

Zadanie 1. Zbiory  $A, B$  są niepuste. Uzasadnij, że

3

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

Zadanie 2. Niech  $(F_n)$  będzie ciągiem Fibonacciego,  $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  dla  $n \geq 2$ . Uzasadnij, że dla  $m \geq n \geq 1$  zachodzi równość

$$F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = (-1)^n F_{m-n}.$$

1. Przod.

$$\forall x \in A \cup B \quad x \leq \sup \max\{\sup A, \sup B\} \quad \text{bo} \quad \checkmark$$

\* gdy  $x \in A \quad x \leq \sup A \leq \sup \max\{\sup A, \sup B\}$

\* gdy  $x \in B \quad x \leq \sup B \leq \sup \max\{\sup A, \sup B\}$ .

~~Przypuszczenie, że  $\sup A > \sup B$~~

lbo. przypuszczenie  $\sup A \geq \sup B \quad \checkmark$

przypuszczenie istnieje  $\varepsilon > 0$  taki, że  $\forall x \in A \cup B \quad x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$

wtedy też  $\forall x \in A \quad x \leq \sup A - \varepsilon$ , czyli  $\sup A - \varepsilon$  jest supremum zbioru  $A - \varepsilon$  spłacałośc  $\checkmark$

$$2. F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = (-1)^n F_{n-m}$$

Indukcja ze względu na  $n$

Baza dla  $n=2$  i  $n=1$  (lepiej  $n=0, 1$ )

$$F_m F_3 - F_{m+1} \cancel{F_2} = +(-1)^1 F_{m-2}$$

$$2F_m - (F_{m+1} + F_{m-1}) = F_{m-2}$$

$$2F_m - F_m - F_{m-1} = F_{m-2}$$

$$F_m - F_{m-1} = F_{m-2}$$

$$F_{m-1} + F_{m-2} - F_{m-1} = F_{m-2}$$

$$F_{m-2} = F_{m-2}$$

OK. działa

TEOREM

dla  $n=1$

$$F_m - F_{m+1} = -F_{m-1}$$

$$F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$$

OK. działa

NA DRUGIEJ KARTCE  
CIAŁO DALSZI

$$\text{Założycie } \left\{ \begin{array}{l} F_m F_n - F_{m+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1} F_{m+n+1} \\ F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = (-1)^n F_{m+n-1} \end{array} \right. \text{ dla } n \geq 2$$

Ponownie, i.e.  $F_m F_{n+2} - F_{m+1} F_{n+1} = (-1)^{n+1} F_{m+n+1}$   
 przedstawiając równanie

$$F_m (F_{m+1} + F_n) - F_{m+1} F_{n+1} = (-1)^{n+1} F_{m+n+1}$$

$$\underbrace{F_m F_{m+1} + F_m F_n}_{(-1)^n F_{m+n}} - \underbrace{F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_{n+1}}_{(-1)^{n+1} F_{m+n+1}} = (-1)^{n+1} F_{m+n+1}$$

$$\underbrace{F_m F_{m+1} + F_n F_m}_{(-1)^n F_{m+n}} - \underbrace{F_{m+1} F_n - F_{m+1} F_{n-1}}_{(-1)^{n+1} F_{m+n-1}} = (-1)^{n+1} F_{m+n+1}$$

$$\underbrace{(-1)^n F_{m-n} + F_n F_m}_{(-1)^n F_{m+n}} - \underbrace{F_{m+1} F_{n-1}}_{(-1)^{n+1} F_{m+n-1}} = (-1)^{n+1} F_{m+n-1}$$

$$\underbrace{(-1)^n F_{m-n} + F_{m+1} F_m + F_{n-2} F_m}_{(-1)^n F_{m+n}} - \underbrace{F_m F_{n-1} - F_{m+1} F_{n-1}}_{(-1)^{n+1} F_{m+n-1}} = (-1)^{n+1} F_{m+n-1}$$

$$\underbrace{(-1)^n F_{m-n} + F_{m+2} F_m + F_{n-2} F_m}_{(-1)^n F_{m+n}} - \underbrace{F_{m+1} F_{n-1} - F_{m+1} F_{n-1}}_{(-1)^{n+1} F_{m+n-1}} = (-1)^{n+1} F_{m+n-1}$$

$$\underbrace{(-1)^n F_{m-n} + F_{m-n-2}}_{(-1)^{n+1} F_{m+n-2}} + \underbrace{F_{m+1} F_{n-1} - F_{m+1} F_{n-1}}_{(-1)^{n+1} F_{m+n-1}} = 0$$

$$\cancel{F_{m+1} F_{n-2}} + \cancel{(-1)^n F_{m-n-1}} + F_n F_m - F_{m+1} F_{n-1} = 0$$

$$\checkmark \quad (-1)^{n+1} F_{m-n+1} + (-1)^{n+1} F_{m-n-1} + F_n F_m - F_{m+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1} F_{m-n-1}$$

$$(-1)^{n+1} F_{m-n+1} = F_{m+1} F_{n-1} - F_n F_m \quad T_{m,n-1}$$

co jest  
przede  
z założenia  
indukcyjnego

$$? (-1)^{n-1} F_{m-n+1} = F_{m+1} F_n$$

p.h.

ATANASZ GAWRYSIAK

V