Para cada una de las funciones siguientes y para los valores de a y n indicados se pide:

a) Hallar el polinomio de Taylor

b) El resto de Lagrange correspondiente al polinomio obtenido en a:

1- $f(x) = \sqrt{x}$ para $a = 4$ y $n = 3$

R// $f(x) = \sqrt{x} = f(a) = \sqrt{4} = 2$ $f'(x) = (1/2) * x^{(-1/2)}$ $f'(a) = (1/2) * 4^{(-1/2)} = 1/4$ $f''(x) = (-1/4) * x^{(-3/2)}$ $f''(a) = (-1/4) * 4^{(-3/2)} = -1/8$ $f'''(x) = (3/8) * x^{(-5/2)}$ $f'''(a) = (3/8) * 4^{(-5/2)} = 3/32$

Ahora podemos usar la formula de Taylor para encontrar el polinomio de taylor

$$P(x) = 2 + (1/4)(x-4) - (1/8)(x-4)^2 + (3/32)(x-4)^3$$

2- $f(x) = \sqrt{1+x}$ para $a = 0$ y $n = 4$

R// $f(x) = \sqrt{1+x} = f(a) = \sqrt{1+x} = 1$ $f'(x) = (1/2) * (1+x)^{(-1/2)}$ $f'(a) = (1/2) * (1+0)^{(-1/2)} = 1/2$ $f''(x) = (-1/4) * (1+x)^{(-3/2)}$ $f''(a) = (-1/4) * (1+0)^{(-3/2)} = -1/4$ $f'''(x) = (3/8) * (1+x)^{(-5/2)}$ $f'''(a) = (3/8) * (1+0)^{(-5/2)} = 3/8$ $f''''(x) = (-15/16) * (1+x)(-7/2)$ $f''''(a) = (-15/16) * (1+0)^{(-7/2)} = -15/16$

usando la formula de taylor, el polinomio de taylor es:

$$P(x) = 1 + (1/2)x - (1/4)x^2 + (3/8)^3 - (15/16)x^4$$

$3 - f(x) = \ln(\cos x)$ para $a = 0$ y $n = 3$

R//

$f(x) = \ln(\cos x) = f(a) = \ln(\cos(0)) = \ln(1) = 0$ $f'(x) = -\tan(x)$ $f'(a) = -\tan(0) = 0$

$f''(x) = -\sec^2(x)$ $f''(a) = -\sec^2(0) = -1$ $f'''(x) = -2 * \sec^2(x)$

$* \tan(x)$ $f'''(a) = -2 * \sec^2(0) * \tan(0) = 0$

usando la formula de Taylor, el polinomio de Taylor es:

$P(x) = 0 + 0(x-0) - (1/2)(x-0)^2 + 0(x-0)^3 = -(1/2)x^2$

$4 - f(x) = \cos x$ para $a = \frac{\pi}{3}$ y $n = 4$

R// $f(x) = \cos(x) = f(a) = \cos(\pi/3) = 1/2$ $f'(x) = -\sin(x)$ $f'(a) = -\sin(\pi/3) = -\sqrt{3}/2$

$f''(x) = -\cos(x)$ $f''(a) = -\cos(\pi/3) = -1/2$ $f'''(x) = \sin(x)$

$f'''(a) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ $f''''(x) = \cos(x)$ $f''''(a) = \cos(\pi/3) = 1/2$

usando la formula de taylor, el polinomio de taylor es:

$P(x) = 1/2 - (\sqrt{3}/2)(x - \pi/3) - (1/2)(x - \pi/3)^2 + (\sqrt{3}/2)(x - \pi/3)^3 + (1/2)(x - \pi/3)^4$

$5 - f(x) = \operatorname{sen} x$ para $a = \frac{\pi}{4}$ y $n = 4$

R//

$f(x) = \operatorname{sen}(x) = f(a) = \operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ $f'(x) = \cos(x)$ $f'(a) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ $f''(x) = -\operatorname{sen}(x)$

$f''(a) = -\operatorname{sen}(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$ $f'''(x) = -\cos(x)$ $f'''(a) = -\cos(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$

$f''''(x) = \operatorname{sen}(x)$ $f''''(a) = \operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

el polinomio de taylor es:

$p(x) = (\sqrt{2}/2) + (\sqrt{2}/2)(x - \pi/4) - (\sqrt{2}/2)(x - \pi/4)^2 - (\sqrt{2}/2)(x - \pi/4)^3 + (\sqrt{2}/2)(x - \pi/4)^4$

6: $f(x) = \text{arctg}\ x$ para $a = 1$ y $n = 3$

R// $f(x) = \text{arctg}(x)$

$f(a) = \text{arctg}(1) = \pi/4$ $f'(x) = 1/(1+x^2)$ $f'(a) = 1/(1+1^2) = 1/2$ $f''(x) = -2x/(1+x^2)^2$

$f''(a) = -2(1)/(1+1^2)^2 = -1/4$ $f'''(x) = (6x^2-2)/(1+x^2)^3$ $f'''(a) = (6(1)^2-2)/$

$(1+1^2)^3 = 2/8 = 1/4$

el polinomio de taylor es:

$P(x) = \pi/4 + (1/2)(x-1) - (1/4)(x-1)^2 + (1/4)(x-1)^3$

* Resto de Lagrange para $f(x) = \sqrt{x}$ $a = 4$ y $n = 3$

La formula para Lagrange para la solucion:

$Rn(x) = f^{\wedge}(n+1)(c)(x-a)^{\wedge}(n+1)/(n+1)!$

dado que $n = 3$, necesitamos calcular la cuarta derivada de $f(x)$; que es $f^{\wedge}(4)(x)$. en este caso $f^{\wedge}(4)(x) = 0$ para cualquier valor de x.

entonces el resto lagrange se reduce a: $R3(x) = 0$

* Resto de Lagrange para $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a = 0$ y $n = 4$

dado que $n = 4$ necesitamos la quinta derivada de $f(x)$, que es $f^{\wedge}(5)(x)$ en ese caso, $f^{\wedge}(5)(x) = 3/8 * (1+x)^{\wedge}(-7/2)$.

ahora necesitamos encontrar un valor "c" en el intervalo $[0, x]$ para el cual $f^{\wedge}(5)(c)$ sea maximo esto ocurre en el punto $c = x$. por lo tanto

$R4(x) = (f^{\wedge}(5)(x)(x-0)^{\wedge}5)/5! = (3/8 * (1+x)^{\wedge}(-7/2) * x^5)/120$

* Resto de Lagrange para $f(x) = Ln(\cos x)$ para $a = 0$ y $n = 3$

para este caso $n = 3$ por lo que necesitamos la cuarta derivada de $f(x)$, que es $f^{\wedge}(4)(x)$,

en este caso, $f^{\wedge}(4)(x) = 0$ para cualquier valor de x

entonces, el resto de Lagrange se reduce a:

$R3(x) = 0$

* Resto de Lagrange para $f(x) = \cos$ $a = \frac{\pi}{3}$ y $n = 4$
dado que $n=4$ necesitamos calcular la quinta derivada de $f(x)$ que es $f^{\wedge}(5)(x)$. en este caso $f^{\wedge}(5)(x) = \operatorname{sen}(x)$ necesitamos encontrar un valor "c" en el intervalo $[\pi/3, x]$ para el cual $f^{\wedge}(5)(c)$ sea maximo esto ocurre en el punto $c = \pi/3$

$$R_4(x) = (\operatorname{sen}(\pi/3)(x-\pi/3)^5/5!$$

* Resto de Lagrange para $f(x)$ $\operatorname{sen}(x)$, $a = \pi/4$, $n = 4$
dado que $n = 4$, necesitamos calcular la quinta derivada de $f(x)$, que es $f^{\wedge}(5)(x)$. en este caso, $f^{\wedge}(5)(x) = \cos(x)$ para el resto de Lagrange, necesitamos encontrar un valor "c" en el intervalo $[\pi/4, x]$ para el cual $f^{\wedge}(5)(c)$ sea maximo. esto ocurre en el punto $c = \pi/4$

$$R_4(x) = (\cos(\pi/4)(x-\pi/4)^5)/5!$$

* Resto de Lagrange para $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a = 7$ y $n = 3$
en este caso $n = 3$ por lo que necesitamos calcular derivada de $f(x)$; que es $f^{\wedge}(4)(x)$.
en este caso, $f^{\wedge}(4)(x) = 3/8 * (7+x)^{\wedge}(-7/2)$
para el resto de lagrange, necesitamos encontrar un valor "c" en el intervalo $[7, x]$ para el cual $f^{\wedge}(4)(c)$ sea maximo, esto ocurre en el punto $c = x$

$$R_3(x) = (f^{\wedge}(4)(x)(x-7)^{\wedge}4)/4!$$