Zadanie 309a.

Relacja r to jądro przekształcenia przypisującego wielomianowi $f \in \mathbb{Z}[x]$ ciąg zer i jedynek. Ciąg przypisany funkcji f ma na miejscu i współczynnik w f przy x^i modulo 2.
Jest tak dlatego, że $f - g$ ma wszystkie współczynniki parzyste wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi odpowiadające f i g są takie same.
Z tego wynika, że r to relacja równoważności.

Zadanie 309b.

Klasa 1:
Klasa reprezentowana przez 1.
Klasa 2:
Klasa reprezentowana przez x.
Klasa 3:
Klasa reprezentowana przez x^2.

Zadanie 309c.

Zbiór klas abstrakcji jest równoliczny ze zbiorem X - zbiorem wszystkich ciągów zer i jedynek mających skończenie wiele jedynek. Jest tak, gdyż przekszatałcenie opisane w podpunkcie (a) jest na X oraz wielomiany mają zawsze skończenie wiele współczynników niezerowych, czyli również skończenie wiele nieparzystych.
Z kolei zbiór X można utożsamić ze zbiorem wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ (traktując ciąg jako funkcję charakterystyczną zbioru), który pokazywaliśmy na zajęciach, że jest mocy $\aleph_0$, więc wszystkich klas abstrakcji też jest $\aleph_0$

Zadnie 309d.

Weźmy dowolny wielomian f. Pokażę że klasa abstrakcji, w której się znajduje jest mocy $\aleph_0$.
Ta klasa abstrakcji może być maksymalnie mocy $\aleph_0$, bo wszystkich wielomianów jest $\aleph_0$.
Z drugiej strony ta klasa musi być mocy co najmniej $\aleph_0$, gdyż należą do niej wszytkie wielomiany postaci $f, f + 2, f + 4, \dots$
W takim razie z twierdzenia Cantora-Bernsteina moc tej klasy abstrakcji to $\aleph_0$.
Jako, że f był dowolnym wielomianem, to każda klasa abstrakcji ma moc $\aleph_0$.

Zadanie 336a.

$\bigcup_{r \in R} g(r) = P(\mathbb{N})$-$\{\varnothing\}$
($\subseteq$) Jest oczywiste, bo $g : R \to P(P(\mathbb{N}))$.
($\supseteq$) Weźmy dowolny $A \in P(\mathbb{N}), A \neq \varnothing$. Wtedy gdy r jest relacją równowazności wyznaczoną przez podział $\mathbb{N}$ na dwie klasy abstrakcji $A, \mathbb{N} - A$, więc $g(r) = \{A, \mathbb{N} - A\}$. Wobec tego $A \in \bigcup_{r \in R} g(r)$.
$\bigcap_{r \in R} g(r) = \varnothing$

Weźmy dwie relacje $r = \{\langle n,n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ i $r' = \{\langle n,m\rangle \mid n,m \in \mathbb{N}\}$. Wtedy $g(r) = \{\{0\},\{1\},\{2\},\ldots\}$ i $g(r') = \{\mathbb{N}\}$, więc $g(r) \cap g(r') = \varnothing$. W takim razie istotnie $\bigcap_{r\in R} g(r) = \varnothing$.

Zadanie 336b.

To jest funkcja różnowartościowa.
Weźmy $r \neq r'$. Relacja równoważności jednoznacznie wyznacza podział na klasy abstrakcji. Również podział na klasy abstrakcji jednoznacznie wyznacza relacje rónoważności. W takim razie r i r' mają różny podział na klasy abstrakcji, wieć $g(r) \neq g(r')$.
To nie jest funkcja "na". W oczywisty sposób $\{\varnothing\} \notin g(R)$.

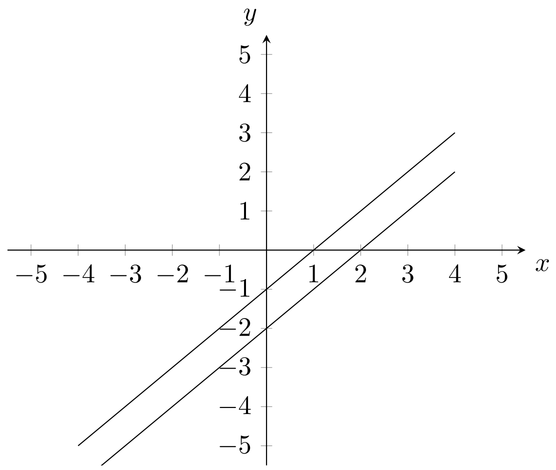
Zadanie 336c.

$g(R) = \{X \mid X \in P(P(\mathbb{N})) \land \bigcup X = \mathbb{N} \land \forall_{A,B\in X} A \cap B = \varnothing\}$
Jest tak dlatego, że relacja równoważności wyznacza podział $\mathbb{N}$ na relacje zbiory oraz każdy podział $\mathbb{N}$ na zbiory wyznacza relację równoważności.

Oczywiście istnieje tylko jeden zbiór Z mocy jeden będący podziałem $\mathbb{N}$. Jest to $\{\mathbb{N}\}$.
W takim razie $g^{-1}(\{Z \subseteq P(\mathbb{N}) : |Z| = 1\}) = g^{-1}(\{\{\mathbb{N}\}\}) = \{\{\langle n,m\rangle \mid n,m \in \mathbb{N}\}\}$.
Jedyny zbiór postacii $\{Z \in P(\mathbb{N}) : |Z| = 1\}$, który będzie podziałem $\mathbb{N}$ na zbiory to $\{\{0\},\{1\},\{2\},\ldots\}$.
W takim razie $g(\{\{Z \in P(\mathbb{N}) : |Z| = 1\}\}) = g(\{\{\{0\},\{1\},\{2\},\ldots\}\}) = \{\langle n,n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$

Zadanie 579a.

Wszytkie pary w $F(\{1,2\})$ muszą spełniać $x - y = 1 \lor x - y = 2 \iff y = x - 1 \lor y = x - 2$. W takim razie wykres będzie wyglądał następująco:



Zadanie 579b.

To jest funkcja różnowartościowa.
Weźmy dowolne zbiory $A, B \in P(\mathbb{R}), A \neq B$. Pokażę, że $F(A) \neq F(B)$.
To znaczy, że istnieje taki $x \in \mathbb{R}$, że jest w dokładnie jednym ze zbiorów A, B. Bez straty ogólności załóżmy, że $x \in A, x \notin B$. To znaczy, że $\langle x, 0\rangle \in F(A)$, ale $\langle x, 0\rangle \notin F(B)$, bo $x - 0 \in A$, ale $x - 0 \notin B$. W takim razie $F(A) \neq F(B)$, czyli istotnie ta funkcja jest różnowartościowa.

To nie jest surjekcja.
Na przykład nie istnieje taki zbiór A, że $F(A) = \{\langle 0, 0\rangle\}$.
Przypuśćmy nie wprost, że taki zbiór A istnieje. To znaczy, że $0-0 = 0 \in A$. W takim razie rónież $\langle 0, 0\rangle \in F(A)$, bo $1 - 1 = 0 \in A$, sprzeczność.

Zadanie 579c.

Zwrotność:
Weźmy $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $x - x = 0 \in \mathbb{N}$, więc $\langle x, x\rangle \in F(\mathbb{N})$, czyli $F(\mathbb{N})$ jest istotnie zwrotna. Antysymetria:
Załóżmy, że $\langle x, y\rangle \in F(\mathbb{N})$ oraz $x \neq y$. To znaczy, że $x - y = k \in \mathbb{N} - \{0\}$. W takim razie $y - x = -k < 0$, więc $y - x \notin \mathbb{N}$, czyli $\langle y, x\rangle \notin F(\mathbb{N})$. Wobec tego relacja $F(\mathbb{N})$ jest antysymetryczna.
Przechodniość:
Załóżmy, że $\langle x, y\rangle \in F(\mathbb{N})$ oraz $\langle y, z\rangle \in F(\mathbb{N})$. W takim razie $x - y = k \in \mathbb{N}$ oraz $y - z = m \in \mathbb{N}$. Po dodaniu powyższych równań stronami okazuje się, że $x - z = m + k \in \mathbb{N}$, wiec $\langle x, z\rangle \in F(\mathbb{N})$. Z tego wynika, że $F(\mathbb{N})$ jest przechodnia.

Weźmy zbiór $X = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}$. Pokażę, że to jest antyłańcuch.
Weźmy dowolne $p, q \in X$. Gdy $p < q$, to $p - q < 0$, więc $p - q \notin \mathbb{N}$, czyli p i q są nieporównywalne. W przeciwnym wypadku $0 < p - q \leqslant p \leqslant \frac{1}{3} < 1$, czyli żeby $p - q$ było naturalne(czyli dało się porównać), to $p - q = 0 \iff p = q$. W takim razie X to antyłańcuch.

Zadanie 579d.

Aby $F(A)$ była relacją zwrotną w $\mathbb{R}$, to w szczególności $\langle 0, 0\rangle \in F(A)$, czyli $0 - 0 = 0 \in A$.
Jeżeli $0 \in A$ to $F(A)$ jest zwrotna w $\mathbb{R}$, bo dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $x - x = 0 \in A$, więc $\langle x, x\rangle \in F(A)$.
Wobec powyższego przeciwobraz zbioru relacji zwrotnych w $\mathbb{R}$ to zbiór $\{A \mid 0 \in A\}$.

Zadanie 579e.

Na pewno $|F(\mathbb{Q})| \leqslant \mathfrak{c}$, gdyż $F(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}^2$, a $|\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$.
Z drugiej strony zbiór $X = \{\langle x, x\rangle \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq F(\mathbb{Q})$, gdyż $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$. Ale $|X| = \mathfrak{c}$ oraz $X \subseteq F(\mathbb{Q})$, więc $\mathfrak{c} \leqslant |F(\mathbb{Q})|$.
W takim razie z twierdzenia Cantora-Bernsteina $|F(\mathbb{Q})| = \mathfrak{c}$