考场座位号：

17-18-2 线性代数（ A ）卷参考答案

一．(每小题 3 分) 1. D　　2 C　　3. A　　4. B　　5. A

二．(每小题 3 分)

1. 48　　2. 6　　3. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　　4. $\begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

5. 2　　6. -4　　7. -5　　8. -4

三．(每小题 7 分，共 35 分)

1.

$$A+2B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 11 \\ 6 & 3 \end{bmatrix},$$ ……………3 分

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 9 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(AB)^T=\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}。$$ ……………4 分

2. $$\beta^T\alpha=\begin{bmatrix} 1, & \frac{1}{2}, & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=2,\quad \alpha\beta^T=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1, & \frac{1}{2}, & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$ …………4 分

$$A^3=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\beta^T$$

$$=2^2\alpha\beta^T=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}。$$ …………3 分

3.

解：因为 $$A=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & k \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & k-2 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & k+7 \end{bmatrix},$$ …………3 分

所以（1）k=−7 时，$R(A)$=2，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关； …………2 分

（2）k≠−7 时，R(A)=3，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。 …………2 分

4. $$\because A-E=\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ |A-E|=6\neq 0,\therefore A-E\text{ 可逆，且}(A-E)^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$ …………3 分

又由已知可得：$(A-E)X=6A$，　$$X=6(A-E)^{-1}A=6\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

…………4 分

考场座位号：

5（1）$\because |A| = 4 \neq 0, \therefore A$可逆.　　　　　　　　…………3 分

（2）因为

$$[A\,|\,E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

所以 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。　　　　　　　　…………4 分

四．综合题（共 26 分）

1. **解**：$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

可知（1）该向量组的秩=$R(A)$=2；　　　　　　　　…………4 分

（2）它的一个最大无关组为α_1, α_2；　　　　　　　　…………2 分

（3）$\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_4 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2$。　　　　　　　　…………4 分

2. **解**：对增广矩阵$\overline{A}$作初等行变换，得

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right],$$

可知　$R(A) = R(\overline{A}) = 3 < 4$，所以方程组有无穷多解。　　　　…………4 分

原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3x_3 \\ x_2 = 1 - 5x_3 \\ x_4 = -2 \end{cases},$$

因此（1）令$x_3 = 0$，可得一个特解为$X_0 = [-1,\ \ 1,\ \ 0,\ \ -2]^T$；　　　　…………2 分

（2）导出组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -5x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases},$$

令$x_3 = 1$，可得导出组的一个基础解系为$\xi = [-3,\ \ -5,\ \ 1,\ \ 0]^T$；　　　　…………2 分

（4）原方程组的通解为$X_0 + k\xi$（k为任何数）。　　　　…………2 分

3. 因为A为n阶反对称矩阵，所以A^T=-A，且$|A^T| = |-A|$；　　　　…………3 分

又$|A^T| = |A|$，n为奇数，$|-A| = (-1)^n |A| = -|A|$；

则$|A| = -|A|$，从而$|A| = 0$。　　　　…………3 分