Καθηγητής Π. Λουρίδας

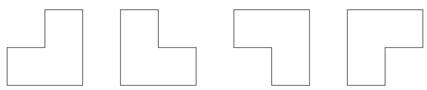
Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας

Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τρόμινο Ψηφιδωτό

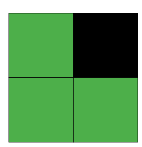
Έστω ότι θέλουμε να καλύψουμε μια επιφάνεια χρησιμοποιώντας πλακάκια, ή ψηφίδες, με συγκεκριμένα σχήματα. Θέλουμε να το πετύχουμε αυτό ώστε να μην υπάρχουν κενά στην επιφάνεια, και να μην υπάρχουν αλληλοκαλήψεις. Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται *ψηφίδωση* ή *ψηφιδοθέτηση* (tesselation, tiling). Αναλόγως των σχημάτων των ψηφίδων, μπορούν να προκύψουν διαφορετικά ψηφιδωτά, μερικά από τα οποία δίνουν ένα κομψό αισθητικό αποτέλεσμα.

Εμείς θα ασχοληθούμε με την ψηφιδοθέτηση τετραγώνων επιφανειών, δηλαδή επιφανειών διαστάσεων $2^n \times 2^n$. Οι ψηφίδες μας θα έχουν το σχήμα L, που θα απαρτίζεται από τρία τετράγωνα διαστάσεων $1{\times}1$, επομένως θα είναι τρόμινο. Τα τρόμινο θα μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε σε τέσσερες προσανατολισμούς (που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90 μοιρών):

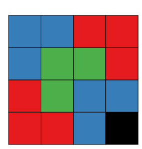


Αφού το κάθε τρόμινο αποτελείται από τρία τετράγωνα $1{\times}1$, δεν μπορεί η κάλυψη τετραγώνων $2^n{\times}2^n$ να είναι τέλεια: στην καλύτερη περίπτωση, θα μένει ένα τετράγωνο κενό, θα έχουμε μια τρύπα. Αλλά δεν μπορούμε να το αποφύγουμε αυτό.

Στην περίπτωση του τετραγώνου $2^1 \times 2^1$, η κάλυψη είναι απλή: απλώς τοποθετούμε ένα τρόμινο πάνω στο τετράγωνο.

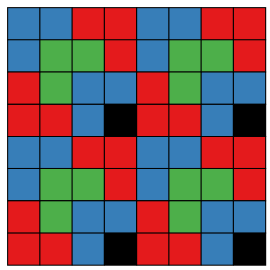


Στην περίπτωση του τετραγώνου $2^2 \times 2^2$, η κάλυψη επίσης μπορεί να γίνει εύκολα.



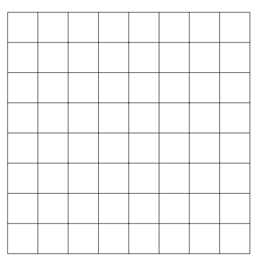
Πιο ενδιαφέρουσα είναι η γενικότερη περίπτωση του τετραγώνου $2^n{\times}2^n$, με $n > 2$. Για να καλύψουμε το τετράγωνο αυτό, εργαζόμαστε αναδρομικά: διαιρούμε το τετράγωνο αυτό σε τέσσερα τεταρτημόρια μεγέθους $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ το καθένα, και ξεκινάμε τη διαδικασία κάλυψης κάθε ενός από αυτά. Συνεχίζοντας τη διαδικασία αναδρομικά, θα φτάσουμε σε τεταρτημόρια μεγέθους $2^2 \times 2^2$, τα οποία ξέρουμε να τα καλύπτουμε.

Αυτο σαν λογική στέκει, πλην όμως δεν μας εξασφαλίζει ότι τελικά στο τετράγωνο $2^n \times 2^n$ θα υπάρχει μόνο μια τρύπα. Για παράδειγμα, αν έχουμε ένα τετράγωνο $2^3 \times 2^3$, η αναδρομική διαδικασία που περιγράψαμε θα μας δώσει σαν αποτέλεσμα το παρακάτω:

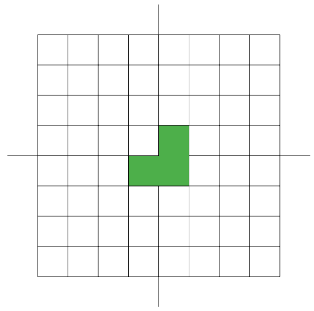


Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε όμως ότι αφού κάθε ένα από τα τέσσερα τεταρτημόρια έχει μία τρύπα, αν καλύπταμε διαφορετικά τα τρία από αυτά θα μπορούσαμε να πετύχουμε τη βέλτιστη κάλυψη με την μία τρύπα—πλην όμως, οι τρύπες αυτή τη στιγμή είναι διεσπαρμένες, και δεν μπορούμε να τις καλύψουμε με ένα τρόμινο.

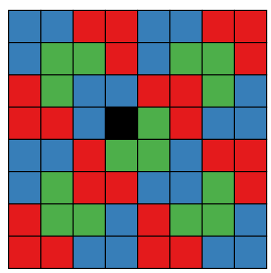
Για να το πετύχουμε αυτό, εργαζόμαστε ως εξής. Έστω ότι έχουμε ένα τετράγωνο $2^n \times 2^n$, όπως $2^3 \times 2^3$:



Τοποθετούμε ένα τρόμινο στη μέση.



Παρατηρούμε ότι τρία από τα τέσσερα τεταρτημόρια είναι *ελλειματικά* (deficient): τους λείπει ένα κομμάτι, ή μάλλον το κομμάτι αυτό είναι ήδη καλυμμένο. Επομένως κάθε ένα από αυτά μπορούμε να τα καλύψουμε με τρόμινο, αρκεί να φροντίσουμε η τρύπα να πέφτει στο κομμάτι που είναι ήδη καλυμμένο! Έτσι θα μας μείνει μόνο μια τρύπα στο ένα τεταρτημόριο που δεν είναι ελλειματικό. Πράγματι, θα πάρουμε την παρακάτω κάλυψη:



Η κάλυψη μας έχει και ένα επιπλέον χαρακτηριστικό: καλύπτει το τετράγωνο με τρόμινο τριών χρωμάτων, έτσι ώστε κανένα τρόμινο δεν γειτονεύει με τρόμινο του ίδιου χρώματος.

Η προσέγγιση αυτή δουλεύει όχι μόνο για τετράγωνα $2^3 \times 2^3$, αλλά για οποιοδήποτε τετράγωνο. Επιγραμματικά μπορούμε να την περιγράψουμε με τα ακόλουθα βήματα:

1. Αν $n = 1$, κάλυψε το τετράγωνο 2×2 και σταμάτα.
2. Αν $n = 2$, βάλε ένα πράσινο τρόμινο στη μέση, έτσι ώστε κάθε κομμάτι του να καλύπτει ένα μέρος του κάθε ενός 2×2 τετραγώνου που δεν είναι ελλειματικό. Βάλε γύρω-γύρω από το πράσινο τρόμινο εναλλάξ μπλε και κόκκινα τρόμινο, έτσι ώστε να καλυφθεί το ελλειματικό 2×2 τετράγωνο, πλην μιας τρύπας. (Παραπάνω είδαμε πως καλύπτεται ένα ελλειματικό $2^2 \times 2^2$ τετράγωνο.). Σταμάτα.
3. Αν $n > 2$:

   3.1 Τοποθέτησε ένα πράσινο τρόμινο ώστε να αγκαλιάζει τη μέση.

3.2 Χώρισε το $2^n \times 2^n$ τετράγωνο σε τέσσερα $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ τετράγωνα που αντιστοιχούν σε τέσσερα τεταρτημόρια, αν πάρουμε τη μέση ως αρχή των αξόνων.

3.3 Κάλυψε αναδρομικά κάθε ένα $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ τετράγωνο που προκύπτει από το αντίστοιχο τεταρτημόριο, λαμβάνοντας υπόψη ότι:

   - Η τρύπα που αφήνει το πράσινο τρόμινο ορίζει ένα ελλειματικό $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ τετράγωνο.
   - Τα άλλα τρία $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ τετράγωνα τα εκλαμβάνουμε επίσης ως ελλειματικά θεωρώντας ότι κάθε μέρος του τρόμινο αντιστοιχεί σε μία τρύπα.

Απαιτήσεις Προγράμματος

Κάθε φοιτητής θα εργαστεί σε αποθετήριο στο GitHub. Για να αξιολογηθεί μια εργασία θα πρέπει να πληροί τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- Για την υποβολή της εργασίας θα χρησιμοποιηθεί το ιδιωτικό αποθετήριο του φοιτητή που δημιουργήθηκε για τις ανάγκες του μαθήματος και του έχει αποδοθεί. Το αποθετήριο αυτό έχει όνομα του τύπου `username-algo-assignments`, όπου `username` είναι το όνομα του φοιτητή στο GitHub. Για παράδειγμα, το σχετικό αποθετήριο του διδάσκοντα θα ονομαζόταν `louridas-algo-assignments` και θα ήταν προσβάσιμο στο https://github.com/dmst-algorithms-course/louridas-algo-assignments. *Τυχόν άλλα αποθετήρια απλώς θα αγνοηθούν.*
- Μέσα στο αποθετήριο αυτό θα πρέπει να δημιουργηθεί ένας κατάλογος `assignment-2024-1`.
- Μέσα στον παραπάνω κατάλογο το πρόγραμμα θα πρέπει να αποθηκευτεί με το όνομα `tromino_tiling.py`.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση έτοιμων βιβλιοθηκών γράφων ή τυχόν έτοιμων υλοποιήσεων των αλγορίθμων, ή τμημάτων αυτών, εκτός αν αναφέρεται ρητά ότι επιτρέπεται.
- Επιτρέπεται η χρήση δομών δεδομένων της Python όπως στοίβες, λεξικά, σύνολα, κ.λπ.
- Επιτρέπεται η χρήση των παρακάτω βιβλιοθηκών ή τμημάτων τους όπως ορίζεται:
  - `sys.argv`
  - `argparse`
  - Το πρόγραμμα θα πρέπει να είναι γραμμένο σε Python 3.
- Η εργασία είναι αποκλειστικά ατομική. Δεν επιτρέπεται συνεργασία μεταξύ φοιτητών στην εκπόνησή της. Επιπλέον η εργασία δεν μπορεί να είναι αποτέλεσμα συστημάτων Τεχνητής Νοημοσύνης (όπως ChatGPT). Ειδικότερα ό-

σον αφορά το τελευταίο σημείο προσέξτε ότι τα συστήματα αυτά χωλαίνουν στην αλγοριθμική σχέση, άρα τυχόν προτάσεις που κάνουν σε σχετικά θέματα μπορεί να είναι λανθασμένα. Επιπλέον, αν θέλετε να χρησιμοποιήσετε τέτοια συστήματα, τότε αν και κάποιος άλλος το κάνει αυτό, μπορεί οι προτάσεις που θα λάβετε να είναι πανομοιότυπες, οπότε οι εργασίες θα παρουσιάσουν ομοιότητες και άρα θα μηδενιστούν.

- Η έξοδος του προγράμματος θα πρέπει να περιλαμβάνει μόνο ό,τι φαίνεται στα παραδείγματα που παρατίθενται. *Η φλυαρία δεν επιβραβεύεται.*

Το πρόγραμμα θα καλείται ως εξής (όπου `python` η κατάλληλη εντολή στο εκάστοτε σύστημα):

```
python tromino_tiling.py n
```

Η παράμετρος `n` υποδεικνύει το μέγεθος του τετραγώνου που θέλουμε να καλύψουμε, είναι δηλαδή ο εκθέτης n στην έκφραση $2^n \times 2^n$.

Σκοπός της εργασίας είναι η συγγραφή προγράμματος που θα εκτελεί την ψηφιδοποίηση τετραγώνου με τον αλγόριθμο που περιγράψαμε. *Υλοποιήσεις άλλων αλγορίθμων ψηδιποίησης δεν είναι αποδεκτές.*

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Αν ο χρήστης του προγράμματος δώσει:

```
python tromino_tiling.py 1
```

το πρόγραμμά σας θα πρέπει να εμφανίσει στην έξοδο ακριβώς τα παρακάτω:

```
G X
G G
```

Το γράμμα `G` σημαίνει πράσινο, το γράμμα `X` σημαίνει μαύρο. Η έξοδος περιγράφει την κάλυψη ενός τετραγώνου 2×2 από ένα τρόμινο, αφήνοντας μια τρύπα.

Παράδειγμα 2

Αν ο χρήστης του προγράμματος δώσει:

```
python tromino_tiling.py 2
```

το πρόγραμμά σας θα πρέπει να εμφανίσει στην έξοδο ακριβώς τα παρακάτω:

```
B B R R
B G G R
R G B B
R R B X
```

Εδώ χρησιμοποιούνται και τα δύο επιπλέον χρώματα, με `B` το μπλε και με `R` το κόκκινο.

Παράδειγμα 3

Αν ο χρήστης του προγράμματος δώσει:

```
python tromino_tiling.py 3
```

το πρόγραμμά σας θα πρέπει να εμφανίσει στην έξοδο ακριβώς τα παρακάτω:

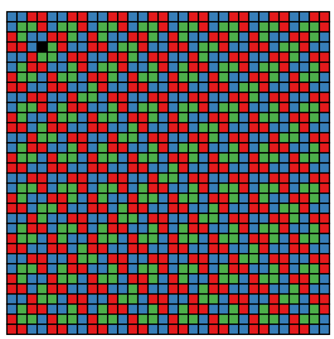
```
B B R R B B R R
B G G R B G G R
R G B B R R G B
R R B X G R B B
B B R G G B R R
B G R R B B G R
R G G B R G G B
R R B B R R B B
```

Παράδειγμα 4

Αν ο χρήστης του προγράμματος δώσει:

```
python tromino_tiling.py 4
```

το πρόγραμμά σας θα πρέπει να εμφανίσει στην έξοδο τα περιεχόμενα του αρχείου `tiling_32x32.txt`. Αυτό αντιστοιχεί στην κάλυψη:



Περισσότερες Πληροφορίες

Για την ψηφίδοση ή ψηφιδοθέτηση, μπορείτε να δείτε το σχετικό άρθρο στη Wikipedia. Ο αλγόριθμος που περιγράψαμε παρουσιάστηκε από τους Chu και Johnsonbaugh στο [1]. Τα τρόμινο είναι ειδική περίπτωση των πολυόμινο (polynimos), τα οποία εισήγαγε ο Solomon W. Golomb το 1954 [2], ο οποίος συνέγραψε στη συνέχεια και σχετικό βιβλίο [3].

Βιβλιογραφία

[1] I-Ping Chu and Richard Johnsonbaugh. “Tiling and recursion”. In: *Proceedings of the Eighteenth SIGCSE Technical Symposium on Computer Science Education*. SIGCSE ’87. St. Louis, Missouri, USA: Association for Computing Machinery, 1987, pp. 261–263. ISBN: 0897912179. DOI: 10.1145/31820.31770. URL: https://doi.org/10.1145/31820.31770.

[2] S. W. Golomb. “Checker Boards and Polyominoes”. In: *The American Mathematical Monthly* 61.10 (1954), pp. 675–682. ISSN: 00029890, 19300972. URL: http://www.jstor.org/stable/2307321 (visited on 04/04/2024).

[3] Solomon W. Golomb. *Polyominoes*. 2nd. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.

Καλή Επιτυχία!