Zadanie 1.

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + tx_3 + sx_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + tx_4 = s \\ x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 = t \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t & s & 2 \\ 1 & 1 & 1 & t & s \\ 1 & 0 & 1 & 0 & t \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & s & 2 \\ 0 & 1 & 1-t & t-s & s-2 \\ 0 & 0 & 1-t & -s & t-2 \end{bmatrix}$$

Gdy $t = 1$ i $s = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ układ sprzeczny}$$

Gdy $t = 1$ i $s \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & s & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1-s & s-2 \\ 0 & 0 & 0 & -s & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-s & s-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s-2+\frac{s-1}{s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 1 \\ x_2 = \frac{s^2-s-1}{s} \\ x_4 = \frac{1}{s} \end{cases}$$

Gdy $t \neq 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t & s & 2 \\ 0 & 1 & 0 & t & s-t \\ 0 & 0 & 1-t & -s & t-2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & s & 2 \\ 0 & 1 & 0 & t & s-t \\ 0 & 0 & 1 & \frac{s}{t-1} & \frac{t-2}{1-t} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s - \frac{st}{t-1} & 2 - \frac{t^2-2t}{1-t} \\ 0 & 1 & 0 & t & s-t \\ 0 & 0 & 1 & \frac{s}{t-1} & \frac{t-2}{1-t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{s}{t-1}x_4 + \frac{2-t^2}{1-t} \\ x_2 = -tx_4 + s - t \\ x_3 = \frac{t-2+sx_4}{1-t} \end{cases}$$

Zadanie 2.

$w(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$
$w(1+i) = 0$, $w(2-i) = 1$, $w(1) = i$

$$\begin{cases} c + a \cdot 2i + b(1+i) = 0 \\ c + a(3-4i) + b(2-i) = 1 \\ c + a + b = i \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+i & 0 \\ 1 & 3-4i & 2-i & 1 \\ 1 & 1 & 1 & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+i & 0 \\ 0 & 3-6i & 1-2i & 1 \\ 0 & 1-2i & -i & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+i & 0 \\ 0 & 3-6i & 1-2i & 1 \\ 0 & 0 & i+1 & -3i+1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 & 3i-1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1+2i}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -1-2i \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 & 3i-1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2+4i}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1-2i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11i+3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2+4i}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1-2i \end{bmatrix} \text{ czyli } \begin{cases} a = \frac{2+4i}{5} \\ b = -1-2i \\ c = \frac{11i+3}{5} \end{cases}$$

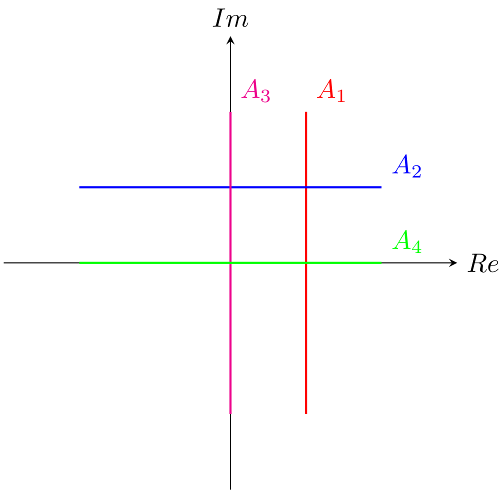
Zadanie 3a

$f(z) = iz + 1$

$$f(z) = z \iff iz + 1 = z \iff 1 = z(1 - i) \iff \frac{1}{1-i} = z \iff z = \frac{1+i}{2}$$

Zadanie 3b

$f^1(z) = iz + 1$
$f^2(z) = i(iz + 1) + 1 = -z + i + 1$
$f^3(z) = i(-z + i + 1) + 1 = -iz + i$
$f^4(z) = i(-iz + i) + 1 = z$



Zadanie 3c

$f^0(z) = z$
$f^1(z) = iz + 1$
$f^2(z) = i(iz + 1) + 1 = -z + i + 1$
$f^3(z) = i(-z + i + 1) + 1 = -iz + i$
$f^4(z) = i(-iz + i) + 1 = z = f^0(z)$
Czyli $f^{4k+r}(z) = f^r(z)$, dla $k \in \mathbb{Z}$
$f^3(z) = -iz + i$
$f^{33}(z) = f^1(z) = iz + 1$
$f^{33} = f^3 \iff -iz + i = iz + 1 \iff 2iz = i - 1 \iff z = \frac{i-1}{2i} \iff z = \frac{1+i}{2} \notin \mathbb{R}$
Czyli $A_3 \cap A_{33} = \varnothing$

Zadanie 4

Tak, istnieje.
Niech U wygląda tak:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Załóżmy, że U nie ma roziązań w $\mathbb{Z}$.
To znaczy, że istnieją takie $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m \in \mathbb{Z}$, że zachodzi 1 lub 2:

1:
Da się utworzyć równianie typu $0x_1 + \cdots + 0x_n \neq 0$, czyli:
$\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \cdots + \alpha_m a_{m1} = 0$
$\vdots$
$\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \cdots + \alpha_m a_{mn} = 0$
$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_m b_m \neq 0$
sprzeczność, bo w $\mathbb{Z}_{p_0}$, gdzie $p_0 > max(\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \cdots + \alpha_m a_{m1}, \ldots, \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \cdots + \alpha_m a_{mn}, \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_m b_m)$ ten układ również nie miał by rozwiązań (wystarczy wziąć kombinację liniową wierszy macierzy z tymi samymi współczynnikami $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ i w $\mathbb{Z}_{p_0}$ również powstanie równanie postaci $0 + \cdots + 0 \neq 0$)

2:
Istnieją $k_1, k_2, \ldots, k_n, k_{n+1} \in \mathbb{Z}$ takie, że da się utworzyć równianie typu:
$k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n = k_{n+1}$, gdzie $NWD(k_1, \ldots, k_n)$ nie dzieli k_{n+1}, czyli:
$\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \cdots + \alpha_m a_{m1} = k_1$
$\vdots$
$\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \cdots + \alpha_m a_{mn} = k_n$
$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_m b_m = k_{n+1}$

Podzielmy stronami równienie $k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n = k_{n+1}$ przez $NWD(k_1, \ldots, k_n, k_{n+1})$. Wtedy dostajemy:
$k'_1 x_1 + \cdots + k'_n x_n = k'_{n+1}$
I istnieje jakaś liczba p_1, która dzieli $k'_1, \ldots k'_n$, ale nie dzieli k'_{n+1}. Czyli to równanie nie ma rozwiązań w $\mathbb{Z}$. Ale wtedy to równanie w $\mathbb{Z}_{p_1}$ przyjmuje formę $0 + \cdots + 0 \neq 0$, więc sprzeczność.

Zadanie 5.

Okrąg ze środkiem w (x_0, y_0) można przedstawić jako zbiór liczb zespolonych z spełniających równanie:
$|z - x_0 - iy_0| = r \iff |\frac{z - x_0 - iy_0}{r}| = 1$, czyli w postaci takiej jak podana jest w zadaniu
Każdą prostą można przedstawić jako zbiór punktów równo odległych od dwóch ustalonych punktów $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$.
Czyli spełniających równanie:
$|z - x_0 - iy_0| = |z - x_1 - iy_1| \iff |\frac{z - x_0 - iy_0}{z - x_1 - iy_1}| = 1$,czyli w postaci takiej jak podana jest w zadaniu.

$|\frac{az+b}{cz+d}| = 1 \iff |az + b| = |cz + d| \iff |a||z + \frac{b}{a}| = |c||z + \frac{d}{c}| \iff \frac{|z+\frac{b}{a}|}{|z+\frac{d}{c}|} = \frac{|c|}{|a|}$
A to równanie wyznacza nam już okrąg Apoloniusza (lub prostą w zdegenerowanym przypadku, gdy $|c| = |a|$), gdyż $|z + \frac{b}{a}|$ to odległość punktów z i $\frac{b}{a}$, podobnie $|z + \frac{d}{c}|$, a $\frac{|c|}{|a|}$ to liczba rzeczywista.

Atanazy Gawrysiak