Εθνικό **Μ**ετσόβιο **Π**ολυτεχνείο

Σχολή **Ε**φαρμοσμένων **Μ**αθηματικών και **Φ**υσικών **Ε**πιστημών

Ημερομηνία: 5ος του 2016

Εργασία του μαθήματος ''*Θεωρία Ομάδων*'' πάνω στις

ΜΗ ΑΝΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ SU(N)

Ον/μο σπουδαστή: Αθανάσιος Λάππας

Α.Μ. : 09107019

Ον/μο επιβλέποντος καθηγητή: Νίκος Ήργες

Εισαγωγικά

Ομάδες

Για τον ορισμό της έννοιας της ομάδας Lie είναι απαραίτητη η έννοια της συνεχούς ομάδας. Μια συνεχής ομάδα είναι μία ομάδα με άπειρο αριθμό στοιχείων τα οποία εξαρτώνται από n πραγματικές παραμέτρους οι οποίες λαμβάνουν συνεχείς τιμές. Ένα στοιχείο μιας συνεχούς ομάδας μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = g(x) \qquad (1)$$

Λόγω της απειρίας των στοιχείων είναι φανερό πως δεν μπορεί να γίνει χρήση πινάκων πολλαπλασιασμού στοιχείων για την ομάδα. Έτσι ο πολλαπλασιασμός δύο στοιχείων g(x) και g(y) γίνεται ως εξής:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n)g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = g(z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad (2)$$

όπου τα στοιχεία $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι συναρτήσεις των στοιχείων $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Δηλαδή για κάθε z_i έχουμε την σχέση $z_i = f_i(x_1, x_2, .., x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Εννοείται ότι για τις συναρτήσεις f_i ισχύουν όλες οι απαιτήσεις για την πράξη της ομάδας, έτσι για παράδειγμα η πράξη της ομάδας που απαιτεί ότι:

$$g(x)[g(y)g(z)] = [g(x)g(y)]g(z) \qquad (3)$$

μεταφράζεται υπό συναρτησιακούς όρους στην:

$$f_i(x, f(y, z)) = f_i(f(x, y), z) \qquad (4)$$

για κάθε x, y, z.

Εάν για την συνεχή ομάδα ισχύει επιπλέον ότι οι συναρτήσεις fi είναι συνεχείς και έχουν παραγώγους όλων των τάξεων, τότε η συγκεκριμένη ομάδα είναι μία ομάδα Lie.

Οι ομάδες Lie που χρησιμοποιούνται στην φυσική είναι κυρίως ομάδες πινάκων. Οι πιο συνηθισμένες ομάδες είναι οι εξής:

1) Η ορθομοναδιαία ομάδα U(n) η οποία περιλαμβάνει όλους τους τετραγωνικούς πίνακες διάστασης n με μη μηδενική ορίζουσα για τους οποίους ισχύει $A^\dagger A = AA^\dagger = I$.

2) Η ειδική ορθομοναδιαία ομάδα SU(n) η οποία είναι η υποομάδα της U(n) της οποίας οι πίνακες έχουν ορίζουσα ίση με την μονάδα.

3) Η ορθογώνια ομάδα O(n) η οποία περιλαμβάνει όλους τους τετραγωνικούς πίνακες διάστασης n με μηδενική ορίζουσα για τους οποίους ισχύει AT A = AAT = I.

4) Η ειδική ορθογώνια ομάδα SO(n) η οποία είναι η υποομάδα της O(n) της οποίας οι πίνακες έχουν ορίζουσα ίση με την μονάδα.

Μια σημαντική έννοια για την ομάδα είναι η έννοια των γεννητόρων, δηλαδή των στοιχείων εκείνων της ομάδας τα οποία μπορούν να παράξουν όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της ομάδας. Αποδεικνύεται ότι οι γεννήτορες μιας ομάδας Lie είναι τόσοι όσες και οι παράμετροι από τις οποίες εξαρτάται το κάθε στοιχείο. Ο αριθμός των παραμέτρων ονομάζεται και τάξη της ομάδας.

Άλγεβρες Lie

Ας θεωρήσουμε μία άλγεβρα της οποίας η πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ των στοιχείων της μπορεί να οριστεί από τις παρακάτω σχέσεις:

$$A \cdot B = [A, B] = AB - BA \qquad (5)$$

$$[A, \beta B + \gamma C] = \beta[A, B] + \gamma[A, C] \qquad (6)$$

Εάν επιπλέον η πράξη (για την οποία χρησιμοποιούμε τις αγκύλες που συμβολίζουν τον μεταθέτη) ικανοποιεί την παρακάτω σχέση, η οποία ονομάζεται και ταυτότητα του Jacobi:

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]] \qquad (7)$$

τότε η άλγεβρα ονομάζεται άλγεβρα Lie.

Αποδεικνύεται ότι σε κάθε ομάδα Lie αντιστοιχεί κατά μοναδικό τρόπο μια άλγεβρα Lie. Ας θεωρήσουμε μια ομάδα Lie G. Η άλγεβρα Lie που αντιστοιχεί στην G και συμβολίζεται με g είναι το σύνολο όλων των πινάκων X έτσι ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό t ο πίνακας e^{tX} να ανήκει στην G. Συνήθως η άλγεβρα Lie μιας ομάδας Lie συμβολίζεται με τα αντίστοιχα μικρά γράμματα.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την ορθομοναδιαία ομάδα U(n). Σε αυτή ανήκουν οι πίνακες για τους οποίους ισχύει $U^{\dagger} = U^{-1}$. Άρα για να είναι ο e^{tX} ορθομοναδιαιός θα πρέπει $(e^{tX})^{\dagger} = (e^{tX})^{-1} = e^{-tX}$ και επειδή $(e^{tX})^{\dagger} = e^{tX\dagger}$ θα πρέπει $X^{\dagger} = -X$. Η διαφόριση της αρχικής σχέσης δίνει και το αντίστροφο. Συνεπώς η άλγεβρα Lie της U(n) θα συμβολίζεται με u(n) και θα είναι το σύνολο όλων των πινάκων X για τους οποίους ισχύει $X^{\dagger} = -X$. Με παρόμοια συλλογιστική αποδεικνύεται ότι η άλγεβρα Lie 0(n) η οποία συμβολίζεται με o(n) είναι το σύνολο όλων των πινάκων X διάστασης $n \times n$ για τους οποίους ισχύει $X^{T} = -X$.

Συνήθως στην φυσική δεν γίνεται σαφής διαχωρισμός ανάμεσα στις άλγεβρες Lie και στις αντίστοιχες ομάδες, μιας και αυτό που ενδιαφέρει περισσότερο είναι η δομή της άλγεβρας παρά της ομάδας. Όταν λέμε ότι ένα φυσικό σύστημα παρουσιάζει την συμμετρία μιας άλγεβρας εννοούμε ότι οι τελεστές της χαμιλτονιανής ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης που ικανοποιούν οι γεννήτορες της αντίστοιχης ομάδας. Για παράδειγμα οι τελεστές της στροφορμής στην κβαντομηχανική με τις γνωστές σχέσεις που ικανοποιούν παρουσιάζουν SU(3) συμμετρία.

Μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις

Ως αναπαράσταση πινάκων μίας ομάδας G ορίζουμε ένα σύνολο τετραγωνικών πινάκων (των οποίων οι αντίστροφοι πίνακες ορίζονται) οι οποίοι αποτελούν ομάδα (με την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων) ομοιομορφική με την G. Δηλαδή αν A, B στοιχεία της G τότε υπάρχουν πίνακες D(A), D(B) έτσι ώστε D(A)D(B) = D(AB).

Στην φυσική συνήθως χρησιμοποιείται η έννοια της μη αναγώγιμης αναπαράστασης μίας ομάδας. Ας θεωρήσουμε δύο αναπαραστάσεις $Γ_1$,$Γ_2$ της G οι οποίες αποτελούνται από τους πίνακες $D_1(A)$ και $D_2(A)$ για κάθε στοιχείο A της G. Ορίζεται μία άλλη αναπαράσταση Γ της G η οποία ονομάζεται ευθύ άθροισμα των $Γ_1$ και $Γ_2$ και συμβολίζεται με $Γ = Γ1 \oplus Γ2$ ως εξής:

$$D(A) = \begin{bmatrix} D_1(A) & 0 \\ 0 & D_2(A) \end{bmatrix} \tag{8}$$

Να σημειωθεί ότι αν οι $Γ_1$ και $Γ_2$ έχουν διάσταση n_1 και n_2 αντίστοιχα , τότε η Γ έχει διάσταση $n = n_1+n_2$. Αντίστροφα εάν μία αναπαράσταση Γ μπορεί να γραφεί σαν το ευθύ άθροισμα δύο ή περισσότερων αναπαραστάσεων $Γ_1$, $Γ_2$, .., $Γ_k$ τότε ονομάζεται αναγώγιμη αναπαράσταση. Κάθε αναπαράσταση Γ′ ισοδύναμη με την Γ είναι και αυτή αναγώγιμη αναπαράσταση. Να σημειωθεί ότι ένας μετασχηματισμός ομοιότητας μπορεί να αποκρύψει το γεγονός ότι μία αναπαράσταση είναι αναγώγιμη.

Ως μη αναγώγιμη αναπαράσταση μίας ομάδας ορίζουμε μία αναπαράσταση η οποία δεν είναι αναγώγιμη και δεν μπορεί να έρθει σε αναγώγιμη μορφή μέσω ενός μετασχηματισμού ομοιότητας.

Πολλές φορές, στις διάφορες εφαρμογές δεν χρησιμοποιούνται οι αναπαραστάσεις και οι μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις μίας ομάδας, αλλά οι αναπαραστάσεις και οι μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της αντίστοιχης άλγεβρας. Ο ορισμός για την αναπαράσταση Ψ μίας άλγεβρας είναι όμοιος με αυτόν της ομάδας μόνο που τώρα πρέπει να ισχύει:

$$ψ([A, B]) = ψ(A)ψ(B) − ψ(B)ψ(A) \tag{9}$$

όπου [A, B] είναι ο μεταθέτης των A και B.

Η μη αναγώγιμη αναπαράσταση μίας άλγεβρας Lie είναι έννοια πιο πολύπλοκη από μαθηματικής απόψεως και δεν θα αναλυθεί ενδελεχώς στο παρόν. Να σημειωθεί όμως ότι εφόσον σε κάθε ομάδα Lie αντιστοιχεί μία άλγεβρα Lie, σε κάθε μη αναγώγιμη αναπαράσταση μίας ομάδας Lie αντιστοιχίζεται μια μη αναγώγιμη αναπαράσταση της αντίστοιχης άλγεβρας Lie μέσω της διαφόρισης στην μονάδα της ομάδας.

Η μη αναγώγιμη αναπαράσταση έχει μεγάλη σημασία και στην πυρηνική δομή όπως θα φανεί στα παρακάτω. Σκοπός γενικά σε ένα πρόβλημα μετά την δημιουργία της χαμιλτονιανής είναι η εύρεση των κβαντικών αριθμών που χαρακτηρίζουν τις καταστάσεις. Σε γενικές γραμμές οι γεννήτορες μίας ομάδας αλλάζουν ορισμένους κβαντικούς αριθμούς, όμως υπάρχουν ορισμένοι κβαντικοί αριθμοί οι οποίοι δεν αλλάζουν από κανένα γεννήτορα.

Για παράδειγμα οι 36 γεννήτορες της u(6) διατηρούν τον συνολικό αριθμό των μποζονίων N. Επειδή οι γεννήτορες μίας ομάδας δεν μπορούν να παράγουν στοιχεία διαφορετικών μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων, οι τελεστές Casimir μίας ομάδας οι οποίοι μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες εξ' ορισμού είναι διαγώνιοι και επομένως διατηρούν όλους τους κβαντικούς αριθμούς, συμπεριλαμβανομένων και των κβαντικών αριθμών των υποαλγεβρών. Πράγματι κάθε τελεστής Casimir έχει ιδιοτιμές οι οποίες είναι συναρτήσεις μόνο των κβαντικών αριθμών που διατηρούνται. Έτσι κάθε χαμιλτονιανή εκπεφρασμένη με τους τελεστές Casimir μίας άλγεβρας και των υποαλγεβρών της δεν μπορεί να μπλέξει διαφορετικές αναπαραστάσεις των ομάδων. Έτσι οι ιδιοτιμές της χαμιλτονιανής αποτελούνται από γραμμικούς 59 συνδυασμούς των ιδιοτιμών των τελεστών Casimir και είναι συναρτήσεις των εκάστοτε κβαντικών αριθμών που διατηρούνται.

Μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της SU(n)

Ας θεωρήσουμε την ομάδα SU(n) η οποία αποτελείται από τους $n \times n$ ορθομοναδιαίους πίνακες με μοναδιαία ορίζουσα. Οποιοδήποτε διάνυσμα της μορφής $\psi_i = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$ μετασχηματίζεται κάτω από την δράση της SU(n) σύμφωνα με τον κανόνα $\psi_i \rightarrow \psi'_i U_{ij} \psi_j$. Τα στοιχεία ψ_j αποτελούν την βάση της SU(n) στην θεμελιώδη αναπαράσταση, ενώ τα ψ^j αποτελούν την βάση για την συζυγή αναπαράσταση με $\psi^j = \psi^*_j$ και $U^i_j = U^*_{ij}$. Ένας τανυστής δεύτερης τάξης ψ_{ij} μετασχηματίζεται ως εξής:

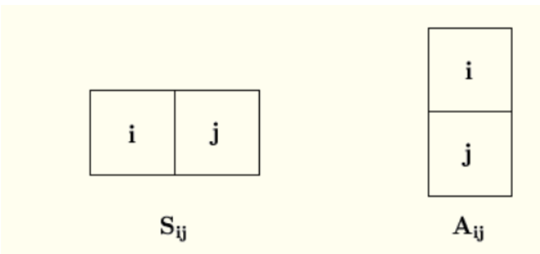
$$\psi'^{ij} = U^i_k U^j_l \psi^{kl} \qquad (10)$$

λόγω συμμετρίας:

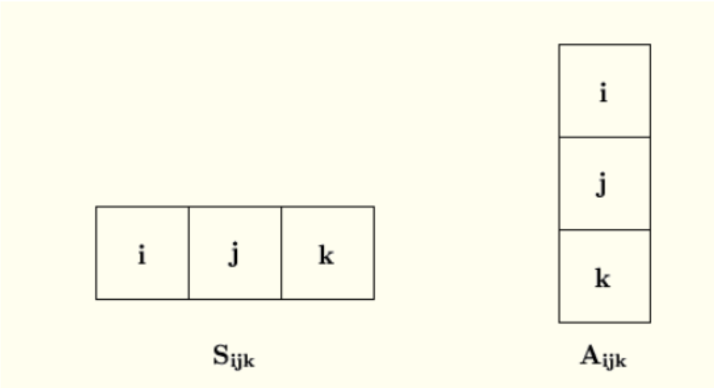
$$\psi'^{ji} = U^j_l U^i_k \psi^{lk} = U^i_k U^j_l \psi^{lk} \qquad (11)$$

Είναι φανερό ότι η εναλλαγή των δεικτών δεν αλλάζει τους κανόνες μετασχηματισμού. Η εναλλαγή δύο στοιχείων πραγματοποιείται με την δράση του τελεστή εναλλαγής P_{12}. Δηλαδή $P_{12}\psi^{ij} = \psi ji$. Ακόμη αποδεικνύεται ότι ο P12 μετατίθεται με την ομάδα των μετασχηματισμών. Γίνεται η ανάλυση $\psi ij = S^{ij} + A^{ij}$ όπου $S^{ij} = \psi^{ij} + \psi^{ji}$ και $A^{ij} = \psi ij - \psi^{ji}$.

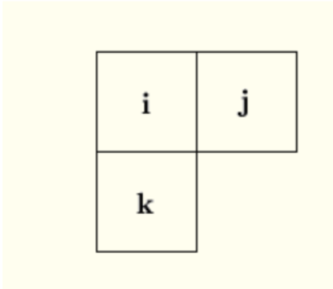
Ο συμμετρικός τανυστής S^{ij} και αντισυμμετρικός τανυστής A^{ij} δεν μπερδεύονται μεταξύ τους κάτω από την δράση των μετασχηματισμών και έτσι συμμετρικές και αντισυμμετρικές καταστάσεις μπορούν να αναλυθούν σε αυτούς τους δύο τανυστές, οι οποίοι όμως δεν μπορούν να αναλυθούν περαιτέρω και έτσι σχηματίζουν την βάση για τις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της SU(n). Πιο συγκεκριμένα οι μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις αντιστοιχούν σε τανυστές με πεπερασμένες ιδιότητες συμμετρίας στους δείκτες. Η διαδικασία εύρεσης μη αναγώγιμων τανυστών τάξης f ανάγεται στην εύρεση ενός πλήρους συνόλου τελεστών εναλλαγής των τανυστών. Το συγκεκριμένο πρόβλημα λύνεται με την βοήθεια των διαγραμμάτων Young. Το διάγραμμα Young είναι μία διάταξη f κουτιών σε γραμμές και στήλες έτσι ώστε το μήκος των γραμμών να μην αυξάνεται από την κορυφή στη βάση. Δηλαδή γίνεται η διαμέριση $f_1 \leq f_2 \leq .. \leq f_n$ με $f_1 + f_2 + ... + f_n = f$. Σε κάθε κουτί αναγράφεται ένας ακέραιος $i_k = 1, 2, .., n$ και σε κάθε διάγραμμα ένας τανυστής $\psi_{i1,i2,..,i\,f1,if1+1,..,if1+f2}$ έτσι ώστε οι δείκτες που αντιστοιχούν σε κάθε γραμμή να είναι συμμετρικές ενώ οι δείκτες που αντιστοιχούν σε κάθε στήλη να είναι αντισυμμετρικές. Για παράδειγμα για τανυστές δεύτερης τάξης:



ενώ για τανυστές τρίτης τάξης:



Ένας τανυστής μικτής συμμετρίας $\psi_{ij,k} = \psi_{ijk} + \psi_{jik} - \psi_{jki} - \psi_{jki}$ αντιστοιχεί στο διάγραμμα:



Με αυτόν τον τρόπο αντιστοιχούμε και σε κάθε μη αναγώγιμη αναπαράσταση της SU(n) ένα διάγραμμα Young. Με την χρήση των διαγραμμάτων σχηματίζονται και τα τανυστικά γινόμενα των μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε κάποιο εξειδικευμένο βιβλίο θεωρίας ομάδων για τα περαιτέρω (βλέπε: ‘’Group Theory and Physics’’ S. Sternberg).

Να σημειωθεί ότι η παραπάνω διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλες ομάδες πινάκων Lie. Στην περίπτωση της SU(n) αποδεικνύεται ότι οι μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της $[f_1, f_2, ..., f_n]$ και $[f_1 + s, f_2 + s, ..., f_n + s]$ είναι ισοδύναμες και έτσι χρειάζονται διαγράμματα με $n - 1$ γραμμές αφού τα διαγράμματα με $[f_1, f_2, ...,f_n]$ και $[f_1 - f_n, f_2 - f_n, ..., f_{n-1} - f_n, 0]$ είναι ισοδύναμα. Έτσι τα διαγράμματα της SU(2) χαρακτηρίζονται από έναν αριθμό ενώ τα διαγράμματα της SU(3) από δύο αριθμούς οι οποίοι συμβολίζονται συνήθως με (λ, μ). Οι μποζονικές καταστάσεις για λόγους συμμετρίας της κυματοσυνάρτησης αντιστοιχούν σε διάγραμμα (λ, 0) το οποίο περιέχει μόνο μία γραμμή με λ κουτιά.

Πηγές - Παραπομπές:

http://www.cmth.ph.ic.ac.uk/people/d.vvedensky/groups/Chapter9.pdf

http://www.physics.ntua.gr/gr/dpms/diplomatikes/ashmakis.pdf

(διπλωματική: ''Αλγεβρικά μοντέλα πυρηνικής δομής με SU(3) συμμετρία'' – Ιωάννης Ασημάκης)

https://en.wikipedia.org/wiki/Irreducible_representation

http://mathworld.wolfram.com/IrreducibleRepresentation.html

http://physik.uni-graz.at/~gxe/2013-hadron-physics/hadron-app-3.pdf

http://astro.sunysb.edu/steinkirch/books/group.pdf

http://www.physics.indiana.edu/~dermisek/QFT_08/qft-II-19-2p.pdf

https://www.amazon.com/Group-Theory-Physics-S-Sternberg/dp/0521558859/184-3645993-0480806?ie=UTF8&*Version*=1&*entries*=0