

### معرفی مسئله:

توی این متن می‌خوام راجع به یه مسئله ریاضی و کاربردهاش صحبت کنم که برای فهمیدنش نیازی به دونستن مشتق یا انتگرال و یا حتی ریاضیات دبیرستان نداره؛ مسئله ازدواج پایدار! بیاید تصور کنیم که دو گروه هم اندازه از آدم‌ها داریم: دخترها و پسرها. دخترها هر کدوم اولویت‌های خودشون رو از بین پسرها مشخص می‌کنن و پسرها هم همینطور. مسئله اینه که یک مجموعه ازدواج (مچینگ) پایدار بر اساس این اولویت‌ها پیدا کنیم. حالا احتمالا می‌پرسید که چه ازدواجی پایداره و چه ازدواجی ناپایدار. فرض کنید که هر پسر و دختری رو با هم مچ کردیم و می‌خوایم ببینیم که آیا رابطه این‌ها با هم پایداره یا نه. بیاید یه دختر خاص (آذر) و یه پسر خاص (بابک) رو درنظر بگیریم که با هم مچ نشدن اما آذر بابک رو به پسری که بهش نسبت دادیم ترجیح میده و بابک، آذر رو به دختری که الان بهش نسبت داده شده؛ در این حالت ناپایداری اتفاق می‌افته. ما توی مسئله ازدواج پایدار می‌خوایم به مچینگ برسیم که هیچ دوتایی مثل دوتایی آذر و بابک وجود نداشته باشه.

### جواب مسئله:

گیل و شاپلی در سال ۱۹۶۲ مقاله‌ای رو تحت عنوان "College admissions and the stability of marriage" منتشر می‌کنن که توی اون الگوریتمی رو معرفی می‌کنن که اثبات می‌شه می‌تونه یه مچینگ پایدار برای هر مسئله‌ای که شرایط اولیه ازدواج پایدار رو داشته باشه، به دست بیاره. بیاید با استفاده از یکی از مثال‌هایی که گیل و شاپلی توی همین مقاله مطرح می‌کنن با این الگوریتم آشنا بشیم:

فرض کنید که یک ماتریس "رتبه بندی" داشته باشیم که آلفا، بتا، گاما و دلتا چهار پسر و A و B و C و D چهار دختر باشند.

	A	B	C	D
$\alpha$	1, 3	2, 3	(3, 2)	4, 3
$\beta$	1, 4	4, 1	3, 3	(2, 2)
$\gamma$	(2, 2)	1, 4	3, 4	4, 1
$\delta$	4, 1	(2, 2)	3, 1	1, 4

اولین عدد در هر درایه ماتریس، تشون دهنده رتبه‌ای هست که پسر متناظر با سطر اون درایه به دختر متناظر با ستون اون درایه اختصاص داده. به صورت مشابه و متقارن، عدد دوم هر درایه، رتبه‌ای هست که دختر متناظر با ستون اون درایه به پسر متناظر با سطر اون درایه اختصاص داده. مثلاً پسر آلفا، به ترتیب دختر A، بعد B، بعد از اون C و نهایتاً D رو برای ازدواج ترجیح میده. حالا چطوری باید ازدواج‌های پایدار رو پیدا کنیم؟

بیاید فرض کنیم که پسرها به دخترها درخواست می‌دن:

۱. هر پسری به اولین دختری که دوست دارد پیشنهاد می‌دهد یعنی داریم

آلفا  $A \leq$

بتا  $A \leq$

گاما  $B \leq$

دل‌تا  $D \leq$

۲. هر دختری از بین پیشنهادهایی که در اون لحظه دارد، اونی رو که براش اولویت بیشتری دارد انتخاب می‌کنه پس

دختر A پیشنهاد آلفا رو قبول می‌کنه و به بتا نه می‌گه

۳. پسر(هایی) که ریجکت شدن، به اولویت بعدی خودشون درخواست می‌دن

بتا  $D \leq$

این قدم‌ها تکرار میشه یعنی دوباره دخترها پیشنهادهاشون رو بررسی می‌کنن و پسری که اولویت بیشتری براشون دارد رو نگه میدارن پس الگوریتم اینطوری ادامه پیدا می‌کنه:

دختر D پسر دل‌تا رو ریجکت می‌کنه و پیشنهاد پسر بتا رو قبول می‌کنه

دل‌تا  $B \leq$

دختر B پیشنهاد پسر دل‌تا رو قبول می‌کنه و گاما ریجکت می‌شه

گاما  $A \leq$

دختر A پیشنهاد گاما رو قبول می‌کنه و آلفا رو ریجکت می‌کنه

آلفا  $B \leq$

دختر B پیشنهاد پسر آلفا رو رد می‌کنه چون هنوز پسر دل‌تا براش تو اولویت بیشتری

آلفا  $C \leq$

اینجا دیگه دختر C پیشنهاد دیگه‌ای نداره بنابراین پیشنهاد آلفا رو قبول می‌کنه.

می‌بینیم که توی این حالت نهایی که بهش رسیدیم، هیچ دوتایی ناپایداری نمی‌تونیم پیدا کنیم و همه ازدواج‌ها پایدار هستن.

الان که با مسئله آشنا شدیم، خوبه که بعضی از کاربردهاش رو هم با هم ببینیم:

### دانشجو و دانشگاه:

همونطور که پیشتر اشاره شد، موضوع اصلی مقاله گیل و شاپلی همین بحث اختصاص دانشگاه و دانشجو به همدیگه بود. اگر بخوایم از لحاظ تاریخی بررسی کنیم، در دهه ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۰ میلادی، سیستم اختصاص دانشجو و دانشگاه دچار مشکلات جدی شده بود. پیش از اون الگوریتم‌هایی که برای این مچینگ وجود داشتند، همگی برای تعداد کم دانشجو جوابگو بودند و در تعداد زیاد باعث سردرگمی برای دانشجویان و دانشگاه‌ها می‌شدند به طوری که باید در هر ترم تقاضای حدود ۵۰۰ دانشجو برای ورود به یک دانشکده بررسی می‌شد تا نهایتاً یک دهم این تعداد وارد دانشکده بشن. اما کار گیل و شاپلی باعث شد که یک الگوریتمی به وجود بیاد که به صورت اتوماتیک این تخصیص رو انجام بده. شاید براتون جالب باشه که بدونید سیستم اختصاص دانشجو به دانشگاه در ایران هم بر اساس همین الگوریتم کار می‌کنه.

## کلاینت و سرور:

نمی‌خواهم خیلی از کلمات قلمبه سلمبه انگلیسی و تخصصی کامپیوتر استفاده کنم که گیج بشید. فرض کنید شما یک سرور (یک کامپیوتر که به درخواست‌های انسان‌ها جواب می‌دهد، مثلا می‌توانید یک بسته اینترنتی (پکت) را از یک کاربر بگیرید و یک کاربر دیگر تحویل دهید و سه تا کاربر به شما بصورت همزمان درخواست می‌دهند که نفر اول می‌خواهد یک ایمیل بفرستد، نفر دوم درحال تماشای فوتبال بصورت آنلاین است و نفر سوم درحال مکالمه ویدئویی با دوستش، اولویت را به کدام یک از کاربرها می‌دهید؟ شما نمی‌توانید بصورت همزمان هر ۳ درخواست پاسخ دهید و باید هر کدام به ترتیب وارد سیستم شما شوند و پردازش شوند و پاسخ آنها داده شود. سرور مورد نظر ما بر اساس میزان اهمیتی که بسته‌های کلاینت‌های مورد نظر ما دارند آنها را مرتب سازی می‌کند. مثلا اولویت یک را به آن کلاینتی که درحال مکالمه ویدئویی است می‌دهد زیرا بسته‌های آن کلاینت باید در اولین فرصت ممکن جابجا شوند و یک ثانیه تاخیر هم باعث اذیت و آزار افراد داخل مکالمه می‌شود، این تاخیر در آن کلاینتی که درحال تماشای فوتبال بصورت آنلاین است کمتر دیده می‌شود و آن شخص که درحال ارسال ایمیل است در حد چند دقیقه تاخیر هم هیچ اشکالی در کارش بوجود نمی‌آورد. این اتفاق را در زندگی روزمره خود با اینترنت هم می‌بینیم که ممکن است ایمیل‌های ما با سرعت کمتری نسبت به تماس‌های ویدئویی مان که در لحظه پاسخ درخواست‌هایش می‌آید داشته باشند. کلاینت‌ها هم البته اولویت‌های خود را به ترتیب معرفی می‌کنند، اولویت‌های آنها سرورهایی هستند که می‌توانند بصورت کاملا یکسانی پاسخ آنها را بدهند (مثلا CDNها) آنها بر اساس نزدیکی سرور، پینگ کمتر، گم‌شدگی دیتای کمتر، در دسترس بودن سرور، سرعت پاسخ و... سرورها را برای خود اولویت بندی می‌کنند. در چنین شرایطی است که ما مسأله شبکه اینترنت را به الگوریتم پایداری ازدواج مدل کرده‌ایم و می‌توانیم از بهترین حالتی که ممکن است از اینترنت استفاده کنیم.

## اقتصاد:

علم اقتصاد، علم اختصاص منابع محدود به کسانی که به اون منابع نیاز دارند. خود این جمله می‌تونه نشون دهنده این باشه که مسئله ازدواج پایدار تا چه حد می‌تونه در اقتصاد به ما کمک کنه. حتی جایزه نوبل اقتصاد در سال ۲۰۱۲ به شاپلی و روث به صورت مشترک، برای تئوری تخصیص پایدار و مطالعه طراحی بازار اهدا شد.

به طور کلی می‌تونیم اکثر مسائل اقتصاد رو با یک دیاگرام عرضه و تقاضا بررسی کنیم. اینکه تعادل در یک بازار در کجا رخ می‌ده، رفتار مردم در قبال سیاست‌های مختلف دولت چطوریه و مسائل مشابه این‌ها، همه رو می‌شه از نمودارهای عرضه و تقاضا استخراج کرد. یک پارامتر مهم در این نمودارها، قیمت و در اصل پول هست؛ اما ما همیشه با بازارهایی رو به رو نیستیم که در اون‌ها پول نقش ایفا می‌کنه و بازارهای خاصی وجود دارند که محدودیت زیادی روی اون‌ها هست و همچنین رفتارها رو نمی‌شه با پول سنجید. شاید یکی از معروف‌ترین مثال‌هایی که از مسئله ازدواج پایدار می‌شناسیم، همین بازارهای خاص باشند، مثل بازار تبادل کلیه. به طور کلی بازار پیوند اعضا پر از محدودیتیه و به شکل قانونی، معاملات اقتصادی در این بازار وجود ندارند. به غیر از این‌ها مشکلات بیولوژیکی مثل عدم هم‌خوانی ارگان‌های اهدایی به همه بیماران وجود داره که مشکل رو پیچیده‌تر از قبل می‌کنه.

اما حالت‌هایی پایداری وجود دارد که از اون‌ها میشه برای نجات جان بیماران استفاده کرد. مثلاً فرض کنید که شخص ۱ بیمار هست و شخص ۲ داوطلب اهدای کلیه به شخص ۱، اما کلیه شخص ۲ با بدن بیمار ۱ سازگاری نداره. از طرفی شخص ۳ نیز بیمار هست و شخص ۴ با مشکل مشابهی برای اهدای کلیه به شخص ۳ رو به روست. اگر این شرط وجود داشته باشه که کلیه شخص ۲ با بیمار ۳ سازگار و کلیه شخص ۴ با بیمار ۱ سازگار باشه، ما حالتی پایدار پیدا کردیم که تا حدی مشابه مسئله ازدواج پایداره. همچنین یک مدل اقتصادی دیگه رو در مثال بعد می‌تونید ببینید.

### کاریابی:

در سال ۲۰۱۶ و در ادامه سیاست فرزندآوری در چین، تعداد زیادی نوزاد متولد شدند که باعث شد تقاضای زیادی (حدود ۴۷ درصد افزایش نسبت به قبل) در بازار کار برای پرستاری کودک به وجود بیاد. به همین منظور لویی و وانگ تصمیم گرفت که یک "بنگاه اقتصادی" خاص در این زمینه به وجود بیاره. ایده‌ای که برای این هدف در نظر گرفت، استفاده از الگوریتم گیل-شاپلی برای مچ کردن خانواده‌ها و پرستاران بود. وانگ با استفاده از این ایده تونست پلتفرم ORSB رو راه اندازی کنه که ادعا می‌کنه تجربه راحت‌تر و قابل اعتمادتری رو برای استفاده کننده‌هاش فراهم کرده. این مثال به خوبی نشون می‌ده که چطوری از مسئله ازدواج پایدار می‌شه در مواردی مثل اتصال کارفرما و کارجو به همدیگه استفاده کرد.

### فیزیک:

استفاده از مسئله ازدواج پایدار به تازگی در فیزیک هم مطرح شده که بیشتر فیزیکدان‌هایی که در حوزه مکانیک آماری و سیستم‌های پیچیده فعالیت می‌کنند بهش پرداختند. شباهتی که بین مسائل مکانیک آماری و ازدواج پایدار وجود داره، پایداریه. سوالاتی که غالباً در مکانیک آماری بررسی می‌شن، بررسی پایداری سیستم‌های مختلف با شرایط اولیه متفاوت. همچنین میشه در مسائل بهینه‌سازی مثل بهینه‌سازی انرژی برای اجزای مختلف یک سیستم، از الگوریتم گیل-شاپلی استفاده کرد.

### حل جدول سودوکو:

اگه به مقاله ثانیا خوانوا، "The Stable Matching Problem and Sudoku" مراجعه کنیم، می‌تونیم با معرفی نوع جدیدی از جداول سودوکو، از مسئله ازدواج پایدار استفاده کنیم و این پازل‌های انتزاعی رو حل کنیم.

### زیست‌شناسی:

اینجا می‌خوایم راجع به یه مثال صحبت کنیم که نسبت به مثال‌های قبلی شباهت کمتری به ریاضیات داره، زیست‌شناسی! در این زمینه تحقیقات زیادی وجود داره اما در متن می‌خوایم فقط به یک مورد خاص اشاره کنیم؛ مدلی بر پایه مسئله ازدواج پایدار که می‌تونه به دانشمندا کمک کنه که ویژگی‌های خاص جوامع میکروبی رو که بهشون اجازه می‌ده با وجود تنوع زیستیشون پایدار بمونن رو درک کنند. جوامع میکروبی، گروه‌هایی از میکروارگانیسم‌ها هستن که میتونن توی محیط‌های مختلف مثل خاک، اقیانوس‌ها یا حتی تو بدن انسان‌ها یافت بشن. این جوامع اغلب پیچیده هستن و از هزاران هزار میکروارگانیسم متفاوت تشکیل شدن. نشون داده شده که علت اینکه این جوامع از گونه‌های مختلف تشکیل

شدن به پایداری جمعی اون‌ها بر می‌گردد. منظور ما اینجا از پایداری اینه که یک جامعه چقدر می‌تونه تغییرات رو مدیریت کنه. مثلاً یک جامعه پایدار می‌تونه در برابر تغییر یکی از مواد مغذی ثبات خودش رو حفظ کنه.

فرض اصلی مدلی که بر پایه مسئله ازدواج پایدار مطرح می‌شه اینه که بسیاری از میکروب‌ها تمایل دارند از مواد مغذی مختلف در یک ترتیب متوالی خاص استفاده کنند. وقتی که این میکروب‌ها در محیطی که غنی از مواد غذایی هست قرار می‌گیرند، اول از همه شروع به استفاده از ماده غذایی مورد علاقه‌شون می‌کنند و وقتی که اون ماده غذایی تموم بشه، سراغ ماده غذایی بعدی می‌رن که دوستش دارن. مثلاً به طور تجربی نشون داده شده که باکتری‌هایی که در روده انسان هستن به این شکل عمل می‌کنند. به این ترتیب "ازدواج" به شکل یک مچینگ یک به یک بین این میکروارگانیسم‌ها و مواد غذایی در میاد و میشه از اون مدل برای بررسی این پدیده استفاده کرد.

### کلاس درس دبیرستان:

در یک پایان‌نامه جالب با عنوان "The Stable Marriage Problem and Its Applications in the High School Classroom" که در سال ۲۰۱۵ منتشر شده، عنوان شده که یکی از سخت‌ترین جنبه‌های تدریس ریاضی در دبیرستان اینه که اون موضوع ریاضی رو به شیوه‌ای که دانش‌آموزها براشون جالب و کاربردی باشه ارائه بدیم به طوری که دانش‌آموزها با اون موضوع ارتباط برقرار کنند. همینطور این پایان‌نامه بیان می‌کنه که بیشتر دانش‌آموزان دبیرستانی، به نحوی درگیر روابط عاطفی هستن که این باعث میشه مطرح کردن مسئله ازدواج پایدار انگیزه و راهکار خوبی برای ورود به نظریه گراف و طراحی الگوریتم باشه و دانش‌آموزها رو به ریاضیات علاقه‌مندتر کنه!

### منابع:

1. MIT OpenCourseWare. (2016, Sep 12). *2.11.1 Stable Matching: Video* [Video]. YouTube. <https://youtu.be/RE5PmdGNqj0>
2. Gale, D., & Shapley, L. S. (1962). College Admissions and the Stability of Marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1), 9–15. <https://doi.org/10.2307/2312726>
3. [https://resources.finalsite.net/images/v1534794145/dovisk12utus/jbb4g4yqsdy1vzriynq/Graduate\\_Thesis.pdf](https://resources.finalsite.net/images/v1534794145/dovisk12utus/jbb4g4yqsdy1vzriynq/Graduate_Thesis.pdf)
4. Goyal, A., Dubinkina, V., & Maslov, S. (2018). Multiple stable states in microbial communities explained by the stable marriage problem. *The ISME journal*, 12(12), 2823–2834.
5. Monod, J. (1949). The growth of bacterial cultures. *Annual review of microbiology*, 3(1), 371–394.
6. The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2012. (n.d.). NobelPrize.org. <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2012/summary/>
7. Wang, L. (2022). A Potential Application of Gale-Shapley Stable Marriage Model in the Babysitter-Households Matching in China. <https://doi.org/10.2991/assehr.k.220109.011>

