Zadanie 1a.

$$\begin{bmatrix}5 & 5 & 2 & 3\\ 7 & 7 & 2 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}35 & 35 & 14 & 21\\ 35 & 35 & 10 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}35 & 35 & 14 & 21\\ 0 & 0 & -4 & -21\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}70 & 70 & 28 & 42\\ 0 & 0 & 4 & 21\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}70 & 70 & 0 & -105\\ 0 & 0 & 4 & 21\end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix}2 & 2 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 4 & 21\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{4}\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + \frac{3}{2}x_4 \\ x_3 = -\frac{21}{4}x_4 \end{cases}$$

Czyli przestrzeń współczynników wszystkich równań liniowych, których rozwiązania zawierają $lin(\alpha, \beta)$ to $lin((-1, 1, 0, 0), (\frac{3}{2}, 0, -\frac{21}{4}, 1))$. W takim razie $lin(\alpha, \beta)$ można opisać przez:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ \frac{3}{2}x_1 - \frac{21}{4}x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Zadanie 1b.

Można wziąć układ z zadania 1a i wyrzucić równanie, które γ spełnia, czyli pierwsze. Czyli poniższe równanie opisuje przestrzeń V taką, że $\alpha, \beta \in V, \gamma \notin V$. Z twierdzenia Kroneckera-Capellego $dimV = 3$.

$$\frac{3}{2}x_1 - \frac{21}{4}x_3 + x_4 = 0$$

Zadanie 1c.

Układ który na pewno spełnia γ, to:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Tylko pierwsze z tych równań jest spełnione przez β i tylko pierwsze jest spełnione prze α. W takim razie poniży układ jest spełniony przez γ,a przez α i β nie jest.

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Niech W to będzie podprzestrzeń rozpięta przez ten układ. Wymiar tej przestrzeni to $4 - 2 = 2$.
Teraz sprawdzę, czy $lin(\alpha, \beta) \cap W = \{0\}$. Aby tak było, to jedynie 0 może spełniać poniższy układ równań.

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ \frac{3}{2}x_1 - \frac{21}{4}x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ \frac{3}{2}x_1 + 4x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = 0 \\ -x_4 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ \frac{3}{2}x_1 + 4x_1 = 0 \end{cases}$$

Czyli OK. W takim razie $W \oplus lim(\alpha, \beta) = \mathbb{R}^4$, bo w przecięciu jest tylko wektor zerowy i wymiary sumują się do 4.

Zadanie 2a.

Niech $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Wtedy warunek z treści zadania jest równoważny poniższemu:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \iff$$

$$a_0 - a_4 + (a_1 - a_3)x + (a_2 - a_2)x^2 + (a_3 - a_1)x^3 + (a_4 - a_1)x^4 = 0$$

Niech $v(x) = a_0 - a_4 + (a_1 - a_3)x + (a_2 - a_2)x^2 + (a_3 - a_1)x^3 + (a_4 - a_1)x^4$. Wtedy $v(x)$ z jednej strony musi zerować się w nieskończenie wielu miejscach, a z drugiej jego stopień to tylko 4, więc musi to być wielomian stale równy 0. W takim razie warunek jest równoważny z poniższym układem równań:

$$\begin{cases} a_0 = a_4 \\ a_1 = a_3 \end{cases}$$

W jest zamknięte na mnożenie przez sklar a, bo:

$$\begin{cases} a_0 = a_4 \\ a_1 = a_3 \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 \cdot a = a_4 \cdot a \\ a_1 \cdot a = a_3 \cdot a \end{cases}$$

W jest również zamknięte na dodawanie, bo:

$$\begin{cases} a_0 = a_4 \\ a_1 = a_3 \\ a_0' = a_4' \\ a_1' = a_3' \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 + a_0' = a_4 + a_4' \\ a_1 + a_1' = a_3 + a_3' \end{cases}$$

Zadanie 2b.

Oczywiście dla każdej pary (s, t) $w1, w2, w3 \in W$. Aby $w1, w2, w3$ były bazą, to muszą być liniowo niezależne. Tyle starcza, bo $dimW = 5 - 2 = 3$ z twierdzenia Kroneckera-Capellego.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 1 & t & 1 & t & 1 \end{bmatrix}$$

Ale wystarczy schodkować jedynie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & s \\ 1 & t & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & s \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix}$$

Czyli żeby te wektory były liniowo niezależne to $t \neq 0$ oraz $s \neq 0$

Zadanie 2c.

$w_1 = 1 + x^2 + x^4$, $w_2 = x^2$, $w_3 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, $v = x + 2x^2 + x^3$.
Tylko w_3 ma niezerowy współczynnik przy x^3, więc trzecia współrzedna to musi być 1. Czyli:

$$a_1w_1 + a_2w_2 = v - w_3 = -1 + x^2 - x^4$$

W takim razie pierwsza współrzędna musi być równa -1, a druga 2.

$$v = -w_1 + 2w_2 + w_3 = -1 - x^2 - x^4 + 2x^2 + 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

Współrzedne tego wielomianu w tej bazie to $(-1, 2, 1)$.

Zadanie 3.

Przypuśćmy, że $K \neq \mathbb{C}$, czyli $\mathbb{C} \subsetneq K$. W takim razie istnieje $a \in K \setminus \mathbb{C}$. Rozważmy przestrzeń $A = lin(1, a, a^2, a^3, \dots)$.
Pokażę, że $1, a, a^2, a^3, \dots$ są liniowo niezależne.
Niech $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \in \mathbb{C}$ oraz $a_{i_1}a^{i_1} + a_{i_2}a^{i_2} + \dots + a_{i_n}a^{i_n} = 0$.
Wtedy z zasadniczego twierdzenia algebry:

$$a_{i_1}a^{i_1} + a_{i_2}a^{i_2} + \dots + a_{i_n}a^{i_n} = x(a - x_{i_1})(a - x_{i_2}) \dots (a - x_{i_n}) = 0$$

Gdzie $x, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n} \in \mathbb{C}$. Ale wiadomo, że $a \neq x_{i_1}, a \neq x_{i_1}, \dots a \neq x_{i_n}$, bo $a \notin \mathbb{C}$, a $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n} \in \mathbb{C}$.
W takim razie $x = 0$, więc $a_{i_1} = a_{i_2} = \dots = a_{i_n} = 0$, czyli $dimA = \infty$.
Jako, że $A \subseteq K$, to $dimK \geqslant dimA = \infty$, ale z treści zadania $dimK \neq \infty$, sprzeczność.
W takim razie $K = \mathbb{C}$

Zadanie 4.

Wiadomo, że przecięcia W, U, V dają parami podprzestrzenie wymiaru 0.
W takim razie z twierdzenia Grassmanna:

$$dimX = dimV + dimW - 0 = dimU + dimW - 0$$

Czyli widać, że $dimV = dimU$.

Zadanie 5a.

Tak. Macierz $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ opisuje równania jednorodne opisujące podprzestrzeń $A \cap B$. Ze wzoru Grassmanna:

$$dim(V_A + V_B) = dimV_A + dimV_B - dim(V_A \cap V_B) \iff dim(V_A + V_B) - dimV_A - dimV_B = -dim(V_A \cap V_B)$$

Ale $-dim(V_A \cap V_B) = -(n - r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}) = r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} - n$, więc widać, że da się policzyć $r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ używając danych z zadania.

Zadanie 5b.

Nie. Weźmiemy $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A' = B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Wtedy:

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A' & B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Od razu widać, że rzędy macierzy $\begin{bmatrix} A' & B' \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ są różne, a wszystkie macierze A, B, A', B' opisują równania opisujące dokładnie tą samą podprzestrzeń. W takim razie dla tych samych $dimV_A, dimV_B, dim(V_A + V_B)$ mogą wyjść różne wyniki.

Zadanie 5c.

Można BSO założyć, że $r(A) \geqslant r(B)$ Ustalmy m, r_A i r_B. Niech $k \in \mathbb{Z}$ i $max(r_A, r_B) \leqslant k \leqslant min(r_A + r_B, m)$.
Weźmy macierz A taką, że pierwsze r_A wierszy jest liniowo niezależnych, a reszta jest zerowa.
Weźmy macierz B taką, że pierwsze $r_B - k + r_A$ wierszy oraz wiersze od r_{A+1} do k są wszystkie liniowo niezależne, a pozostałe są zerowe. Z poczynionych wyżej założeń wynika, że te macierze "mają sens".
Można zauważyć, że $r(A) = r_A$ i $r_B = r(B)$.
Macierz $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ ma rząd k, bo na pierwszych r_A pozycjach są wiersze liniowo niezależne nie mające na wszytkich pierwszych n pozycjach 0 oraz na pozycjach od r_{A+1} do k są wiersze liniowo niezależne mające na wszytkich pierwszych n pozycjach 0.