考场座位号：________

杭州电子科技大学信息工程学院学生考试卷（ A ）卷

课程名称	线性代数	考试日期	2017 年 6 月	成 绩	
考生姓名		任课教师姓名			
学号（8 位）		班级		专业	
考试形式：闭卷					
考试说明：选择、填空题、判断的答案请写在第 2 页上，否则无效！试卷和答题纸分开上交！					

一. 填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $A=\begin{vmatrix}2 & -2 & 2\\ 0 & 5 & -3\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}$，则 $M_{31}+M_{32}+M_{33}=$________。

2. 设三阶方阵 A 的行列式 $|A|=2$，则 $|3A^{-1}-A^*|=$________。

3. 设 4 阶方阵 A 的秩为 2，则其伴随矩阵 A^* 的秩为________。

4. 设 A 是 4×3 矩阵，且 $R(A)=2$，而 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，则 $R(AB)=$________。

5. 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\end{pmatrix}^T$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\end{pmatrix}^T$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}^T$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}2 & 2 & 6\end{pmatrix}^T$，则此向量组的秩为________。

6. 设方程组 $\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=1\\ x_1+x_2+ax_3=-2\\ ax_1+x_2+x_3=1\end{cases}$ 有无穷多解，则 $a=$________。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. n 阶行列式 D 的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 与 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 的关系是（ ）.

(A) $A_{ij}=M_{ij}$ (B) $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$ (C) $A_{ij}=a_{ij}M_{ij}$ (D) $M_{ij}=-A_{ij}$.

2. 三阶行列式 $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=$（ ）.

(A) 0 (B) $abc(a-b)(a-c)(b-c)$ (C) $abc(b-a)(c-a)(c-b)$ (D) $abc(a-b)(c-a)(c-b)$.

3. 设矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，矩阵 A，B 满足 $AC=CB$，则 A 与 B 分别（ ）阶矩阵.

(A) $n\times m,\ m\times n$ (B) $m\times n,\ n\times m$ (C) $n\times n,\ m\times m$ (D) $m\times m,\ n\times n$.

4. 设 A、B 均为 n 阶方阵，以下等式成立的是（ ）.

(A) $|A+B|=|A|+|B|$ (B) $AB=BA$ (C) $|BA|=|AB|$ (D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

5. 若 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，为使矩阵 A 的秩有最小值，则 λ 应为（ ）.

(A) $\frac{9}{4}$ (B) 2 (C) $-\frac{9}{4}$ (D) -2

6. 已知 $\alpha_1=[1,\ 1,\ 2,\ 1]^T,\alpha_2=[1,\ 0,\ 0,\ 2]^T,\alpha_3=[-1,\ -4,\ -8,\ \lambda]^T$，则 $\lambda=$（ ）时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

(A) 3 (B) 2 (C) -2 (D) -3

7. 如果向量 β 可以由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则有（ ）

(A) $R([\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m])=R([\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta])$ (B) $R([\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m])<R([\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta])$

(C) $R([\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m])>R([\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta]$ (D) 无法判断

8. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次方程组 $Ax=b$ 的三个解向量，且 $R(A)=3,\alpha_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T$，$\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}^T$，则 $Ax=b$ 的通解为（ ）

(A) $\alpha_1+k\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$ (B) $\alpha_1+k\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$

(C) $\alpha_1+k\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ (D) $\alpha_1+k\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

二. 判断题（对的打 √，错的打×，每小题 1 分，共 7 分）

1. n 阶行列式 D 中元素均为非零元素，则 $D\neq0$. （ ）

2. $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 & c_2+kc_1\\ a_1+a_3 & b_1+b_3 & c_1+c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$. （ ）

3. 若 $A^2=A$，则 $A=0$ 或 $A=E$. （ ）

4. 若 $A+B$ 是可逆矩阵，则 $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$ （ ）

5. 若矩阵 A 满足 $|AA^T|\neq0$，则 A 可逆 （ ）

6. n 个 $n+1$ 维向量构成的向量组必线性相关 （ ）

7. 若 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $AX=0$ 的一个基础解系，则 $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\ \xi_3+\xi_1$ 也是该方程组的基础解系（ ）

考场座位号：______

杭州电子科技大学信息工程学院学生考试卷（ A ）卷

课程名称	线性代数	考试日期	2017 年 6 月 日	成 绩	
考生姓名		任课教师姓名			
学号（8 位）		班级		专业	
考试形式：闭卷					
考试说明：试卷和答题纸分开上交，请在左上角写上座位号号码！					

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题
得分					

得分	

一、 填空题（每小题 3 分，本题共 18 分）

1. ______ 2. ______ 3. ______

4. ______ 5. ______ 6. ______

得分	

二、 选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. ____ 2. ____ 3. ____ 4. ____ 5. ____ 6. ____ 7. ____ 8. ____

得分	

三、 判断题（每题 1 分，共 7 分）

1. ____ 2. ____ 3. ____ 4. ____ 5. ____ 6. ____ 7. ____

得分	

四、 计算题（每题 6 分，共 36 分）

1. 求四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 9 & 4 \\ 8 & -1 & 27 & -8 \end{vmatrix}$.

解：

2. 求解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解：

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，并且 $C = A\left[(A^{-1})^2 + A^*BA^{-1}\right]A$，化简 C 后计算 C 的行列式.

解：

考场座位号：________

4. 已知四维向量α，β满足$\alpha+2\beta=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$，$2\alpha+\beta=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 5 & 1\end{pmatrix}^T$，求向量$\alpha$，$\beta$.

解：

5. 已知$\alpha=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$，$\beta=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}^T$；$A=\alpha\beta^T$，求$A^3$.

解：

6. 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\end{pmatrix}^T$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\end{pmatrix}^T$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\end{pmatrix}^T$，求该向量组的一个极大无关组，将其余向量用该极大无关组线性表出.

解：

得分	

五.　解答题及证明题（第一小题 10 分，第二小题 5 分，共 15 分）

1. 判断非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4+4x_5=5\\x_1-2x_2-x_3+3x_4-2x_5=-1\\2x_1-4x_2+x_3+3x_4+5x_5=7\\3x_1-6x_2+x_3+5x_4+6x_5=9\end{cases}$是否有解，如果有解请写出其通解.

（注：请用特解和导出组的基础解系的形式表示通解）

解：

2. 设n阶方阵A,B满足$A+B=AB$，证明：$AB=BA$.（提示：先证明$A-E$可逆，并求出其逆矩阵）

考场座位号：________

杭州电子科技大学信息工程学院学生考试卷（ A ）卷

课程名称	线性代数	考试日期	2017 年 6 月 日	成 绩	
考生姓名		任课教师姓名			
学号（8 位）		班级		专业	
考试形式：	闭卷				
考试说明：	试卷和答题纸分开上交，请在左上角写上座位号号码！				

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题
得分					

得分	

一． 填空题（每小题 3 分，本题共 18 分）

1. ___0___ 2. ___0.5___ 3. ___0___

4 ___2___ 5. ___3___ 6. ___2___

得分	

二． 选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. __B__ 2. __C__ 3. __D__ 4 __C__ 5. __A__ 6. __B__ 7. __A__ 8. __D__

得分	

三． 判断题（每题 1 分，共 7 分）

1. __×__ 2. __✓__ 3 __×__ 4 __×__ 5. __✓__ 6. __×__ 7 __✓__

得分	

四． 计算题（每题 6 分，共 36 分）

1 求四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 9 & 4 \\ 8 & -1 & 27 & -8 \end{vmatrix}$

解：方法一 利用范德蒙行列式结果可得

原式=(-1-2)(3-2)(-2-2)(-1-2)(3+1)(-2+1)(-2-3)=240

方法二，原式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 5 & 0 \\ 8 & -9 & 19 & -16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 0 \\ -9 & 19 & -16 \end{vmatrix}$

$$= (-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 19 & -16 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 16 & -4 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 16 & -4 \end{vmatrix} = 240$$

2 求解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

解： $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$

所以，$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

3 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，并且 $C = A\left[(A^{-1})^2 + A^* BA^{-1}\right]A$，化简 C 后计算 C 的行列式

解： 先化简，$C = A(A^{-1})^2 A + AA^* BA^{-1}A = E + |A|B$

由于 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$，所以 $C = E + |A|B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

则 $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -2$

考场座位号：________

4. 已知四维向量 α、β 满足 $\alpha+2\beta=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$，$2\alpha+\beta=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 5 & 1\end{pmatrix}^T$，求向量 α、β

解： 令 $\gamma_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$，$\gamma_2=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 5 & 1\end{pmatrix}^T$，则由题意可得

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=\gamma_1\\ 2\alpha+\beta=\gamma_2\end{cases}，\quad 解方程组可得 \begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}(2\gamma_2-\gamma_1)\\ \beta=\frac{1}{3}(2\gamma_1-\gamma_2)\end{cases}$$

所以，$\alpha=\frac{1}{3}(2\gamma_2-\gamma_1)=\frac{1}{3}(\begin{pmatrix}-4\\4\\10\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\\0\end{pmatrix}$，$\beta=\frac{1}{3}(2\gamma_1-\gamma_2)=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$

5. 已知 $\alpha=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$，$\beta=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}^T$；$A=\alpha\beta^T$，求 A^3

解： $\beta^T\alpha=\begin{bmatrix}1, & \frac{1}{2}, & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=2$，则

$$A^3=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\beta^T=4\alpha\beta^T$$

$$=4\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\8 & 4 & 0\\4 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

6. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\end{pmatrix}^T$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\end{pmatrix}^T$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\end{pmatrix}^T$，求该向量组的一个极大无关组，将其余向量用该极大无关组线性表出.

解： $$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\0 & 1 & 1 & -1\\2 & 4 & 2 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\0 & 1 & 1 & -1\\0 & -2 & -2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 4\\0 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以，α_1，α_2 构成了向量组 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ 的一个极大线性无关组。（不唯一！）

于是，

$$\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2，\quad \alpha_4=4\alpha_1-\alpha_2$$

得分	

五． 解答题及证明题（第一小题 10 分，第二小题 5 分，共 15 分）

1. 判断非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4+4x_5=5\\ x_1-2x_2-x_3+3x_4-2x_5=-1\\ 2x_1-4x_2+x_3+3x_4+5x_5=7\\ 3x_1-6x_2+x_3+5x_4+6x_5=9\end{cases}$ 是否有解，如果有解请写出其通解

（注：请用特解和导出组的基础解系的形式表示通解）

解： 对系数矩阵 A 的增广矩阵做初等行变换得

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 4 & 5\\1 & -2 & -1 & 3 & -2 & -1\\2 & -4 & 1 & 3 & 5 & 7\\3 & -6 & 1 & 5 & 6 & 9\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 4 & 5\\0 & 0 & -2 & 2 & -6 & -6\\0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -3\\0 & 0 & -2 & 2 & -6 & -6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 2\\0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

由于矩阵 A 的秩满足 $R(\mathrm{A})=R(\overline{\mathrm{A}})=2<5$，所以方程组有无穷多解。

原方程组的同解方程组 $\begin{cases}x_1=2+2x_2-2x_4-x_5\\ x_3=2+x_4-3x_5\end{cases}$.

令 $x_2=x_4=x_5=0$，得到原方程组的一个特解为 $X_0=\begin{bmatrix}2 & 0 & 3 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$

导出组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=2x_2-2x_4-x_5\\ x_3=x_4-3x_5\end{cases}$ 令 x_2，x_4，x_5 中一个为 1，其余全为 0，得到方程组的一基础解系为

$\xi_1=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$，$\xi_2=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$，$\xi_3=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$

则原方程组的通解为 $X_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$（其中 k_1，k_2，k_3 为任意常数）

2. 设 n 阶方阵 A、B 满足 $A+B=AB$，证明：$AB=BA$.（提示：先证明 $A-E$ 可逆，

证明： 容易算出 $(A-E)(B-E)=AB-A-B+E$

由于 A、B 满足 $A+B=AB$，所以 $(A-E)(B-E)=E$，则 $A-E$ 可逆，且

$$(A-E)^{-1}=B-E$$

故 $E=(B-E)(A-E)=BA-A-B+E$，则有 $BA=A+B=AB$