

## Zadanie 80.

Funkcja  $f$  nie jest różnowartościowa, bo przyjmuje te same wartości dla różnych argumentów. Na przykład:

$$f(\langle\{1\}, \{1\}\rangle) = \{1\} - \{1\} = \emptyset = \{1\} - \{1\} = f(\langle\{2\}, \{2\}\rangle)$$

Funkcja  $f$  jest na  $P(\mathbb{N})$ , bo dla każdego  $A \in P(\mathbb{N})$  istnieje argument funkcji, dla którego  $A$  jest wartością:

$$A = A - \emptyset = f(\langle A, \emptyset \rangle)$$

$f(P(\text{Parz}) \times P_\infty(\mathbb{N})) = P(\text{Parz})$ , bo:  $(\subseteq) f(P(\text{Parz}) \times P_\infty(\mathbb{N})) \subseteq P(\text{Parz})$ , bo gdy  $C \in P(\text{Parz})$  i  $D \in P_\infty(\mathbb{N})$ , to  $f(\langle C, D \rangle) = C - D \subseteq C \in P(\text{Parz})$

$(\supseteq) f(P(\text{Parz}) \times P_\infty(\mathbb{N})) \supseteq P(\text{Parz})$ , bo gdy  $A \in P(\text{Parz})$ , to  $f(A, N) = A$ , gdzie  $N$  to zbiór wszystkich liczb nieparzystych.  $N \in P_\infty(\mathbb{N})$  oraz  $A \in P(\text{Parz})$  w oczywisty sposób.

$f^{-1}(\{\emptyset\}) = \{\langle A, B \rangle : A, B \in P(\mathbb{N}) \wedge A \subseteq B\}$ , bo:

$(\subseteq) f^{-1}(\{\emptyset\}) \subseteq \{\langle A, B \rangle : A, B \in P(\mathbb{N}) \wedge A \subseteq B\}$ , bo gdy  $\langle C, D \rangle \in f^{-1}(\{\emptyset\})$ , to  $f(\langle C, D \rangle) = C - D = \emptyset$ , czyli  $C \subseteq D$ . W takim razie  $\langle C, D \rangle \in \{\langle A, B \rangle : A, B \in P(\mathbb{N}) \wedge A \subseteq B\}$ .

$(\supseteq) f^{-1}(\{\emptyset\}) \supseteq \{\langle A, B \rangle : A, B \in P(\mathbb{N}) \wedge A \subseteq B\}$ , bo gdy  $\langle C, D \rangle \in \{\langle A, B \rangle : A, B \in P(\mathbb{N}) \wedge A \subseteq B\}$ , to  $f(\langle C, D \rangle) = C - D = \emptyset$ , więc  $\langle C, D \rangle \in f^{-1}(\{\emptyset\})$ .

## Zadanie 52.

Niech lewa strona tej równości to  $L$ , a prawa to  $P$ . Dowiodę, że  $L = P$ .

$(\subseteq)$  Załóżmy, że  $x \in L$ . Pokażę, że również  $x \in P$ .

$$x \in L \implies \exists_{s \in S} \forall_{t \in T_s} x \in A_t$$

Możemy w takim razie powiedzieć, że dla pewnego  $T_a$ :

$$\forall_{t \in T_a} x \in A_t$$

Z definicji  $K$  każdy zbiór  $Y \in K$  na pewno ma w sobie jeden z elementów  $T_a$  i dodatkowo  $K \neq \emptyset$ . Można więc zapisać:

$$\forall_{Y \in K} \exists_{t \in Y} t \in T_a \implies \forall_{Y \in K} \exists_{t \in Y} x \in A_t \implies x \in \bigcap_{Y \in K} \bigcup_{t \in Y} A_t \implies x \in P$$

$(\supseteq)$  Załóżmy, że  $x \in P$ . Pokażę, że również  $x \in L$ .

Przypuśćmy, że  $x \notin L$ . Wtedy:

$$x \notin \bigcup_{s \in S} \bigcap_{t \in T_s} A_t \iff \forall_{s \in S} \exists_{t \in T_s} x \notin A_t$$

Możemy w takim razie wziąć zbiór

$$B = \{t : x \notin A_t \wedge t \in T\}$$

Taki zbiór należy do  $K$ , bo z poprzedniego stwierdzenia ma z każdym ze zbiorów  $T_s$  co najmniej jeden wspólny element. W takim razie:

$$\forall_{t \in B} x \notin A_t \implies \exists_{Y \in K} \forall_{t \in Y} x \notin A_t \implies x \notin \bigcap_{Y \in K} \bigcup_{t \in Y} A_t \implies x \notin P$$

sprzeczność.

**Zadanie 134.**

1.( $\Rightarrow$ ) Załóżmy, że  $\Phi$  jest różnowartościowa. Pokażę, że  $\varphi$  jest na.

Weźmy  $y_0 \in C$ . Pokażę, że istnieje  $x_0 \in B$  takie, że  $\varphi(x_0) = y_0$ .

Jako, że  $\Phi$  jest różnowartościowa to  $\Phi(f) \neq \Phi(g)$ , gdy  $f \neq g$ .

W szczególności dla funkcji  $f_0$  i  $g_0$  takich, że:

$$f_0(y_0) \neq g_0(y_0) \wedge \forall_{y \in C - \{y_0\}} f_0(y) = g_0(y)$$

(takie funkcje istnieją, bo  $A$  ma co najmniej 2 elementy) funkcje  $\Phi(f_0)$  i  $\Phi(g_0)$  są różnowartościowe, czyli:

$$\exists_{x \in B} f_0(\varphi(x)) \neq g_0(\varphi(x))$$

Ale dla każdego  $x \in B$  takiego, że  $\varphi(x) \neq y_0$  jest  $f_0(\varphi(x)) = g_0(\varphi(x))$ . W takim razie musi istnieć  $x_0$ , dla którego  $\varphi(x_0) = y_0$ , żeby  $f_0 \neq g_0$ .

1.( $\Leftarrow$ ) Załóżmy, że  $\varphi$  jest na. Pokażę, że  $\Phi$  jest różnowartościowa.

Weźmy funkcje  $f_0, g_0 \in A^C$  takie, że  $f_0 \neq g_0$ . Pokażę, że  $\Phi(f_0) \neq \Phi(g_0)$ .

$$f_0 \neq g_0 \iff \exists_{y \in C} f_0(y) \neq g_0(y)$$

W takim razie niech  $y_0 \in C$  będzie taki, że  $f_0(y_0) \neq g_0(y_0)$ . Z faktu, że  $\varphi$  jest na  $C$  wynika, że istnieje  $x_0 \in B$  taki, że  $\varphi(x_0) = y_0$ . Czyli:

$$\exists_{x \in B} f_0(\varphi(x)) \neq g_0(\varphi(x)) \iff \Phi(f_0) \neq \Phi(g_0)$$

2.( $\Rightarrow$ ) Załóżmy, że  $\Phi$  jest na. Pokażę, że  $\varphi$  jest różnowartościowa.

Weźmy  $x_1, x_2 \in B$  takie, że  $x_1 \neq x_2$ . Pokażę, że  $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ .

Jako, że  $\Phi$  jest na, to w szczególności istnieje funkcja  $f_0$  taka, że  $\Phi(f_0)(x_1) \neq \Phi(f_0)(x_2)$ , bo  $A$  ma co najmniej 2 elementy. W takim razie  $f_0(\varphi(x_1)) \neq f_0(\varphi(x_2))$ , czyli  $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ .

2.( $\Leftarrow$ ) Załóżmy, że  $\varphi$  jest różnowartościowa. Pokażę, że  $\Phi$  jest na.

Weźmy  $g_0 \in A^B$ . Pokażę, że istnieje  $f_0 \in A^C$  takie, że  $\Phi(f_0) = g_0$ .

Niech  $f_0$  będzie taka, że:

$$\forall_{x \in B, y \in C} \varphi(x) = y \iff f_0(y) = g_0(x)$$

Jest to poprawne zdefiniowanie funkcji, gdyż  $\varphi$  jest różnowartościowa, więc maksymalnie jeden  $x$  spełnia  $\varphi(x) = y$ . Wtedy:

$$\forall_{x \in B} g(x) = f_0(y) = f_0(\varphi(x)) = \Phi(f_0)(x)$$