~~1. $A = \{(1-4a)b^3 + a^2,\ a,b \in (0,1]\}$~~

1. $A = \{x : x = (1-4a)b^3 + a^2,\ a,b \in [0,1]\}$

dla $a = \frac{1}{4}$ $x = \frac{1}{16}$

• sup(A)

~~wstawiając~~ $(1-4a)b^3 + a^2$

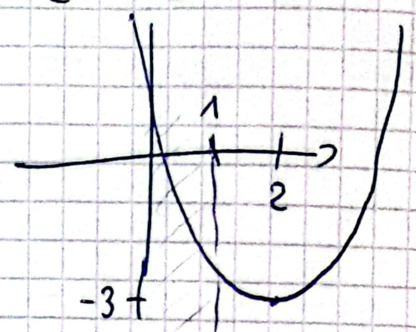
• jeżeli $a < \frac{1}{4}$

$1-4a > 0$, więc żeby $(1-4a)b^3$ było jak największe to b musi być jak największe. dla $b=1$

$x = 1 - 4a + a^2$

~~$x = (a-2)$~~

$x = (a-2)^2 - 3$



więc dla $a \in [0,1]$ $(a-2)^2-3$ jest malejące, czyli największy element to $(0-2)^2-3=1$

• jeżeli $a > \frac{1}{4}$

$1-4a < 0$, więc żeby $(1-4a)b^3$ było jak ~~największe~~ ~~najmniejsze~~ największe to b musi być jak najmniejsze dla $b=0$

$x = a^2$, czyli ~~dla a=1~~ największy element w $[0,1]$ to 1 $x=1$

inf(A)

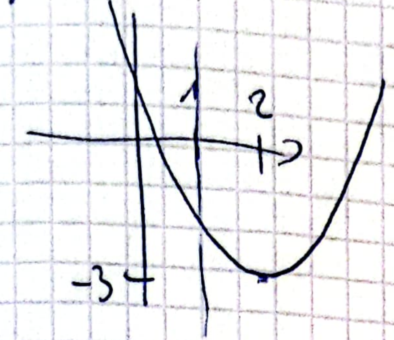
$(1-4a)b^3 + a^2$

· jeżeli $a < \frac{1}{4}$, więc aby $(1-4a)b^3$ było jak ~~największe~~ najmniejsze to b musi być jak najmniejsze. dla $b=0$

$x = a^2$ ← najmniejsze dla $a=0$

· jeżeli $a > \frac{1}{4}$ ~~to~~, więc aby $(1-4a)b^3$ było jak najmniejsze b musi być jak największe. dla $b=1$

$1-4a+a^2$



dla $a \in [0,1]$ malejąca ~~czyli~~

$x = 1-4+1 = -2$

Pokazaliśmy, że $\inf(A) = -2$ $\sup(A) = 1$

Takie samo będzie inf i sup gdy $a \neq 0$ i $b \neq 0$

Przyp., że istnieje ~~[illegible]~~ $\varepsilon > 0$ t. że $\forall_{x \in A / \{0,1\}}\ x < 1-\varepsilon$

Weźmy $x = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Wtedy: ~~$x > 1-\varepsilon$ bo~~

$x > 1 - \varepsilon$

$\Updownarrow$

$1 - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon$

$\Updownarrow$

$\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} > 0$

prawda, więc to też prawda bo przejścia były równoważne.

↯

analogicznie dla infimum

2. $\forall w > 0 : w^2 < 2 : \left(w + \frac{2 - w^2}{2 + w}\right)^2 < 2$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{2 - w^2 + 2w + w^2}{2 + w}\right)^2 < 2$$

$$\Updownarrow$$

$$4 \cdot \frac{(w+1)^2}{(2+w)^2} < 2 \qquad (w+1)^2 > 0$$

$$\Updownarrow \leftarrow \text{bo } (w+2)^2 > 0$$

$$2 \cdot (w+1)^2 < (2+w)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$2w^2 + 4w + 2 < 4 + 4w + w^2$$

$$\Updownarrow$$

$$w^2 < 2$$

$$\uparrow$$

prawda

$\square$