

Zadanie 1. Zbiory A, B są niepuste. Uzasadnij, że

3

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

Zadanie 2. Niech (F_n) będzie ciągiem Fibonacciego, $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla $n \geq 2$. Uzasadnij, że dla $m \geq n \geq 1$ zachodzi równość

$$F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = (-1)^n F_{m-n}.$$

1. ~~Przech.~~

$$\forall x \in A \cup B \quad x \leq \sup A \max\{\sup A, \sup B\} \quad \checkmark$$

• gdy $x \in A \quad x \leq \sup A \leq \max\{\sup A, \sup B\}$

• gdy $x \in B \quad x \leq \sup B \leq \max\{\sup A, \sup B\}.$

~~Przyjmie istnienie $\sup A$ i $\sup B$~~

bso. ~~Przyjmie~~ $\sup A \geq \sup B$ \checkmark

przypuśćmy, że istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $\forall x \in A \cup B \quad x \leq \max\{\sup A, \sup B\} - \varepsilon$ \checkmark

wtedy też $\forall x \in A \quad x \leq \sup A - \varepsilon$, czyli $\sup A - \varepsilon$ jest ~~supremum~~ $\sup A - \varepsilon$ zbioru A \checkmark

sprecyzacja \leq \checkmark

2.

$$F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = (-1)^n F_{m-n}$$

Indukcja ze względu na n

Baza dla $n=2$ i $n=1$ (lepiej $n=0, 1$)
Dla $n=2$

$$F_m F_3 - F_{m+1} F_2 = F_{m-2}$$

$$2F_m - (F_{m+1} + F_{m-1}) = F_{m-2}$$

$$2F_m - F_m - F_{m-1} = F_{m-2}$$

$$F_m - F_{m-1} = F_{m-2}$$

$$F_{m-1} + F_{m-2} - F_{m-1} = F_{m-2}$$

$$F_{m-2} = F_{m-2}$$

OK. działka

~~Ważne~~

dla $n=1$

$$F_m - F_{m+1} = -F_{m-1}$$

$$F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$$

OK działka

NA DRUGIEJ KARŹCE
CIĄG DALSZY

2. Zauważmy, że $F_m F_n - F_{m+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1} F_{m-n+1}$
 $F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = (-1)^n F_{m-n}$ dla $n \geq 2$

Pokazujemy, że $F_m F_{n+2} - F_{m+1} F_{n+1} = (-1)^{n+1} F_{m-n-1}$
 podstawiamy do poprzedniego

$$F_m (F_{n+1} + F_n) - F_{m+1} F_{n+1} = (-1)^{n+1} F_{m-n-1}$$

$$F_m F_{n+1} + F_m F_n - F_{m+1} F_{n+1} - F_{m+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{m-n-1}$$

$$F_m F_{n+1} + F_n F_m - F_{m+1} F_n - F_{m+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1} F_{m-n-1}$$

$$(-1)^n F_{m-n} + F_n F_m - F_{m+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1} F_{m-n-1}$$

$$(-1)^n F_{m-n} + F_{n+1} F_m + F_{n-2} F_m - F_m F_{n-1} - F_{m+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1} F_{m-n-1}$$

$$(-1)^n F_{m-n} + F_{n+1} F_m - F_{n-1} F_{n+1} = (-1)^{n+1} F_{m-n-1}$$

$$(-1)^n (F_{m-n-1} + F_{m-n-2}) - F_n F_m - F_{m+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1} F_{m-n-1}$$

$$(-1)^n F_{m-n-2} + 2(-1)^n F_{m-n-1} + F_m F_n - F_{m+1} F_{n-1} = 0$$

$$(-1)^{n+1} F_{m-n+1} + (-1)^{n+1} F_{m-n-1} + F_n F_m - F_{m+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1} F_{m-n-1}$$

$$(-1)^{n+1} F_{m-n+1} = F_{m+1} F_{n-1} - F_n F_m \quad T_{m,n-1}$$

co jest
 prawdziwe
 z założenia
 indukcyjnego

$$2(-1)^{n+1} F_{m-n+1} = F_{m+1} F_{n-1} - F_n F_m$$

p.k.

ATANAZY GAWRYSIAK