Aristotle University of Thessaloniki
Department of Electrical and Computer Engineering
Telecommunications Division

Γεώργιος Θεολόγης (10413)
Αθανάσιος Κωνσταντής (10537)

Communication Systems II

Constellation Based Multiple Access

1 Ερώτημα 1

1.1 Θεωρητική Παρουσίαση

Στο συγκεκριμένο ερώτημα καλούμαστε να υλοποιήσουμε το 1ο σύστημα για τάξη $M = 4$ καθώς και να προσομοιώσουμε την διαδικασία εκπομπής-λήψης μεσα στην οποία εμπεριέχονται τα πιθανά σφάλματα ανίχνευσης στον δεκτή.

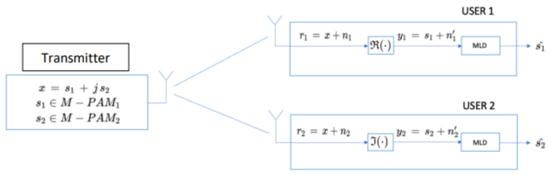

Fig.1 System 1

Καταρχάς, για $M = 4$ έχουμε δυο 4-PAM αστερισμούς.

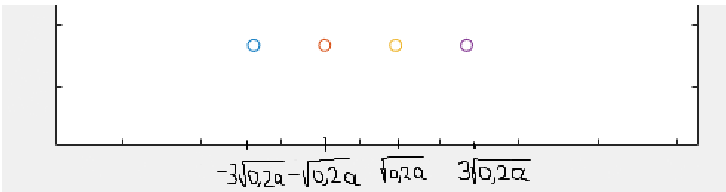

Figure 1: Αστερισμός που "βλέπει" ο ένας χρήστης

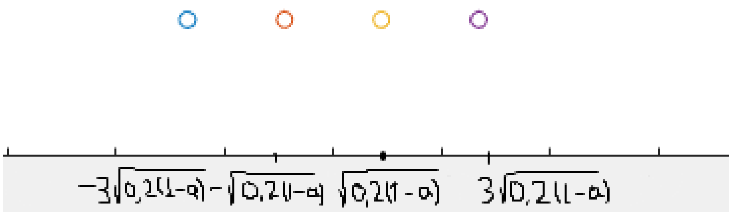

Figure 2: Αστερισμός που "βλέπει" ο άλλος χρήστης

Απο αυτούς τους δυο αστερισμούς που ο καθένας αφορά την εξυπηρέτηση ενός απο τους δυο δεκτές, σχηματίζεται ο αστερισμός εκπομπής που αντιστοιχεί σε έναν 16-QAM.

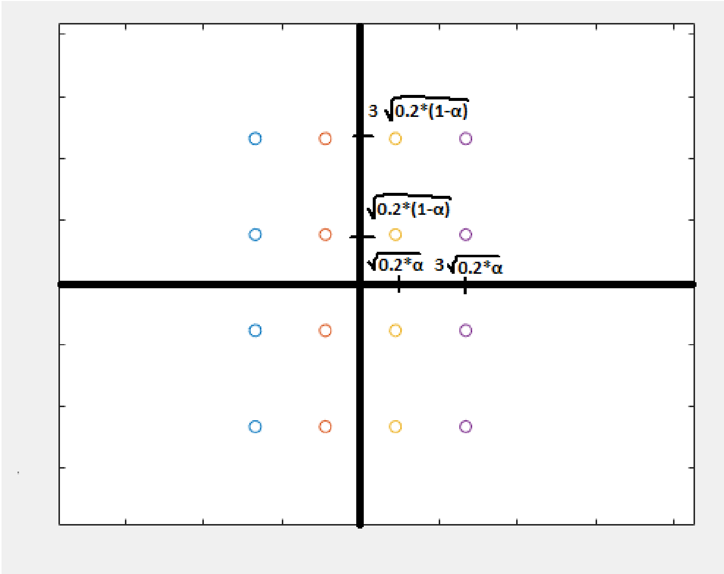

Figure 3: Ο αστερισμός που εκπέμπεται από τον πομπό με σκοπό την εξυπηρέτηση των 2 χρηστών

Προφανώς λογώ της ανεξαρτησίας των συμφασικών συντεταγμένων με τις ορθογωνίες, η μέση ενέργεια εκπομπής είναι ίση με:

$$E_t = E_{s,1} + E_{s,2}$$

$$E_t = a + 1 - a$$

$$E_t = 1$$

Άρα η μέση ενεργεία συμβολού εκπομπής είναι ίση με την τιμή 1. Τα συμβολά του 16-QAM της εκπομπής, τα αντιμετωπίζουμε ως μιγαδικούς αριθμούς, των οποιών το πραγματικό μέρος αντιστοιχεί στην πληροφορία που προορίζεται για τον χρήστη 1 ($user1 = UE_1$), ενώ το φανταστικό μέρος αντιστοιχεί στην πληροφορία που προορίζεται για τον χρήστη 2 ($user2 = UE_2$).
Ο δέκτης 1 λαμβάνει το σήμα $r_1 = x + n_1 = s_1 + j \cdot s_2 + n_1$.
Ο δέκτης 2 λαμβάνει το σήμα $r_2 = x + n_2 = s_1 + j \cdot s_2 + n_2$.
Το n_1 και το n_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί που προέρχονται απο την μιγαδική κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και με διασπορά $\frac{N_0}{2}$ και $\frac{N_0}{4}$ αντιστοιχά. Συνεπώς τα λαμβανόμενα σήματα μπορούν να εκφραστούν και ώς :

$$r_1 = s_1 + n_1' + j \cdot (s_2 + n_1'').$$

$$r_2 = s_1 + n_2' + j \cdot (s_2 + n_2'').$$

Τα n_1' και n_1'' είναι πραγματικοί αριθμοί που ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\frac{N_0}{4}$.
Τα n_2' και n_2'' είναι πραγματικοί αριθμοί που ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\frac{N_0}{8}$.
Ο δέκτης και των δύο χρηστών έχει αποδιαμορφωτή τετοίο ώστε να ανακτεί απο το σήμα εισόδου το πραγματικό μέρος για τον $user1$ και το φανταστικό μέρος για τον $user2$.

Στην συνέχεια η ανίχνευση γίνεται και στους δυο δέκτες από δυο διαφορετικούς MLD ανιχνευτές τέτοιους ώστε ο ένας να κάνει εκτίμηση του συμβόλου του αστερισμού $4 - PAM_1$ στον UE_1 και ο άλλος να κάνει εκτίμηση του συμβόλου του αστερισμού $4 - PAM_2$ στον UE_2. Ο ανιχνευτής MLD χρησιμοποιεί τον κανόνα της μεσοκαθετού προκειμένου να ορίσει τις περιοχές απόφασης του 4-PAM. Ακολουθεί η άντληση των θεωρητικών πιθανοτήτων σφάλματος στους δυό δέκτες:

Από την σχέση (7.17) του [1]έχουμε :

$$E_{g1} = \frac{3 \cdot E_{s,1}}{M^2 - 1} = \frac{3 \cdot a}{4^2 - 1} = \frac{a}{5}$$

$$E_{g2} = \frac{3 \cdot E_{s,2}}{M^2 - 1} = \frac{3 \cdot (1 - a)}{4^2 - 1} = \frac{1 - a}{5}$$

$$dmin_1 = 2 \cdot \sqrt{E_{g,1}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{5}} \tag{1}$$

$$dmin_2 = 2 \cdot \sqrt{E_{g,2}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1 - a}{5}} \tag{2}$$

Απο την σχέση της πιθανότητας σφάλματος του M-PAM απο το βιβλίο έχουμε:

$$P_{s,1} = \frac{2 \cdot (M - 1)}{M} \cdot Q\left(\frac{dmin_1}{2 \cdot \sqrt{\frac{N_0}{4}}}\right)$$

$$P_{s,1} = 1.5 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{0.8 \cdot a}{N_0}}\right) \tag{3}$$

Αντιστοιχά για τον αστερισμό 4-PAM2

$$P_{s,2} = \frac{2 \cdot (M - 1)}{M} \cdot Q\left(\frac{dmin_2}{2 \cdot \sqrt{\frac{N_0}{8}}}\right)$$

$$P_{s,2} = 1.5 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{1.6 \cdot (1 - a)}{N_0}}\right) \tag{4}$$

Θα ορίσουμε ως SNR τον λόγο της μέσης ενεργείας εκπομπής Et προς την N0. Δηλαδή,

$$SNR = \frac{E_t}{N_0} \tag{5}$$

Για το σύστημα 1 , ισχύει $E_t = 1$ άρα :

$$SNR = \frac{1}{N_0} \tag{6}$$

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το max SEP για καθε $SNR = \frac{1}{N0}$. Ας υποθέσουμε οτι θέλουμε να ρίξουμε τον πιθανότητα σφάλματος του χρήστη 1 , εφόσον η συνάρτηση Q(x) ειναι γνησιώς φθίνουσα , για δεδομένο SNR αρκεί να αυξήσουμε το α. Όμως η αύξηση του α , οδηγεί σε μείωση του 1-α και συνεπώς σε αύξηση της πιθανότητας σφάλματος στον χρήστη 2. Τα ίδια ισχύουν αμα μείωναμε το α προκειμένου να μειώσουμε την πιθανότητα σφάλματος στον χρήστη 2. Φαίνεται ότι η πιο ευνοική περίπτωση για να έχουμε ελάχιστο το μέγιστο της πιθανότητας σφάλματος στους δυο χρήστες είναι να οι δυο πιθανότητες αυτές να είναι ίσες για το ίδιο SNR. Πράγματι, σε αυτή την κατάσταση μια αύξηση ή μια μείωση του α οδηγεί σε αύξηση μιας απο τις δυό πιθανότητες σφάλματος και σε μειώση της άλλης και συνεπώς σε αύξηση του μεγίστου των δυο πιθανοτήτων σφάλματος. Συνεπώς, η βέλτιστη περίπτωση είναι να έχουμε α τέτοιο ώστε οι δυό πιθανότητες σφάλματος να καθίστανται ίσες.

$$P_{s,1} = P_{s,2} \Rightarrow 1.5 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{0.8 \cdot a}{N_0}}\right) = 1.5 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{1.6 \cdot (1 - a)}{N_0}}\right)$$

$$0.8 \cdot a = 1.6 \cdot (1-a) \Rightarrow 2.4 \cdot a = 1.6$$

$$a = \frac{2}{3} \tag{7}$$

Στη συνέχεια μέσω προσομοιώσης του συστήματος 1 θα επιβεβαιώσουμε ότι αυτό είναι το βέλτιστο α.

1.2 MATLAB CODE

Ακολουθεί παρουσίαση του κώδικα προσομοιώσης και άντλησης διαγραμμάτων καθώς και σύντομη εξήγηση τους.
Αρχικά υλοποιήθηκε η συνάρτηση SEP_N0 (N_o , a) με σκοπό την προσομοιώση του συστήματος 1 για δεδομένο N_0 και α.

```
function [SEP_user1,SEP_user2] = SEP_N0(N_o,a)
M = 4; %Number of M-PAM points
dx = sqrt((3*a)/(M*M-1)); %distance of first point
dy = sqrt((3*(1-a))/(M*M-1));
Es1 = a;
Es2 = 1-a;
c = 0.5;
%Initialize a matrix that contains all the possible constellation
    points
P = zeros(4,4);

for r = 1:M
    for q = 1:M
        P(q,r) = complex((2*r-M-1)*dx,(2*q-M-1)*dy);
    end
end

%Initialize a matrix of all possible M-PAM points
v = zeros(1,M);
for r = 1:M
    v(r) = 2*r-M-1;
end

%Create a random bit string to transmit
SimSize = 10e6;


index_array1=randi([1,4],1,SimSize);
index_array2=randi([1,4],1,SimSize);
%Create the matrix that stores all of the simulated points
Sim_user1 = zeros(1,SimSize);
Sim_user2 = zeros(1, SimSize);
Signal_Sent = zeros(1,SimSize);


%Generate the simulated points with noise
SimIndex = 1;
for r = 1:SimSize
    index1 = index_array1(r);
```

```
    index2 = index_array2(r);
    Re = real(P(index1,index2));
    Im = imag(P(index1,index2));
    Signal_Sent(SimIndex) = complex(Re,Im);
    %fprintf("Re: %f , Im: %f",Re,Im);
    ReNoise_user1 = randn()*sqrt(N_o/4);
    ImNoise_user1 = randn()*sqrt(N_o/4);
    ReNoise_user2 = randn()*sqrt(c*N_o/4);
    ImNoise_user2 = randn()*sqrt(c*N_o/4);
    Sim_user1(SimIndex) = complex((Re + ReNoise_user1),(Im + ImNoise_user1));
    Sim_user2(SimIndex) = complex((Re + ReNoise_user2), (Im + ImNoise_user2));
    SimIndex = SimIndex + 1;
end

%Each user reads their respective data
%calculate the minimum distance of each point and guess the result

mindistance_user1 = zeros(1,SimIndex);
result_user1 = zeros(1,SimIndex);

mindistance_user2 = zeros(1,SimIndex);
result_user2 = zeros(1,SimIndex);

for r = 1:(SimIndex-1)
    mindistance_user1(r) = abs(real(Sim_user1(r)) - v(1)*dx);
    result_user1(r) = v(1)*dx;

    mindistance_user2(r) = abs(imag(Sim_user2(r)) - v(1)*dy);
    result_user2(r) = v(1)*dy;

    for i = 1:M

        if(mindistance_user1(r) > abs(real(Sim_user1(r)) - v(i)*dx))
            mindistance_user1(r) = abs(real(Sim_user1(r)) - v(i)*dx);
            result_user1(r) = v(i)*dx;
        end

        if(mindistance_user2(r) > abs(imag(Sim_user2(r)) - v(i)*dy))
            mindistance_user2(r) = abs(imag(Sim_user2(r)) - v(i)*dy);
            result_user2(r) = v(i)*dy;
        end

    end
end

```

```
84
85 %Calculates subol mistakes in the sim for each user
86 errors_user1 = 0;
87 errors_user2 = 0;
88 for i = 1:(SimIndex-1)
89     if(abs(result_user1(i) - real(Signal_Sent(i))) > 0.05)
90         errors_user1 = errors_user1 + 1;
91     end
92     if(abs(result_user2(i) - imag(Signal_Sent(i))) > 0.05 )
93         errors_user2 = errors_user2 + 1;
94     end
95 end
96
97 SEP_user1 = errors_user1/SimSize;
98 SEP_user2 = errors_user2/SimSize;
99
100 end
```

Στις πρώτες γραμμές του κώδικα γίνεται μια αρχικοποιήση βασικών χαρακτηριστικών των δυο αστερισμών 4-PAM. Στις γραμμές 11-15 γίνεται η κατασκεύη του πίνακα P που περιέχει τα μιγαδικά σύμβολα του συστήματος εκπομπής.

Στις γραμμές 18-21 κατασκευάζεται ένα βοηθητικό διάνυσμα που βοηθά στην χαρακτήριση της θέσης του συμβόλου του 4-PAM.

Ορίζεται ως μέγεθος της προσομοιώσης στην γραμμή 24 το 10^6.

Στις γραμμές 27-28 κατασκευάζονται διανύσματα δεικτών που θα επιλεχθούν για τον καθορισμό του συμβολού που θα αποσταλεθεί σε συγκεκριμένο βήμα της προσομοιώσης.
Στη συνέχεια κατασκευάζονται τα συμβολά που αποστέλει ο πομπός (Signal_Sent (SimIndex)) και τα επηρεασμένα απο θόρυβο σήματα που φτάνουν στους δυο δέκτες (Sim_ user1 (SimIndex), Sim_ user2 (SimIndex)).

Στις γραμμές 56-82 πραγματοποιείται η ανίχνευση του συμβόλου στον δέκτη. Εδώ επιλέγεται αφού είναι MLD ο ανιχνευτής να υπολογίσουμε την απόσταση του συμβόλου μετά απο την αποδιαμορφώση από κάθε σύμβολο του επιθυμητού 4-PAM. Το συμβόλο στη λήψη εκτιμάται ως το συμβολό του αστερισμού 4-PAM από το οποιό έχει την ελάχιστη απόσταση. Προφανώς μπορούμε να υλοποιήσουμε την ανίχνευση και με περιοχές αποφάσεις οπότε για λόγους πληρότητας θα γίνει αυτή η επιλογή για την προσομοιώση στο δεύτερο σκέλος της εργασίας.

Τελικά, στις τελευταίες γραμμές του κωδικά, υπολογίζουμε το πλήθος σφαλμάτων που έγιναν στους δυο δέκτες ελέγχοντας αμα το σύμβολο που εκπομπής είναι ίδιο με το σύμβολο που ανίχνευσης.

Για να υπολογίσουμε το καλύτερο α για το οποίο έχουμε την ελαχιστοποίηση του μεγίστου μεταξύ των δύο πιθανοτήτων σφαλμάτος , πρεπεί να προσομοιώσουμε σε καθε SNR τις πιθανότητες σφάλματος που προκύπτουν για διάφορα α και να επιλέγξουμε το πιο ευνοικό α. Ορίζουμε την συνάρτηρση septmetafun(N_0,a) η οποία για δεδομένο α και N_0 (δλδ και SNR) , τρέχει την προσομοιώση του συστήματος 1 και επιστρέφει την μέγιστη πιθανότητα σφάλματος μεταξύ των δυο χρηστών. Θα αξιοποίησουμε την συνάρτηση βελτιστοποίησης fminbnd η οποία για καθε SNR επιστρέφει το α που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση septmetafun. Καλώντας την fminbnd για πολλές τιμές SNR, βρίσκουμε το βέλτιστο α σε κάθε τιμή SNR και δημιουργούμε διάγραμμα το βελτιστού α συναρτήση του SNR. Αυτη η διαδικασία γίνεται στη συνάρτηση Best_a (). Ακολουθούν οι συναρτήσεις που περιγράφθηκαν.

```
function min=septmetafun(N_0,a)

[Sep1,Sep2]=SEP_N0(N_0,a);
min=max(Sep1,Sep2);

end
```

```
function Best_a()
ub=1;
lb=0;
SNR=zeros(20,1);
arrN0=zeros(20,1);
a_arr=zeros(20,1);

for k=1:20
    SNR(k)=k;
end
    arrN0=10.^(-SNR/10);
for i=1:20
    objfun = @(a)septmetafun(arrN0(i),a);
    [a_arr(i)] = fminbnd(objfun,lb,ub);
    clearvars objfun
end
plot(SNR,a_arr);
xlabel('SNR DB');
ylabel('Best a');

end
```

1.3 Προσομοίωση

Ακολουθούν τα ζήτουμενα γραφήματα για α=0.25:

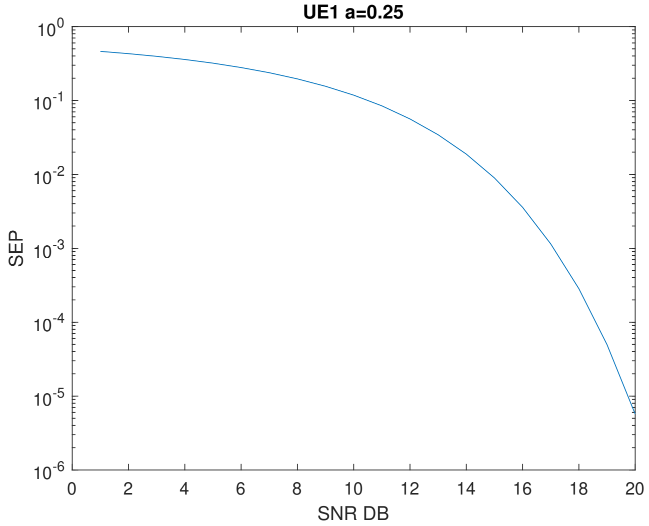

Figure 4: Γράφημα της πιθανότητας σφάλματος (SEP) στον UE_1 για $a = 0.25$ στη προσομοιώση για διάφορες τιμές του SNR

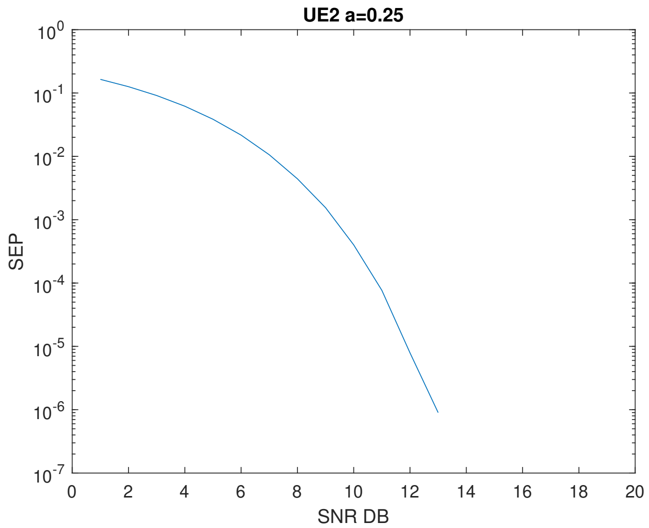

Figure 5: Γράφημα της πιθανότητας σφάλματος (SEP) στον $UE2$ για $a = 0.25$ στη προσομοιώση για διάφορες τιμές του SNR

Για να επιβεβαιώσουμε τα αποτελέσματα της προσομοιώσης θα σχεδιάσουμε μαζί το θεωρητικό και το πρακτικό SEP για τις συγκεκριμένες τιμές του SNR.

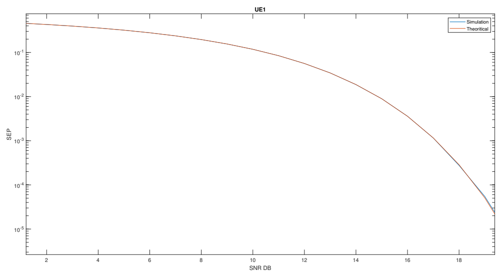

Figure 6: Διάγραμμα της προσομοίωσης και του θεωρητικού υπολογισμού του SEP του χρήστη 1

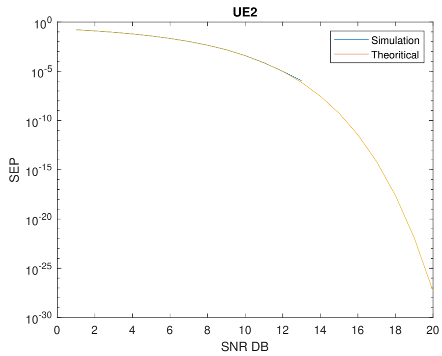

Figure 7: Διάγραμμα της προσομοίωσης και του θεωρητικού υπολογισμού του SEP του χρήστη 2

Πραγμάτι και στους δύο χρήστες παρατηρούμε την ταύτιση της υπολογισμένης από την προσομοιώση πιθανότητας σφάλματος και αυτής που προβλέπεται απο την θεωρία για συγκεκριμένο SNR.

Ακολουθεί το γράφημα που επιστρέφει η κλήση της best_a() . Μας επιστρέφει οπώς εξηγήθηκε προηγουμένως τα α τα οποία για δεδομένες τιμές του SNR ελαχιστοποιούν το μέγιστο μεταξύ των πιθανοτήτων σφάλματος στους χρήστες 1 και 2 που υπολογίστηκε απο την προσομοίωση. Συνεπώς έχουμε:

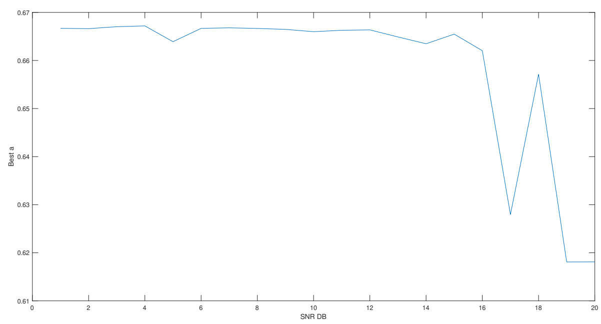

Figure 8:

Πράγματι παρατηρούμε ότι για το αρχικό εύρος των SNR που είναι αρκούντως μικρά για να είναι επιτυχής η προσομοιώση βάσει του μεγέθους των δειγμάτων (10^6), η διαδικάσια βελτιστοποιήσης μας επιστρέφει τίμη για το $a = \frac{2}{3}$ προσεγγιστικά. Άρα επίβεβαιώσαμε και εμπειρικά ότι η τιμή του α που ελαχιστοποιεί το μέγιστο μετάξυ των πιθανοτήτων σφάλματος μετάξυ των δυο χρήστων για κάθε SNR είναι η τιμή :

$$a = \frac{2}{3}$$

2 Ερώτημα 2

2.1 Θεωρητική Παρουσίαση

Στο δεύτερο ερώτημα παράγουμε δυο 4-PAM απο την περιστροφή ενός 4-QAM. Οι προβολές του περιεστραμμένου 4-QAM στον οριζόντιο άξονα συνιστούν τον αστερισμό $4-PAM_1$ που αντιστοιχεί στον χρήστη 1, ενώ αυτές στον κατακόρυφο άξονα συνιστούν τον αστερισμό $4-PAM_2$ που αντιστοιχει στον χρήστη 2. Απο αυτούς τους δυο 4-PAM, συνθέτουμε τον αστερισμό εκπομπής που αποτελεί έναν 16-QAM όπου οι οριζόντιες συντεταγμένες του προέρχονται από τον $4-PAM_1$, ενώ οι κατακόρυφες από τον $4-PAM_2$. Από την εκπομπή ενός συμβόλου του 16-QAM, η οριζόντια συνιστώσα μεταφέρει την πληροφορία που προορίζεται για τον χρήστη 1 και η κατακόρυφη αυτή που προορίζεται για τον χρήστη 2.

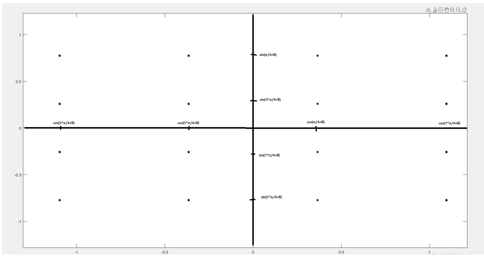

Figure 9: Αστερισμός του ερωτήματος 2

Οι αποδιαμορφωτές στους δέκτες είναι ίδιοι με το συστήμα 1 οπώς είναι και το περιβάλλον του θορύβου σε κάθε δέκτη αντιστοιχά. Οι MLD ανιχνευτές είναι προσαρμοσμένοι ομώς στις περιοχές απόφασης των 4-PAM που προέκυψαν απο την περιστροφή. Αν θεωρήσουμε την μέση ενέργεια συμβόλου του αρχικού 4-QAM αστερισμού ίση με $E_s = 1$, εύκολα φαίνεται οτι και η μέση ενέργεια συμβόλου του αστερισμού εκπομπής 16-QAM είναι και αυτή ίση με $E_t = 1$. Σκοπός του συγκεκριμένου ερωτήματος είναι να βρούμε το ϑ το οποίο ελαχιστοποίει το μέγιστο των πιθανότητων σφάλματος των δύο χρηστών. Γιατι ο αρχικός αστερισμός είναι τετραγωνικός , τα δυο 4-PAM που προκύπτουν είναι ίδια μεταξύ τους. Για να έχουμε χαμήλοτερη πίθανοτητα σφάλματος πρέπει οι απόστασεις των συμβόλων σε κάθε 4-PAM να γίνουν ίδιες μετάξυ τους. Άρα συμφώνα με την ανάλυση που γίνεται στο [2] η βέλτιστη γωνία είναι ϑ=26.565 μοίρες.

2.2 MATLAB CODE

Οι κώδικες ακολουθούν την λογική των αντίστοιχων στο ερώτημα 1. Η διαφορά έδω είναι ότι κάνουμε ανίχνευση με την χρήση ανισοτήτων με τα όρια απόφασης των περιοχών απόφασης. Και επίσης ότι βρίσκουμε το βέλτιστο ϑ.

```
function [SEP_user1,SEP_user2] = SEP_NO_rot(N_o,theta)
M = 4; %Number of M-PAM points
E=1;
%N_o = 0.5;
c = 0.5;
%Initialize a matrix that contains all the possible constellation
    points
P = zeros(1,4);
inirot=pi/4;
for r = 1:M
        P(r) = complex(E*cos(theta+inirot*(2*r-1)),E*sin(theta+
            inirot*(2*r-1)));
end

```

```
%Initialize a matrix of all possible M-PAM points
rePam = zeros(1,M);
imPam=zeros(1,M);
dre=zeros(1,3);
dim=zeros(1,3);
rePam(1) = real(P(2));
rePam(2) = real(P(3));
rePam(3) = real(P(1));
rePam(4) = real(P(4));
imPam(1) = imag(P(3));
imPam(2) = imag(P(4));
imPam(3) = imag(P(2));
imPam(4) = imag(P(1));
dre(1)=(rePam(1)+rePam(2))*0.5;
dre(2)=(rePam(2)+rePam(3))*0.5;  %it will surely be zero though we
    will check on it later
dre(3)=(rePam(3)+rePam(4))*0.5;  %i think that dre(3)=-dre(1)
dim(1)=(imPam(1)+imPam(2))*0.5;
dim(2)=(imPam(2)+imPam(3))*0.5;  %it will surely be zero though we
    will check on it later
dim(3)=(imPam(3)+imPam(4))*0.5;  %i think that dim(3)=-dim(1)


%Create a random bit string to transmit
SimSize = 10e6;      %SOS: Always has to be a constant times M


index_array=randi([1,4],1,2*SimSize);
%Create the matrix that stores all of the simulated points
Sim_user1 = zeros(1,SimSize);
Sim_user2 = zeros(1, SimSize);
Signal_Sent = zeros(1,SimSize);


%Generate the simulated points with noise
SimIndex = 1;
for r = 1:2:2*SimSize
    index1 = index_array(r);
    index2=index_array(r+1);
    Re = real(P(index1));
    Im = imag(P(index2));
    Signal_Sent(SimIndex) = complex(Re,Im);
    %fprintf("Re: %f , Im: %f",Re,Im);
    ReNoise_user1 = randn()*sqrt(N_o/4);
    ImNoise_user1 = randn()*sqrt(N_o/4);
    ReNoise_user2 = randn()*sqrt(c*N_o/4);
    ImNoise_user2 = randn()*sqrt(c*N_o/4);
    Sim_user1(SimIndex) = complex((Re + ReNoise_user1),(Im +
        ImNoise_user1));
    Sim_user2(SimIndex) = complex((Re + ReNoise_user2), (Im +
        ImNoise_user2));
```

```
    SimIndex = SimIndex + 1;
end

%Each user reads their respective data
%guess the symvbol


result_user1 = zeros(1,SimIndex);

result_user2 = zeros(1,SimIndex);

for r = 1:(SimIndex-1)
    if(real(Sim_user1(r))<dre(1))
        result_user1(r) = rePam(1);
    elseif(real(Sim_user1(r))<dre(2))
        result_user1(r) = rePam(2);
    elseif(real(Sim_user1(r))<dre(3))
        result_user1(r) = rePam(3);
    else
        result_user1(r) = rePam(4);
    end

    if(imag(Sim_user2(r))<dim(1))
        result_user2(r) = imPam(1);
    elseif(imag(Sim_user2(r))<dim(2))
        result_user2(r) = imPam(2);
    elseif(imag(Sim_user2(r))<dim(3))
        result_user2(r) = imPam(3);
    else
        result_user2(r) = imPam(4);
    end

end


%Calculates subol mistakes in the sim for each user
errors_user1 = 0;
errors_user2 = 0;
for i = 1:(SimIndex-1)
    if(result_user1(i)~=real(Signal_Sent(i)))
        errors_user1 = errors_user1 + 1;
    end
    if(result_user2(i)~=imag(Signal_Sent(i)))
        errors_user2 = errors_user2 + 1;
    end
end

SEP_user1 = errors_user1/SimSize;
SEP_user2 = errors_user2/SimSize;

end
```

```
function min=seprotfun(N_0,theta)

[Sep1,Sep2]=SEP_N0_rot(N_0,theta);
min=max(Sep1,Sep2);

end
```

```
function Best_theta()
ub=pi/4;
lb=0;
Sep1=zeros(20,1);
Sep2=zeros(20,2);
SNR=zeros(20,1);
arrN0=zeros(20,1);
theta_arr=zeros(20,1);

for k=1:20
    SNR(k)=k;
end
    arrN0=10.^(-SNR/10);
for i=1:20
    objfun = @(theta)seprotfun(arrN0(i),theta);
    [theta_arr(i)] = (180/pi)*fminbnd(objfun,lb,ub);
    clearvars objfun
end
plot(SNR,theta_arr);
xlabel('SNR DB');
ylabel('Best theta');

end
```

2.3 SIMULATION

Ακολουθεί το γράφημα που επιστρέφει η κλήση της best_theta() . Μας επιστρέφει οπώς εξηγήθηκε προηγουμένως τις γωνίες περιστροφής ϑ του αρχικού αστερισμού, για τις οποίες για δεδομένες τιμές του SNR ελαχιστοποιείται το μέγιστο μεταξύ των πιθανοτήτων σφάλματος στους χρήστες 1 και 2 που υπολογίστηκε απο την προσομοίωση.
Συνεπώς έχουμε:

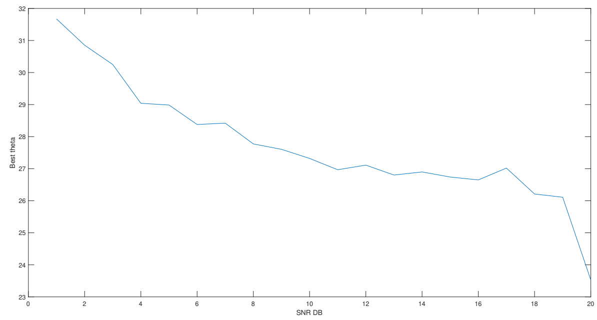

Figure 10:

Παρατηρούμε ότι η γωνία ϑ που μας επιστρέφει η συνάρτηση βελτιστοποιήσης δεν είναι απόλυτα σταθερή για κάθε SNR. Συγκεκριμένα για μικρά SNR < 8 Db έχουμε μια φθίνουσα γωνία ϑ. Βέβαια αυτό οφείλεται στο πολύ μικρό SNR το οποίο πέρα από το ότι δηλώνει ένα πολύ κακό κανάλι μετάδοσης της πληροφορίας εντείνει και τα σφάλματα και απόκλισεις που μπορεί να είχε ο εμπειρικός υπολογισμός της πιθανότητας σφάλματος από την πιθανότητα σφάλματος που θα προέβλεπε η θεωρία. Ωστόσο για καλύτερα SNR το ϑ σταθεροποιείται χοντρικά στην τιμή $\theta = 27$. Αυτή η τιμή είναι αρκούντως κοντά στην βέλτιστη θεωρητική τιμή για το $\theta = 26.565$ που αναφέρεται στο [2]. Σε μεγαλύτερες τιμές SNR το διάγραμμα οδηγείται σε αστοχία καθώς το μέγεθος της προσομοιώσης δεν είναι ικανό να καλύψει τις πολύ μικρές πιθανότητες σφάλματος που θα προέκυπταν θεωρητικά για αυτό το SNR.

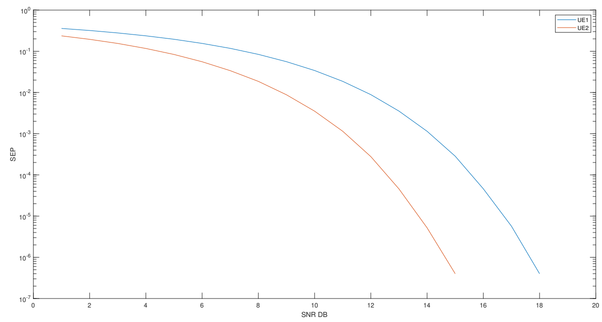

Figure 11: Διάγραμμα σύγκρισης του SEP του χρήστη 1 έναντι του χρήστη 2 για συγκέκριμένες τιμές SNR για την γωνία $\vartheta = 26.565$

Παρατήρουμε ότι ο χρήστης 2 παρούσιαζει ευνοικότερη συμπεριφορά αφού για κάθε τιμή SNR παρούσιαζει μικρότερη πιθανότητα σφάλματος από ότι ο χρήστης 1. Αυτό είναι αναμένομενο καθώς βρίσκεται σε πιο ευνοικό περιβάλλον θορύβου με μικρότερη διασπορά.

Είναι εμφανές ότι το σύστημα 1 υπερτερεί του συστήματος 2 καθώς για το ίδιο SNR το σύστημα 1 παρούσιαζει μικρότερη μέγιστη πιθανότητα σφάλματος μεταξύ των δύο χρηστών. Άρα το σύστημα 1

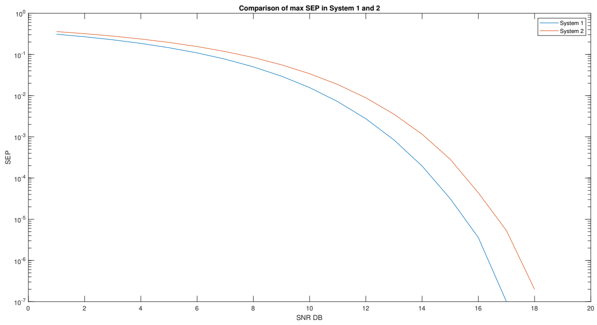

Figure 12: Διάγραμμα των μεγίστων πιθανοτήτων σφάλματος του συστήματος 1 με $a = 0.6667$ και του σύστηματος 2 με $\theta = 26.565$ ως πρός το SNR

είναι καλύτερο για τη μετάδοση της πληροφορίας αφού παρούσιαζει χαμηλότερη μέγιστη πιθανότητα σφάλματος στους δυο χρήστες.

References

[1]: G. K. Karagiannidis and K. N. Pappi, Telecommunication Systems, 4th ed., Tziolas Publications, March 2017 (in Greek)

[2]: A. Chauhan and A. Jaiswal, "Non-Orthogonal Multiple Access: A Constellation Domain Multiplexing Approach," 2020 IEEE 31st Annual International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, London, UK, 2020, pp. 1-6, doi: 10.1109/PIMRC48278.2020.9217330.