Zadanie 1a.

$$lim_{x\to 0}\frac{sin(\pi cosx)}{xln(1+sinx)} = lim_{x\to 0}\frac{sin(\pi - \pi cosx)}{xln(1+sinx)}\cdot\frac{\pi-\pi cosx}{\pi-\pi cosx}\cdot\frac{sinx}{sinx}\cdot\frac{x}{x} =$$
$$lim_{x\to 0}\frac{sin(\pi(1-cosx))}{\pi(1-cosx)}\cdot\frac{\pi(1-cosx)}{x^2}\cdot\frac{sinx}{ln(1+six)}\cdot\frac{x}{sinx} = 1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{\pi}{2}$$

Korzystam z tego, że $lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx} = 1, lim_{x\to 0}\frac{x}{ln(1+x)} = 1, lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$ oraz z arytmetycznych własności granic.

Zadanie 1b.

Badanie granicy przy x zbiegającym do 0 od góry
Prawdą jest, że:
$$\frac{b}{x} - 1 \leqslant \left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{b}{x}$$
Więc można zapisać:
$$\frac{b}{a} \xleftarrow{x\to 0} \frac{b}{a} - \frac{x}{a} = \frac{x}{a}\left(\frac{b}{x} - 1\right) \leqslant \frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{x}{a}\cdot\frac{b}{x} = \frac{b}{a}$$
Czyli z twierdzenia o trzech funkcjach $lim_{x\to 0}\frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor = \frac{b}{a}$

Badanie granicy przy x zbiegającym do 0 od dołu
Prawdą jest, że:
$$\frac{b}{x} - 1 \leqslant \left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{b}{x}$$
Więc można zapisać pamiętając, że $\frac{x}{a}, \frac{b}{x} < 0$:
$$\frac{b}{a} \xleftarrow{x\to 0} \frac{b}{a} - \frac{x}{a} = \frac{x}{a}\left(\frac{b}{x} - 1\right) \geqslant \frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor \geqslant \frac{x}{a}\cdot\frac{b}{x} = \frac{b}{a}$$
Czyli z twierdzenia o trzech funkcjach $lim_{x\to 0}\frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor = \frac{b}{a}$

Czyli lewostronna granica jest równa prawostronnej, więc granica to po prostu $\frac{b}{a}$

Zadanie 2.

Przypuśćmy, że (a_n) nie jest zbiezny. Wtedy istnieje $limsup(a_n) > liminf(a_n)$.
W takim razie istnieją ciągi $n_k \neq n_l$ takie, że $a_{n_k} \to limsup(a_n)$ i $a_{n_l} \to liminf(a_n)$.
Weźmy ciąg (b_n), który na pozycjach n_k ma wartość $liminf(a_n) - limsup(a_n)$, a na pozostałych 0.
Widać, że $liminf(b_n) = liminf(a_n) - limsup(a_n) < 0$, bo $limsup(a_n) > liminf(a_n)$.
Wtedy z jednej strony
$$liminf(a_n + b_n) = limsup(a_n) + liminf(a_n) - limsup(a_n) = liminf(a_n)$$
a z drugiej z założnia z treści zadania:
$$liminf(a_n + b_n) = liminf(a_n) + liminf(b_n) = liminf(a_n) + liminf(a_n) - limsup(a_n)$$
. Czyli
$$liminf(a_n) + liminf(a_n) - limsup(a_n) = liminf(a_n) \iff limsup(a_n) = liminf(a_n)$$
Sprzeczność, czyli a_n jest istotnie zbieżny.

Zadanie 5.

Na wykładzie pokazywaliśmy, że $H_k - ln(k) \xrightarrow{k\to\infty} \gamma$, gdzie $\gamma \in \mathbb{R}$ i jest stałą Eulera.
W takim razie dla dostatecznie dużych k jeżeli H_k ma się zwiększyć o 1, to $ln(k)$ musi zwiększyć się o $1 \pm \varepsilon$.
Czyli k musi zwiekszyć $e^{1\pm\varepsilon}$ razy. W takim razie $\frac{k_{n+1}}{k_n} \to e$