考场座位号：________

杭州电子科技大学信息工程学院学生考试卷（ A ）卷

课程名称	线性代数	考试日期	2018 年 1 月	成 绩	
考生姓名		任课教师姓名			
学号（8 位）		班级		专业	
考试形式：闭卷					
考试说明：选择、填空题、判断的答案请写在第 2 页上，否则无效！试卷和答题纸分开上交！					

一．填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1．已知 4 阶行列式第三行元素分别为-1,0,2,4，第四行元素相应的代数余子式分别为 10,5, a ,2，则 $a=$__________。

2．设 $A=\begin{bmatrix}1&3&0&0\\2&1&0&0\\0&0&3&3\\0&0&4&2\end{bmatrix}$，则 $|A|=$ ______。

3．设 A 为3阶方阵，且 $|A|=2$，则 $\left|3A^{-1}-2A^*\right|=$__________。

4．设 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&a&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵且满足 $AB=O$，则 $a=$__________。

5．对于 m 个方程，n 个未知量的方程组 $AX=O$，有 $R(A)=r$，则方程组的基础解系中有______个解向量。

6．设向量组 $\alpha_1=[1,\ 1,\ 0]^T$，$\alpha_2=[1,\ 3,\ -4]^T$，$\alpha_3=[5,\ 3,\ t]^T$ 线性相关，则 t 的值为____。

二．单项选择题 （每小题 3 分，共 24 分）

1．二阶行列式 $\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}$ 等于（　　　　）

（A）0；　　（B）1；　　（C）$\cos 2\alpha$；　　（D）$\sin 2\alpha$

2．若 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=k\neq 0$，则 $\begin{vmatrix}2a_{11}&2a_{12}&2a_{13}\\2a_{21}+a_{11}&2a_{22}+a_{12}&2a_{23}+a_{13}\\2a_{31}&2a_{32}&2a_{33}\end{vmatrix}=$（　　　　）.

（A） $8k$；　　（B） $2k$；　　（C） $-8k$；　　（D） $-2k$。

3．对于 n 阶方阵 A，若 $AA^T=2E$，则 $|A|=$（　　　　）

（A） ± 2；　　（B） $\pm\sqrt{2}$；　　（C） $\pm 2^n$；　　（D） $\pm 2^{\frac{n}{2}}$。

4．设 A 为 n 阶方阵，B 为 n 阶反对称矩阵，则下列矩阵中为反对称矩阵的是（　　　　）

（A） $AB+BA$；　　（B） B^2；　　（C） $AB-BA$；　　（D） A^2.

5．已知 n 阶方阵 A 可逆，则（　　　　）成立

（A） $(2A)^{-1}=2A^{-1}$；　　（B） $(-2A)^{-1}=-\frac{1}{2}A^{-1}$；

（C） $\left|(-2A)^{-1}\right|=\frac{1}{2}|A|^{-1}$；　　（D） $\left|(2A^{-1})\right|=2|A|$.

6．若 $A=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}$，则 $R(A)=$（　　　　）.

（A） 1；　　（B） 2；　　（C） 3；　　（D） 4.

7．设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩为 3，则（　　）

（A）任三个向量线性无关　　（B）任两个向量线性无关

（C） 任四个向量线性相关　　（D） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 无零向量

8．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的三个解向量，且 $R(A)=3$，$\alpha_1=[1,\ 2,\ 3,\ 4]^T$，

$\alpha_2+\alpha_3=[0,\ 1,\ 2,\ 3]^T$，$k$ 为任意常数，则 $AX=\beta$ 的通解为（　　　　）

（A） $\alpha_1+k[0,\ 1,\ 2,\ 3]^T$；　　（B） $\alpha_1+k[3,\ 4,\ 5,\ 6]^T$；　。

（C） $\alpha_1+k[1,\ 1,\ 1,\ 1]^T$；　　（D） $\alpha_1+k[2,\ 3,\ 4,\ 5]^T$

三．判断题（对的打√，错的打×．注意写 T 或 F 的无效！ 每小题 1 分，共 7 分）

1． n 阶行列式 D 中零元素的个数为 $n+1$ 个，则 $D=0$.　　（　　　）

2． $\begin{vmatrix}a_1&b&c&d\\0&a_2&c&d\\0&0&a_3&d\\0&0&0&a_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&0&a_4\\0&0&a_3&d\\0&a_2&c&d\\a_1&b&c&d\end{vmatrix}$.　　（　　　）

3． 若 $A^2=A$，则 $A=0$ 或 $A=E$.　　（　　　）

4． 若 A，B 都是可逆矩阵，则 $A+B$ 也是可逆矩阵.　　（　　　）

5． 两个同阶对角矩阵的和、差、乘积仍是对角矩阵；　　（　　　）

6． 若 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则表示法唯一.　　（　　　）

7． 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是同维向量，若向量组 α_1,α_2 线性相关，α_3,α_4 线性无关，

则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.　　（　　　）

考场座位号：________

杭州电子科技大学信息工程学院学生考试卷（ A ）卷

课程名称	线性代数	考试日期	2018 年 1 月 日	成 绩	
考生姓名		任课教师姓名			
学号（8 位）		班级		专业	
考试形式： 闭卷					
考试说明： 试卷和答题纸分开上交，请在左上角写上座位号号码！					

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题
得分					

得分	

一． 填空题（每小题 3 分，本题共 18 分）

1. 1 2. 30 3. -0.5

4. 2 5. $n-r$ 6. 4

得分	

二． 选择题（每题 **3** 分，共 **24** 分）

1. C 2. A 3. D 4. A 5. B 6. B 7. C 8. D

得分	

三． 判断题（每题 **1** 分，共 **7** 分）

1. × 2. × 3. × 4. × 5. √ 6. × 7. √

得分	

四． 计算题（每题 **6** 分，共 **36** 分）

1. 四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&3&4\\1&0&2&3\\1&5&2&1\\-1&1&5&2\end{vmatrix}$，求 $A_{13}+A_{23}+A_{43}$.

解：方法一： $A_{13}+A_{23}+A_{43}=A_{13}+A_{23}+0A_{33}+A_{43}=\begin{vmatrix}2&1&1&4\\1&0&1&3\\1&5&0&1\\-1&1&1&2\end{vmatrix}$ ……………3 分

$=-\begin{vmatrix}1&0&1&3\\2&1&1&4\\1&5&0&1\\-1&1&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&1&3\\0&1&-1&-2\\0&5&-1&-2\\0&1&2&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&-2\\5&-1&-2\\1&2&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&0\\5&4&8\\1&3&7\end{vmatrix}=-4$ …………6 分

方法一： $A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&0&3\\1&5&1\\-1&1&2\end{vmatrix}=27$，$A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}2&1&4\\1&5&1\\-1&1&2\end{vmatrix}=-39$，$A_{43}=(-1)^7\begin{vmatrix}2&1&4\\1&0&3\\1&5&1\end{vmatrix}=8$， …………6 分

所以，$A_{13}+A_{23}+A_{43}=27-39+8=-4$.

(注：A_{13}、A_{23}、A_{43} 算错一个扣 2 分.)

2. 已知 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-3&3\end{pmatrix}$，$f(x)=x^2-2x+3$，求 $f(A)$.

解：$f(A)=A^2-2A+3E$（这里写成 A^2-2A+3 扣 2 分） …………2 分

$=\begin{pmatrix}2&1\\-3&3\end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix}2&1\\-3&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ …………4 分

$=\begin{pmatrix}0&3\\-9&3\end{pmatrix}$ …………6 分

3 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&2&4\\1&1&2\end{pmatrix}$，并且 $C=A\left[(A^{-1})^2+A^*BA^{-1}\right]A$，化简 C 后计算 C 逆矩阵 C^{-1}

解：先化简，$C=A(A^{-1})^2A+AA^*BA^{-1}A=E+|A|B$ ………………………2 分

由于 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=1$，所以 $C=E+|A|B=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&3&4\\1&1&3\end{bmatrix}$ ………………………3 分

由于 $\left[C|E\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\2&3&4&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-1&-2\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]$，则 $C^{-1}=\begin{bmatrix}5&-1&-2\\-2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$ ……………6 分

4. 已知方阵 A 满足方程 $A^2-3A+E=0$，其中 E 为单位矩阵，试证 $A+E$ 可逆，并求其逆矩阵 $(A+E)^{-1}$.

解：容易算出 $(A+E)(A-4E)=A^2-3A-4E$ ………………2 分

由于 A 满足 $A^2-3A+E=0$， 所以 $(A+E)(A-4E)=A^2-3A-4E=-5E$，则 $A+E$ 可逆，……………4 分

另一方面， $(A+E)\left[-\frac{1}{5}(A-4E)\right]=E$ ， 所以 $(A+E)^{-1}=-\frac{1}{5}(A-4E)$ ………………6 分

5. 已知四维向量 α，β 满足 $3\alpha+4\beta=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$2\alpha+3\beta=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，求向量 α，β.

解：令 $\gamma_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\gamma_2=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$， 则由题意可得

$$\begin{cases}3\alpha+4\beta=\gamma_1\\ 2\alpha+3\beta=\gamma_2\end{cases}，\quad 解方程组可得\begin{cases}\alpha=3\gamma_1-4\gamma_2\\ \beta=3\gamma_2-2\gamma_1\end{cases}$$ ………………………2 分

所以，$\alpha=3\gamma_1-4\gamma_2=\begin{pmatrix}6\\3\\3\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\8\\12\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-5\\-9\\2\end{pmatrix}$， $\beta=3\gamma_2-2\gamma_1=\begin{pmatrix}-7\\4\\7\\-1\end{pmatrix}$ ………………6 分

6. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T$ ， $\alpha_2=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$ ， $\alpha_3=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 5\end{pmatrix}^T$ ， $\alpha_4=\begin{pmatrix}4 & -2 & 5 & 6\end{pmatrix}^T$ ， $\alpha_5=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5 & 7\end{pmatrix}^T$，求该向量组的秩，并确定一个极大无关组，将其余向量用该极大无关组线性表出.

解：$[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4\ \ \alpha_5]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & 3\\1 & -1 & 3 & -2 & 1\\2 & 1 & 3 & 5 & 5\\3 & 1 & 5 & 6 & 7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & 3\\0 & -2 & 2 & -6 & -2\\0 & -1 & 1 & -3 & -1\\0 & -2 & 2 & -6 & -2\end{bmatrix}$ ……………2 分

$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & 3\\0 & 1 & -1 & 3 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 2\\0 & 1 & -1 & 3 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ ……………3 分

由于 $r=2$，所以 α_1， α_2 构成了向量组的一个极大线性无关组。（不唯一！） …………4 分

于是， $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$， $\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2$， $\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2$ ………………………………6 分

得分	

五． 解答题及证明题（第一小题 10 分，第二小题 5 分，共 15 分）1. 判断非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4+4x_5=5\\ x_1-2x_2-x_3+3x_4-2x_5=-1\\ 2x_1-4x_2+x_3+3x_4+5x_5=7\\ 3x_1-6x_2+x_3+5x_4+6x_5=9\end{cases}$$ 是否有解，如果有解请写出其通解.

（注：请用特解和导出组的基础解系的形式表示通解）

解：对系数矩阵 A 的增广矩阵做初等行变换得

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 4 & 5\\1 & -2 & -1 & 3 & -2 & -1\\2 & -4 & 1 & 3 & 5 & 7\\3 & -6 & 1 & 5 & 6 & 9\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 4 & 5\\0 & 0 & -2 & 2 & -6 & -6\\0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -3\\0 & 0 & -2 & 2 & -6 & -6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 2\\0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$ ……….3 分

由于矩阵 A 的秩满足 $R(\mathrm{A})=R(\overline{\mathrm{A}})=2<5$， 所以方程组有无穷多解。 ……….4 分

原方程组的同解方程组 $\begin{cases}x_1=2+2x_2\text{-}2x_4\text{-}x_5\\ x_3=2+x_4\text{-}3x_5\end{cases}$，

令 $x_2=x_4=x_5=0$，得到原方程组的一个特解为 $X_0=\begin{bmatrix}2 & 0 & 3 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ ………………6 分

导出组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=2x_2\text{-}2x_4\text{-}x_5\\ x_3=x_4\text{-}3x_5\end{cases}$ 令 x_2，x_4，x_5 中一个为 1，其余全为 0，得到方程组的一,基础解系为

$\xi_1=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$，$\xi_2=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$，$\xi_3=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ …………………9 分

则原方程组的通解为 $X_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$（其中 k_1，k_2，k_3 为任意常数）。 . …………………10 分

2. 设 n 阶方阵 A 可逆，将 A 的第 i 列和第 j 列互换后得到的矩阵记为 B，(1) 证明 B 为可逆矩阵； (2) 求 $B^{-1}A$

证明： (1) 由题意容易得到

$B=AQ(i,j)$, 其中$Q(i,j)$为单位矩阵i列与j列交换后得到的初等矩阵 ……….1 分

由于方阵 A 可逆，所以$|B|=|AQ(i,j)|=-|A|\neq 0$, 则矩阵B可逆. ……….2 分

(2) 由于 $B=AQ(i,j)$，则有 $B^{-1}=Q^{-1}(i,j)A^{-1}=Q(i,j)A^{-1}$， ……….3 分

所以，$B^{-1}A=Q(i,j)A^{-1}A=Q(i,j)$ ……….5 分