Contents

1 Physikalische Größen und Einheiten

1.1 Umrechnungen in SI-Einheiten

$$\text{Kraft} F = kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$$

$$\text{Arbeit} W = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m = kg \cdot \frac{m^2}{s^2} = J$$

$$\text{Leistung} P = \frac{kg \cdot m^2}{s^3} = W$$

$$\text{Spannung} U = \frac{kg \cdot m^2}{s^2 \cdot As} = \frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3} = V$$

$$\text{Kapazität} C = \frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^2} = \frac{C}{V} = \frac{As}{V} = F$$

$$\text{Geschwindigkeit} v = \frac{m}{s}$$

$$\text{Beschleunigung} a = \frac{m}{s^2}$$

1.2 Messunsicherheit Typ A

Arithmetischer Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$\bar{x}$: Mittelwert der Messwerte [Einheit wie x_i], x_i: Einzelne Messwerte, N: Anzahl der Messungen

Standartabweichung eines Messwertes

$$\Delta x = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

Δx: Standardabweichung [Einheit wie x_i], x_i: Einzelne Messwerte, $\bar{x}$: Mittelwert, N: Anzahl der Messwerte

Standartabweichung des Mittelwertes

$$\Delta \bar{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{N}}$$

$\Delta\bar{x}$: Standardabweichung des Mittelwertes, Δx: Standardabweichung [Einheit wie x_i], N: Anzahl der Messwerte

Darstellung der Messgröße x

$$x_p = \bar{x} \pm t_p \cdot \Delta x$$

$$x_p = \bar{x} \pm U_a(x)$$

x_p: Messgröße, $\bar{x}$: Mittelwert, t_p: Vertrauensfaktor, Δx: Standardabweichung, $U_a(x)$: erweiterte Unsicherheit

1.3 Messunsicherheit Typ B

Unsicherheiten, welche nicht durch Wiederholungsmessungen ermittelt werden.
Die Messunsicherheit ist angegeben

1.3.1 Ermittlung des kombinierten Unsicherheit

Wenn Typ A und Typ B vorliegen

$$U_{\text{mess}} = \sqrt{U_A^2(x) + U_{B_1}^2(x) + U_{B_2}^2(x) + \ldots}$$

U_{mess}: Gesamte kombinierte Unsicherheit, $U_A(x)$: Unsicherheit Typ A, $U_{B_i}(x)$: Unsicherheit Typ B

2 Verschiebung, Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsbetrag

Verschiebung

$$\Delta x = x_E - x_A$$

Δx: Verschiebung [m], x_E: Endposition [m], x_A: Anfangsposition [m]

Mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$\bar{v_x}$: Mittlere Geschwindigkeit [m/s], Δx: Weg [m], Δt: Zeitintervall [s]

Momentangeschwindigkeit

$$v_x = \frac{x}{t} = \dot{x}(t)$$

v_x: Momentangeschwindigkeit [m/s], x: Position [m], t: Zeit [s], $\dot{x}(t)$: Ableitung von $x(t)$ nach der Zeit

3 Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Der mittlere Geschwindigkeitsbetrag (speed) $\bar{v}_x$ ist definiert als zurückgelegte Strecke s geteilt durch die benötigte Zeit Δt:

$$\bar{v}_x = \frac{s}{\Delta t}$$

$\bar{v}_x$: Mittlere Geschwindigkeit [m/s], s: Strecke [m], Δt: Zeitintervall [s]

Die mittlere Beschleunigung $\bar{a}_x$ ist definiert als Änderung der Geschwindigkeit v_x pro Zeiteinheit Δt:

$$\bar{a}_x = \frac{v_{xE} - v_{xA}}{\Delta t}$$

$\bar{a}_x$: Mittlere Beschleunigung [m/s²], v_{xE}: Endgeschwindigkeit [m/s], v_{xA}: Anfangsgeschwindigkeit [m/s], Δt: Zeit [s]

4 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$
$$v_x(t) = v_{x0} + a_x t$$
$$a_x(t) = a_x$$

$x(t)$: Position zur Zeit t [m], x_0: Anfangsposition [m], v_{x0}: Anfangsgeschwindigkeit [m/s], a_x: konstante Beschleunigung [m/s²], t: Zeit [s]

5 Bewegung in zwei und drei Dimensionen

$$\begin{aligned} r(t) &= x(t)\vec{e_x} + y(t)\vec{e_y} \\ &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$r(t)$: Ortsvektor [m], $x(t), y(t)$: Komponenten der Position [m], $\vec{e_x}, \vec{e_y}$: Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \Delta\vec{r}(t) &= \vec{r_E}(t) - \vec{r_A}(t) \\ &= \begin{pmatrix} x_E(t) - x_A(t) \\ y_E(t) - y_A(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Delta\vec{r}(t)$: Verschiebungsvektor [m], $\vec{r_E}(t)$: Endposition, $\vec{r_A}(t)$: Anfangsposition

Mittlere Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$\vec{v}$: Mittlere Geschwindigkeit [m/s], $\Delta\vec{r}$: Verschiebung [m], Δt: Zeitintervall [s]

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e_x} + y(t)\vec{e_y} + z(t)\vec{e_z}$$
$$= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

z.B.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ z_0 + v_{z0}t + \frac{1}{2}a_z t^2 \end{pmatrix}$$

$\vec{r}(t)$: Ortsvektor [m], x_0, y_0, z_0: Anfangskoordinaten [m], v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}: Anfangsgeschwindigkeiten [m/s], a_x, a_y, a_z: Beschleunigungen [m/s²], t: Zeit [s]

5.1 Der schräge Wurf

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x0}t \\ y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

$\vec{r}(t)$: Ortsvektor [m], v_0: Anfangsgeschwindigkeit [m/s], α: Abwurfwinkel, g: Erdbeschleunigung [m/s²], t: Zeit [s], y_0: Anfangshöhe [m]

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$y(t)$: Höhe zur Zeit t [m], y_0: Anfangshöhe [m], v_0: Anfangsgeschwindigkeit [m/s], α: Winkel, g: Erdbeschleunigung [m/s²], t: Zeit [s]

$$y(x) = y_0 + v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2$$

$y(x)$: Höhe in Abhängigkeit vom horizontalen Ort x [m], y_0: Anfangshöhe [m], v_0: Anfangsgeschwindigkeit [m/s], α: Winkel, g: Erdbeschleunigung [m/s²], x: horizontale Entfernung [m]

6 Die Newtonschen Axiome

$$F = m \cdot a$$

F: Kraft [N], m: Masse [kg], a: Beschleunigung [m/s²]

6.1 Das erste Newtonsche Axiom: Das Trägheitsgesetz

$$\vec{a} = 0 \quad \text{falls} \quad \vec{F} = 0$$

$\vec{a}$: Beschleunigung [m/s²], $\vec{F}$: resultierende Kraft [N]

6.2 Das zweite Newtonsche Axiom

(lex secunda oder Aktionsprinzip). Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der resultierenden Kraft, die auf einen Körper wirkt.

Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$\vec{p}$: Impuls [kg·m/s], m: Masse [kg], $\vec{v}$: Geschwindigkeit [m/s]

$$\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$$

$\sum_i \vec{F}_i$: Summe der Kräfte auf einen Körper [N], m: Masse [kg], $\vec{a}$: Beschleunigung [m/s²]

$$m = \frac{m_{\text{Ruhe}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

m: relativistische Masse [kg], m_{Ruhe}: Ruhemasse [kg], v: Geschwindigkeit [m/s], c: Lichtgeschwindigkeit [m/s]

Gravitationskraft

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

F_G: Gravitationskraft [N], G: Gravitationskonstante [m³/kg·s²], m_1, m_2: Massen der Körper [kg], r: Abstand [m]

6.3 Das dritte Newtonsche Axiom

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$\vec{F}_{12}$: Kraft von Körper 1 auf 2 [N], $\vec{F}_{21}$: Gegenkraft von 2 auf 1 [N]

7 Kontaktkräfte und weitere Arten von Kräften

Gewichtskraft F_G

$$F_G = m \cdot g$$

F_G: Gewichtskraft [N], m: Masse [kg], g: Erdbeschleunigung [m/s²]

Normalkraft F_N (Immer senkrecht zum Untergrund)

$$F_N = F_G$$

F_N: Normalkraft [N], F_G: Gewichtskraft [N]

Reibungskraft F_R

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

F_R: Reibungskraft [N], μ: Reibungskoeffizient, F_N: Normalkraft [N]

Hangabtriebskraft F_H

$$F_H = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

F_N wird kleiner

$$F_N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

F_H: Hangabtriebskraft [N], F_N: Normalkraft [N], m: Masse [kg], g: Erdbeschleunigung [m/s²], α: Neigungswinkel

Federkraft

$$F_{\text{Zug}} = K_F \cdot x$$

$$F_{\text{Feder}} = -K_F \cdot x$$

F_{Zug}: Zugkraft an der Feder [N], F_{Feder}: Rückstellkraft der Feder [N], K_F: Federkonstante [N/m], x: Auslenkung [m]

Zentripetalkraft $\vec{F}_{ZP}$

$$\vec{F}_{ZP} = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$\vec{F}_{ZP}$: *Zentripetalkraft [N], m: Masse [kg],* ω: *Winkelgeschwindigkeit [rad/s],* $\vec{r}$: *Radiusvektor [m], v: Bahngeschwindigkeit [m/s]*

Luftwiderstandskraft

$$F_W = \frac{1}{2} c_W \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

Vereinfacht

$$F_W = b \cdot v^2$$

F_W: *Luftwiderstand [N],* c_W: *Widerstandsbeiwert,* ρ: *Dichte der Luft [kg/m³], A: Querschnittsfläche [m²], v: Geschwindigkeit [m/s], b: Reibungskoeffizient [kg/m]*

7.1 Trägheits- und Scheinkräfte

Trägheitskraft

$$\vec{F}_T = -m \cdot \vec{a}_B$$

$\vec{F}_T$: *Trägheitskraft [N], m: Masse [kg],* $\vec{a}_B$: *Beschleunigung des Bezugssystems [m/s²]*

Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_{ZF} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r} = -\vec{F}_{ZP}$$

$\vec{F}_{ZF}$: *Zentrifugalkraft [N], m: Masse [kg],* ω: *Winkelgeschwindigkeit [rad/s],* $\vec{r}$: *Radiusvektor [m]*

Corioliskraft

$$\vec{F}_{\text{Cor}} = 2m\,\vec{v} \times \vec{\omega} = 2m\,\|\vec{v}\|\|\vec{\omega}\|\sin(\vec{v};\vec{\omega})$$

$$\vec{a}_{\text{Cor}} = 2 \cdot \vec{v}_0 \times \vec{\omega}$$

$\vec{F}_{\text{Cor}}$: *Corioliskraft [N], m: Masse [kg],* $\vec{v}$: *Geschwindigkeit [m/s],* $\vec{\omega}$: *Winkelgeschwindigkeit [rad/s]*

8 Der Massenmittelpunkt

Drehmoment $\vec{M}$

$$\vec{M} = r \cdot \vec{F}$$

$\vec{M}$: *Drehmoment [Nm], r: Hebelarm [m],* $\vec{F}$: *angreifende Kraft [N]*

Statisches Problem

$$\sum F_i = 0$$

$$\sum M_i = 0$$

$\sum F_i$: *Summe aller Kräfte [N]*, $\sum M_i$: *Summe aller Momente [Nm]*

Massenmittelpunkt X_s bei 2 Teilchen

$$X_s = \frac{X_1 \cdot m_1 + X_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

X_s: *Schwerpunkt [m]*, X_1, X_2: *Positionen der Massen [m]*, m_1, m_2: *Massen [kg]*

Für n Teilchen gilt

$$X_S = \frac{1}{m_{\text{ges}}} \sum m_i \cdot \vec{r}_i$$

X_S: *Massenmittelpunkt [m]*, m_i: *Masse des Teilchens [kg]*, $\vec{r}_i$: *Ort des Teilchens [m]*, m_{ges}: *Gesamtmasse [kg]*

Für ∞ Teilchen gilt

$$X_S = \frac{1}{m_{\text{ges}}} \int \vec{r}\, dm$$

X_S: *Massenmittelpunkt [m]*, $\vec{r}$: *Ortselement [m]*, m_{ges}: *Gesamtmasse [kg]*

9 Arbeit und kinetische Energie

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\vec{F}; \vec{s})$$

W: *Arbeit [J]*, $\vec{F}$: *Kraft [N]*, $\vec{s}$: *Weg [m]*, $\cos(\vec{F}; \vec{s})$: *Winkel zwischen Kraft und Weg*

Reibungsarbeit W_r

$$W_r = F_r \cdot \Delta x = \mu F_N \cdot \Delta x$$

W_r: *Reibungsarbeit [J]*, F_r: *Reibungskraft [N]*, μ: *Reibungskoeffizient*, F_N: *Normalkraft [N]*, Δx: *Weg [m]*

Hubarbeit W_H

$$W_H = m \cdot g \cdot h$$

$$E_{\text{Pot}} = W_{\text{Pot}} = mgh$$

W_H: *Hubarbeit [J]*, E_{Pot}: *Potentielle Energie [J]*, m: *Masse [kg]*, g: *Erdbeschleunigung [m/s²]*, h: *Höhe [m]*

Beschleunigungsarbeit W_B

$$W_B = F_B \cdot \Delta x = m \cdot a \cdot \Delta x = \frac{1}{2} m v^2$$

W_B: Beschleunigungsarbeit [J], F_B: Beschleunigende Kraft [N], Δx: Weg [m], m: Masse [kg], a: Beschleunigung [m/s²], v: Geschwindigkeit [m/s]

Gesamtenergie bei geschlossenen Wegen (konservative Kräfte)

$$W_{\text{ges}} = 0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

W_{ges}: Gesamtarbeit über geschlossene Bahn [J], $\vec{F}$: Kraft [N], $d\vec{s}$: Wegdifferenzial [m]

10 Verrichtete Arbeit bei geradliniger Bewegung mit ortsabhängiger Kraft

Einzelne Teilmengen

$$dW_i = F_i \cdot ds_i$$

dW_i: Infinitesimale Arbeit [J], F_i: Kraft entlang des Wegs [N], ds_i: Wegdifferenzial [m]

Gesamte Arbeit zwischen S_1 und S_2

$$W = \int_{S_1}^{S_2} F(s)\, ds$$

W: Arbeit [J], $F(s)$: ortsabhängige Kraft [N], s: Weg [m]

11 Leistung

Die Energieänderung eines Körpers pro Zeiteinheit heißt Leistung P

$$P = \frac{\text{Verrichtete Arbeit}}{\text{Zeit}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt$$

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = P$$

P: Leistung [W], $\vec{F}$: Kraft [N], $\vec{v}$: Geschwindigkeit [m/s], t: Zeit [s]

12 Energieerhaltung

Allgemeiner Energieerhaltungssatz:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{mech}} + E_{\text{wärme}} + E_{\text{chem}} + E_{\text{andere}} = \text{konstant}$$

Mechanischer Energieerhaltungssatz:

$$E_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^{n} E_{\text{Pot},i} + \sum_{i=1}^{n} E_{\text{Kin},i} = \text{konstant}, \quad \text{wenn } \vec{F}_{\text{ext}} = 0$$

$$E_{\text{Pot}} = m \cdot g \cdot h$$

$$E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

E_{ges}: Gesamte mechanische Energie [J], E_{Pot}: Potentielle Energie [J], E_{Kin}: Kinetische Energie [J], m: Masse [kg], g: Erdbeschleunigung [m/s²], h: Höhe [m], v: Geschwindigkeit [m/s]

13 Impuls und Impulserhaltung

Der Impuls $\vec{p}$ einer Masse ist definiert als das Produkt aus der Masse m und ihrer Geschwindigkeit $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$\vec{p}$: Impuls [kg·m/s], m: Masse [kg], $\vec{v}$: Geschwindigkeit [m/s]

Impulserhaltungssatz:

$$\vec{p}_{\text{ges}} = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = \text{konstant}, \quad \text{wenn } \vec{F}_{\text{ext}} = 0$$

$\vec{p}_{ges}$: Gesamtimpuls [kg·m/s], m_i: Massen [kg], $\vec{v}_i$: Geschwindigkeiten [m/s], $\vec{F}_{ext}$: äußere Kraft [N]

14 Stoßprozesse

Elastischer Stoß:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,\text{vor}}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,\text{nach}}^2$$

m_i: Masse [kg], $v_{i,vor}$: Geschwindigkeit vor dem Stoß [m/s], $v_{i,nach}$: Geschwindigkeit nach dem Stoß [m/s]

Inelastischer Stoß:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,\text{vor}}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,\text{nach}}^2 + \Delta W$$

ΔW: Energieverlust [J], Rest wie oben

Vollständig inelastischer Stoß:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,\text{vor}}^2 = \Delta W$$

Alle kinetische Energie geht in andere Energieformen über (z. B. Wärme, Verformung)

14.0.1 Gerader, zentraler, elastischer Stoß, zweite Kugel in Ruhe

Impulserhaltung:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

m_1, m_2: Massen [kg], $\vec{v}_1, \vec{v}_2$: Geschwindigkeiten vor dem Stoß [m/s], $\vec{v}_1', \vec{v}_2'$: Geschwindigkeiten danach [m/s]

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2'}^2$$

Kinetische Energie vor und nach dem Stoß ist gleich (elastischer Stoß)

Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

v_1', v_2': Endgeschwindigkeiten nach dem Stoß [m/s], m_1, m_2: Massen [kg], v_1, v_2: Anfangsgeschwindigkeiten [m/s]

15 Drehbewegungen

Die Länge eines Kreisbogens s ergibt sich aus dem Zusammenhang:

$$s = r \cdot \varphi$$

s: Kreisbogenlänge [m], r: Radius [m], φ: Winkel im Bogenmaß [rad]

Winkelgeschwindigkeit (Änderung des Drehwinkels pro Zeit)

$$\omega = \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad \text{mit } [\omega] = \text{rad/s}$$

ω: Winkelgeschwindigkeit [rad/s], $\varphi(t)$: Winkel [rad], t: Zeit [s]

Winkelbeschleunigung (Änderung der Winkelgeschwindigkeit pro Zeit)

$$\alpha = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \frac{d\omega(t)}{dt} \quad \text{mit } [\alpha] = \text{rad/s}^2$$

α: Winkelbeschleunigung [rad/s²], $\omega(t)$: Winkelgeschwindigkeit [rad/s], $\varphi(t)$: Winkel [rad]

Bahngeschwindigkeit

$$v_t = r \cdot \omega$$

v_t: Bahngeschwindigkeit [m/s], r: Radius [m], ω: Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

Tangentialbeschleunigung

$$a_t = r \cdot \alpha$$

a_t: Tangentialbeschleunigung [m/s²], r: Radius [m], α: Winkelbeschleunigung [rad/s²]

Zentripetalbeschleunigung

$$a_n = -r \cdot \omega^2 = -\frac{v_t^2}{r}$$

a_n: Zentripetalbeschleunigung [m/s²], r: Radius [m], ω: Winkelgeschwindigkeit [rad/s], v_t: Bahngeschwindigkeit [m/s]

Grundformeln

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$\alpha(t) = \alpha$$

$\varphi(t)$: Winkel [rad], φ_0: Anfangswinkel [rad], ω: Anfangswinkelgeschwindigkeit [rad/s], α: konstante Winkelbeschleunigung [rad/s²], t: Zeit [s]

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\varphi$$
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$
$$P = M \cdot \omega$$

ω: Winkelgeschwindigkeit [rad/s], ω_0: Anfangswinkelgeschwindigkeit [rad/s], α: Winkelbeschleunigung [rad/s²], $\Delta\varphi$: Winkeländerung [rad], f: Frequenz [Hz], T: Periodendauer [s], P: Leistung [W], M: Drehmoment [Nm]

15.1 Die Kinetische Energie der Drehbewegung

$$E_{\text{kin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

E_{kin}: Rotationsenergie [J], m_i: Masse [kg], r_i: Abstand zur Drehachse [m], ω: Winkelgeschwindigkeit [rad/s], I: Trägheitsmoment [kg·m²]

16 Massenträgheitsmomente

Massenträgheitsmoment

$$I = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2$$
$$I_{\text{ges}} = \sum_i I_i$$

I: Trägheitsmoment eines Körpers [kg·m²], m_i: Masse [kg], r_i: Abstand zur Drehachse [m]

Kontinuierliche Masseverteilungen

$$I = \int r^2 \, dm$$

I: Trägheitsmoment [kg·m²], r: Abstand zur Drehachse [m], dm: infinitesimale Masse [kg]

Massiver, homogener Zylinder (Masse m; Radius r_a)

$$I = \frac{1}{2} m \cdot r_a^2$$

I: Trägheitsmoment [kg·m²], m: Masse [kg], r_a: Außenradius [m]

Tabelle 10.2: Vergleich der Zusammenhänge von Rotation und Translation, am Beispiel von zwei Dimensionen

Rotation		Translation	
Ortsvektor	$\vec{r} = r(\theta)$	Ortsvektor	$\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y}$
Drehwinkel	$\Delta\theta = \theta_{\text{Ende}} - \theta_{\text{Anfang}}$	Verschiebung	$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{e_x} + \Delta y\vec{e_y}$
Bogenlänge	$s = r \cdot \Delta\theta$	Strecke	$\text{s} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\theta}(t) = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$	Geschwindigkeit	$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$
Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}$	Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$
Gleichungen für den Fall konstanter Winkelbeschleunigung	$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2(t) = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$	Gleichungen für den Fall konstanter Winkelbeschleunigung	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ $\vec{v}^2(t) = \vec{v}_0^2 + 2\vec{a}\Delta\vec{r}$
Drehmoment	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	Kraft	$\vec{F}$
Trägheitsmoment	I	Masse	m
Zweites Newtonsches Axiom	$\vec{M}_{\text{res}} = I\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$	Zweites Newtonsches Axiom	$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$
Arbeit	$\mathrm{d}W = \vec{M}\,\mathrm{d}\vec{\theta}$	Arbeit	$\mathrm{d}W = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}$
Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}I\omega^2$	Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$
Leistung	$P = \vec{M}\vec{\omega}$	Leistung	$P = \vec{F}\vec{v}$
Drehimpuls	$\vec{L} = I\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}$	Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$

Hohlzylinder (Masse m; Innenradius r_i; Außenradius r_a)

$$I = \frac{1}{2}m \cdot (r_a^2 + r_i^2)$$

I: Trägheitsmoment [kg·m²], m: Masse [kg], r_a: Außenradius [m], r_i: Innenradius [m]

Dünnwandiger, hohler Zylinder (Radius r_a)

$$I = m \cdot r_a^2$$

I: Trägheitsmoment [kg·m²], m: Masse [kg], r_a: Radius [m]

Dünner Stab (Länge l; durch die Mitte gedreht)

$$I = \frac{1}{12} m \cdot l^2$$

I: Trägheitsmoment [kg·m²], m: Masse [kg], l: Länge [m]

Dünner Stab (Drehachse durch das Ende)

$$I = \frac{1}{3} m \cdot l^2$$

I: Trägheitsmoment [kg·m²], m: Masse [kg], l: Länge [m]

Bei versetzter Drehachse

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I_s \omega^2 + \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2}(I_s + m r^2)\omega^2$$

Steiner

$$I_p = I_s + m r^2$$

E_{kin}: Kinetische Energie der Rotation [J], I_s: Trägheitsmoment um Schwerpunktachse [kg·m²], I_p: Trägheitsmoment um Parallelachse [kg·m²], m: Masse [kg], r: Abstand der Achsen [m], ω: Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

17 Das zweite Newtonsche Axiom für Drehbewegungen

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$$

$\vec{M}$: Drehmoment [Nm], I: Trägheitsmoment [kg·m²], $\vec{\alpha}$: Winkelbeschleunigung [rad/s²]

Drehmoment über Kreuzprodukt

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{M}$: Drehmoment [Nm], $\vec{r}$: Hebelarm [m], $\vec{F}$: Kraft [N]

Tangentialbeschleunigung

$$a_t = \vec{\alpha} \cdot \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m \cdot \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

a_t: Tangentialbeschleunigung [m/s²], $\vec{\alpha}$: Winkelbeschleunigung [rad/s²], $\vec{r}$: Radiusvektor [m], $\vec{F}$: Kraft [N], m: Masse [kg]

17.1 Statisches Gleichgewicht

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = 0$$
$$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha} = 0$$

Statische Bedingungen: keine Beschleunigung, keine Winkelbeschleunigung. Kräfte- und Momentengleichgewicht. *$\vec{F}$: resultierende Kraft [N], $\vec{a}$: Beschleunigung [m/s²], $\vec{M}$: Drehmoment [Nm], $\vec{\alpha}$: Winkelbeschleunigung [rad/s²]*

17.2 Die kinetische Energie rollender Körper

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I_S \omega^2 + \frac{1}{2} m v_S^2$$

E_{kin}: Gesamtenergie [J], I_S: Trägheitsmoment um Schwerpunkt [kg·m²], ω: Winkelgeschwindigkeit [rad/s], m: Masse [kg], v_S: Schwerpunktsgeschwindigkeit [m/s]

Vollzylinder auf schiefer Ebene (Neigung β):

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}}$$

Geschwindigkeit nach Strecke x:

$$v_x^2 = \frac{4}{3} g \cdot x \cdot \sin \beta$$

Beschleunigung:

$$a = \frac{2}{3} g \cdot \sin \beta$$

E_{pot}: Potentielle Energie [J], v_x: Geschwindigkeit [m/s], g: Erdbeschleunigung [m/s²], x: zurückgelegte Strecke [m], β: Neigungswinkel [rad], a: Beschleunigung [m/s²]

18 Drehimpuls und Drehimpulserhaltung

Drehimpuls

$$L = I \cdot \omega = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$\vec{L}_{\text{ges}} = \vec{L}_{\text{Bahn}} + \vec{L}_{\text{Spin}} = m \cdot \vec{r}_S \times \vec{v}_S + \vec{L}_{\text{Spin}}$$

L: Drehimpuls [kg·m²/s], I: Trägheitsmoment [kg·m²], ω: Winkelgeschwindigkeit [rad/s], $\vec{r}$: Ort [m], $\vec{p}$: Impuls [kg·m/s], $\vec{v}_S$: Geschwindigkeit Schwerpunkt [m/s]

Drehimpulserhaltung

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \sum_i I_i \cdot \omega_i = \text{konstant}, \quad \text{wenn } \vec{M}_{\text{ges}} = 0$$

$\vec{L}_{ges}$: Gesamtdrehimpuls [kg·m²/s], $\vec{M}_{ges}$: Summe der äußeren Drehmomente [Nm]

19 Schwingungen

19.1 Ungedämpfte, freie und harmonische Schwingungen

Auslenkung, Geschwindigkeit, Beschleunigung

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$v(t) = -\omega_0 A \cdot \sin(\omega_0 t + \delta)$$

$$a(t) = -\omega_0^2 A \cdot \cos(\omega_0 t + \delta)$$

$y(t)$: Auslenkung [m], $v(t)$: Geschwindigkeit [m/s], $a(t)$: Beschleunigung [m/s²], A: Amplitude [m], ω_0: Kreisfrequenz [rad/s], δ: Phasenverschiebung [rad], t: Zeit [s]

Kreisfrequenz

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k_F}{m}}$$

ω_0: Kreisfrequenz [rad/s], f_0: Frequenz [Hz], T_0: Periodendauer [s], k_F: Federkonstante [N/m], m: Masse [kg]

Energie des harmonischen Oszillators

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2} k_F \cdot A^2$$

E_{mech}: Mechanische Energie [J], k_F: Federkonstante [N/m], A: Amplitude [m]

Vertikaler Federschwinger

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_F}{m}}$$

ω_0: Kreisfrequenz [rad/s], k_F: Federkonstante [N/m], m: Masse [kg]

Mathematisches Pendel

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin\theta(t) = 0$$

Linearisiert:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$\theta(t)$: Winkel [rad], g: Erdbeschleunigung [m/s²], l: Pendellänge [m], ω_0: Kreisfrequenz [rad/s]

Drehpendel / Torsionspendel

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{\kappa}{I}\theta(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

$\theta(t)$: Auslenkwinkel [rad], κ: Drehfederkonstante [Nm], I: Trägheitsmoment [kg·m²]

Physikalisches Pendel

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{smg}{I_p}\sin\theta(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{smg}{I_p}}$$

$\theta(t)$: Winkel [rad], s: Abstand zur Drehachse [m], m: Masse [kg], g: Erdbeschleunigung [m/s²], I_p: Trägheitsmoment bezogen auf Drehachse [kg·m²]

Elastischer Schwingkreis

$$\ddot{Q}(t) + \frac{1}{LC}Q(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$Q(t)$: Ladung [C], L: Induktivität [H], C: Kapazität [F], ω_0: Kreisfrequenz [rad/s]

19.2 Gedämpfte Schwingungen

DGL für Feder-Masse-Dämpfungssystem:

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0 \quad \text{mit } 2\delta = \frac{b}{m}$$

$y(t)$: Auslenkung [m], δ: Abklingkonstante [1/s], b: Dämpfungskonstante [kg/s], m: Masse [kg], ω_0: ungedämpfte Kreisfrequenz [rad/s]

Dämpfungsgrad

$$D = \frac{\delta}{\omega_0}$$

D: Dämpfungsgrad, δ: Abklingkonstante [1/s], ω_0: Kreisfrequenz [rad/s]

Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

λ: Eigenwerte, δ: Abklingkonstante [1/s], ω_0: Kreisfrequenz [rad/s]

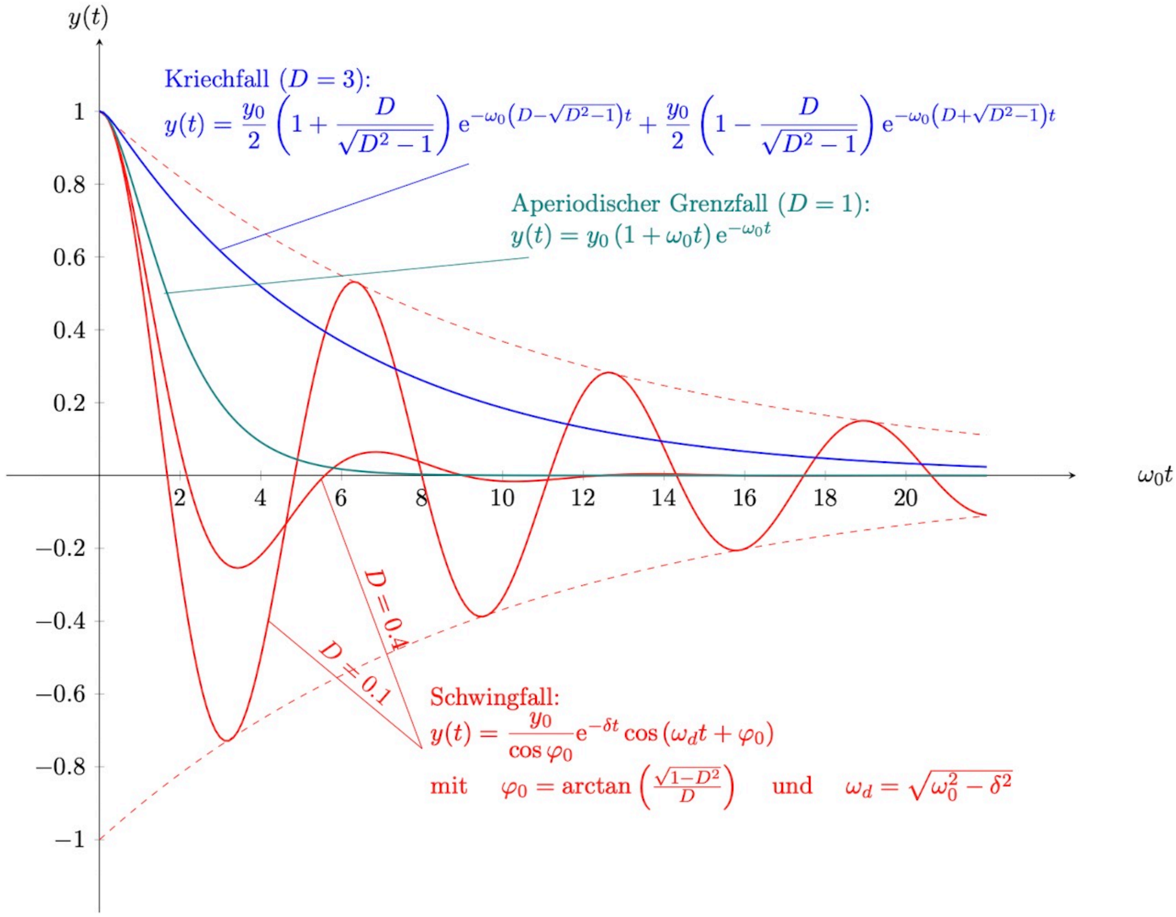

Abbildung 11.4: Kriechfall, aperiodischer Grenzfall und Schwingfall eines gedämpften Systems mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y_0 = 1$ und $\dot{y}(0) = 0$.

19.3 Energie des gedämpften Oszillators

Schwach gedämpft (Näherung $\omega_d \approx \omega_0$):

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2$$

E_{mech}: Energie [J], m: Masse [kg], ω_0: Kreisfrequenz [rad/s], A: Amplitude [m]

Stärker gedämpft:

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2} m \cdot \omega_d^2 \cdot A^2$$

ω_d: gedämpfte Eigenfrequenz [rad/s]

19.4 Güte

Gütefaktor

$$Q = \frac{1}{2D} = \omega_0 \cdot \frac{m}{b}$$

Q: Gütefaktor, D: Dämpfungsgrad, ω_0: Kreisfrequenz [rad/s], m: Masse [kg], b: Dämpfungskonstante [kg/s]

20 Wellen

Eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = \frac{F_s}{A\rho} \cdot \frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2}$$

$y(z,t)$: Auslenkung [m], F_s: Zugkraft [N], A: Querschnittsfläche [m²], ρ: Dichte [kg/m³]

Lösung der harmonischen Wellenfunktion

$$y(z,t) = A \cdot \cos(\omega t - kz + \delta)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \nu \cdot \lambda$$

$y(z,t)$: Auslenkung [m], A: Amplitude [m], ω: Kreisfrequenz [rad/s], k: Wellenzahl [rad/m], δ: Phase [rad], λ: Wellenlänge [m], T: Periodendauer [s], ν: Frequenz [Hz], c: Ausbreitungsgeschwindigkeit [m/s]

Phasengeschwindigkeit verschiedener Wellen

Seilwellen

$$c = \sqrt{\frac{F_s}{\mu}}$$

Elektromagnetische Wellen im Vakuum

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Elektromagnetische Wellen in Materie

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}}$$

c: Phasengeschwindigkeit [m/s], F_s: Spannkraft im Seil [N], μ: lineare Massendichte [kg/m], ϵ_0: elektrische Feldkonstante (Permittivität des Vakuums) [F/m], μ_0: magnetische Feldkonstante (Permeabilität des Vakuums) [H/m], ϵ_r: relative Permittivität, μ_r: relative Permeabilität

20.1 Wellen in drei Dimensionen

Intensität:

$$I(z) = \frac{\text{zeitlich gemittelte Lieistung}}{\text{senkrecht zur Ausbreitung stehende Fläche}} = \frac{P_t}{A} = \text{const.}$$

Kreiswellen

$$I(r) = \frac{I_0 r_0}{r}$$

Kugelwellen

$$I(r) = \frac{I_0 r_0^2}{r^2} = \frac{P_t}{4\pi r^2}$$

$I(z), I(r)$: Intensität [W/m^2], P_t: zeitlich gemittelte Leistung [W], A: Fläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung [m^2], I_0: Referenzintensität in Abstand r_0 [W/m^2], r, r_0: Abstand zur Quelle bzw. Referenzabstand [m]

Messung der Schallintensität

$$I_p = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{dB}$$

I_p: Schalldruckpegel [dB], I: gemessene Schallintensität [W/m^2], I_0: Bezugsintensität, meist 10^{-12} W/m^2

20.2 Der Doppler-Effekt

Fall 1: Empfänger bewegt sich relativ zu einer still stehenden Quelle

$$\nu_E = \nu_0 (1 +/- \frac{V_E}{c})$$

Hinbewegung
Wegbewegung

Fall 2: Quelle bewegt sich relativ zu einem still stehenden Empfänger

$$\nu_E = \nu_0 \frac{1}{1 -/+ \frac{V_Q}{c}}$$

Hinbewegung
Wegbewegung

Fall 3: Quelle und Empfänger bewegen sich relativ zueinander

$$\nu_E = \frac{1 +/- \frac{V_E}{c}}{1 -/+ \frac{V_Q}{c}}$$

Hinbewegung
Wegbewegung

ν_E: Frequenz beim Empfänger [Hz], ν_0: Frequenz der Quelle [Hz], V_E: Geschwindigkeit des Empfängers relativ zum Medium [m/s], V_Q: Geschwindigkeit der Quelle relativ zum Medium [m/s], c: Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Medium [m/s],

Fall 4: Entstehung von Stoßwellen

$$\sin\theta = \frac{c}{V_Q} = \frac{1}{\mathrm{Ma}}$$

21 Überlagerung von Wellen

21.1 Überlagerung von zwei Wellen mit gleicher Wellenzahl und Frequenz

$$y_1 = A\cos(kz - \omega t)$$
$$y_2 = A\cos(kz - \omega t + \delta)$$
$$y = y_1 + y_2$$
$$y = 2A\cos(\frac{1}{2}\delta)\cos(kz - \omega t + \frac{1}{2}\delta)$$

Der erste Teil der Formel ($2A\cos(\frac{1}{2}\delta)$ stellt die resultierende Amplitude A_{res} dar.
Der Zweite Teil der Formel ($\cos(kz - \omega t + \frac{1}{2}\delta)$) beschreibt die, sich in Z-Richtung ausbreitende Welle

Gangunterschied

$$\Delta z = \frac{\delta}{2\pi}\lambda$$

$$\Delta z = z_2 - z_1$$

Der Gangunterschied stellt anschaulich den räumlichen Versatz der beiden Wellen in Bezug auf die Wellenlänge λ dar

y_1, y_2: Einzelne Wellenfunktionen, y: resultierende Welle, A: Amplitude der Einzelsignale, $A_{res} = 2A\cos(\frac{1}{2}\delta)$: resultierende Amplitude, k: Wellenzahl, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ [rad/m], ω: Kreisfrequenz, $\omega = 2\pi f$ [rad/s], f: Frequenz [Hz], δ: Phasendifferenz [rad], λ: Wellenlänge [m], Δz: Gangunterschied [m], z_1, z_2: Orte der beiden Wellenfronten

21.2 Interferenzbedingungen

Konstruktive Interferenz

- **Phasenkonstante:** $\delta = 0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ \ldots$
- **Gangunterschied:** $\Delta z = 0,\ \pm\lambda,\ \pm 2\lambda,\ \ldots$
- **Ergebnis:** Verstärkung der Wellen (Maxima überlagern sich)

Destruktive Interferenz

- **Phasenkonstante:** $\delta = \pm\pi,\ \pm 3\pi,\ \pm 5\pi,\ \ldots$
- **Gangunterschied:** $\Delta z = \pm\frac{\lambda}{2},\ \pm\frac{3\lambda}{2},\ \pm\frac{5\lambda}{2},\ \ldots$
- **Ergebnis:** Auslöschung der Wellen (Maxima und Minima überlagern sich)