

TFG Borrador

Jorge Angulo

June 30, 2020

Chapter 1

Introducción a semigrupos numéricos

Los semigrupos, en particular los semigrupos numéricos son uno de los conceptos fundamentales de este trabajo y por ello, en este capítulo realizaremos una introducción de algunos de los conceptos más básicos sobre semigrupos.

Definición 1: Un semigrupo es un par $(S, +)$, donde S es un conjunto y $+$ es una operación binaria y asociativa en S .

Además, en este trabajo consideraremos que, siempre que no se especifique lo contrario, dicha operación es conmutativa. En general denotaremos por S a los semigrupos conmutativos (omitiendo también la operación en la notación)

Este capítulo trata principalmente con los semigrupos numéricos. Es decir, semigrupos cuyos elementos son números naturales y donde la operación $+$ es la suma habitual.

Ejemplos:

- Los números naturales con la suma habitual $(\mathbb{N}, +)$ son un semigrupo.
- Dado $A \subset \mathbb{N}$, podemos definir un semigrupo $S = \{a + b \mid a, b \in A\}$ que denotaremos $\langle A \rangle$. Por ejemplo, dado el conjunto $A = \{3, 7\}$ obtenemos el semigrupo $S = \{3, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 17, \dots\}$.
- También podemos ver un ejemplo usando la librería "NumericalSgps" para el sistema GAP:

```
gap> s1 := NumericalSemigroup("generators",7,11,15);
<Numerical semigroup with 3 generators>
gap> SmallElementsOfNumericalSemigroup(s1);
[ 0, 7, 11, 14, 15, 18, 21, 22, 25, 26, 28, 29, 30, 32, 33, 35, 36, 37, 39 ]
```

Este último semigrupo es el semigrupo generado por un subconjunto. Para semigrupos como este, usaremos la notación: $\{3, 6, 7, 9, 10, 12, \rightarrow\}$ para indicar que a partir de el último elemento antes de la flecha, todo los números naturales mayores que este están en el semigrupo.

En general podemos definir el semigrupo generado por un subconjunto como:

Definición 2: Dado un semigrupo S y $A \subset S$ podemos definimos el semigrupo generado por dicho subconjunto cómo $\langle A \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N} \text{ and } a_1, \dots, a_n \in A\}$. Dado $S' = \langle A \rangle$, decimos que A es un sistema de generadores de S' , y que es un sistema minimal si ningún subconjunto propio del mismo genera el semigrupo completo.

Definición 3: Dados dos semigrupos X, Y , un homomorfismo entre X y Y es una aplicación $f : X \rightarrow Y$ que verifica la siguiente propiedad:

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \quad \forall a, b \in X$$

Decimos que dicho homomorfismo es un isomorfismo si la aplicación es biyectiva, monomorfismo si es inyectiva y epimorfismo si es sobreyectiva.

Definición 4: Dado un semigrupo numérico S y un elemento $n \in S \setminus \{0\}$, el conjunto de Apéry asociado a un subconjunto se define como:

$$Ap(S, n) = \{s \in S \mid s - n \notin S\}$$

Ejemplo: Para el semigrupo anterior: $S := \langle 3, 7 \rangle$, podemos calcular el grupo de Apéry usando la definición:

- $Ap(S, 3) = \{0, 3, 14\}$
- $Ap(S, 7) = \{0, 3, 7, 13, 16, 18, 19\}$

Lema 1: Dado S un semigrupo y denotando $S^* = S \setminus \{0\}$, entonces $S^* \setminus (S^* + S^*) = \{s \in S^* \mid \nexists x, y \in S^* : s = x + y\}$ es un sistema de generadores de S . De echo, todo sistema de generadores contiene a este conjunto:

Demostración: Dado $s \in S^*$, si $s \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$ entonces $\exists x, y \in S^*$ tales que $x + y = s$. Iterando este razonamiento sobre x e y un número finito de veces obtendremos una descomposición $s = s_1 + \dots + s_n$ donde $s_i \in S^*$, $i \in \{1, \dots, n\}$. El proceso es finito, pues $x < s$, $y < s$. Esto demuestra que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es un sistema de generadores.

Dado, un sistema de geradores de S , si tomamos $x \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$, entonces existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \dots, a_n \in A$ tales que $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$. Como $x \notin (S^* + S^*)$, entonces existe $i \in \{1, \dots, n\} \mid x = a_i$.

Lema 2: Dado n un elemento distinto de cero del semigrupo S , podemos caracterizar el conjunto de Apéry $Ap(S, n)$ como $\{0 = w(0), w(1), \dots, w(n-1)\}$, donde $w(i) = \min_{\alpha \in S} \{\alpha = i \pmod{n}\} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Demostración: La demostración sigue del hecho que, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $k \cdot n + i \in S, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Del lemma anterior, tenemos que el cardianal de $Ap(S, n)$ es n

Lema 3: Dado un semigrupo numérico S y $n \in S$, tenemos que, para todo $s \in S$, existe un único par $(k, w) \in \mathbb{N} \times Ap(S, n)$ tal que:

$$s = k \cdot n + w$$

Demostración: La demostración sigue del lema anterior:

$s = i \pmod{n}$ para cierto $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, luego $s = w(i) + k \cdot n$ para un cierto $k \in \mathbb{N}$ y donde $w(i)$ es como en el lema anterior.

En particular, este lema dice que: $\langle Ap(S, n) \cup \{n\} \rangle = S$

Teorema 4: Todo semigrupo admite un sistema minimal de generadores. Dicho sistema minimal de generadores es finito.

Demostración: Sigue de los lemas 1 y 3. El lema 1 nos dice que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es un sistema minimal de generadores

y el lema 3 que $\forall n \in S^*$, $S = \langle Ap(S, n) \cup \{n\} \rangle$. Dado que $\langle Ap(S, n) \cup \{n\} \rangle$ es finito, $S^* \setminus (S^* + S^*)$ también lo es.

Definición 5: Dado un semigrupo numérico S con el siguiente sistema minimal de generadores: $\{n_1 < n_2 < \dots < n_p\}$, definimos:

- n_1 como **multiplicidad de S** , que denotaremos por $m(S)$
- p como **dimensión embebida** del semigrupo S (en Inglés, "*embedding dimension*"). La denotaremos por $e(S)$

Proposición 1: Dado S un semigrupo numérico, tenemos que:

- $m(S) = \min(S \setminus \{0\})$
- $e(S) \leq m(S)$

Demostración: La primera afirmación es simplemente la multiplicidad es el menor de los elementos de S , lo cual sigue del hecho que la multiplicidad es el menor de los generadores.

La segunda afirmación viene del hecho de que $\{m(S)\} \cup Ap(S, m(S)) \setminus \{0\}$ es un sistema de generadores de S (dado por lema 3) y de cardinal $m(S)$ (lema 2). Todo sistema minimal de generadores deberá, por tanto tener como mucho $m(s)$ elementos.

Definición: Dado un semigrupo numérico S , llamamos al mayor entero que no está en S *Número de Fröbenius* de S y se denota por $F(S)$.

Definición: Los huecos de S (gaps en inglés) son el conjunto $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$. La cardinalidad de dicho conjunto se llama *genus* o *grado de singularidad* de S y se denota por $g(S)$.

Ejemplo: Podemos calcular los huecos y el número de Fröbenius usando GAP:

```
gap> s1 := NumericalSemigroup("generators",3,5,7);
<Numerical semigroup with 3 generators>
gap> GapsOfNumericalSemigroup(s1);
[ 1, 2, 4 ]
gap> FrobeniusNumber(s1);
4
gap> Genus(s1);
3
```

Aunque en general no se puede dar una formula para calcular el conjunto de huecos o el número de Fröbenius, si se conoce el conjunto de Apéry se pueden dar formulas en función de este para calcularlos:

Proposición: Dado un semigrupo numérico S y $n \in S^*$ tenemos que:

- $F(S) = (\max Ap(S, n)) - n$
- $g(S) = \frac{1}{n} (\sum_{w \in Ap(S, n)} w) - \frac{n-1}{2}$

Demostración:

Queremos ver que si $x > (\max Ap(S, n)) - n$, $x \in S$. Por definición de $Ap(S, n)$, $(\max Ap(S, n)) - n \notin S$. Dado $x > (\max Ap(S, n)) - n \Rightarrow x + n > (\max Ap(S, n))$. Por el lema 2, existe $w \in Ap(S, n)$ tal que es congruente con x modulo n . Como $w < x + n$, existe un entero positivo k tal que $w + n \cdot k = x + n$ y por tanto $x - n = w + (k - 1) \cdot n$

pertenece a S

Para la segunda afirmación, nos basamos en el lema 2 y la notación asllí usada. Sabemos que para cada $w \in Ap(S, n)$ congruente con i modulo n , con $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\exists k_i \in \mathbb{N}$ tal que $w = k_i \cdot n + i$. Es decir, que:

$$Ap(S, n) = \{w(0) = 0, w(1) = k_1 \cdot n + 1, \dots, w(i) = k_i \cdot n + i, \dots, w(n-1) = k_{n-1} \cdot n + n - 1\}$$

Cualquier entero x congruente con $w(i)$ modulo n pertenece a S si y solo si $w(i) \leq x$. En otras palabras hay k_i enteros no negativos congruentes con i modulo n que no están en el semigrupo. Por tanto:

$$g(S) = k_1 + \dots + k_{n-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n \cdot k_i + i) - \frac{n-1}{2} = \frac{1}{n} \sum_{w \in Ap(S, n)} (w) - \frac{n-1}{2}$$