Zadanie 129.

Funkcji ze skónczonego zbioru do skończonego zbioru jest skończenie wiele, więc w szczególności $f : A \xrightarrow[na]{1-1} A$ jest skończenie wiele. Liczb naturalnych $n > 0$ jest nieskończenie wiele. W takim razie muszą istnieć takie $0 < n_1 < n_2$, że $f^{n_1} = f^{n_2}$. Czyli:

$$\forall_{x \in A} f^{n_1}(x) = f^{n_2}(x) = f^{n_2 - n_1}(f^{n_1}(x))$$

Zbiór wartości funkcji f^{n_1} to cały zbiór A, więc:

$$\forall_{y \in A} y = f^{n_2 - n_1}(y)$$

Zatem $f^{n_2 - n_1} = id_A$. Jako, że $n_1 < n_2$, to $n_2 - n_1 > 0$.

Zadanie 199a.

Prawdą jest, że $|X| \leqslant 2^{\beth}$, gdyż zbiór wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}$ ma moc $2^{\beth}$.
Niech $X' = \{A : A \subseteq [-1, 1]$ i $-1 \in A$ i $1 \in A\}$. Każdy zbiór $A \in X'$ będzie miał element największy (1) i najmiejszy (-1).
Moc zbioru X' to $2^{\beth}$, bo $|P((0, 1))| = 2^{\beth}$.
W takim razie $X' \subseteq X$, więc $2^{\beth} \leqslant |X|$.
W takim razie $2^{\beth} \leqslant |X| \leqslant 2^{\beth}$, czyli z twierdznia Cantora-Bernsteina $|X| = 2^{\beth}$.

Zadanie 199b.

Prawdą jest, że $\aleph_0 \leqslant |Y|$, bo istnieje oczywista injekcja z $\mathbb{Z}$ do Y (każdej liczbie $n \in \mathbb{Z}$ przypisujemy zbiór $\{n\} \in Y$, ma on minimum i maksimum równe n, jest to injekcja, bo dla swóch różnych n_1, n_2 dostaniemy różne zbiory $\{n_1\}, \{n_2\}$).
Pokazywliśmy na ćwiczeniach, że $|P_{fin}(\mathbb{Z})| = \aleph_0$ ($P_{fin}(\mathbb{Z})$ to zbiór wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{Z}$).
Każdy zbiór $A \in Y$ jest skończony, bo istnieje jedynie skończenie wiele liczb większych od ustalonego minimum i mniejszych od ustalonego maksimum. Czyli jeżeli $A \in Y$, to $A \in P_{fin}(\mathbb{Z})$, więc $Y \subseteq P_{fin}(\mathbb{Z})$.
W takim razie $\aleph_0 \leqslant |Y| \leqslant \aleph_0$, czyli z twierdznia Cantora-Bernsteina $|Y| = \aleph_0$.

Zadanie 199c.

Prawdą jest, że $|Z| \leqslant \beth$, gdyż zbiór wszystkich podzbiorów $\mathbb{Q}$ ma moc $\beth$.
Niech $Z' = \{A : A \subseteq [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ i $-1 \in A$ i $1 \in A\}$. Każdy zbiór $A \in Z'$ będzie miał element największy (1) i najmiejszy (-1).
W takim razie $Z' \subseteq Z$.
Moc zbioru Z' to $\beth$, bo moc zbioru liczb wymiernych z odcinka (-1, 1) to $\aleph_0$, więc moc zbioru wszystkich podzbiorów liczb wymiernych z odcinka $(-1, 1)$ to $\beth$.
W takim razie $\beth \leqslant |Z| \leqslant \beth$, czyli z twierdznia Cantora-Bernsteina $|Z| = \beth$.

Zadanie 212a.

Funkcja nierosnąca ma największy element, będzie on przyjmowany w 0.
Niech X_k to będzie zbiór wszystkich funkcji nierosnących z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ które mają największy element równy ustalonemu k.
W oczywisty sposób $|X_0| = 1$.

Dla każdego $k > 0$ prawdą jest, że $|X_k| \geqslant \aleph_0$, bo istnieje injekcja z $\mathbb{N}$ do X_k (każdemu $n \in \mathbb{N}$ przypisujemy funkcje przyjmującą k w liczbach niewiększych od n i 0 w liczbach większych od n, jest to injekcja, bo dla dwóch różnych n_1, n_2 funkcje im przypisane będą różniły się dla argumentu $max(n_1, n_2)$).

Dla każdego $k > 0$ prawdą jest, że $|X_k| \leqslant |\mathbb{N}^k| = \aleph_0$. Jest tak gdyż istnieje funkcja różnowartościowa F z X_k do $\mathbb{N}^k$. Funkcja F przypisuje funkcji f uporządkowany ciąg, który ma na i-tym miejscu najmniejszą liczbę dla której wartość funkcji f wynosi co najwięcej i. Jest to funkcja różnowartościowa, bo dla $f_1 \neq f_2$, dla których najmniejszy argument dla którego przyjmują inną liczbę to x, ciągi $F(f_1)$ i $F(f_2)$ będą różniły się na $min(f_1(x), f_2(x))$ pozycji.

W takim razie dla $k \geqslant 1$ zachodzi $\aleph_0 \leqslant |X_k| \leqslant \aleph_0$, czyli z twierdznia Cantora-Bernsteina $|X_k| = \aleph_0$.
Czyli jeżeli X to zbiór wszytkich funkcji nierosnących z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$, to:

$$|X| = |X_0| + |X_1| + |X_2| + \ldots = 1 + \aleph_0 + \aleph_0 + \ldots = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

Zadanie 212a.

Niech X to będzie zbiór wszytkich funkcji niemalejących z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$.
W oczywisty sposób $|X| \leqslant |\mathbb{N}^\mathbb{N}| = \beth$, bo $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$.
Również $|X| \geqslant |P(\mathbb{N})| = \beth$, bo istnieje funkcja różnowartościowa F z $P(\mathbb{N})$ do X. Funkcja F przypisuje zbiorowi A funkcję f, która jest zdefiniowana następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ jeżeli } x = 0 \text{ i } 0 \in A \\ 1, \text{ jeżeli } x = 0 \text{ i } 0 \notin A \\ f(x-1)+1, \text{ jeżeli } x \neq 0 \text{ i } x \in A \\ f(x-1), \text{ jeżeli } x \neq 0 \text{ i } x \notin A \end{cases}$$

W oczywisty sposób $f(x)$ jest niemalejąca.

F jest funkcją różnowartościową, bo dla zbiorów $A_1 \neq A_2$ i liczby x, która jest najmniejszą liczbą, która należy do dokładnie jednego z A_1 i A_2 $F(A_1)(x) \neq F(A_2)(x)$

W takim razie $\beth \leqslant |X_k| \leqslant \beth$, czyli z twierdznia Cantora-Bernsteina $|X_k| = \beth$.