

25e Załóżmy, że  $A \cup B = C$ . Chcemy pokazać, że  $C - B = A - B$

Wskazy

ATANAZY GALCZYSKI [3]

$$(\subseteq) C - B \subseteq A - B$$

Weźmy  $x \in C - B$ . Wtedy  $x \in C$  i  $x \notin B$ , czyli  $x \in A$ , bo  $A \cup B = C$ .

W takim razie  $x \in A - B$ , bo  $x \in A$  i  $x \notin B$ . jak od razu  $x \in A$ ?

$$(\supseteq) A - B \subseteq C - B$$

Weźmy  $x \in A - B$ . Wtedy  $x \in A$  i  $x \notin B$ . W takim razie  $x \in C$ , bo  $A \cup B = C$ . Czyli  $x \in C - B$ , bo  $x \in C$  i  $x \notin B$ .  $\square$

35. Teraz:  $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$  (1)

$(\Rightarrow)$  Załóżmy, że  $A \subseteq B$ . Chcemy pokazać, że  $P(A) \subseteq P(B)$

Weźmy  $Z \in P(A)$ . Wtedy  $Z \subseteq A$ , a  $A \subseteq B$ , więc  $Z \subseteq B$ .

Z tego wynika, że  $Z \in P(B)$ .  $\square$

$(\Leftarrow)$  Załóżmy, że  $P(A) \subseteq P(B)$ . Chcemy pokazać, że  $A \subseteq B$ .

Weźmy  $x \in A$ . Wtedy  $\{x\} \in P(A)$ , więc i  $\{x\} \in P(B)$ , bo  $P(A) \subseteq P(B)$ . W takim razie  $x \in B$ .  $\square$

Zadanie z zajęć:

Pokaż, że  $\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} A_t = \mathbb{R}$  dla  $A_t = (1 - \frac{1}{t}, 2 + \sqrt{t})$  (1)

$\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} A_t \subseteq \mathbb{R}$  jest oczywiste. Pozostało pokazać, że dla każdego

$x \in \mathbb{R}$  istnieje takie  $t$ , że  $x \in A_t$ .

1° Dla  $x \leq 1$  weźmy  $t = \frac{1}{|x|+2}$ , bo  $|x| > 0$  i  $2 > 0$

Wtedy  $A_t = (1 - |x| - 2, 2 + \sqrt{\frac{1}{|x|+2}})$ , czyli  $x \in A_t$ , bo

$$-|x| - 1 < -|x| - 2 \leq x < 2 + \sqrt{\frac{1}{|x|+2}}$$

2° Dla  $x > 1$  weźmy  $t = x^2$

Wtedy  $A_t = (1 - \frac{1}{x^2}, 2 + \sqrt{x^2})$ , czyli  $x \in A_t$ , bo

$$1 - \frac{1}{x^2} < 1 < x \leq \sqrt{x^2} < 2 + \sqrt{x^2}$$

$$\text{czyli } \mathbb{R} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} A_t \quad \square$$