《量子力学教程》习题解答

郑锦阳

2023 年 3 月 8 日

目录

1 波函数与薛定谔方程

题目 1

求与下列各粒子相关的 de Broglie 波波长：

(1) 能量为 100 电子伏特的自由电子；

(2) 能量为 0.1 电子伏特的自由中子；

(3) 能量为 0.1 电子伏特、质量为 1 克的自由粒子；

(4) 温度 $T = 1\,\mathrm{k}$ 时，具有动能 $E = \dfrac{3kT}{2}$ 的氦原子，其中 k 为玻尔兹曼常数.

解答 根据粒子的动能与动量之间的关系

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{1}$$

结合德布罗意波波长的表达式

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \tag{2}$$

(1) 题设自由电子的德布罗意波波长为

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_eE_e}} = 1.23 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

(2) 题设自由中子的德布罗意波波长为

$$\lambda_{\mathrm{n}} = \frac{h}{\sqrt{2m_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}}} = 9.04 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$$

(3) 题设自由粒子的德布罗意波波长为

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = 1.17 \times 10^{-22}\,\mathrm{m}$$

(4) 氦原子包含 2 个中子和 2 个质子，其德布罗意波波长为

$$\lambda_{\mathrm{He}} = \frac{h}{\sqrt{2m_{\mathrm{He}}E_{\mathrm{He}}}} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_{\mathrm{He}} \cdot \frac{3}{2}kT}} = \frac{h}{\sqrt{3 \cdot (4m_{\mathrm{n}}) \cdot \frac{3}{2}kT}} = 1.25 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$$

题目 2

设一电子被电势差 U 所加速，最后打在靶上. 若电子的动能转化为一光子，求当这光子相应的光波波长分别为 5000Å（可见光），1Å（X 射线），0.001Å（γ 射线）时，加速电子所需的电势差各是多少？

解答 电子的动能为

$$E_k = eU$$

光子的能量为

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

电子的动能会全部转化为光子的能量，因此电势差

$$U = \frac{hc}{e\lambda} = \frac{hc}{e} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{\lambda}$$

当光子对应的光波波长为 5000Å 时，电势差为

$$U = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{\lambda} = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{5000 \times 10^{-10}} = 2.48\,\mathrm{V}$$

当光子对应的光波波长为 1Å 时，电势差为

$$U = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{\lambda} = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{10^{-10}} = 1.24 \times 10^{4}\,\mathrm{V}$$

当光子对应的光波波长为 0.001Å 时，电势差为

$$U = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{\lambda} = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{0.001 \times 10^{-10}} = 1.24 \times 10^{7}\,\mathrm{V}$$

练习 5

设用球坐标表示，粒子波函数表为 $\psi(\rho, \theta, \varphi)$，求：

(1) 粒子在球壳 $(r, r + \mathrm{d}r)$ 中被测到的概率；

(2) 在 (θ, φ) 方向的立体角元 $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ 中找到粒子的概率.

解答　粒子在 $(r \to r+\mathrm{d}r, \theta \to \theta+\mathrm{d}\theta, \varphi \to \varphi+\mathrm{d}\varphi)$ 范围内被探测到的概率为

$$P = |\psi(r,\theta,\varphi)|^2 r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

(1) 粒子在球壳 $(r, r+\mathrm{d}r)$ 中被测到的概率为

$$P = \left[\int_0^{\pi} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} |\psi(r,\theta,\varphi)|^2\, \mathrm{d}\varphi\right] r^2\, \mathrm{d}r$$

(2) 在 (θ, φ) 方向的立体角元内找到粒子的概率为

$$P = \left[\int_0^{+\infty} |\psi(r,\theta,\varphi)|^2 r^2\, \mathrm{d}r\right] \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

习题 20

设 $\varphi(x) = Ax(a-x)$，其中 $0 \leqslant x \leqslant a$，求：

(1) 归一化常数 A

(2) 在何处找到粒子的概率最大？

解答　按照统计诠释，一个真实的波函数必须满足归一化条件

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\vec{r})|^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 1 \tag{3}$$

(1) 让波函数在全空间归一化

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\, \mathrm{d}x = \int_0^a |\varphi(x)|^2\, \mathrm{d}x = \int_0^a |Ax(a-x)|^2\, \mathrm{d}x = |A|^2 \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}ax^4 + \frac{1}{3}a^2x^3\right)_0^a = 1$$

解得

$$A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$$

(2) 粒子的概率密度为

$$\rho(x) = |Ax(a-x)|^2 = \frac{30}{a^5}x^2(a-x)^2$$

对概率密度求导，寻找极值点

$$\rho'(x) = \frac{30}{a^5}[4x^3 - 6ax^2 + 2a^2x] = \frac{60}{a^5}x(2x-a)(x-a)$$

因此，$\rho(x)$ 在 $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{a}{2}, a\right)$ 上单调递减，在极大值点 $x = \frac{a}{2}$ 附近找到粒子的概率最大.

习题 21

若粒子只在一维空间中运动，它的状态可用波函数

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} A\sin\dfrac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}, & 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

来描述，式中 E 和 a 分别为确定的常数，而 A 是任意常数，求：

(1) 归一化的波函数；

(2) 概率密度 $w(x,t)$；

(3) 在何处找到粒子的概率最大？

(4) $\bar{x}$ 和 $\overline{x^2}$ 的值.

解答 (1) 先将波函数归一化

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_0^a \left|A \sin \frac{\pi x}{a}\right|^2 \mathrm{d}x = \int_0^a \frac{A^2}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{A^2}{2}\mathrm{d}x = 1$$

解得

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

所以波函数为

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{a}} \sin\dfrac{\pi x}{a} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}, & 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 概率密度 $w(x,t)$ 为

$$w(x,t) = \begin{cases} \dfrac{2}{a} \sin^2\dfrac{\pi x}{a} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}, & 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 对概率密度函数求导，寻找极值点

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{a^2} \sin\dfrac{2\pi x}{a}, & 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

综上，$w(x,t)$ 在 $\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{a}{2},a\right)$ 上单调递减，在极大值点 $x=\dfrac{a}{2}$ 附近找到粒子的概率最大.

(4) 概率密度函数为

$$w(x) = |\Phi(x)|^2 = \frac{2}{a}\sin^2\frac{\pi x}{a} = \frac{1}{a}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)$$

求变量 $g(x)$ 均值的通用方法是

$$\overline{g(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) g(x)\,\mathrm{d}x$$

于是分别有

$$\overline{x} = \int_0^a \frac{x}{a}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2a} - \frac{a^2}{4\pi^2}\cos\frac{2\pi x}{a} + \frac{ax}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{a}\right)\bigg|_0^a = \frac{a}{2}$$

$$\overline{x^2} = \int_0^a \frac{x^2}{a}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3a} - \frac{x^2}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{a} - \frac{ax}{2\pi^2}\cos\frac{2\pi x}{a} + \frac{a^3}{4\pi^3}\sin\frac{2\pi x}{a}\right)\bigg|_0^a = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2\pi^2}$$

备注：可能会用到的积分公式

$$\int x\cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\cos ax - \frac{1}{a}x\sin ax + C$$

$$\int x^2\cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^2\sin ax + \frac{2}{a^2}x\cos ax - \frac{2}{a^3}\sin ax + C$$

题目 1.3

对于一维自由粒子：

(a) 设波函数为 $\psi_p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}$，试用 Hamilton 算符 $\hat{H}=\dfrac{\hat{p}^2}{2m}=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}$ 对 $\psi_p(x)$ 运算，验证 $\hat{H}\psi_p(x)=\dfrac{p^2}{2m}\psi_p(x)$. 说明动量本征态 $\psi_p(x)$ 也是 Hamliton 量（能量）本征态，本征值为 $E=\dfrac{p^2}{2m}$.

(b) 设粒子在初始（$t=0$）时刻 $\psi(x,0)=\psi_p(x)$，求 $\psi(x,t)$.

(c) 设波函数为 $\psi(x)=\delta(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int e^{ikx}\,dk=\dfrac{1}{2\pi}\int e^{ipx/\hbar}\,dp$，可以看成是无穷多个平面波 e^{ipx} 的叠加，即无穷多个动量本征态 e^{ipx} 的叠加. 试问 $\psi(x)=\delta(x)$ 是否是能量本征态？

(d) 设粒子在 $t=0$ 时刻 $\psi(x,0)=\delta(x)$，求 $\psi(x,t)$.

解答 (a) 我们对波函数使用 Hamilton 算符

$$\hat{H}\psi_p(x)=-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{ip}{\hbar}\right)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}=\frac{p^2}{2m}\psi_p(x)$$

这说明动量本征态 $\psi_p(x)$ 也是 Hamilton 量（能量）本征态，本征值为 $E=\dfrac{p^2}{2m}$
(b) 粒子在初始时刻 $\psi(x,0)=\psi_p(x)=e^{ip_0x/\hbar}$，将动量表象波函数变换到坐标表象波函数

$$\psi_p(x)=\mathscr{F}[\psi(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ipx/\hbar}\left[e^{-ipx/\hbar}\right]\,dx=\sqrt{2\pi\hbar}\delta(p-p_0)$$

由于 $\psi(x,0)$ 是能量本征态

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{2\pi\hbar}e^{ipx/\hbar}\delta(p-p_0)\,dp\cdot e^{-iEt/\hbar}=e^{-ip_0x/\hbar-iEt/\hbar}$$

(c) 对于自由粒子而言，动量本征态和能量本征态是等价的，但是题目中的 $\psi(x,0)=\delta(x)$ 是无穷多个动量本征态 e^{ipx} 的叠加（即所谓叠加态），所以显然不是能量本征态。

习题 12

由下列两个定态波函数计算几率流密度：

(1) $\psi_1(r)=\frac{A}{r}e^{ikr}$

(2) $\psi_2(x)=\dfrac{A}{r}e^{-ikr}$

从所得结果证明 $\psi_1(r)$ 表示向外传播的球面波，$\psi_2(r)$ 表示向内（即向原点）传播的平面波.

解答 概率流密度的表达式为

$$\vec{j}(\vec{r},t)=-\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\right)\tag{4}$$

分别计算 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 的概率流密度

$$\vec{j}_1(\vec{r})=-\frac{i\hbar}{2m}\left\{\left(\frac{A}{r}e^{-ikr}\cdot\frac{A}{r}e^{ikr}ik\right)-\left[\frac{A}{r}e^{ikr}\cdot\frac{A}{r}e^{-ikr}(-ik)\right]\right\}=+\frac{i\hbar}{m}\frac{A^2k}{r^2}$$

$$\vec{j}_2(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left\{\left[\frac{A}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\cdot\frac{A}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}(-\mathrm{i}k)\right]-\left(\frac{A}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\cdot\frac{A}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{i}k\right)\right\} = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\frac{A^2k}{r^2}$$

由此可见 $\psi_1(r)$ 表示向外传播的球面波，$\psi_2(r)$ 表示向内（即向原点）传播的平面波.

A 常用物理学常量

我们熟知一些物理学常量

1. 电子的带电量为 $e = -1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}$
2. 电子质量 $m_e = 9.109\,383\,7\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$
3. 中子质量 $m_{\mathrm{n}} = 1.674\,928\,6\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$
4. 氦原子质量 $m_{\mathrm{He}} = 6.646\,473\,1\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$
5. 普朗克常量 $h = 6.626\,070\,15\times10^{-34}\,\mathrm{m}^2{\cdot}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
6. 玻尔兹曼常量 $k = 1.380\,649\times10^{-23}\,\mathrm{m}^2{\cdot}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}{\cdot}\mathrm{K}^{-1}$
7. 能量换算 $1\,\mathrm{eV} = 1.602\,176\,62\times10^{-19}\,\mathrm{J}$

B 常用数学工具

B.1 傅里叶变换

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\right]^*\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega \tag{6}$$

B.2 拉普拉斯变换

$$\bar{f}(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \bar{f}(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p \tag{8}$$