

杭州电子科技大学学生考试卷 (A) 卷

考试课程	高等数学 A2	考试日期	2015 年 6 月 21 日	成绩	
课程号	A0714202	教师号		任课教师姓名	
考生姓名		学号 (8 位)		年级	专业

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

得分 一、 填空题 (本题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

1. 平面 $\Pi_1: x - y + 2z - 6 = 0$ 和平面 $\Pi_2: 2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$;

2. 设 L 是从 $A(1, \frac{1}{2})$ 沿曲线 $2y = x^2$ 到 $B(2, 2)$ 的弧段, 则 $\int_L \frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy = 0$;

3. 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$, 则 $\iint_D (1 + 2y) dx dy = \pi$;

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 在 $(0, \pi)$ 内的和函数为 $S(x) = 1 + x$, 则此级数在 $x = 3\pi$ 处收敛于 0 .

得分 二、 选择题 (本题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

1. 设 L 是从 $A(1, 0)$ 到 $B(-1, 2)$ 的直线段, 则 $\int_L (x + y) ds = (B)$

(A) $\sqrt{2}$; (B) $2\sqrt{2}$; (C) 2; (D) 0.

2. 函数 $f(x) = x^2 e^{x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内展开为 x 的幂级数为 (C).

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$; (B) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$; (C) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{n!}$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

3. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(xy, z) = x$ 所确定, 其中 $F(u, v)$ 具有连续的一阶偏导数, 则 $z_x + z_y$ 等于 (A)

(A) $\frac{1 - yF_1 - xF_1}{F_2}$; (B) $\frac{1 - yF_1 - xF_1}{F_2}$; (C) 0; (D) 1.

4. 设 L 是圆域 $D: x^2 + y^2 \leq -2x$ 的正向边界, 则 $\oint_L (x^3 - y) dx + (x - y^3) dy$ 等于 (D)

(A) -2π ; (B) 0; (C) $\frac{3}{2}\pi$; (D) 2π .

5. 设 Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 0$ 与 $z = 1$ 所围立体的外侧, 则 $\oiint_{\Sigma} z dx dy = (B)$

(A) 3π ; (B) π ; (C) -2π ; (D) 2π .

6. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x = 1$ 处发散, 则该级数在 $x = -4$ 处的敛散性为 (C)

(A) 绝对收敛; (B) 条件收敛; (C) 发散; (D) 敛散性无法判定.

7. [3 分] 下列级数中收敛的是 (D)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n2^n}$;
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{n}}$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^2}$, 其中 $0 < a < 1$.

8. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dx \int_{-x}^{2x-x^2} f(x, y) dy$ 的积分次序交换后为 (B)

(A) $\int_0^1 dy \int_{-y}^0 f(x, y) dx$; (B) $\int_0^1 dy \int_{-y}^{1-y^2} f(x, y) dx$;
(C) $\int_0^1 dy \int_0^{1-y^2} f(x, y) dx$; (D) $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx$.

三、试解下列各题 (本题共 6 小题, 每小题 6 分, 共 36 分)

得分 1. 设 $f(x, y) = x \ln(x + \ln y)$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x} = \ln(x + \ln y) + \frac{x}{x + \ln y}$... 3'

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y(x + \ln y)}$... 3'

得分 2. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}}$ 的敛散性, 并给出理由 (若是收敛, 要说明是条件收敛还是绝对收敛).

解 $\because \left| \frac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$... 2'

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛 ... 1'

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}} \right|$ 收敛 ... 1'

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}}$ 收敛, 且为绝对收敛 ... 2'

得分 3. 计算 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的区域.

解 $D: -1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq y^2 + 4$... 2'

$\iint_D xy dx dy = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y^2+4} xy dx$...

$= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 [y(y^2+4)^2 - y^5] dy$... 2'

$= \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} + \frac{2}{3} y^3 + 2y^2 - \frac{1}{6} y^6 \right]_{-1}^2$

$= \frac{45}{8} = \frac{135}{24}$... 2'

得分 4. 立体 Ω 由曲面 $x^2 + y^2 = 4z$ 和平面 $z = 4$ 所围成, 求其表面积.

解 Ω 表面可分 S_1 上 S_2 两部分 ... 1'

S_1 上: 面积 $S_1 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$... 1'

S_2 下: 面积 $S_2 = \iint_{x^2+y^2 \leq 16} \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2} dx dy$... 2'

$= \iint_{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 4} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\rho^2} \rho d\rho d\theta$

$= 2\pi \cdot 2 \int_0^4 (1 + \frac{1}{4}\rho^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + \frac{1}{4}\rho^2)$

$= \frac{8\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1)$... 2'

$S_{\Omega} = S_1 + S_2 = \frac{40\pi}{3} (5\sqrt{5} + 1)$... 1'

得分

5. 求 $\int_0^1 \int_0^{1-y} e^{x^2+y^2} dx dy$.

解 原式 = $\int_0^1 \int_0^{1-y} e^{x^2+y^2} dx dy$
 $= \int_0^1 e^{y^2} dy \int_0^{1-y} e^{x^2} dx$
 $= \int_0^1 e^{y^2} dy \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{y^2} dy \int_y^1 e^{x^2} dx$
 $= \frac{\pi}{4} [e^{x^2}]_0^1 - \int_0^1 e^{y^2} dy \int_y^1 e^{x^2} dx$
 $= \frac{\pi}{4} (e-1) - \dots$

得分

6. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的收敛域和它的和函数.

解 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, R = 1$
 $x \in (-1, 1)$ 内收敛
 $x = \pm 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(\pm 1)^n$ 发散
 \therefore 收敛域 $C = (-1, 1)$
 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n$
 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$
 $= (\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^n dt)' + x (\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} dt)'$
 $= (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1})' + x (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n})'$
 $= (\frac{x^2}{2})' + x \cdot (\frac{x}{1-x})'$
 $= \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{3x-x^2}{(1-x)^2}$

四、应用题 [本题共 15 分]

得分

1. (5 分) 求曲线 $x=t, y=-t^2, z=3t-1$ 上一点处与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程.

解 $T_{t=1} = (x, y, z)' = (1, -2, 3)$
 $\eta = (1, 2, 1)$
 $\text{由 } T_{t=1} \perp \eta \Rightarrow T_{t=1} \cdot \eta = 0 \Rightarrow t=1$
 $\text{切点 } M_0(1, -1, 2) \quad T_{t=1}/M_0 = (1, -2, 3)$
 $\text{切线方程 } \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$

2. (10 分) 设曲面 $S: \frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ 和平面 $\pi: 2x+2y+z+5=0$.

(1) 试求曲面 S 上平行于平面 π 的切平面方程;

(2) 试求曲面 S 和平面 π 之间的最短距离.

解 曲面 S 上点 $M(x, y, z)$ 处法向量 $\vec{n} = (x, 2y, \frac{z}{2})$
 $\text{已知平面 } \pi \text{ 法向量 } \vec{n}_0 = (2, 2, 1)$
 $\text{由 } \vec{n} \parallel \vec{n}_0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{2y}{2} = \frac{z/2}{1} = t$
 $x=2t, y=t, z=2t$
 $t=\frac{1}{2} \Rightarrow M_1(1, \frac{1}{2}, 1) \quad \text{切平面 } \pi_1: 2(x-1)+2(y-\frac{1}{2})+(z-1)=0$
 $t=-\frac{1}{2} \Rightarrow M_2(-1, -\frac{1}{2}, -1) \quad \text{切平面 } \pi_2: 2(x+1)+2(y+\frac{1}{2})+(z+1)=0$
 M_1, M_2 到平面 π 距离分别为
 $d_1 = \frac{|2x+2y+z+5|}{3} \Big|_{M_1} = \frac{8+1}{3} = 3$
 $d_2 = \frac{|2x+2y+z+5|}{3} \Big|_{M_2} = \frac{-2-1}{3} = 1$
 \therefore 最短距离 $d_{\min} = \frac{1}{3}$

得分

五、综合题 [本题 8 分]

计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} 3xz^2 dydz + y(z^2+1) dzdx + (9-z^3) dxdy$, 其中 Σ 为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 + 1$ ($1 \leq z \leq 2$) 取下侧.

得分

六、证明题 [本题 5 分]

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, 证明: 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

也收敛.

解 补面 $\Sigma_1: z=2$ ($x^2+y^2 \leq 1$) 取上侧
 记 Σ 和 Σ_1 围成的区域为 V . 则 Σ 和 Σ_1 在 V 上
 取外侧法向量.

$$P = 3xz^2, Q = y(z^2+1), R = 9-z^3$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = z^2+1$$

利用 Gauss 公式 $\iint_{\Sigma+\Sigma_1} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dV$

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} 3xz^2 dydz + y(z^2+1) dzdx + (9-z^3) dxdy = \iiint_V (z^2+1) dV \quad (*)$$

$$(*) \text{ 在 } \Sigma_1 \text{ 上 } \iint_{\Sigma_1} (z^2+1) dV = \int_1^2 z^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy + \int_1^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy = \frac{2^3}{12} \pi + \pi$$

$$\text{从而 } \iint_{\Sigma} 3xz^2 dydz + y(z^2+1) dzdx + (9-z^3) dxdy = \pi$$

$$\therefore \iint_{\Sigma} 3xz^2 dydz + y(z^2+1) dzdx + (9-z^3) dxdy = \frac{11}{12} \pi$$

证明

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_4}{u_3} \cdots \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_1} = \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{v_4}{v_3} \cdots \frac{v_{n+1}}{v_n} \Rightarrow 2$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_1} \leq \frac{v_{n+1}}{v_1} \quad \text{即} \quad \frac{u_{n+1}}{u_1} < \frac{u_1}{v_1} v_{n+1}$$

$$\text{当 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛时, 由比较法知 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 也收敛.}$$