杭州电子科技大学信息工程学院期末考试卷（ A）卷

课程名称	高等数学(乙)	考试日期	2013 年 6 月 日	成绩	
考生姓名		任课教师姓名			
学号（8 位）		班级		专业	

一、填空题（每小题 3 分，本题共 30 分）：

1．微分方程 $y^3y''+x(y')^4-y=0$ 的阶数是_____2_________.

2．设 $z=x^3+y-2xy^2+1$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$______3_________.

3．交换积分次序 $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{x-1} f(x,y)\mathrm{d}y=$____ $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{y+1}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$ __.

4．无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n}$ 的和是______ $\dfrac{1}{4}$ ______.

5．微分方程 $y'+y-e^x=0$ 的通解是_____ $\dfrac{1}{2}e^x+Ce^{-x}$ _________.

6．二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+\sqrt[3]{xy})\sin\dfrac{1}{x}=$_______0_______.

7．由方程 $xz^2+y+z=1$ 确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$___ $-\dfrac{z^2}{2xz+1}$ ___.

8．计算累次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \cos y^2 \mathrm{d}y=$_______ $\dfrac{1}{2}\sin 1$ __________.

9．$f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数是________ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ ___________.

10．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^{2n}}{4^n}$ 的收敛域是__________（-3, 1）_____________.

二、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 若 y_1,y_2 是二阶齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个特解，那么 $y=C_1y_1+C_2y_2$ (其中 C_1,C_2 是任意常数)（ **B** ）.

（A）是该方程的通解 （B）是该方程的解 （C）是该方程的特解 （D）不一定是该方程的解

2. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有偏导数是它在该点存在全微分的（ **A** ）.

（A） 必要条件而非充分条件 （B） 充分条件而非必要条件

（C） 充分条件 （D） 既非充分条件也非必要条件

3. 计算积分 $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$ (其中 $D: x^2+y^2\le 9, x\ge 0, y\ge 0$)（ **A** ）.

（A） $\dfrac{9\pi}{2}$ （B）9π （C）18π （D） $\dfrac{9\pi}{4}$

4. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，那么下面几个级数中发散的是（ **C** ）.

（A） $\sum\limits_{n=100}^{\infty}a_n$ （B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+100}$ （C） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+100)$ （D）$100+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

5. 方程 $y''-4y'+4y=2e^{3x}$ 具有特解（ **D** ）.

（A） $y=(ax^2+bx)e^{3x}$ （B） $y=(ax+b)e^{3x}$

（C） $y=axe^{3x}$ （D） $y=ae^{3x}$

6. 求解微分方程 $y''+y'=e^y$ 时，应作变换（ **B** ）.

（A） $y'=e^y$ （B） $y'=p(y)$ （C） $y'=p(x)$ （D） $y'=e^x$

7. 已知 $z=f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，且 $z=f(x+y,xy)$，那么下面式子中正确的是（ **D** ）.

（A） $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{11}+yf''_{12}$ （B） $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{11}+2yf''_{12}$；

（C） $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{11}+2yf''_{12}+yf''_{22}$ （D） $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{11}+2yf''_{12}+y^2f''_{22}$

8. 对于函数 $f(x,y)=x^2-2xy+2y^2+2$，下面哪一项是正确的（ C ）.

（A） 有极大值 0　（B）有极大值 2　（C）有极小值 2　（D）无极值

9. 设 D 是由 x 轴，y 轴及 $x=1, y=1$ 围成的区域，则 $I_1=\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma, I_2=\iint\limits_D x+y\mathrm{d}\sigma, I_3=\iint\limits_D x^2+y^2\mathrm{d}\sigma$

的大小顺序是（ B ）.

（A） $I_1\ge I_2\ge I_3$　（B）$I_2\ge I_3\ge I_1$　（C）$I_2\ge I_1\ge I_3$　（D）$I_1\ge I_3\ge I_2$

10. 下面的几个幂级数中，哪一项不是 $\dfrac{1}{2-x}(1<x<2)$ 的展开式（ C ）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{2^n}$　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-1)^{n-1}$

（C）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^{n-1}}{3^n}$

三、判断题（每小题 2 分，本题共 10 分）

1. 两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 满足 $a_n\le b_n$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛 ………………（ × ）.

2. 已知 $y_1=x^2, y_2=3$ 是方程 $y''+f(x)y'+g(x)y=0$ 的两个特解，那么该方程的通解是

$y=C_1x^2+C_2$ ……………………………………………………………………………..（ √ ）.

3. 一个二元函数如果在定义域上处处存在偏导数，那么该函数处处连续 ………………（ × ）.

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 在 $x=1$ 处绝对收敛，那么在 $x=4$ 处也收敛 ……………………（ √ ）.

5. 累次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho)\mathrm{d}\rho$ ……………………………（ × ）.

四、计算下列各题（每小题 6 分，本题共 24 分）

1. 求微分方程 $y''-2y'=4$ 满足 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解.

解:特征方程为：$r^2-2r=0$，特征根 $r_1=0, r_2=2$

齐次方程通解为：$y_1=C_1+C_2e^{2x}$　（得 2 分）

设 $y''-2y'=4$ 的特解是 $y_2=ax$，代入方程得

$$a=-2, y_2=-2x$$

所以非齐次方程的通解为: $y=y_1+y_2=C_1+C_2e^{2x}-2x$　（得 2 分）

$$y(0)=C_1+C_2=0, y'(0)=2C_2-2=0$$

所以 $C_2=1, C_1=-1$，特解为 $y=e^{2x}-2x-1$.　（得 2 分）

2. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0,0)点处的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 及 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$.

解: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{0}{\Delta x^2+0}-0}{\Delta x}=0$　（得 2 分）

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\frac{\Delta y^3}{0+\Delta y^2}-0}{\Delta y}=1$　（得 2 分）

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{y^3}{y^2}\right|=\lim_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.　（得 2 分）

3．计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D:1\le x^2+y^2\le 4$.

解： $D:0\le\theta\le 2\pi, 1\le\rho\le 2$ （得 2 分）

$$\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho e^{\rho}\mathrm{d}\rho$$ （得 2 分）

$$=\int_0^{2\pi}(\rho-1)e^{\rho}\Big|_1^2\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}e^2\mathrm{d}\theta=2\pi e^2$$ （得 2 分）

4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域及和函数.

解： 由 $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{x^n}{n}\right|}=\lim_{n\to\infty}|x|\left|\frac{n}{n+1}\right|=|x|<1$

得收敛区间：$-1<x<1$ （得 2 分）

$x=1$ 时，原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的； $x=-1$ 时，原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 是收敛的；

所以收敛域是 $-1\le x<1$； （得 1 分）

设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，那么 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$， （得 2 分）

所以 $f(x)=\int\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)+C$

又因为 $f(0)=0$，所以 $C=0$，和函数 $f(x)=-\ln(1-x), x\in[-1,1)$ （得 1 分）

五、证明题（6 分）

证明：$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

证： $D:-1\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}$，用极坐标得 $D:0\le\theta\le\pi, 0\le\rho\le 1$， （得 2 分）

所以

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho f(\rho)\mathrm{d}\rho$$ （得 2 分）

$$=\pi\int_0^1\rho f(\rho)\mathrm{d}\rho=\pi\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$$ （得 2 分）