Zadanie 1a.

Rozwiązuję układ równań aby zoabczyć jak zapisują się wektory z bazy standardowej w tych wektorach które nam podano:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 2 & 0 & 0 & 4 & -18 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & -4 \end{array}\right]$$

Czyli w takim razie:

$$\varphi((1,0,0)) = 2(1,1,1) - (0,1,1) - (-1,-1,0) = (3,2,1)$$
$$\varphi((0,1,0)) = -9(1,1,1) + 2(0,1,1) + 6(-1,-1,0) = (-15,-13,-7)$$
$$\varphi((0,0,1)) = 6(1,1,1) - (0,1,1) - 4(-1,-1,0) = (10,9,5)$$

W takim razie można wpisać wektory do kolumn i wychodzi:

$$M_{St}^{St}(\varphi) = \begin{bmatrix} 3 & -15 & 10 \\ 2 & -13 & 9 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

Zadanie 1b.

$$\varphi((1,1,0)) = \varphi((1,0,0)) + \varphi((0,1,0)) = 2(1,1,1) - (0,1,1) - (-1,-1,0) - 9(1,1,1) + 2(0,1,1) + 6(-1,-1,0) =$$
$$= -7(1,1,1) + (0,1,1) + 5(-1,-1,0) = -\frac{17}{2}(1,1,0) - \frac{7}{2}(1,0,1) - \frac{5}{2}(0,1,1)$$
$$\varphi((1,0,1)) = \varphi((1,0,0)) + \varphi((1,0,0)) = 8(1,1,1) - 2(0,1,1) + 5(1,1,0) = 9(1,1,0) + 4(1,0,1) + 2(0,1,1)$$
$$\varphi((0,1,1)) = \varphi((0,1,0)) + \varphi((0,0,1)) = -3(1,1,1) + (0,1,1) - 2(1,1,0) = -\frac{7}{2}(1,1,0) - \frac{3}{2}(1,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1)$$

W takim razie po wstawieniu w kolumn:

$$M_A^A(\varphi) = \begin{bmatrix} -\frac{17}{2} & 9 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Zadanie 2a.

Dla dowolnych $X, Y \in M_{2x2}(\mathbb{C})$, $a \in \mathbb{C}$. Z własności mnożnenia macierzy przez skalar wynika:

$$f(aX) = A(aX) - (aX)A = a(AX - XA) = af(X)$$

Z rozdzielności mnożenia macierzy wynika:

$$f(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A = AX + AY - XA - YA = (AX - XA) + (AY - YA) = f(X) + f(Y)$$

W takim razie f istotnie jest przekształceniem liniowym.

Zadanie 2b.

$f(E_{11}) = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $f(E_{12}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $f(E_{21}) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $f(E_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
W takim razie można z tego łatwo odczytać współrzędne wektorów $f(E_{ij})$ i wpisać w kolumny macierzy.

$$M_B^B(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2c.

$im(f)$ na pewno jest rozpinane przez $(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22})$.
O razu widać, że lin$((f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$=lin$((f(E_{11}), f(E_{12}))$ oraz, że $((f(E_{11}), f(E_{12}))$ jest liniowo niezależne.
W takim razie baza $im(f)$ to $\{(f(E_{11}), f(E_{12})\}$, a jej wymiar to 2.

W takim razie baza $ker(f)$ musi mieć wymiar $4 - 2 = 2$.

$$f\Big(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\Big) = \begin{bmatrix} ix_{21} - x_{12} & i(x_{22} - x11) \\ x_{11} - x_{22} & x_{12} - ix21 \end{bmatrix}$$

Czyli aby $X \in ker(f)$ to musi zachodzić:

$$\begin{cases} x_{22} = x_{11} \\ x_{12} = ix_{21} \end{cases}$$

W takim razie bazą może być na przykład:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Zadanie 3a.

$(\Longrightarrow)$ Załóżmy, że f jest monomorfizmem. Możemy w takim razie zdefiniować funkcję odwrotną $g(\beta) = \alpha$, gdy $f(\alpha) = \beta$. W takim razie oczywiste jest, że $g \circ f = id_V$ i pozostaje jedynie sprawdzić, czy g jest liniowa.
Dla dowolnych $g(\beta_1) = \alpha_1$, $g(\beta_2) = \alpha_2$, $c \in K$ zachodzi $f(\alpha_1) = \beta_1$, $f(\alpha_2) = \beta_2$. Z liniowości f wynika, że $f(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_1 + \beta_2$ oraz, $f(c\alpha_1) = c\beta_1$ więc:

$$g(\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = f(\beta_1) + f(\beta_2)$$

$$g(c\alpha_1) = c \cdot \beta_1 = cg(\alpha_1)$$

Czyli rzeczywiście istnieje takie przekształcenie liniowe.

$(\Longleftarrow)$ Załóżmy, że istnieje przekształcenie liniowe g takie, że $g \circ f = id_V$.
Weźmy α, β takie, że $f(\alpha) = f(\beta)$. Wtedy:

$$\alpha = id_V(\alpha) = g(f(\alpha)) = g(f(\beta)) = id_V(\beta) = \beta$$

W takim razie f jest istotnie monomorfizmem.

Zadanie 3b.

($\Longrightarrow$) Weźmy dowolną funkcję g taką, że $g(\beta) = \alpha$, gdy $f(\alpha) = \beta$. Przynajmniej jedna taka funkcja istnieje i jest określona na całym W, bo f jest na W.
Z tej definicji od razu widać, że $f \circ g = id_W$. Pozostaje jedynie zobaczyć, czy g jest liniowa. Sprawdzenie tego przeprowadza się dokładnie tak jak w $3a$.

($\Longleftarrow$) Załóżmy, że istnieje przekształcenie liniowe g takie, że $f \circ g = id_W$.
Weźmy dowolne $\gamma \in W$.

$$\gamma = id_W(\gamma) = f(g(\gamma))$$

W takim razie f jest na, czyli jest istotnie epimorfizmem.

Zadanie 4a.

Kontrprzykład:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$A^2 = B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Ale oczywiście $A \neq B$ oraz $A \neq -B$.

Zadanie 4b.

Kontrprzykład:
$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Wtedy $r(A) = r(B) = 1$.
Ale oczywiście $r(A^2) = 0 \neq 1 = r(B^2)$ oraz $A \neq -B$.

Zadanie 4c.

Kontrprzykład taki sam jak w poprzednim podpunkcie.
Wtedy $r(BA) = 0$, ale $r(AB) = 1$.

Zadanie 4d.

Kontrprzykład taki sam jak w 4b.
Widać, że $r(BA) = 0$, ale $r(B) = r(A) = 1 \neq 0$.