

# Ακτινοβολία ενός σημειακού φορτίου

## ΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ LIENARD-WIECHERT

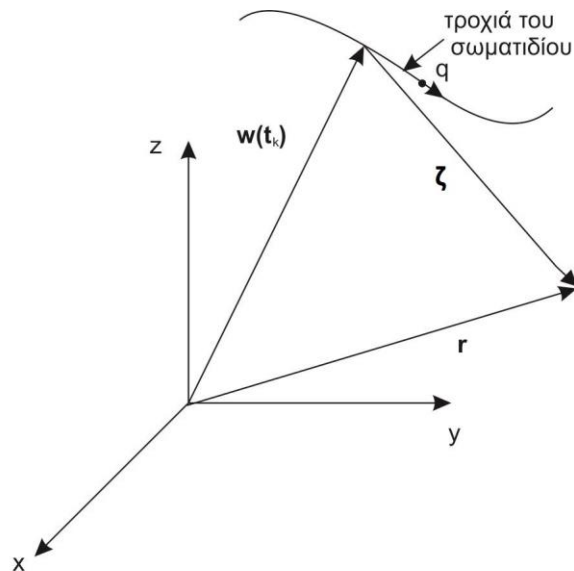
Ο στόχος μας εδώ είναι ο υπολογισμός των πεδίων ενός σημειακού φορτίου  $q$  που κινείται σε μια καθορισμένη τροχιά. Έστω

$$\mathbf{w}(t) = \text{διάνυσμα θέσης του } q \text{ τη χρονική στιγμή } t \quad (1)$$

Τα καθυστερημένα δυναμικά  $V(\mathbf{r}, t)$  και  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  δεν εξαρτώνται, βέβαια, από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το φορτίο τη χρονική στιγμή  $t$ , αλλά από την κατάστασή του σε κάποιον παρελθόντα χρόνο  $t_k$ , όταν η πληροφορία έφευγε από το σωματίδιο – μια πληροφορία/μήνυμα που κινούμενη με την ταχύτητα του φωτός, φτάνει στο σημείο  $P$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Ο «καθυστερημένος» αυτός χρόνος καθορίζεται έμμεσα από την εξίσωση

$$|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_k)| = c(t - t_k) \quad (2)$$

Όπου το αριστερό μέλος είναι η απόσταση που θα διανύσει η πληροφορία και στο δεξιό έχουμε το χρόνο  $(t - t_k)$  που απαιτείται για το ταξίδι αυτό. Το  $\mathbf{w}(t_k)$  θα το ονομάσουμε **καθυστερημένη θέση** του φορτίου και έστω  $\mathbf{z}$  το διάνυσμα από την καθυστερημένη θέση ως το σημείο  $P$  (δες: σχήμα 1).



Σχήμα 1

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_k) \quad (3)$$

Κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t$  το πολύ ένα σημείο της τροχιάς του σωματίου βρίσκεται σε «επικοινωνία» με το  $P$ . Αν, για παράδειγμα, υπήρχαν δύο τέτοια σημεία με καθυστερημένους χρόνους  $t_1$  και  $t_2$ , θα είχαμε:

$$\zeta_1 = c(t - t_1) \text{ και } \zeta_2 = c(t - t_2)$$

Οπότε με αφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε ότι  $\zeta_1 - \zeta_2 = c(t_2 - t_1)$ , κάτι που για να συμβεί θα έπρεπε το σωματίο να έχει μέση τιμή της ταχύτητας στην κατεύθυνση του σημείου  $P$  ίση με  $c$  (ενώ η ολική του ταχύτητα θα ήταν ακόμη μεγαλύτερη αφού θα είχε δυνητικά και μια εγκάρσια συνιστώσα). Κανένα όμως φορτίο δεν μπορεί να κινείται με την ταχύτητα του φωτός, άρα τα δυναμικά που κάθε στιγμή «φτάνουν» στο  $P$ , προέρχονται από μία μόνο (διαφορετική κάθε φορά) καθυστερημένη θέση του φορτίου.

Από τον τύπο

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_k)}{\zeta} dV \quad (4)$$

θα μπορούσε κανείς με μια πρώτη ματιά, λανθασμένα, να εξαγάγει το συμπέρασμα ότι το καθυστερημένο δυναμικό ενός σημειακού φορτίου δεν είναι παρά:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\zeta}$$

όμοια με την στατική περίπτωση, με τη μόνη διαφορά ότι το  $\zeta$  είναι η απόσταση από την καθυστερημένη θέση του φορτίου). Στην πραγματικότητα όμως, αυτό, δεν ισχύει για έναν πολύ λεπτό λόγο: αν και για μια σημειακή πηγή αληθεύει ότι ο παρονομαστής  $\zeta$  βγαίνει έξω απ' το ολοκλήρωμα (4), όμως ό,τι απομένει,

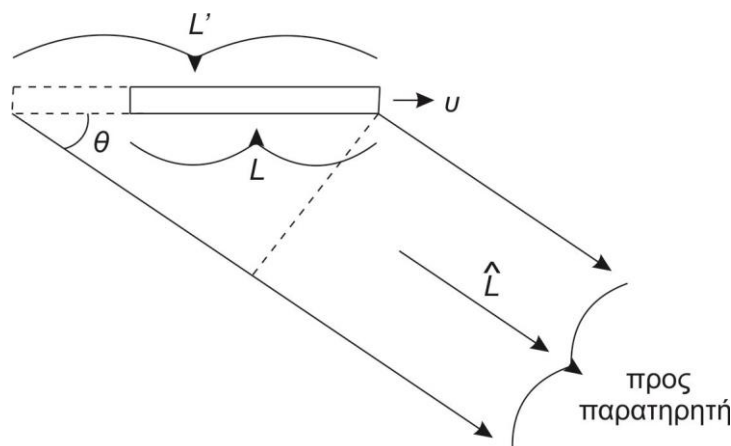
$$\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_k)}{\zeta} dV \quad (5)$$

δεν ισούται με το φορτίο του σωματίου. Για να βρούμε το ολικό φορτίο μιας κατανομής, πρέπει κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή να ολοκληρώσουμε την πυκνότητα  $\rho$  σε όλο τον χώρο που εκτείνεται, η καθυστέρηση όμως που υπάρχει εδώ,  $t_k = t - \zeta/c$ , μας καταδεικνύει ότι πρέπει να υπολογίζουμε την  $\rho$  για τα διάφορα μέρη της κατανομής σε διαφορετικούς καθυστερημένους χρόνους. Αν η πηγή κινείται (είναι, δηλαδή, χρονομεταβαλλόμενη), θα έχουμε μία «αλλοιωμένη» εικόνα του ολικού φορτίου. Αυτό δημιουργεί πρόβλημα ακόμα και για σημειακά φορτία, καθώς η ηλεκτροδυναμική του Maxwell έχει διατυπωθεί συναρτήσει των πυκνοτήτων φορτίου και ρεύματος, οπότε το σημειακό φορτίο δεν είναι παρά το όριο μιας εκτεταμένης κατανομής, το μέγεθος της οποίας τείνει στο μηδέν. Για ένα εκτεταμένο σωματίο, όσο μικρό και αν είναι, ο καθυστερημένος χρόνος  $t_k$  της εξίσωσης (4) εισάγει έναν παράγοντα  $(1 - \hat{\zeta} \cdot \mathbf{v}/c)^{-1}$ , όπου  $\mathbf{v}$  η ταχύτητα του φορτίου στον καθυστερημένο αυτό χρόνο:

$$\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_k)}{\zeta} dV = (1 - \frac{\hat{\zeta} \cdot \mathbf{v}}{c}) \quad (6)$$

Ας φέρουμε ένα παράδειγμα απ' την καθημερινότητα ως ανάλογο αυτού που θέλουμε να πούμε. Ένα τρένο που κινείται προς ο μέρος σας το βλέπετε να έχει μήκος λίγο μεγαλύτερο από το πραγματικό, αφού το φως που βλέπετε από το τελευταίο βαγόνι εκπέμφθηκε νωρίτερα από το φως που βλέπετε ταυτόχρονα να έρχεται από τη μηχανή. Στον χρόνο που χρειάζεται το φως από το τελευταίο βαγόνι για να διανύσει τη μεγαλύτερη απόσταση  $L'$ , το τρένο θα έχει καλύψει μία απόσταση  $L' - L$ :

$$\frac{L'}{c} = \frac{L' - L}{c} \quad \text{ή} \quad L' = \frac{L}{(1 - \frac{v}{c})}$$



Σχήμα 2

Ένα τρένο που πλησιάζει, λοιπόν, φαίνεται μακρύτερο κατά έναν παράγοντα  $(1 - \frac{v}{c})^{-1}$ . Αν, αντίθετα, το τρένο απομακρυνόταν, θα φαινόταν πιο μικρό κατά έναν παράγοντα  $(1 + \frac{v}{c})^{-1}$ . Τα παραπάνω γενικεύονται εύκολα στην περίπτωση που η ταχύτητα του τρένου σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τη γραμμή παρατήρησης, αφού η επιπρόσθετη απόσταση που πρέπει να καλύψει το φως από το τελευταίο βαγόνι είναι  $L' \cos \theta$  (Σχ. 2), ενώ σε χρόνο  $L' \cos \theta / c$  το τρένο διανύει μια απόσταση  $L' - L$ :

$$\frac{L' \cos \theta}{c} = \frac{L' - L}{v} \quad \text{ή} \quad L' = \frac{L}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

Οι παραπάνω σκέψεις αναφέρονται αποκλειστικά στο μήκος του τρένου – οι υπόλοιπες διαστάσεις του, το ύψος και το πλάτος, που είναι κάθετες στη διεύθυνση της κίνησης, δεν αλλοιώνονται: αν και το φως που ξεκινά από μία πλευρά του τρένου κάθετη στην ταχύτητα, φτάνει σε 'σας με καθυστέρηση σε σχέση με το φως που ξεκινά από μία πλησιέστερη κάθετη πλευρά, η απόσταση μεταξύ των δύο πλευρών θα φαίνεται όση είναι, αφού δεν υπάρχει κίνηση στη διεύθυνση που αυτές ορίζουν. Εξάγουμε λοιπόν την σχέση μεταξύ του φαινομενικού όγκου ( $v'$ ) του τρένου και του πραγματικού του όγκου ( $v$ ):

$$v' = \frac{v}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)} \quad (7)$$

με  $\hat{\xi}$  το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το τρένο προς τον παρατηρητή.

Για να καταλάβετε καλύτερα την συσχέτιση μεταξύ των κινουμένων τρένων και τα καθυστερημένα δυναμικά, θα πούμε τα εξής: Όταν υπολογίζετε ένα ολοκλήρωμα του τύπου (4), όπου η ολοκληρωτέα συνάρτηση παίρνει τις τιμές της σε καθυστερημένους χρόνους, ο ενεργός όγκος του κινούμενου φορτίου διαφέρει από τον πραγματικό όγκο κατά τον παράγοντα που φαίνεται στην (6), για τον ίδιο ακριβώς λόγο που αυτό συμβαίνει με τον φαινομενικό όγκο του τρένου. Σε κάθε σημείο χρησιμοποιείτε για την πυκνότητα φορτίου όχι την τιμή που έχει τώρα, αλλά την τιμή που είχε στον καθυστερημένο χρόνο που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό. Επειδή (με την προϋπόθεση ότι οι ακτίνες που ενώνουν τον παρατηρητή με το τελευταίο βαγόνι και τη μηχανή να μπορούν να θεωρηθούν παράλληλες, δηλαδή το μήκος του να είναι αρκετά μικρό ή να βρίσκεται σε αρκετά μεγάλη απόσταση και να κινείται με σταθερή ταχύτητα) ο παράγοντας «διόρθωσης» στην (7) δεν εξαρτάται

καθόλου από το μέγεθος του σωματίου, είναι ακριβώς ο ίδιος και στην οριακή περίπτωση ενός σημειακού φορτίου:

$$\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_\kappa)}{\zeta} dV = \frac{q}{(1 - \frac{\zeta \cdot \mathbf{v}}{c})} \quad (8)$$

Έχουμε, λοιπόν, ότι

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\zeta(1 - \frac{\zeta \cdot \mathbf{v}}{c})} \quad (9)$$

Όπου  $\mathbf{v}$  είναι η ταχύτητα του φορτίου στον καθυστερημένο χρόνο και  $\mathbf{z}$  είναι το διάνυσμα που κατευθύνεται από την καθυστερημένη θέση προς το σημείο παρατήρησης  $P$ . Για το διανυσματικό δυναμικό, δεδομένου ότι η πυκνότητα ρεύματος ενός στερεού σώματος είναι  $\rho\mathbf{v}$ , έχουμε:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_\kappa)\mathbf{v}(t_\kappa)}{\zeta} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v}}{\zeta} \int \rho(\mathbf{r}', t_\kappa) dV$$

ή

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv}{\zeta(1 - \frac{\zeta \cdot \mathbf{v}}{c})} = \frac{v}{c^2} V(\mathbf{r}, t) \quad (10)$$

Οι εξισώσεις (9) και (10) είναι τα περίφημα **δυναμικά Liénard-Wiechert** ενός κινούμενου σημειακού φορτίου.

Σαν παράδειγμα (Α), θα υπολογίσουμε το δυναμικό ενός σημειακού φορτίου που κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Υποθέτουμε ότι το σωματίο περνά από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , οπότε

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}t$$

Υπολογίζουμε πρώτα τον καθυστερημένο χρόνο από την εξίσωση (2)

$$|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_\kappa)| = c(t - t_\kappa)$$

την υψώνουμε στο τετράγωνο και παίρνουμε:

$$r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}t_\kappa + v^2 t_\kappa^2 = c^2(t^2 - 2tt_\kappa + t_\kappa^2)$$

Από αυτήν την δευτέρου βαθμού ως προς  $t_\kappa$  εξίσωση, προκύπτει ότι

$$t_\kappa = \frac{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \pm \sqrt{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}}{(c^2 - v^2)} \quad (A.1)$$

Για να επιλέξουμε πρόσημο θέτουμε  $v = 0$  και έχουμε:

$$t_\kappa = t \pm \frac{r}{c}$$

Στην περίπτωση αυτή το φορτίο ηρεμεί στην αρχή των αξόνων και ο καθυστερημένος χρόνος πρέπει να είναι  $t - \frac{r}{c}$ . Συμπεράνουμε, λοιπόν, ότι πρέπει να επιλέξουμε το πρόσημο μείον. Από τις (2) & (3) παίρνουμε:

$$\zeta = c(t - t_\kappa) \text{ και } \hat{\zeta} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t_\kappa}{c(t - t_\kappa)}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \zeta \left( 1 - \frac{\hat{\zeta} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) &= c(t - t_\kappa) \left[ 1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t_\kappa}{c(t - t_\kappa)} \right] \\ &= c(t - t_\kappa) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c} + \frac{v^2}{c} t_\kappa \\ &= \frac{1}{c} [(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) - t_\kappa (c^2 - v^2)] \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{(c^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)} \end{aligned}$$

(Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιούμε την (A.1) με το αρνητικό πρόσημο, όπως είπαμε.)

Και, τελικά, έχουμε:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{\sqrt{(c^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}} \quad (\text{A.2})$$

## ΤΑ ΠΕΔΙΑ ΕΝΟΣ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

Θα υπολογίσουμε, τώρα, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ενός φορτίου που εκτελεί οποιασδήποτε μορφής κίνηση, χρησιμοποιώντας τα δυναμικά Liénard-Wiechert γραμμένα στην απλή μορφή

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(zc - \mathbf{z} \cdot \mathbf{v})}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} V(\mathbf{r}, t) \quad (13)$$

Και τις εξισώσεις

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Οι παραγωγίσεις που δίνουν τα  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{B}$  δεν είναι τόσο εύκολες όσο αρχικά φαίνονται, γιατί τα

$$\zeta = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_\kappa) \quad \text{και} \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{w}}(t_\kappa) \quad (3)$$

υπολογίζονται και τα δύο στον καθυστερημένο χρόνο  $t_\kappa$ , που ορίζεται έμμεσα από την εξίσωση

$$|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_\kappa)| = c(t - t_\kappa) \quad (2)$$

και που προκύπτει, λοιπόν, ότι είναι και ο ίδιος συνάρτηση των  $\mathbf{r}$  και  $t$ . Θα αρχίσουμε, λοιπόν, τον υπολογισμό από την κλίση του  $V$ :

$$\nabla V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(\zeta c - \zeta \cdot \mathbf{v})^2} \nabla(\zeta c - \zeta \cdot \mathbf{v}) \quad (15)$$

Έχουμε, όμως, ότι  $\zeta = c(t - t_\kappa)$ ,

$$\nabla \zeta = -c \nabla t_\kappa \quad (13)$$

Ενώ για τον δεύτερο όρο στην (12), έχουμε από τους γνωστούς κανόνες γινομένου:

$$\nabla(\zeta \cdot \mathbf{v}) = (\zeta \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \zeta + \zeta \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \zeta) \quad (14)$$

Θα υπολογίσουμε, τώρα, τους όρους αυτούς. Για τον πρώτο έχουμε:

$$\begin{aligned} (\zeta \cdot \nabla) \mathbf{v} &= (\zeta_x \frac{\partial}{\partial x} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial y} + \zeta_z \frac{\partial}{\partial z}) \mathbf{v}(t_\kappa) \\ &= \zeta_x \frac{d\mathbf{v}}{dt_\kappa} \frac{\partial t_\kappa}{\partial x} + \zeta_y \frac{d\mathbf{v}}{dt_\kappa} \frac{\partial t_\kappa}{\partial y} + \zeta_z \frac{d\mathbf{v}}{dt_\kappa} \frac{\partial t_\kappa}{\partial z} \\ &= \mathbf{a}(\zeta \cdot \nabla t_\kappa) \quad (15) \end{aligned}$$

Με  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$  την επιτάχυνση του φορτίου στον καθυστερημένο χρόνο. Για τον δεύτερο ισχύει:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \zeta = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{r} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} \quad (16)$$

με

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{r} &= (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) (\chi \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \\ &= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = \mathbf{v} \quad (17) \end{aligned}$$

και

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} = \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t_\kappa)$$

(αποδεικνύεται όπως στον πρώτο όρο (15)). Για τον τρίτο όρο της (14), έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \hat{i} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ &= \hat{i} \left( \frac{dv_z}{dt_\kappa} \frac{\partial t_\kappa}{\partial y} - \frac{dv_y}{dt_\kappa} \frac{\partial t_\kappa}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{dv_x}{dt_\kappa} \frac{\partial t_\kappa}{\partial z} - \frac{dv_z}{dt_\kappa} \frac{\partial t_\kappa}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{dv_y}{dt_\kappa} \frac{\partial t_\kappa}{\partial x} - \frac{dv_x}{dt_\kappa} \frac{\partial t_\kappa}{\partial y} \right) \\ &= -\mathbf{a} \times \nabla t_\kappa \quad (18) \end{aligned}$$

Για τον τελευταίο όρο της (14), έχουμε:

$$\nabla \times \zeta = \nabla \times \mathbf{r} - \nabla \times \mathbf{w} \quad (19)$$

όμως  $\nabla \times \mathbf{r} = 0$  και, όμοια με πάνω (18), προκύπτει ότι

$$\nabla \times \mathbf{w} = -(\mathbf{v} \times \nabla t_{\kappa}) \quad (20)$$

Είμαστε έτοιμοι, τώρα, να γυρίσουμε στην (14), όπου με χρήση του κανόνα «BAC-CAB» συμπτύσσουμε τα τριπλά γινόμενα και βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \nabla(\zeta \cdot \mathbf{v}) &= \mathbf{a}(\zeta \cdot \nabla t_{\kappa}) + \mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t_{\kappa}) - \zeta \times (\mathbf{a} \times \nabla t_{\kappa}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \nabla t_{\kappa}) \\ &= \mathbf{v} + ((\zeta \cdot \mathbf{a}) - v^2)\nabla t_{\kappa} \end{aligned} \quad (21)$$

Από τις (13), (21) στην (12) έχουμε

$$\nabla V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(\zeta c - \zeta \cdot \mathbf{v})^2} [\mathbf{v} + (c^2 - v^2 + (\zeta \cdot \mathbf{a}))\nabla t_{\kappa}] \quad (22)$$

Μπορούμε να βρούμε το  $\nabla t_{\kappa}$  παίρνοντας, αρχικά, την κλίση της (3) και αναπτύσσοντας το  $\nabla \zeta$ :

$$\begin{aligned} -c\nabla t_{\kappa} &= \nabla \zeta = \nabla \sqrt{\zeta \cdot \zeta} = \frac{1}{2\nabla \sqrt{\zeta \cdot \zeta}} \nabla(\zeta \cdot \zeta) \\ &= \frac{1}{\zeta} [(\zeta \cdot \nabla)\zeta + \zeta \times (\nabla \times \zeta)] \end{aligned} \quad (23)$$

Αλλά

$$(\zeta \cdot \nabla)\zeta = \zeta - \mathbf{v}(\zeta \cdot \nabla t_{\kappa})$$

ενώ από τις (19) και (20):

$$\nabla \times \zeta = (\mathbf{v} \times \nabla t_{\kappa})$$

οπότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} -c\nabla t_{\kappa} &= \frac{1}{\zeta} [\zeta - \mathbf{v}(\zeta \cdot \nabla t_{\kappa}) + \zeta \times (\mathbf{v} \times \nabla t_{\kappa})] \\ &= \frac{1}{\zeta} (\zeta - (\zeta \cdot \mathbf{v})\nabla t_{\kappa}) \end{aligned} \quad (24)$$

άρα

$$\nabla t_{\kappa} = -\frac{\zeta}{(\zeta c - \zeta \cdot \mathbf{v})} \quad (25)$$

Από την (24) η (21) φτάνει στο

$$\nabla V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(\zeta c - \zeta \cdot \mathbf{v})^3} \left\{ (\zeta c - \zeta \cdot \mathbf{v}) \left( -\mathbf{v} + \frac{\zeta}{c} \mathbf{a} \right) + \frac{\zeta}{c} (c^2 - v^2 + (\zeta \cdot \mathbf{a}))\mathbf{v} \right\} \quad (26)$$

Εισάγοντας τώρα το

$$\mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} c\hat{\zeta} - \mathbf{v} \quad (27)$$

Εξάγουμε ένα απλοποιημένο τελικό αποτέλεσμα ως συνδυασμό των άνω εξισώσεων της μορφής:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{\zeta}{(\zeta \cdot \mathbf{u})^3} [\mathbf{u}(c^2 - v^2) + \zeta \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})]} \quad (28)$$



Όσον αφορά, τώρα, το μαγνητικό πεδίο, έχουμε:

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \nabla \times (\mathbf{v}V) = \frac{1}{c^2} [V(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla V)]$$

και από τις (17) και (24) η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\zeta})^3} \boldsymbol{\zeta} \times [\mathbf{v}(c^2 - v^2) + \mathbf{v}(\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{u})]$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα μέσα στις αγκύλες της τελευταίας εξίσωσης, μοιάζει πολύ με αυτήν που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες της (28) – η μόνη τους διαφορά εντοπίζεται στο ότι αντί του  $\mathbf{u}$  έχουμε  $\mathbf{v}$  στους δύο πρώτους όρους. Επειδή, ακόμα, η  $\mathbf{v}$  πολλαπλασιάζεται εξωτερικά με το  $\boldsymbol{\zeta}$ , μπορούμε να αντικαταστήσουμε με το  $-\mathbf{u}$ . Οι δύο επιπρόσθετοι όροι που θα προκύψουν θα μηδενιστούν λόγω του εξωτερικού γινομένου με το  $\boldsymbol{\zeta}$  ( $\mathbf{v} = c\hat{\boldsymbol{\zeta}} - \mathbf{u}$ , οπότε  $\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{v} = c\boldsymbol{\zeta} \times \hat{\boldsymbol{\zeta}} - \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{u} = -\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{u}$ ). Συνεπάγεται, λοιπόν, ότι

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\boldsymbol{\zeta}} \times \mathbf{E} \quad (29)$$

Γίνεται λοιπόν εμφανές ότι το μαγνητικό πεδίο ενός σημειακού φορτίου είναι πάντα κάθετο στο ηλεκτρικό πεδίο και στο διάνυσμα που δείχνει από την καθυστερημένη θέση του φορτίου προς το σημείο παρατήρησης.

Παρατηρούμε ακόμη ότι ο πρώτος όρος στο  $\mathbf{E}$  (εκείνος που περιέχει το  $\mathbf{u}(c^2 - v^2)$ ) φθίνει με ρυθμό αντιστρόφου τετραγώνου της απόστασης από το σωματίο. Αν η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι και οι δύο μηδέν, μόνο ο όρος αυτός επιβιώνει και το  $\mathbf{E}$  παίρνει τη γνωστή μορφή της ηλεκτροστατικής

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\zeta^2} \hat{\boldsymbol{\zeta}}$$

Για αυτό το λόγο, ο πρώτος όρος του  $\mathbf{E}$  στην (28) μερικές φορές ονομάζεται **γενικευμένο πεδίο Coulomb**. (Επειδή, ακόμη, δεν εξαρτάται από την επιτάχυνση, είναι επίσης γνωστός και ως **πεδίο ταχύτητας**.) Ο δεύτερος όρος (που περιέχει το  $\boldsymbol{\zeta} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})$ ) φθίνει με ρυθμό αντίστροφης πρώτης δύναμης του  $\zeta$  και, συνεπώς, είναι αυτός που επικρατεί σε μεγάλες αποστάσεις. Ο όρος αυτός είναι υπεύθυνος για την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, γ αυτόν τον λόγο ονομάζεται **πεδίο ακτινοβολίας**, ή, αφού είναι ανάλογος του  $\mathbf{a}$ , **πεδίο επιτάχυνσης**. Η ίδια ορολογία χρησιμοποιείται και για το μαγνητικό πεδίο. Παρατηρήστε ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ακτινοβολίας είναι κάθετα μεταξύ τους και εγκάρσια, ενώ ο λόγος τους είναι σταθερός και ίσος με  $E_{\text{ακτ}}/B_{\text{ακτ}} = c$ , σε πλήρη συμφωνία με αυτό που περιμένουμε να ισχύει για την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

Έχουμε, λοιπόν, από τις εξισώσεις (28) και (29) τα πεδία και ο νόμος της δύναμης Lorentz μας δίνει τη ζητούμενη δύναμη

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{\zeta}}{(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{u})^3} \{[\mathbf{u}(c^2 - v^2) + \boldsymbol{\zeta} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] + \frac{V}{c} \times [\hat{\boldsymbol{\zeta}} \times [\mathbf{u}(c^2 - v^2) + \boldsymbol{\zeta} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})]]\}$$

όπου  $V$  είναι η ταχύτητα του  $Q$ , ενώ τα  $\boldsymbol{\zeta}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{a}$  υπολογίζονται όλα στον καθυστερημένο χρόνο. Ο τύπος αυτός περικλείει ολόκληρη τη θεωρία της κλασικής ηλεκτροδυναμικής!

Ας υπολογίσουμε τώρα, σαν παράδειγμα (Β), το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ενός σημειακού φορτίου που κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Θα αρχίσουμε με την (28), όπου θα θέσουμε το  $\alpha = 0$ , και έχουμε:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{(c^2 - v^2)}{(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{u})^3} \boldsymbol{\zeta} \mathbf{u}$$

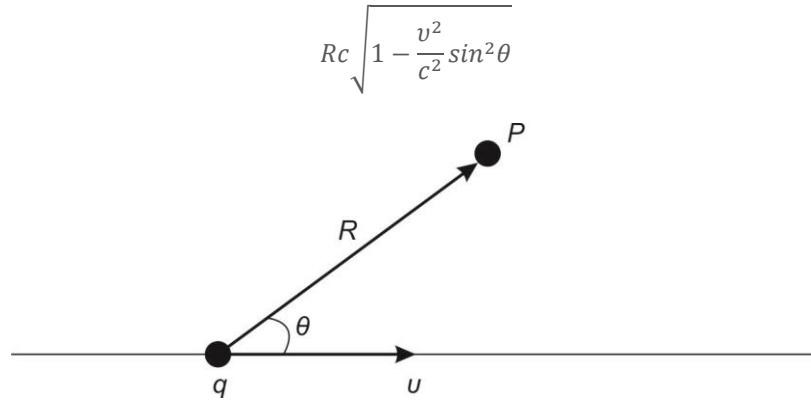
Επειδή, ακόμα,  $\mathbf{w} = \mathbf{v}t$

$$\boldsymbol{\zeta} \mathbf{u} = c\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta} \mathbf{v} = c(\mathbf{r} - \mathbf{v}t_k) - c(t - t_k)\mathbf{v} = c(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$$

Στο παράδειγμα (Α) βρήκαμε ότι

$$(\boldsymbol{\zeta} c - \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}) = \sqrt{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}$$

Η ρίζα, όμως, αυτή, γράφεται και ως



Σχήμα 3

με

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$$

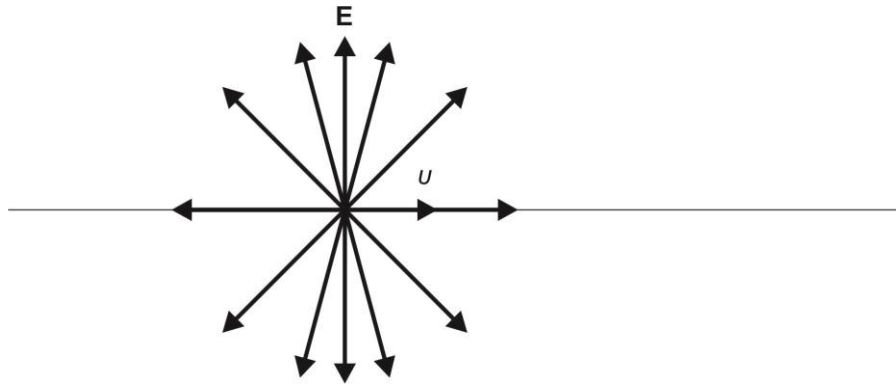
και  $\theta$  η γωνία μεταξύ  $\mathbf{R}$  και  $\mathbf{v}$  (Σχ. 3). Τελικά,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Το  $\mathbf{E}$  δείχνει κατά μήκος του διανύσματος που έχει ως αρχή την παρούσα θέση του σωματίου. Για σταθερό  $R$ , το πεδίο ενός φορτίου που κινείται με μεγάλη ταχύτητα είναι συμπιεσμένο σαν «μπιφτέκι» κάθετο στη διεύθυνση της κίνησης (Σχήμα 4). Στις προς τα μπρός και πίσω κατευθύνσεις, το  $\mathbf{E}$  είναι μειωμένο κατά έναν παράγοντα  $(1 - \frac{v^2}{c^2})$  σε σχέση με το πεδίο ενός φορτίου που βρίσκεται σε ηρεμία, ενώ σε κατευθύνσεις κάθετες στην τροχιά είναι αυξημένο κατά έναν παράγοντα  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Για το  $\mathbf{B}$ , έχουμε:

$$\hat{\zeta} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t_{\kappa}}{\zeta} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + \mathbf{v}(t - t_{\kappa})}{\zeta} = \frac{\mathbf{R}}{\zeta} + \frac{\mathbf{v}}{c}$$

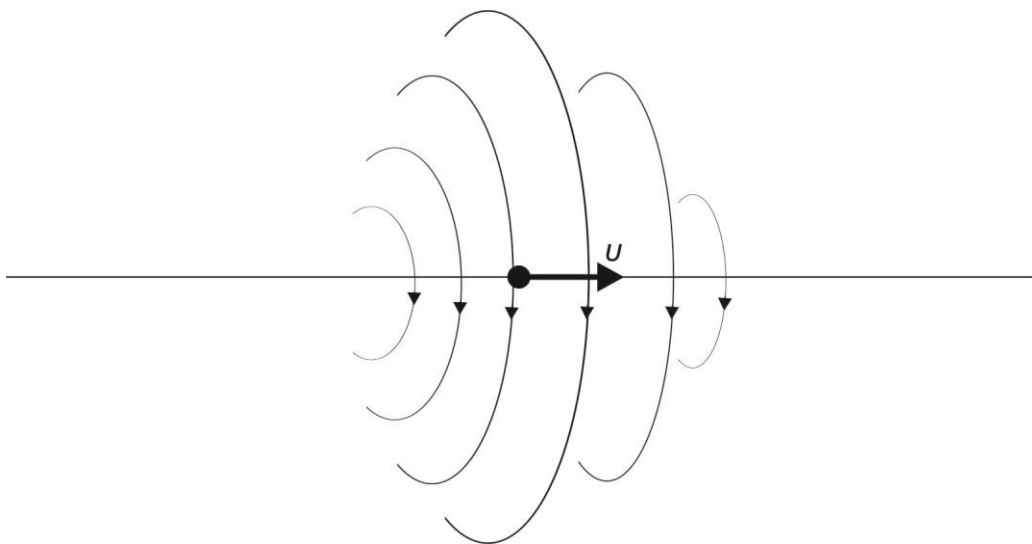


Σχήμα 4

Επομένως:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} (\hat{\zeta} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \quad (\text{B1})$$

Οι δυναμικές γραμμές του  $\mathbf{B}$  σχηματίζουν κύκλους γύρω από το φορτίο (Σχήμα 5)



Σχήμα 5

## Η ΙΣΧΥΣ ΠΟΥ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΑΚΟ ΦΟΡΤΙΟ

Η εξίσωση που μας δίνει την ποσότητα ενέργειας που μεταφέρεται από τα πεδία ενός σημειακού φορτίου είναι η ακόλουθη:

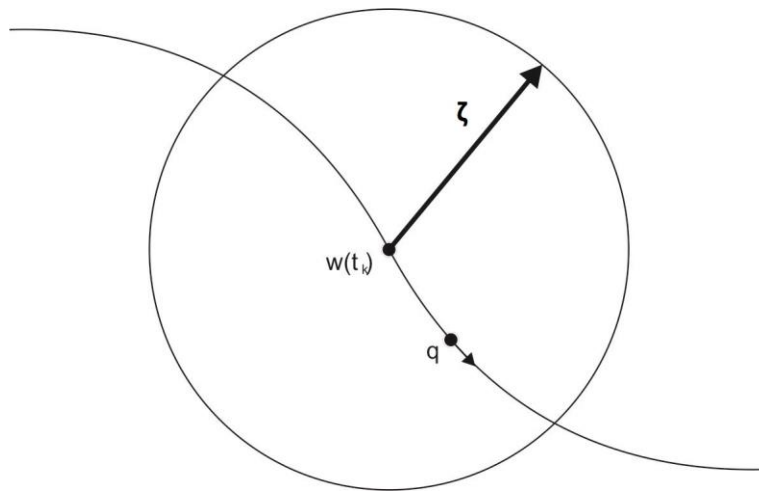
$$S = \frac{1}{\mu_0(E \times B)} = \frac{1}{\mu_0 c} [\hat{\zeta} E^2 - E(\hat{\zeta} \cdot E)] \quad (30)$$

Το μεγαλύτερο μέρος αυτής της ροής είναι η ενέργεια πεδίου που μεταφέρεται από το σωματίο καθώς κινείται και όχι πραγματική ακτινοβολία. Η ακτινοβολούμενη ενέργεια είναι εκείνη που αποσπάται από το σωματίο και διαφεύγει προς το άπειρο. Θα υπολογίσουμε τώρα την συνολική ισχύ που ακτινοβολείται από το σωματίο τη χρονική στιγμή  $t_k$ . Προς αυτόν τον σκοπό, θα θεωρήσουμε, αρχικά, μια μεγάλη σφαίρα ακτίνας  $\zeta$  (Σχήμα 6) με κέντρο τη θέση του σωματίου τη στιγμή  $t_k$  και στη συνέχεια περιμένουμε για χρονικό διάστημα

$$t - t_k = \frac{\zeta}{c}$$

ώσπου να φτάσει η ακτινοβολία στη σφαίρα και αφού φτάσει ολοκληρώνουμε το διάνυσμα Poynting πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Επειδή η επιφάνεια της σφαίρας είναι ανάλογη του  $\zeta^2$ , όλοι οι όροι του  $\mathbf{S}$  που είναι ανάλογοι του  $1/\zeta^2$  δίδουν πεπερασμένο αποτέλεσμα, ενώ οι όροι που είναι ανάλογοι των  $1/\zeta^3$  και  $1/\zeta^4$  δεν δίδουν τίποτα στο όριο  $\zeta \rightarrow \infty$ . Έτσι, την αληθινή ακτινοβολία αντιπροσωπεύουν μόνο τα πεδία επιτάχυνσης:

$$\mathbf{E}_{\text{ακτ}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\zeta}{(\zeta - u)^3} [\zeta \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] \quad (35)$$



Σχήμα 6

(Προκειμένου το φορτίο να ακτινοβολεί, είναι απαραίτητο να έχει επιτάχυνση. Κατά τα άλλα, το σωματίο καθώς κινείται συμπαρασύρει μαζί του την ενέργεια που αντιστοιχεί στα πεδία ταχύτητας,

ενέργεια που δεν έχει καμία σχέση με την ακτινοβολία όμως. Τα πεδία ακτινοβολίας είναι κάθετα στο  $\hat{\zeta}$ , άρα ο δεύτερος όρος της εξίσωσης 34 είναι μηδέν. Συνεπώς:

$$S_{\alpha\kappa\tau} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{\alpha\kappa\tau}^2 \hat{\zeta} \quad (36)$$

Στην ιδεατή περίπτωση που το φορτίο τη χρονική στιγμή  $t_k$  ηρεμούσε στιγμιαία, τότε θα είχαμε  $\mathbf{u} = c\hat{\zeta}$  (27) και

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\alpha\kappa\tau} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{\zeta} [\hat{\zeta} \times (\hat{\zeta} \times \mathbf{a})] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{\zeta} [\hat{\zeta}(\hat{\zeta} \cdot \mathbf{a})] \quad (37) \end{aligned}$$

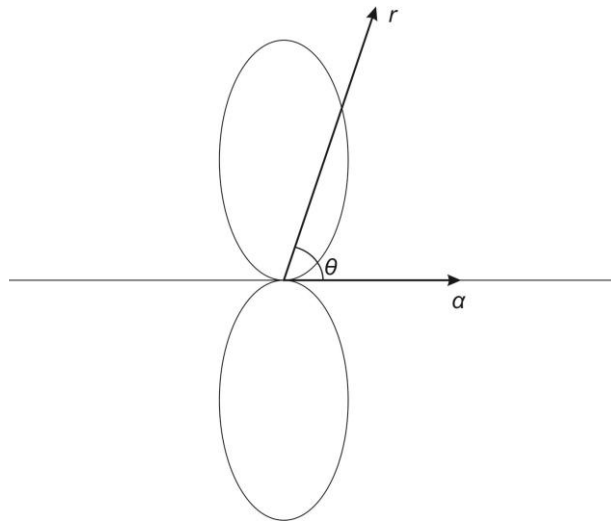
Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} S_{\alpha\kappa\tau} &= \frac{1}{\mu_0 c} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 \frac{1}{\zeta^2} [\alpha^2 - (\hat{\zeta} \cdot \mathbf{a})^2] \hat{\zeta} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q^2}{4\pi c^3} \right) \frac{\alpha^2 \sin^2 \theta}{\zeta^2} \hat{\zeta} \quad (38) \end{aligned}$$

με  $\theta$  την γωνία μεταξύ των  $\hat{\zeta}$  και  $\mathbf{a}$ . Δεν υπάρχει ακτινοβολούμενη ισχύς προς τα μπρος και προς τα πίσω στην κατεύθυνση του  $\mathbf{a}$ . Η εκπεμπόμενη ισχύς έχει ένα προφίλ σαν μία «σαμπρέλα» με άξονα της στιγμιαίας επιτάχυνσης λόγω της γωνιακής εξάρτησης

Η συνολική ισχύς που ακτινοβολείται είναι:

$$P = \int S_{\alpha\kappa\tau} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0 c} \left( \frac{q}{4\pi c} \right)^2 a^2 \int \frac{\sin^2 \theta}{\zeta^2} \zeta^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$



Σχήμα 7

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3} \quad (39)$$

ή

Η εξίσωση (39) ονομάζεται τύπος του *Larmor*. Παρατηρούμε ότι η ισχύς που ακτινοβολείται από ένα σημειακό φορτίο είναι ανάλογη του τετραγώνου της επιτάχυνσής του.

Αν ισχύει ότι  $v \ll c$  οι εξισώσεις (37) και (38) εξακολουθούν να ισχύουν με καλή προσέγγιση όταν  $v \neq 0$ , παρότι έχουν εξαχθεί με την προϋπόθεση ότι  $v = 0$ . Η ακριβής ανάλυση της περίπτωσης  $v \neq 0$  είναι αρκετά πιο δύσκολη για δύο λόγους.

Πρώτον, προφανώς, το  $E_{\text{ακτ}}$  είναι πιο πολύπλοκο και, δεύτερον, ο ρυθμός διέλευσης της ενέργειας από τη σφαίρα δεν ισούται με τον ρυθμό που η ενέργεια αφήνει το σωματίδιο εξαιτίας της ταυτόχρονης κίνησης του σωματιδίου.

Αν  $dW/dt$  είναι ο ρυθμός με τον οποίο η ενέργεια περνά από μια σφαίρα ακτίνας  $\zeta$ , τότε ο ρυθμός με τον οποίο η ενέργεια φεύγει από το φορτίο είναι

$$\frac{dW}{dt_{\kappa}} = \frac{dW}{dt} \frac{\partial t_{\kappa}}{\partial t} = \frac{(\zeta \cdot \mathbf{u})}{\zeta c} \frac{dW}{dt} \quad (40)$$

Σημειώστε ότι:

$$\frac{(\zeta \cdot \mathbf{u})}{\zeta c} = \left(1 - \frac{\xi \cdot \mathbf{v}}{c}\right)$$

Που είναι η σχέση που πρέπει να ισχύει μεταξύ κινούμενου πομπού σωματιδίων και στόχου.

Η ισχύς που ακτινοβολείται από το σωματίδιο σ' ένα τμήμα  $\zeta^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \zeta^2 d\Omega$  της επιφάνειας της σφαίρας, δίδεται από την

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{\zeta \cdot \mathbf{u}}{\zeta c}\right) \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{ακτ}}^2 \zeta^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{4\pi}\right) \frac{|\hat{\zeta} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})|^2}{(\zeta \cdot \mathbf{u})^5} \quad (41)$$

και για την συνολική ακτινοβολούμενη ισχύ, ολοκληρώνοντας την (41) ως προς  $\theta$  και  $\phi$ , παίρνουμε, τελικά:

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \gamma^6 (\alpha^2 - \left|\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{a}\right|^2) \quad (42)$$

Με  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Η (42) είναι η γενίκευση του Lienard για τον τύπο του Larmor (στον οποίο ανάγεται όταν  $v = 0$ ). Από τον παράγοντα  $\gamma^6$  φαίνεται ότι η ακτινοβολούμενη ισχύς γίνεται τεράστια όσο μεγαλώνει η ταχύτητα, ειδικά όταν πλησιάζει πολύ την ταχύτητα του φωτός!

Σαν παράδειγμα (Γ) υποθέτουμε ότι για μια στιγμή (σε χρόνο  $t_{\kappa}$ ) τα  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{a}$  είναι συγγραμμικά, όπως στην ευθύγραμμη κίνηση. Θα βρούμε την γωνιακή κατανομή της ακτινοβολίας (41) καθώς και τη συνολική ακτινοβολούμενη ισχύ.

Εδώ, έχουμε  $(\mathbf{u} \times \mathbf{a}) = (c\hat{\zeta} \times \mathbf{a})$ , οπότε

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{4\pi}\right) c^2 \frac{|\hat{\zeta} \times (\hat{\zeta} \times \mathbf{a})|^2}{(c - \hat{\zeta} \cdot \mathbf{v})^5}$$

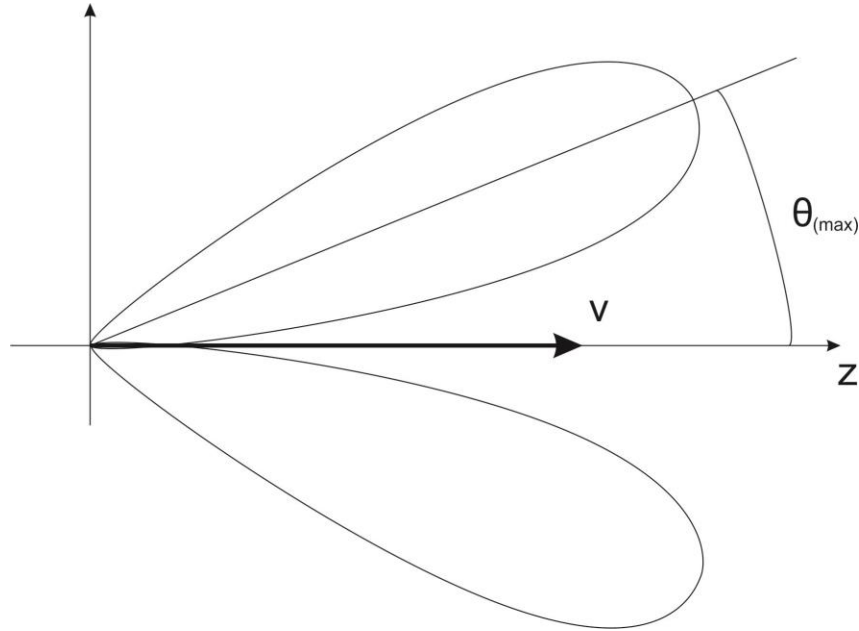
και

$$\hat{\zeta} \times (\hat{\zeta} \times \mathbf{a}) = \hat{\zeta}(\hat{\zeta} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}, \quad \text{άρα} \quad [\hat{\zeta} \times (\hat{\zeta} \times \mathbf{a})]^2 = \alpha^2 - (\hat{\zeta} \cdot \mathbf{a})^2$$

Επιλέγοντας, τώρα, την κατεύθυνση του θετικού άξονα συγγραμμική με την ταχύτητα  $v$ , παίρνουμε:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{4\pi}\right) c^2 \frac{\alpha^2 \sin^2 \theta}{(1-\beta \cos \theta)^5} \quad (\Gamma.1)$$

Με  $\beta = v/c$ . Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με την (38) για  $v = 0$ . Για πολύ μεγάλα  $v$  ( $\beta \approx 1$ ), ωστόσο, η «σαμπρέλα» ακτινοβολίας (Σχ. 7) τεντώνεται και διπλώνει προς τα μπρος εξαιτίας του παράγοντα  $(1 - \beta \cos \theta)^{-5}$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 8.



Σχήμα 8

Κατά μήκος του θετικού άξονα  $z$  εξακολουθεί να μην υπάρχει ακτινοβολία, το μεγαλύτερο μέρος αυτής συγκεντρώνεται σε έναν κώνο που ο άξονάς του συμπίπτει με το διάνυσμα της ταχύτητας και που είναι τόσο πιο «μυτερός» όσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα του σωματίου.

Τη συνολική εκπεμπόμενη ισχύ βρίσκουμε ολοκληρώνοντας την (Γ.1) ως προς τις γωνίες  $\theta$  και  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} P &= \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 \alpha^2}{4\pi c^3} \int \frac{\sin^2 \theta}{(1-\beta \cos \theta)^5} \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 \alpha^2}{4\pi c^3} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)}{(1-\beta x)^5} dx \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \left(\frac{q^2 \alpha^2}{c^3}\right) \gamma^6 \quad (\Gamma.2) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με τον τύπο του Lienard (42) στην περίπτωση που τα  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{a}$  είναι συγγραμμικά. Η κατανομή, δε, της ακτινοβολίας είναι ίδια είτε το σωματίο επιταχύνεται είτε επιβραδύνεται. Εξαρτάται μόνο από το τετράγωνο του  $\alpha$ . Όταν ένα ηλεκτρόνιο

χτυπήσει με μεγάλη ταχύτητα έναν μεταλλικό στόχο, επιβραδύνεται πολύ γρήγορα, εκπέμποντας ένα είδος ακτινοβολίας «φρεναρίσματος» που ονομάζεται **ακτινοβολία πέδησης (bremsstrahlung)**. Το παράδειγμά μας σκιαγραφεί, ουσιαστικά, την κλασική θεωρία της ακτινοβολίας πέδησης.

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

David J. Griffiths: Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική, κεφάλαιο 9.2

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Τα δυναμικά lienard-wiechert .....	1
τα πεδία ενός κινουμένου σημειακού φορτίου .....	5
Η ισχύς που ακτινοβολείται από ένα σημειακό φορτίο .....	11
βιβλιογραφία .....	15
Περιεχόμενα .....	15