考场座位号：________

杭州电子科技大学信息工程学院学生考试卷（ B ）卷

课程名称	线性代数	考试日期	2018 年 3 月	成 绩	
考生姓名		任课教师姓名			
学号（8 位）		班级		专业	
考试形式：闭卷					
考试说明：选择、填空题、判断的答案请写在第 2 页上，否则无效！试卷和答题纸分开上交！					

一．填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 已知 4 阶行列式第三行元素分别为-1, 0, 2, 4，第四行元素相应的代数余子式分别为 10, 5, a, 2，则 $a=$__________。

2. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$，则 $|A|=$ ______。

3. 设 A 为3阶方阵，且 $|A|=2$，则 $\left|3A^{-1}-2A^{*}\right|=$__________。

4. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵且满足 $AB=O$，则 $a=$__________。

5. 对于 m 个方程，n 个未知量的方程组 $AX=O$，有 $R(A)=r$，则方程组的基础解系中有______个解向量。

6. 设向量组 $\alpha_1=[1,\ 1,\ 0]^T$，$\alpha_2=[1,\ 3,\ -4]^T$，$\alpha_3=[5,\ 3,\ t]^T$ 线性相关，则 t 的值为____。

二．单项选择题 （每小题 3 分，共 24 分）

1. 二阶行列式 $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ 等于（ ）

（A）0； （B）1； （C）$\cos 2\alpha$； （D）$\sin 2\alpha$

2. 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\neq 0$，则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21}+a_{11} & 2a_{22}+a_{12} & 2a_{23}+a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}=$（ ）．

(A) $8k$； (B) $2k$； (C) $-8k$； (D) $-2k$。

3. 对于 n 阶方阵 A，若 $AA^T=2E$，则 $|A|=$（ ）

(A) ± 2； (B) $\pm\sqrt{2}$； (C) $\pm 2^n$； (D) $\pm 2^{\frac{n}{2}}$。

4. 设 A 为 n 阶对称方阵，B 为 n 阶反对称矩阵，则下列矩阵中为反对称矩阵的是（ ）

(A) $AB+BA$； (B) B^2； (C) $AB-BA$； (D) A^2.

5. 已知 n 阶方阵 A 可逆，则（ ）成立

(A) $(2A)^{-1}=2A^{-1}$； (B) $(-2A)^{-1}=-\frac{1}{2}A^{-1}$；

(C) $\left|(-2A)^{-1}\right|=\frac{1}{2}|A|^{-1}$； (D) $\left|(2A^{-1})\right|=2|A|$.

6. 若 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $R(A)=$（ ）.

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 4.

7. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩为 3，则（ ）

（A）任三个向量线性无关 （B）任两个向量线性无关

(C) 任四个向量线性相关 (D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 无零向量

8. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的三个解向量，且 $R(A)=3$，$\alpha_1=[1,\ 2,\ 3,\ 4]^T$，

$\alpha_2+\alpha_3=[0,\ 1,\ 2,\ 3]^T$，$k$ 为任意常数，则 $AX=\beta$ 的通解为（ ）

（A）$\alpha_1+k[0,\ 1,\ 2,\ 3]^T$； （B）$\alpha_1+k[3,\ 4,\ 5,\ 6]^T$； 。

（C）$\alpha_1+k[1,\ 1,\ 1,\ 1]^T$； （D）$\alpha_1+k[2,\ 3,\ 4,\ 5]^T$

三．判断题（对的打√，错的打×．注意写 T 或 F 的无效！ 每小题 1 分，共 7 分）

1. n 阶行列式 D 中零元素的个数为 $n+1$ 个，则 $D=0$. （ ）

2. $\begin{pmatrix} a_1 & b & c & d \\ 0 & a_2 & c & d \\ 0 & 0 & a_3 & d \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & a_3 & d \\ 0 & a_2 & c & d \\ a_1 & b & c & d \end{pmatrix}$. （ ）

3. 若 $A^2=A$，则 $A=0$ 或 $A=E$. （ ）

4. 若 A，B 都是可逆矩阵，则 $A+B$ 也是可逆矩阵. （ ）

5. 两个同阶对角矩阵的和、差、乘积仍是对角矩阵； （ ）

6. 若 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则表示法唯一. （ ）

7. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是同维向量，若向量组 α_1,α_2 线性相关，α_3,α_4 线性无关，

则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关. （ ）

考场座位号：________

杭州电子科技大学信息工程学院学生考试卷（ B ）卷

课程名称	线性代数	考试日期	2018 年 3 月　日	成 绩	
考生姓名		任课教师姓名			
学号（8 位）		班级		专业	
考试形式：　闭卷					
考试说明：　试卷和答题纸分开上交，请在左上角写上座位号号码！					

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题
得分					

得分	

一.　填空题（每小题 3 分，本题共 18 分）

1．9　　2．-1　　3．2

4．2　　5．$\begin{bmatrix}-3 & 1 & 5\end{bmatrix}^T$　　6．-2

得分	

二.　选择题（每题 **3** 分，共 **24** 分）

1．B　2．C　3．B　4．C　5．A　6．C　7．D　8．D

得分	

三.　判断题（每题 **1** 分，共 **7** 分）

1．×　2．×　3．√　4．×　5．×　6．√　7．√

得分	

四.　计算题（每题 **6** 分，共 **36** 分）

计算行列式 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 3 & -6 & 3\end{vmatrix}$

解：方法一：

原式$=A_{11}+A_{12}+A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -6 & 3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 0 & -6 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 3\end{vmatrix}$ …………3 分

$=-3-0+3=0$ …………6 分

方法二：原式$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & -6 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -6 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$。 …………6 分

2. 已知 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 3\end{pmatrix}$，$f(x)=x^2+2x+1$，求 $f(A)$

解：$f(A)=A^2-2A+E$（这里写成 A^2-2A+1 扣 2 分） …………2 分

$=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 3\end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ …………4 分

$=\begin{pmatrix}1 & 15\\ -5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 6\\ -2 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 21\\ -7 & 13\end{pmatrix}$ …………6 分

3　设 $B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，且 $X+6B=XB$，求矩阵 X。

解：由题意，可得 $X(B-E)=6B$ ……………………1 分

则 $B-E=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，由于 $|B-E|=\begin{vmatrix}0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=6\neq 0$, 所以 $B-E$ 为可逆矩阵， ……………………2 分

由于 $\left[B-E\,|\,E\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$，则 $(B-E)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ……4 分

故　$X=6B(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ -2 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}$ ……………………6 分

考场座位号：________

4. 已知方阵 A 满足方程 $A^2-2A-E=0$，其中 E 为单位矩阵，试证 A 可逆，并求其逆矩阵 A^{-1}

解：容易算出 $A(A-2E)=E$ ………………2 分

则 A 可逆， ……………3 分

另一方面， $A(A-2E)=E$ ， 所以 $A^{-1}=A-2E$ ………………6 分

5. 已知四维向量 α，β 满足 $3\alpha+2\beta=(1\quad 2\quad 1\quad 2)^{\mathrm{T}}$，$2\alpha+3\beta=(-1\quad 2\quad 3\quad 1)^{\mathrm{T}}$，求向量 $\alpha,\ \beta$.

解：令 $\gamma_1=(1\quad 2\quad 1\quad 2)^{\mathrm{T}}$，$\gamma_2=(-1\quad 2\quad 3\quad 1)^{\mathrm{T}}$， 则由题意可得

$$\begin{cases}3\alpha+2\beta=\gamma_1\\ 2\alpha+3\beta=\gamma_2\end{cases}, \quad \text{解方程组可得}\begin{cases}\alpha=\frac{1}{5}(3\gamma_1-2\gamma_2)\\ \beta=\frac{1}{5}(3\gamma_2-2\gamma_1)\end{cases}$$ ………………………2 分

所以，$\alpha=\frac{1}{5}(3\gamma_1-2\gamma_2)=\frac{1}{5}(\begin{pmatrix}3\\6\\3\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\4\\6\\2\end{pmatrix})=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5\\2\\-3\\4\end{pmatrix}$， $\beta=\frac{1}{5}(3\gamma_2-2\gamma_1)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5\\2\\7\\-1\end{pmatrix}$ ………………6 分

6. 设 $\alpha_1=[1,\ 2,\ 2]^T$，$\alpha_2=[1,\ 0,\ -1]^T$，$\alpha_3=[3,\ 2,\ 0]^T$，求该向量组的秩，并确定一个极大无关组，将其余向量用该极大无关组线性表出.

解：由于， $[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3]=\begin{bmatrix}1&1&3\\2&0&2\\2&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&3\\0&-2&-4\\0&-3&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$ ……………2 分

所以该向量组的秩为 $r=2$，则 α_1， α_2 构成了向量组的一个极大线性无关组。（不唯一!） ………..4 分

于是， $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$ ………………………………6 分

得分	

五． 解答题及证明题（第一小题 10 分，第二小题 5 分，共 15 分）

1. 判断非齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3-2x_4=1\\ -x_1+x_2+2x_3+x_4=0\\ x_1-x_2-2x_3+2x_4=-6\end{cases}$ 是否有解，如果有解请写出其通解.

（注：请用特解和导出组的基础解系的形式表示通解）

解：对系数矩阵 A 的增广矩阵做初等行变换得

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}2&-1&1&-2&1\\-1&1&2&1&0\\1&-1&-2&2&-6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&-2&2&-6\\0&1&5&-6&13\\0&0&0&1&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&3&0&-1\\0&1&5&0&1\\0&0&0&1&-2\end{array}\right],$$ ……….3 分

由于矩阵 A 的秩满足 $R(\mathrm{A})=R(\overline{\mathrm{A}})=3<4$， 所以方程组有无穷多解。 ……….4 分

原方程组的同解方程组 $\begin{cases}x_1=-1-3x_3\\ x_2=1-5x_3\\ x_4=-2\end{cases}$， ……….5 分

令 $x_3=0$，得到原方程组的一个特解为 $X_0=[-1\quad 1\quad 0\quad -2]^T$ ………………6 分

导出组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-3x_3\\ x_2=-5x_3\\ x_4=0\end{cases}$ 令 x_3=1 得到方程组的一,基础解系为 $\xi_1=[-3\quad -5\quad 1\quad 0]^T$ ……….9 分

则原方程组的通解为 $X_0+k\xi_1$（其中 k 为任意常数）。 . …………………10 分

2. 设 n 阶方阵 A 和 B 满足条件 $A+B=AB$，证明：$AB=BA$。

证明： 容易算出 $(A-E)(B-E)=AB-A-B+E$ ………………2 分

由于 A,B 满足 $A+B=AB$， 所以 $(A-E)(B-E)=E$，则 $A-E$ 可逆，且

$(A-E)^{-1}=B-E$ …………….. 3 分

故 $E=(B-E)(A-E)=BA-A-B+E$， 则有 BA=A+B=AB ……………… 5 分