Zadanie 1a.

$$\frac{n^2}{2^{2n+1}} - \frac{1}{n\pi^{n+1}} \leqslant 0 \iff n^3\pi^{n+1} \leqslant 4^{n+\frac{1}{2}}$$

Jest to prawdą dla dostatecznie dużych n, więc można zapisać:

$$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^{2n+1}} - \frac{1}{n\pi^{n+1}}\right|} = lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{-\frac{n^2}{2^{2n+1}} + \frac{1}{n\pi^{n+1}}}$$

$$\sqrt[n]{-\frac{n^2}{2^{2n+1}} + \frac{1}{n\pi^{n+1}}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{n\pi^{n+1}}} = \frac{1}{\pi}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{\frac{1}{\pi}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\pi}$$

$$\sqrt[n]{-\frac{n^2}{2^{2n+1}} + \frac{1}{n\pi^{n+1}}} \geqslant \sqrt[n]{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n\pi^{n+1}} + \frac{1}{n\pi^{n+1}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n\pi^{n+1}}} = \frac{1}{\pi}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{\frac{1}{2\pi}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\pi}$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dostatecznie dużych n, bo:

$$-\frac{n^2}{2^{2n+1}} \geqslant -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n\pi^{n+1}} \iff 2n^3\pi^{n+1} \leqslant 4^{n+\frac{1}{2}}$$

Więc z twierdzenia o trzech ciągach $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^{2n+1}} - \frac{1}{n\pi^{n+1}}\right|} = \frac{1}{\pi}$

Zadanie 1b.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{n}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}\right)$$

Niech $b_n = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{n}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}$, a $c_n = \sqrt{n}$. Wtedy $a_n = \frac{b_n}{c_n}$.

$$b_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+\cdots+\sqrt{n}} = n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Oczywiście również $lim_{n\to\infty}c_n = \infty$, więc z twierdzenia Stolza jeżeli istnieje granica $\frac{b_n-b_{n-1}}{c_n-c_{n-1}}$, to $lim_{n\to\infty}a_n = lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{c_n-c_{n-1}}$.

$$\frac{b_n-b_{n-1}}{c_n-c_{n-1}} = \frac{\frac{n}{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} = \frac{n(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{(n-(n-1))(1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})} = \frac{n(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}$$

Niech $d_n = n(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$ i $e_n = 1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$. Oczywiście d_n i e_n zbiegają do nieskończoności, więc z twierdzenia Stolza jeżeli istnieje granica $\frac{d_n-d_{n-1}}{e_n-e_{n-1}}$, to $lim_{n\to\infty}a_n = lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{c_n-c_{n-1}} = lim_{n\to\infty}\frac{d_n-d_{n-1}}{e_n-e_{n-1}}$.

$$\frac{d_n-d_{n-1}}{e_n-e_{n-1}} = \frac{n(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})-(n-1)(\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})}{\sqrt{n}} = \frac{n\sqrt{n}-n\sqrt{n-2}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}} =$$

$$= n - \frac{n\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 3$$

Tak jest, bo oczywiście $lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}} = 1$, a $lim_{n\to\infty}n - \frac{n\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}} = 1$, bo:

$$n - \frac{n\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}(\sqrt{n}-\sqrt{n-2}) = \frac{\sqrt{n}(n-(n-2))}{\sqrt{n}+\sqrt{n-2}} = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{n-2}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{1+1} = 1$$

W takim razie $lim_{n\to\infty}a_n = 3$.

Zadanie 1c.

Lemat 1. Jeżeli $x_n \to 0$ i $x_n \neq 0$, to $\frac{x_n}{ln(1+x_n)} \to 1$.

$$1 \leftarrow 1 + x_n = \frac{x_n}{\frac{x_n}{1+x_n}} \geqslant \frac{x_n}{ln(1+x_n)} \geqslant \frac{x_n}{x_n} = 1$$

Więc z twierdzenia o trzech ciągach $\frac{x_n}{ln(1+x_n)} \to 1$.
Lemat 2. Jeżeli $a > 0$, to $n(\sqrt[n]{a} - 1) \to lna$. $\sqrt[n]{a} - 1 \to 0$, więc z lematu 1:

$$n(\sqrt[n]{a} - 1) = n \cdot ln(\sqrt[n]{a}) \frac{\sqrt[n]{a} - 1}{ln(\sqrt[n]{a})} = lna \frac{\sqrt[n]{a} - 1}{ln(1 + \sqrt[n]{a} - 1)} \to lna \cdot 1$$

Lemat 3. $\frac{n}{2}(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2) \to \frac{ln(ab)}{2}$. Z lematu 2:

$$\frac{n}{2}(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2) = \frac{1}{2}(n(\sqrt[n]{a} - 1) + n(\sqrt[n]{b} - 1)) \to \frac{lna + lnb}{2} = \frac{ln(ab)}{2}$$

Korzystając z lematu 3 i tego, że $\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2}{2} \to 0$:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2}{2}\right)^n \to e^{\frac{ln(ab)}{2}} = \sqrt{ab}$$

Zadanie 2.

$$x \in \bigcap_{\alpha>0} \bigcup_{\beta>0} \bigcap_{n>\beta} (x_n - \alpha, x_n + \alpha) \iff \forall_{\alpha>0} \exists_{\beta>0} \forall_{n>\beta} x \in (x_n - \alpha, x_n + \alpha) \iff \forall_{\alpha>0} \exists_{\beta>0} \forall_{n>\beta} x_n - \alpha < x < x_n + \alpha \iff$$
$$\iff \forall_{\alpha>0} \exists_{\beta>0} \forall_{n>\beta} x - x_n < \alpha \wedge -x + x_n < \alpha \iff \forall_{\alpha>0} \exists_{\beta>0} \forall_{n>\beta} |x - x_n| < \alpha \iff x = lim_{n\to\infty} x_n \iff x \in \{g\}$$

Zadanie 3.

Pokażę, że $lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} b_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}) = \frac{1}{2} gh$.
Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wtedy dla dostatecznie dużych n:

$$\frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} b_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}) \geqslant \frac{1}{2} \frac{a_1(h-\varepsilon) + a_2(h-\varepsilon) + \cdots + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(h-\varepsilon)}{\frac{n}{2}} \geqslant \frac{(h-\varepsilon)}{2} \frac{a_1 + \cdots + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$$

Korzystając z tego że $lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = lim_{n\to\infty} a_n$, dla dostatecznie dużych n zachodzi:

$$\frac{(h-\varepsilon)}{2} \frac{a_1 + \cdots + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \geqslant \frac{(h-\varepsilon)(g-\varepsilon)}{2} = \frac{gh}{2} - \frac{(g+h)\varepsilon - \varepsilon^2}{2} = \frac{gh}{2} - \varepsilon'$$

Ale $\varepsilon' = \frac{(g+h)\varepsilon - \varepsilon^2}{2}$ może być dowolnie małe, bo $g + h$ to stała.
Analogicznie $\frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} b_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}) \leqslant gh + \varepsilon'$.W takim razie dla każdego $\varepsilon' > 0$:

$$gh - \varepsilon' \leqslant \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} b_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}) \leqslant gh + \varepsilon'$$

Czyli z definicji $lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} b_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}) = \frac{gh}{2}$.
Analogicznie $lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2} b_{\lfloor \frac{n+1}{2} + 1 \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3} b_{\lfloor \frac{n+1}{2} + 2 \rfloor} + \cdots + a_n b_1) = \frac{gh}{2}$.
Czyli $lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 b_n + \cdots + a_n b_1) = \frac{gh}{2} + \frac{gh}{2} = gh$.

Zadanie 5.

W oczywisty sposób $a_n > 0$. Jeżeli istnieje granica g to:

$$g = 2\sqrt{g} \iff g^g - 4g = 0 \iff g(g-4)$$

Czyli $g = 0$ lub $g = 4$.

Gdy $a_0, a_1 \geqslant 4$, to $a_n \geqslant 4$ i $a_n \leqslant 2\sqrt{max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}}$.
$a_n \leqslant 2\sqrt{max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}}$ jest oczywiste, a żeby pokazać, że $a_n \geqslant 4$ przeprowadzę indukcję.
Baza dla $n = 0$ i $n = 1$: $a_0, a_1 \geqslant 4$ OK
Załóżmy, że $a_n, a_{n-1} \geqslant 4$. Wtedy $a_{n+1} \geqslant \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$.
Czyli ten ciąg jest ograniczony i $a_n \leqslant 2\sqrt{max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}}$, więc musi być zbieżny. Nie może być zbieżny do zera, bo $a_n \geqslant 4$, czyli jego granica to 4.
Analogicznie można rozpatrzeć przypadek gdy $a_0, a_1 \geqslant 4$. Wtedy również granica będzie wynosiła 4, bo zajdzie $a_n \geqslant 2\sqrt{min\{a_{n-1}, a_{n-2}\}}$.
Gdy a_0 i a_1 są po różnych stronach 4, to dla pewnego k, będzie tak, że a_k i a_{k+1} będą po tej samej stronie i można wtedy przeprowadzić rozumawanie z powyższych dwóch przypadków.