# Zadanie 1a.

$\frac{2023a+16b}{120a+b} \geqslant 16 \iff 2023a > 1920a$, co jest prawdą dla $a \geqslant 100$.
$\frac{2023a+16b}{120a+b} \leqslant \frac{2023}{120} \iff 1920b < 2023b$, co jest prawdą dla $b \geqslant 100$.

Przypuśćmy, że istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $\frac{2023a+16b}{120a+b} \geqslant 16 + \varepsilon$ dla każdego $a$ i $b$. Wtedy dla $a = 100$:

$\frac{2023a+16b}{120a+b} - 16 \geqslant \varepsilon \iff \frac{202300+16b-16\cdot 12000-16b}{12000+b} \geqslant \varepsilon \iff \frac{10300}{120000+b} \geqslant \varepsilon$ sprzeczność, bo z aksjomatu Archimedesa $\frac{10300}{120000+b}$ może być dowolnie bliskie zeru. W takim razie 16 jest najlepszym ograniczeniem dolnym, czyli jest kresem dolnym.

Przypuśćmy, że istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $\frac{2023a+16b}{120a+b} \leqslant \frac{2023}{120} - \varepsilon$ dla każdego $a$ i $b$. Wtedy dla $b = 100$:

$\frac{2023}{120} - \frac{2023a+16b}{120a+b} \geqslant \varepsilon \iff \frac{2023}{120} - \frac{2023a+1600}{120a+100} \geqslant \varepsilon \iff \frac{\frac{202300}{120}-1600}{120a+100} \geqslant \varepsilon$ sprzeczność, bo z aksjomatu Archimedesa $\frac{\frac{202300}{120}-1600}{120a+100}$ może być dowolnie bliskie zeru. W takim razie $\frac{2023}{120}$ jest najlepszym ograniczeniem górnym, czyli jest kresem górnym.

# Zadanie 1b.

Przyjmuję, że $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$
$\frac{n-k^2}{n^2+k^3} \geqslant -\frac{1}{3} \iff n - k^2 + \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{3}k^3 \geqslant 0$, co jest prawdą gdy $\frac{1}{3}k^3 - k^2 \geqslant 0 \iff k^2(\frac{1}{3}k - 1)$, co zachodzi dla $k \geqslant 3$, dla $k = 1$: $\frac{n-k^2}{n^2+k^3} \geqslant 0 \geqslant -\frac{1}{3}$, dla $k = 2$: $n - k^2 + \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{3}k^3 = n + \frac{1}{3}n^2 - \frac{4}{3} \geqslant 0$, co jest prawdą dla $n \geqslant 1$ więc $-\frac{1}{3}$ jest ograniczeniem dolnym.
$\frac{n-k^2}{n^2+k^3} = -\frac{1}{3}$ dla $k = 2$ i $n = 1$, więc $-\frac{1}{3}$ jest kresem dolnym.

$\frac{n-k^2}{n^2+k^3} \leqslant \frac{1}{5} \iff \frac{1}{5}n^2 + \frac{1}{5}k^3 - n + k^2 \geqslant 0$, ale $k^2 + \frac{1}{5}k \geqslant \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5}$, więc można poprzednia nierówność jest spełniona jeżeli $\frac{1}{5}n^2 - n + \frac{6}{5} \geqslant 0 \iff n^2 - 5n + 6 \geqslant 0 \iff (n-3)(n-2) \geqslant 0 \iff n \in \mathbb{N} - (2,3) \iff n \in \mathbb{N}$, czyli $\frac{1}{5}$ jest ograniczeniem górnym.
$\frac{n-k^2}{n^2+k^3} = \frac{1}{5}$ dla $k = 1$ i $n = 2$, więc $\frac{1}{5}$ jest kresem górnym.

# Zadanie 2.

Infimum na pewno istnieje z zasady ciągłości, gdyż ten zbiór jest ograniczony z dołu przez 0.
Przypuśćmy, że $infA = M > 4$. To znaczy, że istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $\forall_{x \in A} x \geqslant 4 + \varepsilon = M$.
Istnieje również $x < 4 + \varepsilon + 3\varepsilon + \varepsilon^2$, gdyż w przeciwnym wypadku $infA \geqslant 4 + \varepsilon + 3\varepsilon + \varepsilon^2 > 4 + \varepsilon = M$, sprzeczność.
W takim razie z założenia z treści zadania w zbiorze A musi być element $y$ taki, że:
$y \leqslant 2 + \sqrt{x} < 2 + \sqrt{4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2} = 2 + \sqrt{(2+\varepsilon)^2} = 4 + \varepsilon = M = infA$, sprzeczność, bo każdy element A jest większy bądź równy infimum, czyli: $y \geqslant 4 + \varepsilon = M = infA$

# Zadanie 3.

Baza indukcji dla $k = 2$:
$A = \frac{(n-2)A+a_1+a_2}{n} \iff nA = nA - 2A + a_1 + a_2 \iff A = \frac{a_1+a_2}{2}$
$A^n \geqslant a_1a_2A^{n-2} \iff A^2 \geqslant a_1a_2 \iff \frac{(a_1+a_2)^2}{4} \geqslant a_1a_2 \iff (a_1-a_2)^2 \geqslant 0$ , co jest prawdą, a nierówność jest ostra gdy $a_1 \neq a_2$, a nie może być tak, że $a_1 = a_2 \neq A$.

Załóżmy, że dla $k \geqslant 2$ teza zachodzi, czyli:
$A^n \geqslant A^{n-k}a_1a_2\dots a_k \iff A^k \geqslant a_1a_2\dots a_k$, a nierówność jest ostra gdy nie wszystkie $a_1, a_2, \dots, a_k$ są równe. Pokażę, że:

$A^n \geqslant A^{n-k-1}a_1a_2\dots a_ka_{k+1} \iff A^{k+1} \geqslant a_1a_2\dots a_ka_{k+1}$

Lemat: Najmniejszy z $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ jest mniejszy bądź równy $A$.
Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy $A = \frac{(n-k-1)A+a_1+a_2+\ldots a_k+a_{k+1}}{n} > \frac{(n-k-1)A+A+A+\ldots A+A}{n} = A$ sprzeczność.
Analogicznie największy jest większy bądź równy $A$.

W takim razie, bez straty ogólności, niech $a_{k+1}$ będzie najmniejszym z $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$. Wtedy:
$A^{k+1} = A^k \cdot A \geqslant a_1 a_2 \ldots a_k \cdot A \geqslant a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1}$
Nierówność jest ostra, gdy $a_{k+1} < A$ (czyli istnieje element różny od $a_{k+1}$, bo istnieje element większy bądź równy $A > a_{k+1}$) lub jeżeli nie wszystkie z $a_1, a_2, \ldots, a_k$ są równe(z tezy indukcyjnej).

# Zadanie 4

$\alpha(\beta+\gamma) = \{p \in \mathbb{Q} : p < a(b+c), a, b, c > 0, a \in \alpha, b \in \beta, c \in \gamma\} = \{p \in \mathbb{Q} : p < ab+ac, a, b, c > 0, a \in \alpha, b \in \beta, c \in \gamma\}$, bo $a, b, c \in \mathbb{Q}$, więc zachodzi dla nich rozdzielność dodawania względem mnożenia
$\{p \in \mathbb{Q} : p < ab + ac, a, b, c > 0, a \in \alpha, b \in \beta, c \in \gamma\} = \{p \in \mathbb{Q} : p < ab, a, b > 0, a \in \alpha, b \in \beta, \} + \{p \in \mathbb{Q} : p < ac, a, c > 0, a \in \alpha, c \in \gamma\} = \alpha\beta + \alpha\gamma$

# Zadanie 5.

Dla $n = 1$:
$2\sqrt{3} < 4$ OK.
Dla $n \geqslant 2$ będę dowodził wzmocnionej tezy: $\binom{2n}{n}\sqrt{3n+1} < 4^n$.

Baza dla $n = 2$:
$\binom{4}{2}\sqrt{7} < 4^2 \iff 6\sqrt{7} < 16$ OK.

Dla $n \geqslant 2$ załóżmy, że $\binom{2n}{n}\sqrt{3n+1} < 4^n$.
Pokażę, że $\binom{2(n+1)}{n+1}\sqrt{3(n+1)+1} < 4^{n+1}$.
$\binom{2n+2}{n+1}\sqrt{3n+4} = \binom{2n}{n}\sqrt{3n+1} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\frac{\sqrt{3n+4}}{\sqrt{3n+1}} < 4^n \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\frac{\sqrt{3n+4}}{\sqrt{3n+1}}$

Pozostaje jedynie sprawdzić, czy:
$\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\frac{\sqrt{3n+4}}{\sqrt{3n+1}} \leqslant 4 \iff \frac{(2n+1)}{(n+1)}\frac{\sqrt{3n+4}}{\sqrt{3n+1}} \leqslant 2 \iff (2n+1)^2(3n+4) \leqslant 4(n+1)^2(3n+1) \iff$
$12n^3 + 12n^2 + 3n + 16n^2 + 16n + 4 \leqslant 12n^3 + 24n^2 + 12n + 4n^2 + 8n + 4 \iff 0 \leqslant n$

Atanazy Gawrysiak