Zadanie 1a.

Tak, jest podprzestrzenią.
Niech $A = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} : x_n = 0 \text{ poza skończenie wieloma wartościami}\}$.
Weźmy dowolne $c \in \mathbb{R}$ i $(a_n), (b_n) \in A$. W takim razie dla pewnych N_a, N_b zachodzi $\forall_{n>N_a} a_n = 0$ oraz $\forall_{n>N_b} b_n = 0$.
Czyli $c \cdot (a_n) \in A$, bo $\forall_{n>N_a} c \cdot a_n = 0$, więc poza N_a pierwszymi wartościami $c \cdot a_n = 0$. $(a_n) + (b_n) \in A$, bo $\forall_{n>max\{N_a,N_b\}} a_n + b_n = 0$, czyli poza pierwszymi $max\{N_a, N_b\}$ wartościami $a_n + b_n = 0$.
W takim razie A jest zamknięte na mnożenie przez skalar i dodawanie, więc jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 1b.

Nie, nie jest podprzestrzenią. Niech $B = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} : \forall_{K\in\mathbb{R}} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} |a_n| > K\} \cup \{(0)\}$. Niech $a_n = n$, a $b_n = -n - 1$. Wtedy $a_n, b_n \in B$, ale ciąg $(a_n) + (b_n) \notin B$, bo $a_n + b_n = n + (-n - 1) = -1$.

Zadanie 1c.

Nie, nie jest podprzestrzenią. Niech $C = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} : \forall_{n\geqslant 1} |a_n| \leqslant |a_{n-1}|\}$. Niech $a_n = 1$ oraz $b_n = (-1)^n$. Oczywiście $(a_n), (b_n) \in C$. Wtedy ciąg $(a_n) + (b_n) \notin C$, bo $(a_n) + (b_n) = (2, 0, 2, 0, \dots)$

Zadanie 1d.

Tak, jest podprzestrzenią.
Niech $A = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} : \exists_{M\in\mathbb{R}} \forall_{n\geqslant 0} \Sigma_{i=0}^{n} x_i^2 < M\}$.
Weźmy dowolne $c \in \mathbb{R}$ i $(a_n), (b_n) \in D$. W takim razie dla pewnych M_a, M_b zachodzi $\forall_{n\geqslant 0} \Sigma_{i=0}^{n} a_i^2 < M_a$ oraz $\forall_{n\geqslant 0} \Sigma_{i=0}^{n} b_i^2 < M_b$.
Wtedy $c \cdot (a_n) \in D$, bo $\forall_{n\geqslant 0} \Sigma_{i=0}^{n} (ca_i)^2 = c^2 \Sigma_{i=0}^{n} a_i^2 < c^2 M_a$.
Również $(a_n) + (b_n) \in D$, bo $\forall_{n\geqslant 0} \Sigma_{i=0}^{n} (a_i + b_i)^2 \leqslant 2\Sigma_{i=0}^{n} a_i^2 + 2\Sigma_{i=0}^{n} b_i^2 < 2(M_a + M_b)$.
W takim razie D jest zamknięte na mnożenie przez skalar i dodawanie, więc jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 6 & 2 & -3 & 8 \\ -2 & 1 & 6 & -11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -12 & 20 \\ 0 & 3 & 9 & -15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Więc $lin(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = lin((1, 0, -\frac{3}{2}, 3), (0, 1, 3, -5))$.
Czyli każdy wektor zapisuje się w postaci:

$$x_1(1, 0, -\frac{3}{2}, 3) + x_2(0, 1, 3, -5)$$

Więc są to czwórki liczb spełniające układ równań:

$$\begin{cases} x_1 = 1x_1 + 0x_2 \\ x_2 = 0x_1 + 1x_2 \\ x_3 = -\frac{3}{2}x_1 + 3x_2 \\ x_4 = 3x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

Druga część zadania:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \\ -4 & 8 & -11 & 17 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & -12 & 9 & 15 \\ 0 & 20 & -15 & 9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 34 \end{array}\right]$$

Więc wektor β nie jest zawarty w V.

Zadanie 5.

$$\frac{w_k^n(x)}{w_{k-1}^n(x)} = \frac{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^n - x^i)}{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^k - x^i)} \cdot \frac{\Pi_{i=0}^{k-2}(x^{k-1} - x^i)}{\Pi_{i=0}^{k-2}(x^n - x^i)} = \frac{(x^n - x^{k-1})\Pi_{i=0}^{k-2}(x^{k-1} - x^i)}{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^k - x^i)} = \frac{(x^n - x^{k-1})\Pi_{i=0}^{k-2}(x^{k-1} - x^i)}{(x^k - 1)\Pi_{i=1}^{k-1}(x^k - x^i)} =$$
$$\frac{(x^n - x^{k-1})\Pi_{i=0}^{k-2}(x^{k-1} - x^i)}{(x^k - 1)\Pi_{i=0}^{k-2}(x^k - x^{i+1})} = \frac{(x^n - x^{k-1})\Pi_{i=0}^{k-2}(x^{k-1} - x^i)}{(x^k - 1)x^{k-1}\Pi_{i=0}^{k-2}(x^{k-1} - x^i)} = \frac{x^{n-k+1} - 1}{x^k - 1} = \frac{(x-1)(x^{n-k} + \cdots + 1)}{(x-1)(x^{k-1} + \cdots + 1)} = \frac{x^{n-k} + \cdots + 1}{x^{k-1} + \cdots + 1}$$

Czyli w takim razie po wymnożeniu powyższej równości:

$$(x^{k-1} + \cdots + 1)w_k^n(x) = (x^{n-k} + \cdots + 1)w_{k-1}^n(x)$$

Lemat $w_k^n(x) = w_k^{n-1}(x) + x^{n-k}w_{k-1}^{n-1}(x)$

$$w_k^{n-1}(x) + x^{n-k}w_{k-1}^{n-1}(x) = \frac{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^{n-1} - x^i)}{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^k - x^i)} + x^{n-k}\frac{\Pi_{i=0}^{k-2}(x^{n-1} - x^i)}{\Pi_{i=0}^{k-2}(x^{k-1} - x^i)} = \frac{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^{n-1} - x^i)}{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^k - x^i)} + x^{n-k}\frac{\Pi_{i=0}^{k-2}(x^{n-1} - x^i)}{\Pi_{i=1}^{k-1}(x^{k-1} - x^{i-1})} =$$
$$= \frac{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^{n-1} - x^i)}{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^k - x^i)} + x^{n+k+1}\frac{\Pi_{i=0}^{k-2}(x^{n-1} - x^i)}{\Pi_{i=1}^{k-1}(x^k - x^i)} = \frac{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^{n-1} - x^i)}{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^k - x^i)} + x^{n+k+1}(x^k - 1)\frac{\Pi_{i=0}^{k-2}(x^{n-1} - x^i)}{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^k - x^i)} =$$
$$= \frac{(x^{n-1} - x^{k-1} + x^{n+k+1}(x^k - 1))\Pi_{i=0}^{k-2}(x^{n-1} - x^i)}{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^k - x^i)} = \frac{(x^n - 1)x^{k-1}\Pi_{i=0}^{k-2}(x^{n-1} - x^i)}{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^k - x^i)} = \frac{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^n - x^i)}{\Pi_{i=0}^{k-1}(x^k - x^i)} = w_k^n(x)$$

(*) W oczywisty sposób $w_0^n = w_n^n = 1$, więc są to wielomiany o współczynnikach całkowitych, nieujemnych.
Teraz pokażę indukcyjnie ze względu na n, że $w_k^n(x)$ dla $0 < k < n$ to wielomian o współczynnikach całkowitych, nieujemnych.
Baza dla n = 2:
$w_1^2 = x + 1$ OK
Załóżmy tezę dla $n \geqslant 2$. Pokażę, że dla każdego w_k^{n+1}, gdzie $0 < k < n + 1$ zachodzi teza.
Z lematu wynika, że $w_k^{n+1}(x) = w_k^n(x) + x^{n+1-k}w_{k-1}^n(x)$. Ale $w_k^n(x)$ i $w_{k-1}^n(x)$ spełniają tezę z założnia indukcyjnego (lub z (*), gdy $k = 1$ lub $k = n$), więc oczywiście $w_k^{n+1}(x)$ też.