1. Baza dla $n=1$:

wtedy $3 \mid 111$ w oczywisty sposób

Zał. że $3^n \mid \underbrace{111\ldots1}_{3^n}$ dla $n \geq 1$

Pokażę, że $3^n \rightarrow 3^{n+1} \mid \underbrace{111\ldots1}_{3 \cdot 3^{n+1}}$

Niech $a = \underbrace{11\ldots1}_{3^n} = 3^n \cdot k \quad , k \in \mathbb{Z}$

wtedy $\underbrace{11\ldots1}_{3^n \cdot 3} = a + a \cdot 10^{3^n} + a \cdot \left(10^{3^n}\right)^2 =$

$= a\underbrace{\left(1 + 10^{3^n} + 100^{3^n}\right)} = 3^n \cdot k \cdot 3 \cdot m = \quad m \in \mathbb{Z}$

$= 3^{n+1} \cdot k \cdot m$ gdzie $m, k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{}$

ta liczba jest podzielna
przez 3, bo to są trzy
jedynki i same zera
czyli suma cyfr to 3

2. Baza:

Z zasady szufladkowej przynajmniej 2 z 3 liczb muszą być tej samej parzystości. Wtedy ich suma jest podzielna przez 2.

Krok:

Zał. że z $2^{n+1}-1$ liczb można wybrać 2^n liczb których suma jest podzielna przez 2^n dla $n \geq 1$.

Wtedy jak mamy $2^{n+1}+2^{n+1}-1$ liczb to można je podzielić na 3 grupy: jedna na jedną liczbę, a dwie mają $2^{n+1}-1$ liczb. Z tych drugich można wybrać po 2^n liczb, których suma jest podzielna przez 2^n, czyli suma 2^{n+1} liczb z dwu grup jest podzielna przez 2^{n+1}.