INNOSTAGE

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И МАТРИЦЫ

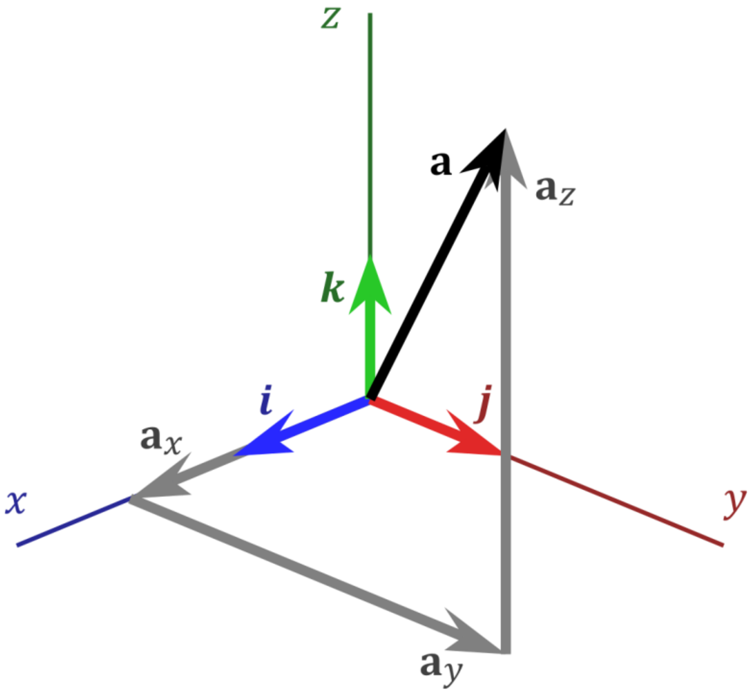
О ЧЕМ ПОЙДЕТ РЕЧЬ

INNOSTAGE

Векторы

Вектор — это понятие из линейной алгебры, объект, имеющий **длину** и **направление**. Проще всего его описать как направленный отрезок. Он может обозначаться графически или на записи — стрелкой или числом. В аналитике и разработке вектор также понимают как упорядоченный **набор чисел**.

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$



Векторы

INNOSTAGE

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОВ

WORD2VEC

NLP

Позволяет вычислять расстояния между объектами

Представление текста

Вектор пикселей

Векторы часто используются в машинном обучении для представления объектов в виде набора признаков. Например, изображение может быть представлено как вектор пиксельных значений. Векторы слов применяются в NLP для представления текстов.

Основные операции над векторами

INNOSTAGE

- Сложение векторов
- Умножение вектора на число
- Скалярное произведение векторов (вычисляет угол между векторами)
- Векторное произведение векторов (дает вектор, перпендикулярный векторам)

Сложение векторов

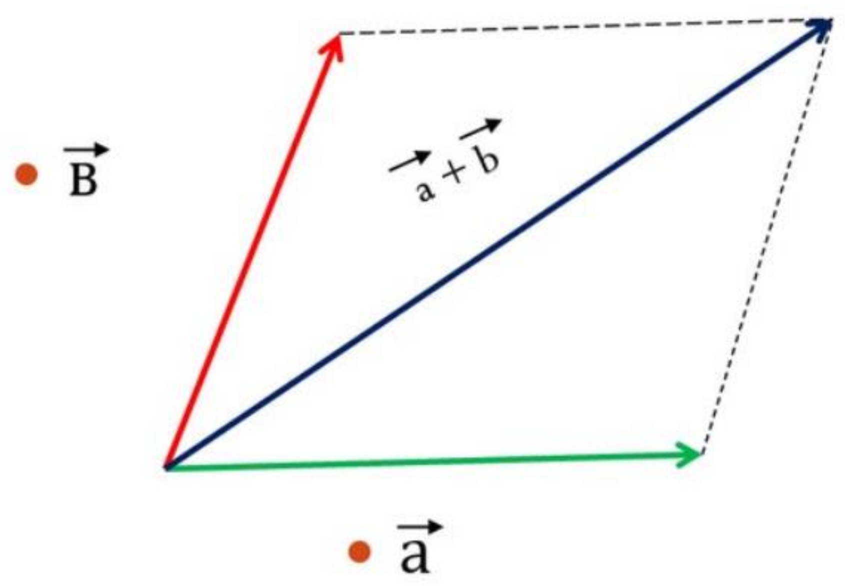
INNOSTAGE

Сложение векторов выполняется поэлементно

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$
$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

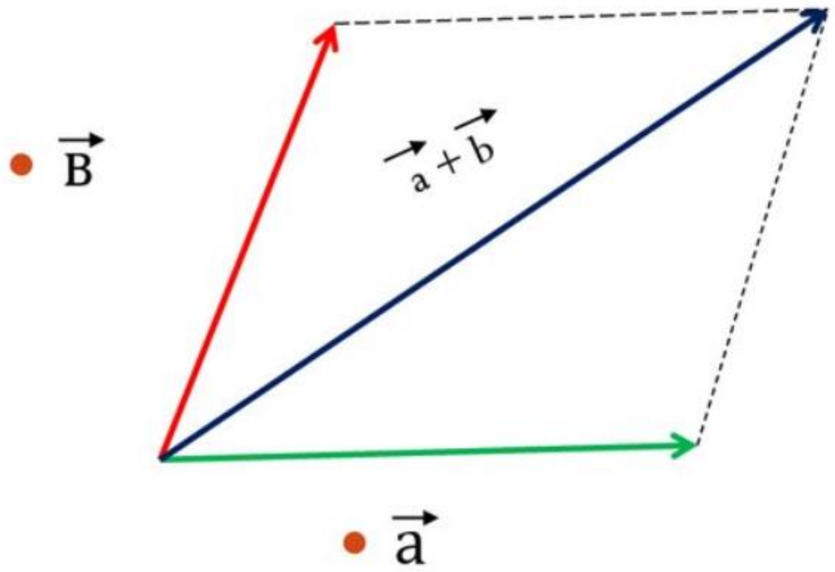
Геометрически сложение соответствует построению диагонали параллелограмма.



Сложение векторов

INNOSTAGE

- Используется в NLP для комбинирования векторов слов в вектор предложения
- Применяется в компьютерном зрении для сложения векторов признаков изображений
- Используется в алгоритмах рекомендаций для сложения векторов

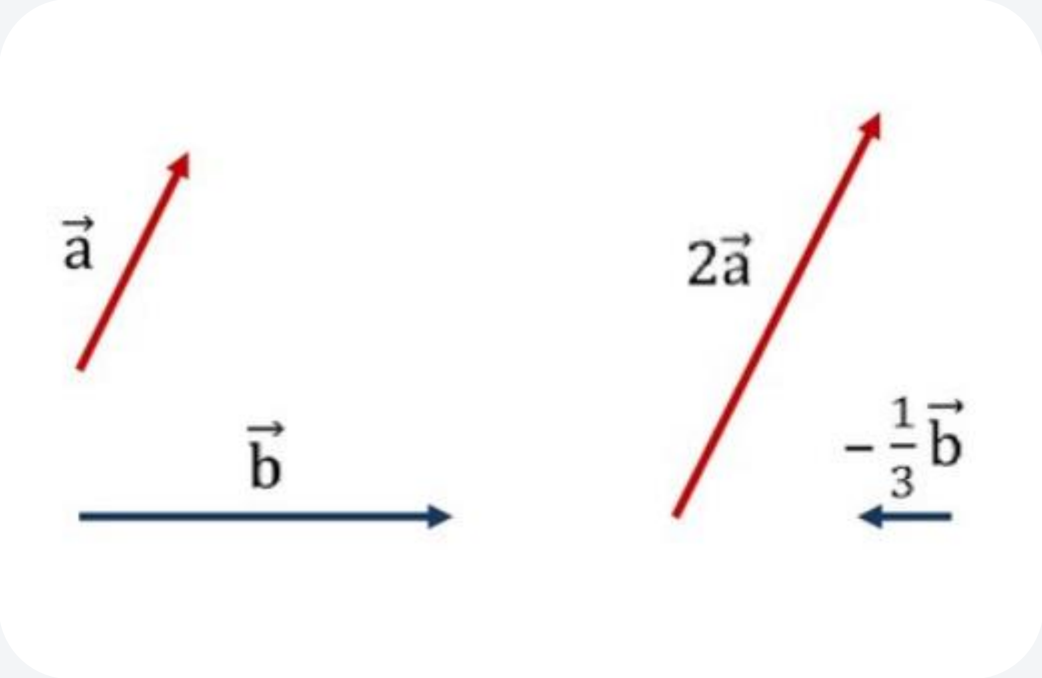


Умножение вектора на число

INNOSTAGE

Умножение вектора $\mathbf{a}$ на число c выполняется покомпонентно

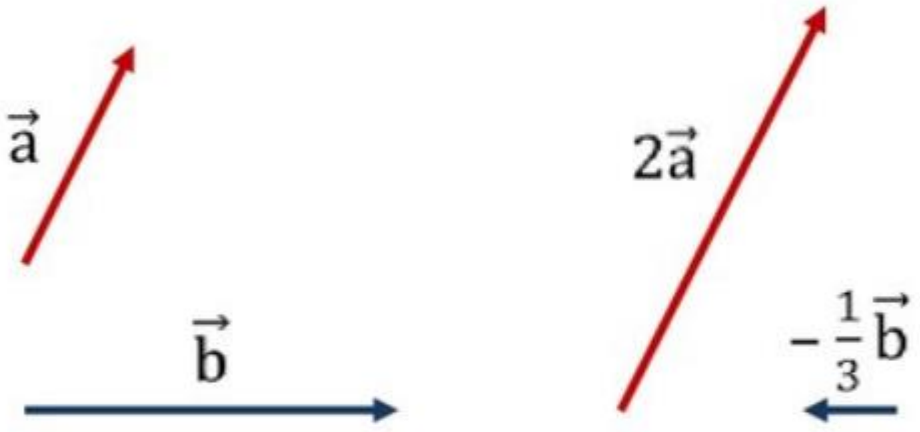
$$c\mathbf{a} = (ca_1, ca_2, \dots, ca_n)$$



Геометрически это масштабирование вектора в c раз.

Умножение вектора на число

- В машинном обучении применяется для масштабирования векторов признаков
- Позволяет приводить признаки к одному масштабу перед обучением модели
- Используется в компьютерном зрении для взвешивания значимости разных признаков изображения

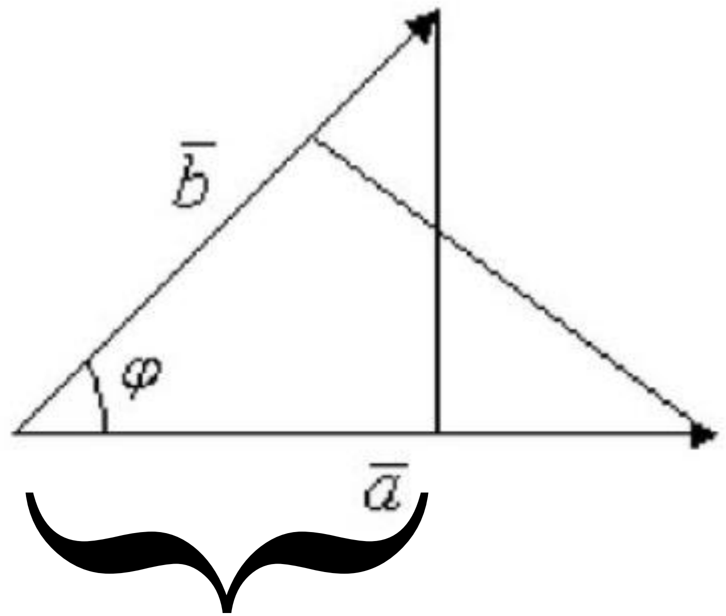


Скалярное произведение

Скалярное произведение вычисляет проекцию одного вектора на другой

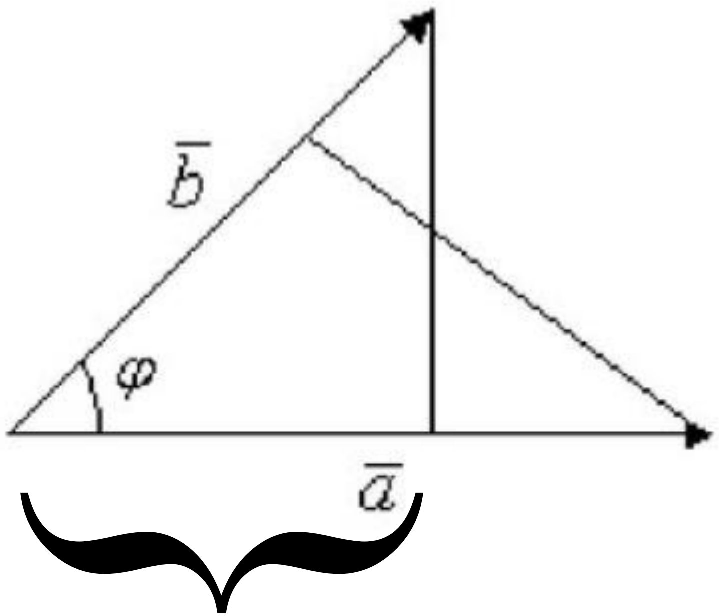
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathrm{a}_1 \mathrm{b}_1 + \mathrm{a}_2 \mathrm{b}_2 + \cdots + \mathrm{a}_n \mathrm{b}_n$$

Геометрически это произведение длин векторов на cos угла между ними.



Скалярное произведение

- Вычисляет сходство между векторами в рекомендательных системах
- Применяется в информационном поиске для оценки релевантности документа запросу
- Применяется в алгоритмах поиска ближайших соседей



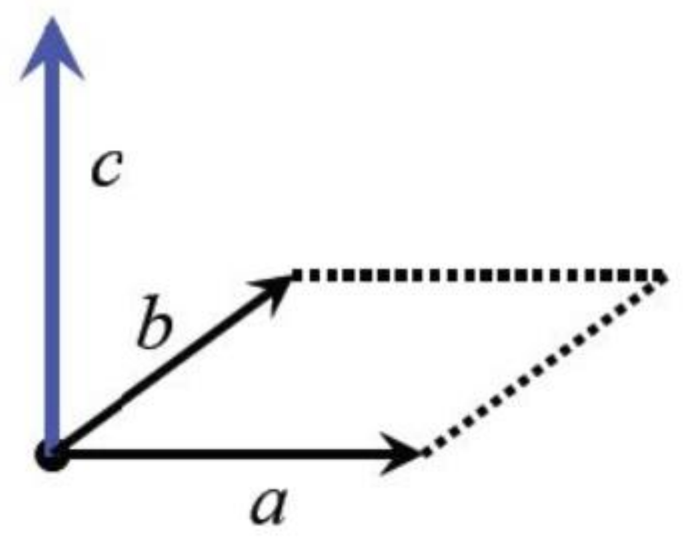
Векторное произведение

INNOSTAGE

Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ дает вектор $\mathbf{c}$, перпендикулярный плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

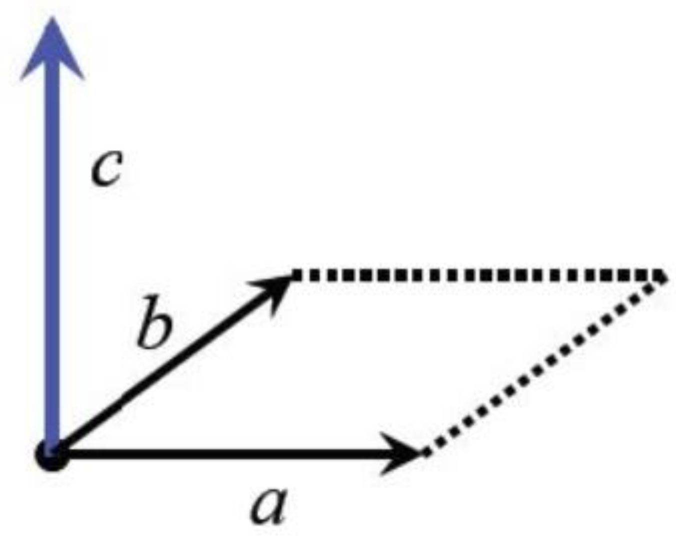


Его модуль равен площади параллелограмма, построенного на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

Векторное произведение

INNOSTAGE

- Используется в компьютерной графике для нахождения нормалей к поверхностям
- Применяется в задачах трехмерного моделирования и распознавания объектов
- Помогает вычислять освещенность в трехмерных сценах (phong shading)



Матрицы

INNOSTAGE

Матрица - это прямоугольная таблица чисел (элементов), расположенных в **m** строках и **n** столбцах.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Матрицы

INNOSTAGE

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДАННЫХ

КОДИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ

ХРАНЕНИЕ

Матрицы используются для компактного представления данных в машинном обучении

Каждый объект кодируется как строка матрицы, столбцы - признаки (матрица признаков)

Удобно для хранения и анализа структурированных данных (таблиц)

Матрицы широко применяются в машинном обучении для представления данных. Например, каждый пример может быть представлен как строка матрицы признаков. Матрицы используются в линейных моделях: линейной регрессии, логистической регрессии, методе опорных векторов.

Основные операции над матрицами

- Сложение матриц одинакового размера
- Умножение матрицы на число
- Умножение матриц (если число столбцов 1ой равно числу строк 2ой)
- Транспонирование матрицы

Сложение матриц

INNOSTAGE

Чтобы сложить две матрицы A и B, они должны быть **одинакового размера** m×n.
Сложение производится поэлементно

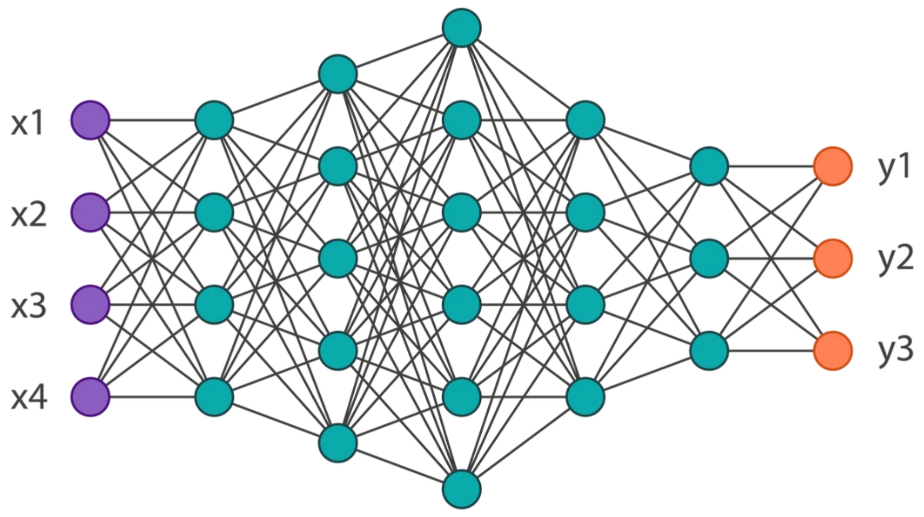
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Сложение матриц

INNOSTAGE

- Используется в нейронных сетях, например в сверточных (CNN) для сложения матриц признаков
- Применяется при обработке последовательностей (видео, аудио) для комбинирования кадров/отсчетов
- Используется в компьютерном зрении при реализации алгоритмов выделения признаков



Умножение на число

INNOSTAGE

При умножении матрицы A на число c, каждый элемент матрицы умножается на *c*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{c} = 3$$

$$cA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Умножение на число

INNOSTAGE

- В машинном обучении применяется для масштабирования значений признаков

- Используется при нормализации данных перед обучением модели

Умножение матриц

Чтобы перемножить матрицы A размера m×n и B размера n×k, число столбцов A должно равняться числу строк B.

$$(\mathrm{AB})_{\mathrm{ik}} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{A}_{\mathrm{ij}} \mathrm{B}_{\mathrm{jk}}$$

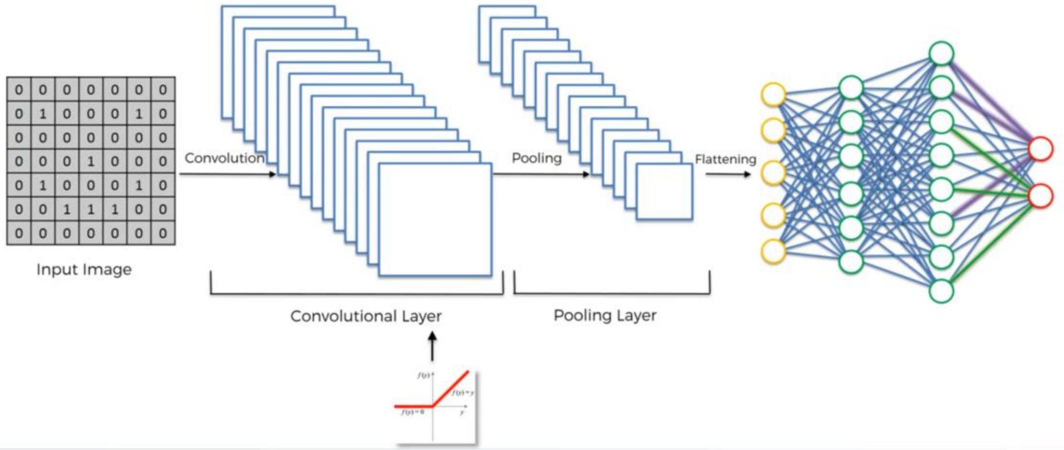
Т.е. каждый элемент получается как сумма произведений элементов i-й строки матрицы A и k-го столбца матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

- Используется в линейных моделях машинного обучения (регрессия, классификация)
- Применяется для вычисления предсказаний модели в виде произведения матрицы объектов на матрицу коэффициентов
- Используется при обучении CNN для вычисления карт признаков



Транспонирование

Транспонирование матрицы A размера m×n дает матрицу A^{T} размера n×m, полученную зеркальным отображением A относительно главной диагонали

$$\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right)_{\mathrm{ij}} = \mathrm{A}_{\mathrm{ji}}$$

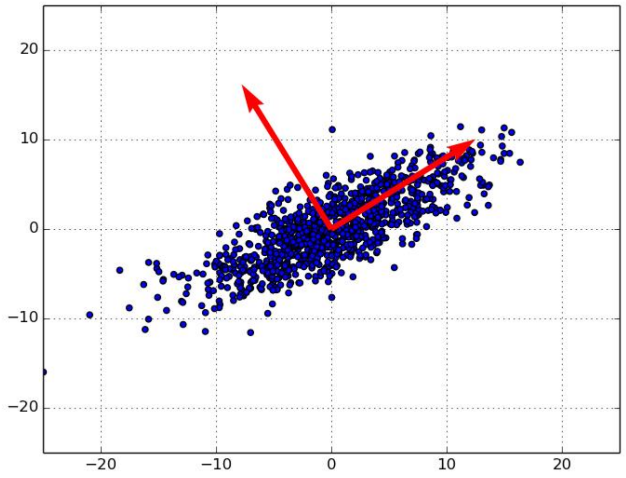
Например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Транспонирование

INNOSTAGE

- Применяется при выводе уравнений линейной регрессии с использованием матричных обозначений
- Используется в PCA для вычисления ковариационной матрицы данных
- Применяется в алгоритмах машинного обучения для упрощения матричных вычислений



Определитель матрицы

Определитель позволяет:

- Проверить, имеет ли матрица обратную
- Найти решение системы линейных уравнений
- Вычислить объем параллелепипеда, заданного векторами-столбцами матрицы
- Преобразовывать координаты при смене базиса

Определитель матрицы

INNOSTAGE

Вычисляется как сумма произведений элементов матрицы. Только для квадратных матриц.

Пусть A - квадратная матрица размера n x n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда определитель матрицы A обозначается как det(A) или |A| и вычисляется по правилу Саррюса: $|\mathrm{A}| = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a}_{1\mathrm{k}}\mathrm{A}_{1\mathrm{k}} = \mathrm{a}_{11}\mathrm{A}_{11} + \mathrm{a}_{12}\mathrm{A}_{12} + \dots + \mathrm{a}_{1\mathrm{n}}\mathrm{A}_{1\mathrm{n}}$

Здесь A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik}. Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} вычисляется как определитель матрицы A, из которой удалена i-я строка и k-й столбец, умноженный на$(-1)^{\mathrm{i}+\mathrm{k}}$.

Ранг матрицы

Ранг матрицы показывает количество линейно независимых строк (или столбцов) матрицы

Ранг используется для:

- Проверки совместности системы линейных уравнений

- Определения количества решений системы уравнений

- Вычисления базиса в линейном пространстве

- Определения размерности пространства строк (столбцов) матрицы

Применение в data science

INNOSTAGE

Представление данных в виде векторов и матриц.	Линейные модели	Сверточные нейронные сети	Тексты и изображения
• Объекты кодируются векторами признаков, данные формируются в матрицы - удобно для анализа.	• Используют векторные и матричные вычисления для обучения - линейная регрессия, логистическая регрессия, метод опорных векторов.	• Активно применяют матричные операции, в частности перемножение матриц для получения карт признаков.	• Удобно представлять в виде векторов для дальнейшей обработки и классификации.

Применение в data science

INNOSTAGE

Метрики	Методы оптимизации	Обработка изображений	Метод главных компонент (PCA)
• Позволяют оценить близость объектов, тенденции - вычисляются с помощью векторных и матричных операций.	• Градиентный спуск, SVD, PCA основаны на векторных и матричных представлениях.	• Часто сводится к матричным преобразованиям - сжатие, фильтрация, сегментация.	• Позволяет снизить размерность данных, представленных матрицей.

Применение в data science

INNOSTAGE

Поиск похожих объектов и кластеризация	В компьютерной графике	Линейные классификаторы	Анализ графов	Прогнозирование временных рядов
• Основаны на вычислении метрик между векторами признаков.	• Используются матрицы для моделирования преобразований - повороты, масштабирование.	• Логистическая регрессия, SVM часто применяются в задачах распознавания образов.	• Можно проводить с помощью матриц смежности, например PageRank, поиск компонент связности.	• Часто сводится к решению линейных уравнений - модели типа ARIMA, Holt-Winters.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

INNOSTAGE

Казань, ул. Подлужная, 60

+7 (843) 567-42-90

info@innostage-group.ru