不定积分小结

一、不定积分基本公式

(1) $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C(a \neq -1)$

(2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

(3) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

(4) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

(5) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

(6) $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

(7) $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$

(8) $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(9) $\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(10) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

(11) $\int \csc^2 x \, dx = -\cot \ x + C$

(12) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

(13) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

(14) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{a-x}{a+x}\right| + C$

(15) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

(16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(17) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

(19) $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$

(20) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

二、两个重要的递推公式（由分部积分法可得）

(1)$D_n = \int sin^n x \, dx$ (详情请查阅教材 166 页)

则$D_n = \frac{-\cos x \, sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} D_{n-2}$(求三角函数积分)

易得D_n：n 为奇数时，可递推至$D_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x + C$；

n 为偶数时，可递推至$D_2 = \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$；

(2)$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$(详情请查阅教材 173 页)

则$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n$

易得I_n可递推至$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

（这是有理函数分解后一种形式的积分的求法，大家可以回顾课本恢复记忆）

三、普遍方法

(一)换元积分法：

第一类换元积分法(凑微分法)

这类方法需要敏锐的观察力，即观察出某个函数的导数，这就要求我们熟悉常见函数的导数。

首先我们来看一下最常见的一类有理函数的例子

例 1： $\int \frac{x}{\sqrt{5+x-x^2}}dx$

注意到分母根号下为二次，其导数为一次，而分子正好就是一次，通过凑微分和配方可以得到解决。

$$\int \frac{x}{\sqrt{5+x-x^2}}dx = \int \frac{-\frac{1}{2}(-2x+1)+\frac{1}{2}}{\sqrt{5+x-x^2}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(5+x-x^2)}{\sqrt{5+x-x^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{5+x-x^2}}dx$$

$$= -\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{\sqrt{21}}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}}$$

$$= -\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(\frac{2x-1}{\sqrt{21}}) + C$$

例 2： $\int \frac{x^3}{x^4+x^2+1}dx$

与例 1 类似，我们有：

$$\int \frac{x^3}{x^4+x^2+1}dx = \int \frac{\frac{1}{4}(4x^3+2x)-\frac{1}{2}x}{x^4+x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4+x^2+1)}{x^4+x^2+1} - \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$ 后面套公式就好啦

例 3： $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x+2\sin^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{1+2\tan^2 x} = \int \frac{d(\tan x)}{1+2\tan^2 x}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(\tan x)}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\tan^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\tan x)+C$$

接下来举几个我们可能不太熟悉的例子，不容易凑成微分。

例 4：$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}dx=\int\frac{\sqrt{x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}\sqrt{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2-\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2}}d(x^{\frac{3}{2}})$

$=\frac{2}{3}\int\frac{1}{\sqrt{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2-\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2}}d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$ 至此可以套用公式了

例 5：$\int\frac{1}{2^x+3}dx=\int\frac{\frac{1}{2^x}}{1+\frac{3}{2^x}}dx$，注意到$\frac{3}{2^x}$的导数为$-3\ln 2\frac{1}{2^x}$，

至此可以用凑微分法了

例 6：$\int\frac{x}{1-x\cot x}dx=\int\frac{x\sin x}{\sin x-x\cos x}dx$

注意到 $\sin x-x\cos x$ 的导数为 $x\sin x$

第二类换元积分法

（1）利用三角函数进行代换：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\tan^2 x+1=\sec^2 x$ $\qquad\qquad$ $\cot^2 x+1=\csc^2 x$

换元时必须要注意变量的范围，保证范围的等价性（通过例题体会）

例如以下两个基本积分公式

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

例：$\int\frac{dx}{(x^2+9)^3}$

利用$\tan^2 x+1=\sec^2 x$，令 $x=3\tan t$，这里 x 可以取到全体实数，那么

t 取$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$就可以保证 x 取到全体实数，因为 t 的范围直接影响到三角函数的正负，所以这一点在涉及到开根号的三角函数表达式时尤为重要。

则：$\int\frac{dx}{(x^2+9)^3}=\frac{3}{9^3}\int\cos^4 t\,dt$

至此，$\int\cos^4 t\,dt$有多种求法，比如说直接用递推公式，见第五页：

$\int\cos^n x\,dx$ 利用 $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ 和 $\int\sin^n x\,dx$ 求得

令一种解法：

$$\int \cos^4 t\,dt = \int \cos^2 t(1-\sin^2 t)\,dt = \int \cos^2 t\,dt - \int \cos^2 t\sin^2 t dt$$

利用倍角公式可以解出。

（2）倒代换，经常用在分母多项式次数较高的情况下

例：$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$，令 $x=\frac{1}{t}$，容易求出原函数

(二)分部积分法

$$\int \mu d\nu = \mu\nu - \int \nu d\mu$$

应用分部积分法时，需要把被积函数看作两个因式 μ 及 dν 之积，如何选取这两者是很关键的，选取不当，将使积分愈化愈繁.积分时应注意 dν 比较好积，同时 μ 的选取应使其倒数比 μ 简单，两者应兼顾。

例：$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = e^{\arctan x}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

$$= e^{\arctan x}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \left[e^{\arctan x}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{-xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx\right]$$

$$= e^{\arctan x}\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

则：$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x} + C$

这个函数就有多种拆分方法，需要我们多尝试几次才能解出，并且用到了轮换，应注意。其实 $\int \sin(\ln x)\,dx$ 也用到了轮换，详情请查阅教材 165 页。

一般情况下，被积函数形如$e^{ax}\sin bx$，$e^{ax}\cos bx$，$P_m(x)e^{ax}$，$P_m(x)\sin bx$，$P_m(x)\cos bx$，$P_m(x)(\ln x)^n$，$P_m(x)\arctan x$，…就可以尝试分部积分法轻松求得原函数，其中$P_m(x)$表示 m 次多项式。

例 $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$$
$$=\int \frac{(x+1)e^x-e^x}{(x+1)^2}dx=\int \frac{e^x}{x+1}-\frac{e^x}{(x+1)^2}dx$$
$$=\int \frac{e^x}{x+1}dx-\int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx=\int \frac{e^x}{x+1}dx+\int e^x d\,\frac{1}{1+x}$$
$$=\int \frac{e^x}{x+1}dx+\frac{e^x}{1+x}-\int \frac{1}{1+x}de^x$$
$$=\frac{e^x}{1+x}+C$$

(三)特殊函数积分法

1、有理函数的不定积分

参考教材 171 页有关有理函数分解定理的说明，比较繁琐，但要掌握。
关键在于将有理函数分解为要求的形式，并会解决分解后的各种函数的积分，其实我们可以将其归结为两种形式：

(1) $\int \frac{\mathrm{b}}{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\mathrm{m}}}\mathrm{dx}$ (其中 a, b 为常数，m 为正整数)

当 $\mathrm{m}=1$ 时，$\int \frac{\mathrm{b}}{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\mathrm{m}}}\mathrm{dx}=\mathrm{b}\ln|\mathrm{x}-\mathrm{a}|+\mathrm{C}$

当 $\mathrm{m}\neq 1$ 时，$\int \frac{\mathrm{b}}{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\mathrm{m}}}\mathrm{dx}=\frac{\mathrm{b}(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{-\mathrm{m}+1}}{-\mathrm{m}+1}+\mathrm{C}$

(2) $\int \frac{\mathrm{cx}+\mathrm{d}}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{ax}+\mathrm{b})^{\mathrm{n}}}\mathrm{dx}$(其中 a, b, c, d 为常数，n 为正整数)

对于分子，我们可以将其凑为$\mathrm{x}^2+\mathrm{ax}+\mathrm{b}$ 的导数和某一常数之和，第一部分容

易求得，第二部分利用第一页的递推公式：

$I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$(详情请查阅教材 173 页)

则$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n$

易得I_n可递推至$I_1=\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{a}^2}=\frac{1}{\mathrm{a}}\arctan\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}+\mathrm{C}$

以下几例用于练习有理式的分解和计算：

例 1： $\int \frac{dx}{x^3+1}$

例 2： $\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2} = \int \frac{dx}{(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)}$

例 3： $\int \frac{dx}{x^6+1}$ (教材 175 页的方法较为简便)

2、三角函数有理式的积分

常用技巧：（1）凑微分

例 1： $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

若 m 和 n 都是偶数，利用$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$将其化为同名函数。
若 m 或 n 为奇数，则拆开一个凑成微分，然后再化为同名函数，之后再利用（二、）中的递推公式。

例 2： $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = \int \frac{1}{1+\tan^3 x} d(\tan x)$

利用已经解得的 $\int \frac{dx}{x^3+1}$ 的结果

补充一点： $\int \cos^n x \, dx$ 利用 $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ 和 $\int \sin^n x \, dx$ 求得

$$\int \tan^n x \, dx = \int \tan^{n-2} x (\frac{1}{\cos^2} - 1) \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx$$

这就得到了$\int \tan^n x \, dx$的递推公式，事实上还可以将其看作$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$的特殊形式，只不过 m=-n 罢了，当然可以用$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$的求解方法。

(2) 倍角公式、积化和差

例： $\int \sin 5x \sin 7x \, dx$

(3) 分项技巧

例 1： $\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^4 x} dx$

至此第一项可以继续分项或者利用倍角公式，第二项可以直接套用（二、）中的递推公式或者利用分部积分求解，实际上递推公式也是由分部积分法得到的。

例 2： $\int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)\sin(x+\beta)} = \int \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \frac{\sin[(x+\alpha)-(x+\beta)]}{\sin(x+\alpha)\sin(x+\beta)} dx =$

$\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \int \left[\frac{\cos(x+\beta)}{\sin(x+\beta)} - \frac{\cos(x+\alpha)}{\sin(x+\alpha)}\right] dx$，这里利用了三角和公式，

至此可以直接套用基本积分表了。$(\alpha \neq \beta)$

例 3： $\int \frac{dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \int \frac{1}{3}\left[\frac{2}{\sin x + \cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x}\right] dx$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})} + \frac{2}{3} \int \frac{-d(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2 + 1}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{2}}\ln\left|\sec(x-\frac{\pi}{4})+\tan(x-\frac{\pi}{4})\right|-\frac{2}{3}\arctan(\cos x-\sin x)+C$$

（此题较为复杂，大家需要认真看）

（4）配凑法

例 $I=\int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx$

假设 $I_1=\int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx$， $I_2=\int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx$ 则

aI_1+bI_2 得到

$$aI_1+bI_2=\int dx=x+C_1 \text{---------（1）}$$

bI_1-aI_2 得到

$$bI_1-aI_2=\int\frac{b\cos x-a\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx$$
$$=\int\frac{1}{a\cos x+b\sin x}d(a\cos x+b\sin x) \text{------（2）}$$
$$=\ln|a\cos x+b\sin x|+C_2$$

由（1）与（2）解得：

$$I_1=\frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\cos x+b\sin x|+\frac{a}{a^2+b^2}x+C.$$
$$I_2=\frac{a}{a^2+b^2}\ln|a\cos x+b\sin x|+\frac{b}{a^2+b^2}x+C.$$

（5）万能公式：(1)令 $\mu=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2\mu}{1+\mu^2}$ $\cos x=\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}$

$\tan x=\frac{2\mu}{1-\mu^2}$ $dx=\frac{2}{1+\mu^2}$(三角函数次数较低时效果较好)

(2)令 $\mu=\tan x$，则 $\sin x=\pm\sqrt{\frac{\mu^2}{1+\mu^2}}$ $\cos x=\pm\sqrt{\frac{1}{1+\mu^2}}$

(注意正负号的判断) $dx=\frac{1}{1+\mu^2}$(三角函数次数较高时效果较好）

例：$\int\frac{dx}{2+\sin x}$(用第一种变换)

$=\int\frac{d\mu}{\mu^2+\mu+1}$(转化为容易的有理积分)

3、简单无理函数的积分（1）当被积函数是 x 与$\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$

的有理式时，采用变换 μ

$= \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$，就可化为有理函数的积分

例：$\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^3}}dx = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$，设 $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$ 代换即可

（2）当被积函数是 x 与 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的有理式时，通常先将 ax^2+bx+c 配方，再用三角变换化为三角有理式的积分或直接利用积分公式计算。

例：$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}}$，令 $x+1=\tan t$ 即可

附：另类题目：确定 A 和 B，使下式成立

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{A\sin x}{a+b\cos x} + B\int \frac{dx}{a+b\cos x}$$

解：两边同时求导，化简整理可得：$Ab+Ba+(Aa+Bb)\cos x = 1$

从而有：$\begin{cases} Ab+Ba=1 \\ Aa+Bb=0 \end{cases}$

当 $a^2 \neq b^2$ 时，解得 $A = \frac{-b}{a^2-b^2}$，$B = \frac{a}{a^2-b^2}$

当 $a^2 = b^2$ 时,无解。