Zadanie 1a.

Żeby f była ciągła w 0, to granica f w zerze musi być skończona.
Jako, że $1-\sqrt[3]{1-x} \xrightarrow{x\to 0} 0$, to licznik też musi zbiegac do 0 żeby była szansa na to, że granica całego wyrażenia jest skończona.
Czyli na pewno $a=\frac{\pi}{4}$.

$$lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{4}-arctg(1+x)}{1-\sqrt[3]{1-x}} = lim_{x\to 0}\frac{arctg(1)-arctg(1+x)}{1-(1-x)}(1+\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2) =$$

$$= 3lim_{x\to 0}\frac{arctg(\frac{-x}{2+x})}{x} = 3lim_{x\to 0}\frac{arctg(\frac{-x}{2+x})}{\frac{-x}{2+x}}\frac{-1}{2+x} = -\frac{3}{2}lim_{x\to 0}\frac{arctg(\frac{-x}{2+x})}{\frac{-x}{2+x}} = -\frac{3}{2}$$

W takim razie dla $a=\frac{\pi}{4}$ i $b=-\frac{3}{2}$ f jest ciągła w 0.
W $\mathbb{R}-\{0\}$ f jest oczywiście ciągła, bo to złożenie, suma, iloczyn oraz iloraz funkcji ciągłych.

Zadanie 1b.

Funkcja f jest zawsze oczywiście ciągła na wszystkich przedziałach postaci $(2n, 2n+1)$, bo $\sin(\pi x)$ i $\cos(\pi x)$ są ciągłe oraz suma funkcji ciągłych jest ciągła. W takim razie wystarczy jedynie sprawdzić czy f jest ciągła w punktach postaci $2n$ i $2n+1$.

Gdy $x=2n$, to $f(2n)=a_n+cos(2n\pi)=a_n+1$.
Z drugiej strony $lim_{x\to 2n^-}=b_n+sin(2n\pi)=b_n$.
W takim razie musi zachodzić $a_n+1=b_n$.

Gdy $x=2n+1$, to $f(2n+1)=b_{n+1}+sin(2n\pi+\pi)=b_{n+1}+1$.
Z drugiej strony $lim_{x\to 2n+1^+}=a_n+cos(2n\pi+\pi)=a_n$.
W takim razie musi zachodzić $b_{n+1}+1=a_n$.

Z powyższych zależności wynika, że ciągi z zadania muszą być postaci: $b_{n+1}=b_n-2, a_n=b_n-1$

Zadanie 2.

Jako, że funkcja f przyjmuje wartości dodatnie i ujemne, to istnieją x_1, x_2 takie, że $f(x_1)<0$, $f(x_2)>0$.
Można bez straty ogólności założyć, że $f(x_1)+f(x_2)+f(\frac{x_1+x_2}{2})\geqslant 0$.
Rozpatrzmy funkcję $g(x)=f(x_1)+f(x_1+\frac{x}{2})+f(x_1+x)$.
Wiadomo, że $g(0)=f(x_1)<0, f(x_2-x_1)=f(x_1)+f(x_2)+f(\frac{x_1+x_2}{2})\geqslant 0$
W takim razie g jest ciągła (suma i złożenie funkcji ciągłych), to z twierdzenia Darbouxa na przedziale $[0, x_2-x_1]$ przyjmuje wszystkie wartosci z przedziału $[x_1, g(x_2-x_1)]$, w szczególności 0 dla jakiegoś x_0.
Liczby $x_1, x_1+x_0, x_1+\frac{x_0}{2}$ tworzą ciąg artmetyczny i $f(x_1)+f(x_1+x_0)+f(x_1+\frac{x_0}{2})=0$, czyli istotnie istnieją takie a, b, c.

Zadanie 3a.

Załóżmy, że istnieje δ spełniające warunek jednostajnej ciągłosci dla $\varepsilon = \frac{1}{10}$.
Ale dla pewnej $\delta' < \delta$ i dostatecznie dużego n $f(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$ jest oddalone o $1 > \varepsilon$ od $f(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$.
W takim razie sprzeczość, więc f nie jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 3b.

$$f(x) = x(1-x)tg\big(\pi x - \frac{\pi}{2}\big) = -x(1-x)ctg(\pi x) = -x(1-x)\frac{cos(\pi x)}{sin(\pi x)}$$

$$lim_{x\to 0} f(x) = lim_{x\to 0} -(1-x)cos(\pi x)\frac{1}{\pi}\frac{\pi x}{sin(\pi x)} = -(1-0)cos(0)\frac{1}{\pi}\cdot 1 = -\frac{1}{\pi}$$

$$lim_{x\to 1} f(x) = lim_{x\to 1} -x(1-x)\frac{cos(\pi x)}{sin(\pi x)} = lim_{x\to 1} -xcos(\pi x)\frac{1}{\pi}\frac{\pi - \pi x}{sin(\pi - \pi x)} = -1\cdot cos(\pi\cdot 1)\frac{1}{\pi}\cdot 1 = \frac{1}{\pi}$$

Funkcja f jest oczywiście ciągła na $(0,1)$, gdyż jest to suma, złożenie oraz iloczyn funkcji ciągłych na $(0,1)$. Ma również skończone granica w 0 i w 1. Na zajęciach pokazywaliśmy że z tego wynika jednostajna ciągłość f na $(0,1)$.

Zadanie 4.

Jeżeli f jest jednostajnie ciągła na $[0, \inf)$ to $|f|$ też jest jednostajnie ciągła na tym przedziale, gdyż jest to złożenie dwóch funkcji jednostajnie ciągłych (modułu i f).
Weźmy $\varepsilon = 1$. Z tego, że $|f|$ jest jednostajnie ciągła wynika, że istnieje δ taka, że:

$$|x_1 - x_2| \leqslant \delta \implies ||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leqslant 1$$

Dla $a = \frac{1}{\delta}$ i $b = |f(0)| + 1$ zachodzi dla każdego $x \geqslant 0$ nierówność $|f(x)| \leqslant ax + b$.
Z warunku na deltę wynika, że dla każdego $x \geqslant \delta$

$$||f(x)| - |f(x-\delta)|| \leqslant 1 \implies |f(x)| \leqslant 1 + |f(x-\delta)|$$

W takim razie powyższe rozumowanie można powtarzać i dla c takiego, że $x - c\cdot\delta \in [0,\delta]$ otrzymujemy:

$$|f(x)| \leqslant c + |f(x - c\cdot\delta)|$$

Ale wiadomo, że:

$$x - c\delta \geqslant 0 \iff c\delta \leqslant x \iff c \leqslant \frac{x}{\delta} = ax$$

W takim razie dla jakiegoś $y \in [0,\delta]$:

$$|f(x)| \leqslant ax + |f(y)|$$

No ale możemy ponownie skorzystać z warunku na deltę i otrzymujemy, że dla każdego $y \in [0, 0+\delta]$ zachodzi:

$$||f(y)| - |f(0)|| \leqslant 1 \implies |f(y)| \leqslant |f(0)| + 1$$

W takim razie ostatecznie wychodzi, że:

$$f(x) \leqslant ax + |f(0)| + 1 = ax + b$$

W takim razie istnieją takie a, b aby spełnić warunek z treści zadania.

Zadanie 5a.

Rozpatrzmy funkcję:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, \text{ gdy } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z} \\ x, \text{ gdy } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Oczywiście zbiór $\{x : f(x) > 0\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$, bo to liczby wymierne.
Na zajęciach pokazywaliśmy, że gdy $a_n \to c$, gdzie $c \in \mathbb{R}, a_n = \frac{p_n}{q_n}$, to $q_n \to \infty$.
W takim razie dla dowolnego ciągu a_n zbiegającego do x_0 $f(a_n) \to 0$, bo $f(a_n)$ to liczby postaci $\frac{1}{q_n}$, gdzie $q_n \to \infty$ lub 0.
W takim razie f spełnia warunki zadania, więc taka funkcja istnieje.