1. Baza dla $n=1$:

wtedy $3 \mid 111$ w oczywisty sposób

Zał. że $3^n \mid \underbrace{111\ldots1}_{3^n}$ dla $n \geq 1$

Pokażę, że $\underbrace{3^n \rightarrow 3^{n+1}}$ $\mid \underbrace{111\ldots1}_{3 \cdot 3^{n+1}}$

Niech $a = \underbrace{11\ldots1}_{3^n} = 3^n \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$

wtedy $\underbrace{11\ldots1}_{3^n \cdot 3} = a + a \cdot 10^{3^n} + a \cdot \left(10^{3^n}\right)^2 =$

$= a\underbrace{\left(1 + 10^{3^n} + 100^{3^n}\right)} = 3^n \cdot k \cdot 3 \cdot m =$ $m \in \mathbb{Z}$

$= 3^{n+1} \cdot k \cdot m$ gdzie $m, k \in \mathbb{Z}$

ta liczba jest podzielna
przez 3, bo to są trzy
jedynki i same zera
czyli suma cyfr to 3

$\boxed{\square}$

baza:

Z zasady szufladkowej przynajmniej 2 z 3 liczb są tej samej parzystości, więc ich suma jest parzysta

krok:

Zał. że z $2^{n+1}-1$ liczb da się wybrać 2^n liczb, których suma jest podzielna przez 2^n.

Z $2^{n+2}-1$ wybieramy $2^{n+1}-1$ liczb. suma 2^n z nich jest postaci $2^n \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Pozostało $2^n \cdot 3 - 1$ niewybranych liczb. Z nich znowu wybieramy $2^{n+1}-1$ liczb. Suma 2^n z nich jest postaci $2^n \cdot m$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$. Pozostało $2^{n+1}-1$ niewybranych liczb. Z nich da się wybrać 2^n liczb, których suma jest postaci $2^n \cdot l$, bel

Z zasady szufladkowej przynajmniej 2 z liczb m, k, l są tej samej parzystości. bso niech będą to m i k. Wtedy $2^n m + 2^n k = 2^n\underbrace{(m+k)}_{\text{podzielne przez 2}}$

Czyli da się wybrać 2^{n+1} liczb których suma jest podzielna przez 2^{n+1}