - \frac{4}{3}\theta + \theta^2 = \frac{1}{6}\theta^2$
   $MSE(\hat{\theta_n}) < MSE(\hat{T}) \Rightarrow \hat{\theta_n}$ эффективнее

3. **Контрольная работа №3 (2018-2019гг). Задача 9.**

   а. $f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{\frac{-x^2}{2\theta}}$
   $L = \prod_{i=1}^n f(x, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{\frac{-x^2}{2\theta}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right)^n \cdot e^{-\frac{\sum X_i^2}{2\theta}}$
   $lnL = -\frac{n}{2}ln(2\pi) + (-\frac{n}{2}ln\theta) - \frac{\sum X_i^2}{2\theta}$
   $\frac{\partial lnL}{\partial\theta} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\theta} - \frac{\sum X_i^2}{2} \cdot (-\frac{1}{\theta^2}) = 0$
   $\hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum X_i^2}{n}$
   $\frac{\partial^2 lnL}{\partial\theta^2} = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{\sum X_i^2}{\theta^3} = \hat{\theta}_{ML} = \frac{n^3}{2(\sum X_i^2)^2} - \frac{n^3}{\sum X_i^2} = \frac{n^3(1 - 2\sum X_i^2)}{2(\sum X_i^2)^2} < 0 \Rightarrow \max$

   б. $\mathbb{E}(\frac{\sum X_i^2}{n}) = \frac{1}{n}\,\mathbb{E}(\sum X_i^2) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{E}(X_i^2) = \mathrm{Var}(X_i) + [\mathbb{E}(X_i)]^2 = \theta + 0 = \theta \Rightarrow$ оценка несмещена

   в. $I(\theta) = -\mathbb{E}(\frac{\partial^2 lnL}{\partial\theta^2}) = -\mathbb{E}\left(\frac{n}{2\theta^2} - \frac{\sum X_i^2}{\theta^3}\right) = \frac{-n}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3} \cdot n \cdot \mathbb{E}(X_i^2) = \frac{-n}{2\theta^2} + \frac{n}{\theta^2} = \frac{n}{2\theta^2}$

г. По неравенству Рао-Крамера:
$\mathrm{Var}(\hat{\theta_n}) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum X_i^2}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\mathrm{Var}(X_i^2) = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\mathrm{Var}(X_i^2) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Var}(X_i^2) = \frac{1}{n}(\mathbb{E}(X^4)-[\mathbb{E}(X^2)]^2) = \frac{1}{n}\cdot(3\theta^2-\theta^2) = \frac{2\theta^2}{n} \Rightarrow \mathrm{Var}(\hat{\theta_n}) = \frac{1}{I(\theta)} \Rightarrow$ оценка эффективная

4. **Контрольная работа №3 (2013-2014гг). Задача 1.**

$B_1 = 3$

$B_2 = 1$

$\alpha = 4 \Rightarrow 1-\alpha = 0.96$

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$n = 13$

$\overline{X} = 51$

$\hat{\sigma}^2 = 3$

Доверительный интервал для мат. ожидания:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - t_{12;\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{12;\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$
$$51 - 3.055\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}} < \mu < 51 + 3.055\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$
$$(49.5326; 52.4674)$$

Доверительный интервал для дисперсии:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\hat{\sigma}^2(n-1)}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{\hat{\sigma}^2(n-1)}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$
$$\frac{12\cdot 3}{28.3} < \sigma^2$$
$$1.2721 < \sigma^2$$

5. **Контрольная работа №3 (2013-2014гг). Задача 2.**

$n_1 = 85, n_2 = 100$

$\hat{p}_1 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}, \hat{p}_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$H_0 : p_1 = p_2 = p_0$

$H_1 : p_1 \neq p_2$

$p_0 = \frac{85\cdot 0.25+100\cdot}{185}$

$$Z_p = \frac{0.25-0.5}{\sqrt{0.385\cdot(1-0.385)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$
$$Z_p = \frac{0.25-0.5}{\sqrt{0.385\cdot(1-0.385)}} \approx 3.483$$

H_0 не отвергается в интервале $(-2.05; 2.05)$. Так как расчётное значение не входит в этот интервал $\Rightarrow$H$_0$ отвергается $\Rightarrow$ преподаватели предъявляют разные требования

$$p-value = 2\,\mathbb{P}(Z > |Z|) = 2\,\mathbb{P}(Z > 3.483) = 2(1-\mathbb{P}(Z \leqslant 3.483)) = 2(1-0.9997) = 0.0006$$

6. **Контрольная работа №3 (2009-2010гг). Задача 1.**

$$\overline{X} = \frac{-1.5+2.6+1.2-2.1+0.1+0.9}{6} = 0.2$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n} = \frac{15.44}{6} = 2.573 \text{ неисправленная}$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1} = \frac{15.44}{5} = 3.088 \text{ исправленная}$$

Вариационный ряд: $-2.1; -1.5; 0.1; 0.9; 1.2; 2.6$

7. **Контрольная работа №3 (2009-2010гг). Задача 3.**

Чтобы оценка среднего по генеральной совокупности с наименьшей дисперсией была несмещенной, необходимо «взвесить» страты:

$$\hat{X}_s = \sum_{i=1}^{s} w_i \overline{X}_i = 0.1X_1 + 0.3X_2 + 0.6X_3$$

$$\mathrm{Var}(\hat{X}_i) = \frac{\sigma_i^2}{n_i},$$

где i – номер страты, S – количество страт

Решаем задачу:

$$\begin{cases} \max \mathrm{Var}(\hat{X}_s) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\sigma_i^2}{n_i} w_i^2 \\ s.t. TC = \sum_{i=1}^{s} c_i n_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Var}(\hat{X}_s) = (0.1)^2 \frac{50^2}{n_1} + (0.3)^2 \frac{20^2}{n_2} + (0.6)^2 \frac{10^2}{n_3} \to min(n_1, n_2, n_3) \\ s.t. 60000 = 150n_1 + 40n_2 + 15n_3 \end{cases}$$

$$L = \frac{25}{n_1} + \frac{36}{n_2} + \frac{36}{n_3} + \lambda(150n_1 + 40n_2 + 15n_3 - 60000) \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial n_1} = -\frac{25}{n_1^2} + 150\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial n_2} = -\frac{36}{n_2^2} + 40\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial n_3} = -\frac{25}{n_3^2} + 15\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6n_1^2} = \lambda \\ \frac{9}{10n_2^2} = \lambda \\ \frac{12}{5n_3^2} = \lambda \end{cases}$$

$$\frac{1}{6n_1^2} = \frac{9}{10n_2^2} = \frac{12}{5n_3^2}$$

$$n_2 = \sqrt{5.4}n_1$$

$$n_3 = \sqrt{14.4}n_1$$

Подставим в ТС: $60000 = 150n_1 + 40\sqrt{5.4}n_1 + 15\sqrt{14.4}n_1$

$$n_1^* = \frac{60000}{300} = 200; n_2^* \approx 465; n_3^* \approx 759$$

Проверка – подставим найденные значения в бюджетное ограничение ТС:

$$150 \cdot 200 + 40 \cdot 465 + 15 \cdot 759 = 59985 \leqslant 60000,$$

следовательно, найдены верные значения.

8. **Контрольная работа №3 (2009-2010гг). Задача 4.**

Так как выборка $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеет равномерное распределение $\check{[}0; \theta]$, то:

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X_i$$

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{0 + \theta}{2} = \frac{\theta}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X_i) = \frac{(\theta - 0)^2}{12} = \frac{\theta^2}{12}$$

Найдем оценку параметра методом моментов:

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{\theta}{2} = \overline{X}$$

$$\hat{\theta}_{MM} = 2\overline{X}$$

Оценка является несмещенной, если выполняется: $E(\hat{\theta}) = \theta$.

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_{MM}) = \mathbb{E}(2\overline{X}) = 2\,\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = 2(X_i) = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$$

следовательно, найденная оценка является несмещенной

Оценка является состоятельной, если она несмещенная (или асимптотически несмещенная) и

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}(\hat{\theta_n}) = 0$$

$$\operatorname{Var}(\hat{\theta}_{MM}) = \operatorname{Var}(2\overline{X}) = 4\operatorname{Var}(\overline{X}) = \frac{4\operatorname{Var}(X_i)}{n} = \frac{4}{n} \cdot \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta^2}{3n} = 0$$

следовательно, оценка состоятельная

Оценка считается эффективнее, если ее дисперсия меньше. Так как $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X_i$$

то

$$X_i = X_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$$

$$\operatorname{Var}(T) = \operatorname{Var}\left(\frac{n+1}{n}X_i\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \operatorname{Var}(X_i) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{\theta^2}{12}$$

Сравним дисперсии оценок:

$$\operatorname{Var}(\hat{\theta}_{MM}) - \operatorname{Var}(T) = \frac{\theta^2}{3n} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{\theta^2}{12} = (4n - (n+1)^2) \cdot \frac{\theta^2}{12n^2} =$$

$$= (4n - n^2 - 2n - 1) \cdot \frac{\theta^2}{12n^2} = (n^2 - 2n + 1) - \frac{\theta^2}{12n^2} = (n-1)^2 - \frac{\theta^2}{12n^2} < 0$$

следовательно

$$\operatorname{Var}(\hat{\theta}_{MM}) < \operatorname{Var}(T))$$

а значит $\hat{\theta}_{MM}$ эффективнее.

9. **Контрольная работа №1 (2008-2009 гг). Задача 3.**

   $\mathbb{P}_{\text{правда}} = \frac{1}{3}$

   Мэр либо сказал правду ($\mathbb{P} = \frac{1}{3}$), либо соврал($\mathbb{P} = \frac{2}{3}$). Соответственно заместитель на следующий день также либо сказал правду ($\mathbb{P} = \frac{1}{3}$), либо соврал($\mathbb{P} = \frac{2}{3}$). Это два независимых события. Турнир состоится в двух случаях:

   1) оба сказали правду;
   2) мэр соврал, но на следующий день ситуация изменилась и заместитель сказал правду (его информация более актуальна).

   Поэтому

$$\mathbb{P}_{\text{турнир состоится}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

10. **Контрольная работа №2 (2010-2011гг). Задача 6.**

20 пар — это 40 тапочек (генеральная совокупность N = 40). По условию, так как каждый размер представлен в двух парах, есть 4 пары одного размера. $n = 2$ (X_1 и X_2), которые распределены одинаково).

$$\mathbb{P}(X_1 = 36) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = x_i, X_2 = x_j) = \begin{cases} \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \approx 0.01, & i = j \\ \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \approx 0.008, & i \end{cases}$$

Если $i \neq j : \mathbb{P}(X_1 = 36, X_2 = 37) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \approx 0.01$, где $\frac{4}{40}$ -– вероятность достать X_1 первым, а $\frac{4}{39}$ – вероятность достать $_2$ вторым.

Если $i = j : \mathbb{P}(X_1 = 36, X_2 = 36) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \approx 0.008$

X_1, X_2	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
$\mathbb{P}$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \frac{36 + \ldots + 45}{10} = 40.5$$

$$\mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_2^2) = \frac{36^2 + \ldots + 45^2}{10} = 1648.5$$

$$\mathrm{Var}(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = 1648.5 - 1640.25 = 8.25$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(-\frac{n-1}{N-1}\right) = \frac{8.25}{2}\left(1 - \frac{1}{39}\right) \approx 4.01$$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -\frac{\sigma^2}{N-1} = -\frac{8.25}{39} \approx -0.21$$