

Εξηγήστε περιεκτικά και επαρκώς την εργασία σας. Επιτρέπεται προαιρετικά η συνεργασία εντός ομάδων των 2 ατόμων. Κάθε ομάδα 2 ατόμων υποβάλλει μια κοινή αναφορά που αντιπροσωπεύει μόνο την προσωπική εργασία των μελών της. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός του βιβλίου και του εκπαιδευτικού υλικού του μαθήματος, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση της αναφοράς και του κώδικα της εργασίας θα γίνει ηλεκτρονικά στο mycourses.ntua.gr.

Επισημαίνεται ότι απαγορεύεται η ανάρτηση των λύσεων των εργαστηριακών ασκήσεων στο github, ή άλλες ιστοσελίδες.

Θέμα: Επεξεργασία και Κατηγοριοποίηση Σημάτων Φυσιολογίας και Κίνησης από Φορητούς Αισθητήρες

Η εξέλιξη και η ταχεία διάδοση των φορετών (wearable) συσκευών, όπως τα smartwatches και τα fitness trackers, έχει δώσει τα τελευταία χρόνια τη δυνατότητα για άμεση, προσιτή και εξατομικευμένη συλλογή δεδομένων των χρηστών. Επιπλέον, οι τεράστιες τεχνολογικές εξελίξεις έχουν επιτρέψει την αξιόπιστη καταγραφή και τον ποσοτικό προσδιορισμό ενός μεγάλου αριθμού συμπεριφορικών και βιομετρικών δεικτών μέσω των αισθητήρων τους.

Οι πιο συνήθεις τέτοιοι αισθητήρες είναι οι αισθητήρες παρακολούθησης του καρδιακού ρυθμού, με τη μέθοδο της Φωτοπληθυσμογραφίας¹ (Σχήμα 1α'), το επιταχυνσιόμετρο (accelerometer) το οποίο μετράει την επιτάχυνση (m/s^2) της συσκευής, καθώς και το γυροσκόπιο (gyroscope) που μετράει τη γωνιακή της ταχύτητα ($^\circ/s$) (Σχήμα 2). Οι αισθητήρες αυτοί χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση και την ανίχνευση της κινητικής δραστηριότητας του χρήστη, των προτύπων του ύπνου και της καρδιακής λειτουργίας, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα μη παρεμβατικής και εύκολης συλλογής δεδομένων δραστηριότητας. Τα τελευταία χρόνια, τέτοιου τύπου συσκευές και αισθητήρες έχουν αρχίσει να γίνονται ιδιαίτερα αποδεκτές, με αποτέλεσμα την ευρεία αποδοχή τους σε μεγάλη γκάμα εφαρμογών, από την παρακολούθηση της φυσικής δραστηριότητας του χρήστη έως και την υγειονομική περίθαλψη (e-Health). Φυσικά, πρωτεύοντα ρόλο στην ανάλυση των σημάτων των αισθητήρων αυτών έχει η ψηφιακή επεξεργασία σήματος, αλλά και η μηχανική μάθηση, που καλούνται να μετατρέψουν τα αρχικά δεδομένα των συσκευών αυτών σε 'γνώση' έτσι ώστε εν συνεχεία να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την υποστήριξη εξατομικευμένων παρεμβάσεων.

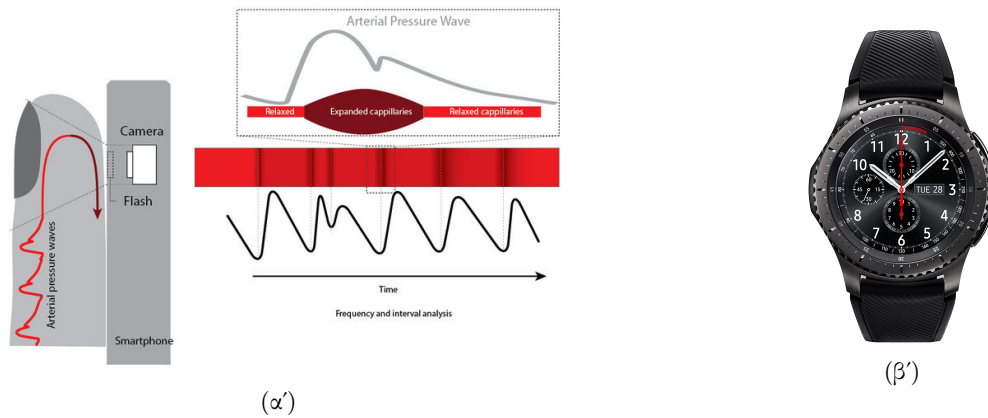
Στο εργαστηριακό αυτό Project, θα χρησιμοποιήσετε τεχνικές επεξεργασίας σήματος και μηχανικής μάθησης, για την επεξεργασία και ανάλυση σημάτων φυσιολογίας και κίνησης, τα οποία έχουν ληφθεί με χρήση ενός έξυπνου ρολογιού Samsung Gear S3 Frontier (Σχήμα 1β').

Μέρος 1ο - Υπολογισμός Ενέργειας Βραχέος Χρόνου και Μετ/σμού Fourier Βραχέος Χρόνου (STFT) σε σήματα κίνησης και καρδιακού ρυθμού

Στο πρώτο μέρος της άσκησης, θα χρησιμοποιήσετε μεθόδους που μάθατε από το πρώτο εργαστήριο, σε σήματα κίνησης και καρδιακού ρυθμού.

- 1.1. Φορτώστε το αρχείο *step_00.npz* το οποίο έχει σωθεί με χρήση της συνάρτησης `savez()` της βιβλιοθήκης `numpy`. Θα παρατηρήσετε ότι περιέχονται 3 σήματα:

¹<https://en.wikipedia.org/wiki/Photoplethysmogram>



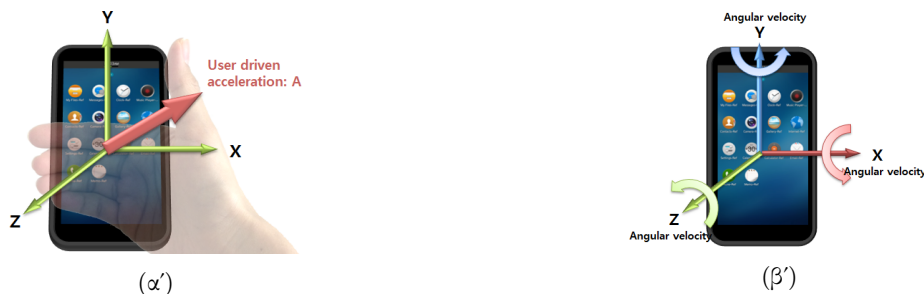
Σχήμα 1: α) Μέτρηση καρδιακού ρυθμού με Φωτοπληθυσμογραφία, β) το wearable Samsung Gear S3 Frontier.

- Το πολυδιάστατο σήμα *acc* με συχνότητα δειγματοληψίας 20 Hz που αντιστοιχεί στη γραμμική επιτάχυνση (m/s^2) που μετράει το επιταχυνσιόμετρο σε τρεις άξονες X, Y, και Z (Σχήμα 2α').
- Το πολυδιάστατο σήμα *gyr* με συχνότητα δειγματοληψίας 20 Hz που αντιστοιχεί στη γωνιακή ταχύτητα ($^\circ/s$) που μετράει το γυροσκόπιο σε τρεις άξονες X, Y, και Z (Σχήμα 2β').
- Το μονοδιάστατο σήμα *hrm* το οποίο περιέχει την μεταβλητότητα καρδιακών παλμών (heart rate variability). Η μεταβλητότητα καρδιακών παλμών είναι η ακολουθία των χρονικών διαστημάτων (σε ms) που μεσολαβούν από τον ένα χτύπο της καρδιάς έως τον επόμενο. Το σήμα έχει υποστεί επιπλέον επεξεργασία έτσι ώστε να έχει συχνότητα δειγματοληψίας 5 Hz.

που έχουν ληφθεί από ένα άτομο που περπατάει για διάρκεια ≈ 10 λεπτών. Αρχικά, αναπαραστήστε τη γραφική παράσταση των σημάτων *acc* και *gyr*, και των τριών αξόνων τους ξεχωριστά, με χρήση των ρουτινών **plot()** και **subplot()**. Κάντε το ίδιο και για το μονοδιάστατο σήμα *hrm*.

- 1.2. Υλοποιήστε τη ρουτίνα **ste()** που θα δέχεται ως είσοδο ένα μονοδιάστατο σήμα και θα επιστρέφει την ενέργεια βραχέος χρόνου του σήματος. Υπενθυμίζεται από το πρώτο εργαστήριο ότι η ενέργεια βραχέος χρόνου ορίζεται ως:

$$E_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[m]|^2 w[n-m] \quad (1)$$



Σχήμα 2: Γραμμική επιτάχυνση και γωνιακή ταχύτητα σε 3 άξονες, όπως υπολογίζεται από τους αισθητήρες ενός κινητού τηλεφώνου.

όπου $w[n]$ ένα παράθυρο της επιλογής μας, το οποίο συνήθως είναι το Hamming παράθυρο (συνάρτηση **hamming()** στη **numpy**). Εφαρμόστε την ρουτίνα στο σήμα που αντιστοιχεί στον άξονα X του επιταχυνσιόμετρου και του γυροσκόπιου του Ερωτήματος 1.1., καθώς και στο σήμα μεταβλητότητας καρδιακών παλμών, και αναπαραστήστε το κάθε σήμα μαζί με την ενέργεια του στο ίδιο γράφημα. Ο οριζόντιος άξονας του γραφήματος να είναι σε δευτερόλεπτα. Χρησιμοποιήστε παράθυρα μήκους 20 sec. Προσπαθήστε να εντοπίσετε τις χρονικές περιόδους που ο χρήστης που φοράει το ρολόι είναι ακίνητος ή κινείται.

- 1.3. Υπολογίστε τον STFT του σήματος του άξονα X του επιταχυνσιόμετρου, και του σήματος της μεταβλητότητας καρδιακών παλμών με χρήση της ρουτίνας **stft()** της **Librosa**, όπως κάνατε στο πρώτο εργαστήριο για ακουστικά σήματα. Χρησιμοποιήστε μήκος παραθύρου ίσο με 20 sec και επικάλυψη ίση με 10 sec. Αναπαραστήστε το πλάτος $|\text{STFT}(\tau, f)|$ με τις κατάλληλες τιμές στους άξονες του χρόνου (sec) και των συχνοτήτων (Hz), με χρήση της συνάρτησης **pcolormesh()** της **matplotlib**.
- 1.4. Υλοποιήστε μία συνάρτηση που θα υπολογίζει ένα πλήθος ‘χαρακτηριστικών’ ενός σήματος. Πιο συγκεκριμένα, δοθέντος ενός σήματος x στην είσοδο, θέλουμε να υπολογίζονται τα εξής χαρακτηριστικά του: **mean()**, **min()**, **max()**, **std()**. Εξάγετε τα χαρακτηριστικά αυτά από τα σήματα ενέργειας βραχέος χρόνου των σημάτων *acc*, *gyr* (και στους 3 άξονες) και *hrm* των αρχείων *sleep_03.npz* και *step_03.npz* και παρουσιάστε τα σε έναν πίνακα. Ποια χαρακτηριστικά φαίνεται να είναι αντιπροσωπευτικά του αν ένα άτομο κοιμάται ή περπατάει;
Υπόδειξη: Μη φτιάξετε δικές σας υλοποιήσεις για τον υπολογισμό των επιμέρους χαρακτηριστικών - χρησιμοποιήστε τις αντίστοιχες συναρτήσεις της βιβλιοθήκης **numpy**.

Μέρος 2ο - Υπολογισμός της Teager-Kaiser Ενέργειας σε πολλαπλές ζώνες συχνοτήτων με τη χρήση Gabor filterbank

- 2.1. Φορτώστε πάλι το αρχείο *step_00.npz* του Μέρους 1. Αφού υλοποιήσετε τις συναρτήσεις των επόμενων βημάτων, θέλουμε να τρέξετε τον κώδικά σας και να παραστήσετε ενδεικτικές γραφικές παραστάσεις για τα σήματα *acc*, *gyr* για τον άξονα X και *hrm* που περιέχονται στο *step_00.npz*
- 2.2. Υλοποιήστε τη συνάρτηση **teo()**, που θα υλοποιεί τον μη-γραμμικό ενεργειακό τελεστή Teager-Kaiser Energy Operator (TEO). Ο ενεργειακός τελεστής Teager-Kaiser προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Teager και παρουσιάστηκε συστηματικά από τον Kaiser και έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς ως εργαλείο για αποδιαμόρφωση διαφορών κατηγοριών σημάτων έχοντας ως βασική ιδιότητα να ανιχνεύει την ενέργεια ενός γραμμικού ταλαντωτή. Για λεπτομέρειες σχετικά με τον ενεργειακό τελεστή Teager δείτε το [5], ενώ για διάφορες εφαρμογές με χρήση του AM-FM μοντέλου και του TEO δείτε το [4]. Για σήματα συνεχούς χρόνου, ο ενεργειακός τελεστής Teager ορίζεται ως:

$$\Psi[x(t)] = (x'(t))^2 - x(t)x''(t) \quad (2)$$

Για σήματα διακριτού χρόνου, αντικαθιστώντας τις παραγώγους με τους ισοδύναμους τελεστές διακριτού χρόνου, η ενέργεια Teager παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\Psi[x[n]] = x^2[n] - x[n-1]x[n+1]. \quad (3)$$

Υπόδειξη: Στα όρια του σήματος θα πρέπει να επαναλάβετε τις τιμές.

- 2.3. Υλοποιήστε μία συνάρτηση για ζωνοπερατό φιλτράρισμα του σήματος με Gabor φίλτρα (Gabor Filterbank). Συγκεκριμένα, το φιλτράρισμα ενός σήματος, όταν εφαρμόζεται σε

κάποια ζώνη συχνοτήτων που περιέχει τη χρήσιμη πληροφορία, οδηγεί σε μείωση των επιδράσεων του θορύβου. Ένα βασικό πρόβλημα που συναντάμε όμως σε αυτή την περίπτωση είναι η επιλογή της κατάλληλης κεντρικής συχνότητας ω_c , ώστε να απομονωθεί η συνιστώσα που περιέχει τη χρήσιμη πληροφορία. Για τον σκοπό αυτό θα δημιουργήσετε μία συστοιχία φίλτρων, τα οποία θα καλύπτουν πυκνά όλο το πεδίο συχνοτήτων.

Η κρουστική απόκριση των Gabor φίλτρων είναι:

$$h(t) = \exp(-\alpha^2 t^2) \cos(\omega_c t) \quad (4)$$

και η απόκριση συχνότητας:

$$H(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} (\exp[-\frac{(\omega - \omega_c)^2}{4\alpha^2}] + \exp[-\frac{(\omega + \omega_c)^2}{4\alpha^2}]), \quad (5)$$

όπου ω_c είναι η κεντρική συχνότητα, ενώ η παράμετρος α ελέγχει το εύρος της απόκρισης συχνότητας (το αποδοτικό rms εύρος ζώνης του φίλτρου σύμφωνα με τον Gabor είναι ίσο με $\alpha/\sqrt{(2\pi)}$). Η διακριτή μορφή της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου προκύπτει ύστερα από δειγματοληψία της Εξ. (4) και έχει τη μορφή:

$$h[n] = \exp[-b^2 n^2] \cos[\Omega_c n] \quad (6)$$

όπου $-N \leq n \leq N$, $b = \alpha/f_s$ και $\Omega_c = \omega_c/f_s = 2\pi f_c/f_s$, όπου f_s η συχνότητα δειγματοληψίας, ενώ ο ακέραιος N επιλέγεται βάσει της τυπικής απόκλισης της γκαουσιανής b , ως $N = (3/b) + 1$.

Υπόδειξη: Ορίστε το $\alpha = f_s/(2K)$, όπου $K = 25$ ο αριθμός των Gabor φίλτρων, την ελάχιστη συχνότητα των φίλτρων ίση με $f_{c_min} = \alpha/2$, και τη μέγιστη ίση με $f_{c_max} = (f_s - \alpha)/2$, με απόσταση μεταξύ των φίλτρων η οποία θα οριστεί γραμμικά. Το τελικό φιλτράρισμα του σήματος $x[n]$ με τη κρουστική απόκριση $h[n]$ θα υλοποιηθεί με χρήση της ρουτίνας `lfilter()` από το πακέτο `scipy.signal`. Η συνάρτηση η οποία θα δημιουργήσετε θα είναι της μορφής `gaborfilt(signal, f_c, alpha, f_s)`.

Σχεδιάστε την συστοιχία φίλτρων που δημιουργήσατε μαζί με το φάσμα του σήματος σας (σε λογαριθμική κλίμακα). Φροντίστε ο άξονας των τετμημένων του διαγράμματος να είναι σωστά βαθμονομημένος, εκφράζοντας τις συχνότητες σε Hz.

- 2.4. Υλοποιήστε μία συνάρτηση που θα ορίζει ένα ομαλοποιητικό βαθθυπερατό φίλτρο, το οποίο θα εφαρμόσετε στην εξόδο του ενεργειακού τελεστή ώστε να απομονωθεί όσο είναι δυνατόν το επιθυμητό μέρος της εξόδου από το σφάλμα και τις υψίσυχνες συνιστώσες της Teager ενέργειας. Το φίλτρο που θα δημιουργήσετε είναι ένα binomial φίλτρο, το οποίο περιγράφεται μέσω της κρουστικής απόκρισης:

$$h_{bin}[n] = 0.25\delta[n - 1] + 0.5\delta[n] + 0.25\delta[n + 1] \quad (7)$$

- 2.5. Η ανάλυση που ακολουθεί θα γίνει σε πλαίσια ανάλυσης του αρχικού σήματος $x[n]$. Το μήκος των παραθύρων ισούται με $t_{win} = 20$ sec με βήμα $t_{shift} = 5$ sec. Τα πλαίσια ανάλυσης παραθυρώνονται με παράθυρο Hamming του ίδιου μήκους ($t_{win} = 20$ sec).
- 2.6. Φιλτράρετε το παραθυρωμένο σήμα σε ζώνες συχνοτήτων με χρήση των Gabor φίλτρων που δημιουργήσατε στο Βήμα 2.3. Συγκεκριμένα, θα φιλτράρετε το σήμα σας με την κατάλληλα σχεδιασμένη ακολουθία φίλτρων με κρουστικές αποκρίσεις h_i , $i = 1 \dots K$, όπου $K = 25$ φίλτρα.

- 2.7. Εφαρμογή ενεργειακού τελεστή Teager:

- (α') Σε αυτό το σημείο θα εφαρμόσετε τον ενεργειακό τελεστή στην έξοδο του κάθε φίλτρου f_i , $i = 1 \dots K$.
- (β') Αφού υπολογίσετε την Teager ενέργεια για κάθε φίλτρο θα φιλτράρετε το σήμα σας με το binomial φίλτρο που δημιουργήσατε στο Βήμα 2.5., 2 φορές διαδοχικά. Για το φιλτράρισμα θα χρειαστείτε την ρουτίνα **lfilter()**.
- (γ') Εν συνεχεία, υπολογίστε τη μέση τιμή της ενέργειας του κάθε φίλτρου, στο εκάστοτε παράθυρο, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις θετικές ενέργειες του σήματος.
- (δ') Η έξοδος του φίλτρου K στο πλαίσιο m , η οποία μεγιστοποιεί τη μέση τιμή της Teager ενέργειας (mean multiband Teager Energy (MTE)) κατά μήκος των διαφορετικών ζωνών συχνοτήτων:

$$MTE[m] = \arg \max_k (\overline{(s * h_k)}), \quad (8)$$

όπου m ο δείκτης του πλαισίου και $(\overline{(s * h_k)})$ η μέση τιμή της ενέργειας, θεωρείται ότι είναι αυτή που περιέχει τη χρήσιμη πληροφορία. Βρείτε την μέγιστη μέση τιμή ενέργειας ανά παράθυρο, καθώς και την κεντρική συχνότητα του φίλτρου στο οποίο αυτή αντιστοιχεί. Εφαρμογή του ανωτέρω αλγορίθμου σε σήματα φωνής μπορείτε να βρείτε στα [1, 2].

Παραστήστε γραφικά την MTE για τα σήματα της άσκησης μαζί με την ενέργεια βραχέος χρόνου που υπολογίσατε στο ερώτημα 1.2 αλλά και το σήμα σας, ως συνάρτηση του χρόνου. Φροντίστε οι άξονες των γραφημάτων να δείχνουν τις σωστές αντίστοιχα μονάδες (χρόνος σε sec) και να είναι σωστά βαθμονομημένοι. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

Μέρος 3ο - Εξαγωγή χαρακτηριστικών, Ανάλυση Πρωτευουσών Συνιστωσών με PCA (Principal Component Analysis), και Συσταδοποίηση τους με τον Αλγόριθμο K-means

- 3.1. Φορτώστε τα αρχεία *sleep_m.npz* και *step_m.npz* όπου $m = 0, 1, \dots, 19$ και υπολογίστε τόσο την ενέργεια βραχέος χρόνου, όσο και τη μέγιστη μέση Teager ενέργεια για τα σήματα *acc*, *gyr* (και για τους 3 άξονες τους), και *hrm*. Στη συνέχεια, εξάγετε τα στατιστικά χαρακτηριστικά, με χρήση των συναρτήσεων που υλοποιήσατε στο ερώτημα 1.4, για τις ενέργειες βραχέος χρόνου και Teager, αντίστοιχα. Το τελικό αποτέλεσμα θα πρέπει να είναι οργανωμένο ως ένας πίνακας numpy μεγέθους $m \times d$ όπου m είναι ο αριθμός των αρχείων, και d ο συνολικός αριθμός των χαρακτηριστικών των σημάτων κάθε αρχείου.
- 3.2. Η ανάλυση πρωτευουσών συνιστωσών (Principal Component Analysis - PCA) αποτελεί μία μέθοδο μείωσης της διαστατικότητας ενός συνόλου δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα, αν έχουμε m διανύσματα εισόδου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, η ανάλυση σε πρωτεύουσες συνιστώσες βρίσκει έναν γραμμικό μετασχηματισμό \mathbf{A} έτσι ώστε τα μετασχηματισμένα διανύσματα \mathbf{y} , που ονομάζονται πρωτεύουσες συνιστώσες και προκύπτουν:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^T \mathbf{x}, \quad (9)$$

να έχουν τις εξής ιδιότητες: α) να είναι ασυσχέτιστα/ορθογώνια, και β) διατηρώντας τις $p < d$ συνιστώσες, να παίρνουμε ένα ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα (mean squared error - MSE). Ένας από τους πιο κλασικούς αλγορίθμους για την μέθοδο αυτή είναι ο ακόλουθος:

- (α') Εφάρμοσε τη μέθοδο SVD (Singular Value Decomposition) στον πίνακα εισόδου \mathbf{X} μεγέθους $m \times d$ που περιέχει τα αρχικά διανύσματα εισόδου ως γραμμές:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T, \quad (10)$$

όπου $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ και $r = (\mathbf{X}) \leq \min(m, d)$.

- (β') Η στήλη \mathbf{v}_k του πίνακα \mathbf{V} είναι η k -οστή πρωτεύουσα κατεύθυνση ενώ η αντίστοιχη τιμή $\lambda_k = \sigma_k^2/m$ περιγράφει το ποσοστό της διακύμανσης των αρχικών δεδομένων που εξηγεί η συνιστώσα $\mathbf{y}_k = \mathbf{v}_k^T \mathbf{x}$.
- (γ') Για να μειωθεί η διαστατικότητα των δεδομένων σε $p < d$ συνιστώσες, αρκεί να πάρετε τις p πρώτες συνιστώσες που αντιστοιχούν στις μεγαλύτερες τιμές λ_k για να σχηματίσετε τον πίνακα \mathbf{A} της Εξ. (9).

Στο ερώτημα αυτό, καλείστε να υλοποιήσετε τον ανωτέρω αλγόριθμο χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `svd()` της βιβλιοθήκης `numpy.linalg`. Στη συνέχεια, υπολογίστε/απαντήστε τα εξής:

- (α') Τι ποσοστό της διακύμανσης των δεδομένων εξηγείται από κάθε πρωτεύουσα συνιστώσα; Γιατί πιστεύετε ότι αρκεί ένα τόσο μικρό πλήθος συνιστωσών για την επεξήγηση ενός μεγάλου μέρους της διακύμανσης των χαρακτηριστικών;
- (β') Σχεδιάστε σε ένα διάγραμμα διασποράς (scatter plot) τις δύο πρώτες πρωτεύουσες συνιστώσες (που αντιστοιχούν στις μεγαλύτερες διακυμάνσεις), με το χρώμα κάθε κουκκίδας να κωδικοποιεί το αν τα δεδομένα της αντιστοιχούν σε ύπνο ή περπάτημα.

3.3. Ο αλγόριθμος **K-means** αποτελεί έναν από τους πιο διαδεδομένους αλγόριθμους συσταδοποίησης δεδομένων. Στον αλγόριθμο αυτόν, ένα σύνολο m διανυσμάτων εκπαίδευσης $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ χωρίζεται σε L διαφορετικές συστάδες C_i , έτσι ώστε κάθε δείγμα να ανήκει στην κοντινότερη συστάδα (με βάση κάποιο μέτρο παραμόρφωσης $dist$). Αναλυτικά η διαδικασία έχει ως εξής:

- (α') **Αρχικοποίηση:** Βήμα $n = 0$. Επίλεξε τυχαία κέντρα $\mathbf{y}_i(0)$, $1 \leq i \leq L$.
- (β') **Ταξινόμηση:** Αντιστοίχισε κάθε δείγμα με το κοντινότερο κέντρο του έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση:

$$\mathbf{x} \in C_i \iff dist[\mathbf{x}, \mathbf{y}_i(n)] \leq dist[\mathbf{x}, \mathbf{y}_j(n)] \quad \forall j \neq i \quad (11)$$

- (γ') **Ανανέωση κέντρων:** Επαναυπολόγισε τα κέντρα κάθε συστάδας ως το μέσο των δειγμάτων που της έχουν ανατεθεί:

$$\mathbf{y}_i(n) = \text{centroid}(C_i(n)), \quad i \leq L. \quad (12)$$

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε ως μέτρο παραμόρφωσης την Ευκλείδεια απόσταση, το centroid ισούται με τον αριθμητικό μέσο των σημείων που ανήκουν σε κάθε συστάδα.

- (δ') **Συνθήκη τερματισμού:** Αν η ολική 'παραμόρφωση'

$$D(n) = \sum_{i=1}^M dist(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j), \quad \mathbf{x} \in C_j, \quad (13)$$

στο βήμα n ως προς την ολική παραμόρφωση $D(n-1)$ στο βήμα $n-1$ είναι μικρότερη από ένα κατώφλι σταμάτα, αλλιώς πήγαινε στο Βήμα β'.

Υλοποιήστε τον αλγόριθμο K-means και εφαρμόστε τον στις δύο πρώτες πρωτεύουσες συνιστώσες που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα. Ως μέτρο παραμόρφωσης χρησιμοποιήστε την Ευκλείδεια απόσταση: $dist(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$. Στη συνέχεια, σχεδιάστε εκ νέου το διάγραμμα διασποράς, χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά τις διαφορετικές συστάδες που βρήκατε για την χρωματική κωδικοποίηση. Κατάφερε ο αλγόριθμος να ομαδοποιήσει σωστά τα δεδομένα (συγκρίνοντας με την 'πραγματική' αντιστοιχία τους σε ύπνο/περπάτημα);

- 3.4. Ένα σύννηθες μέτρο για εκτίμηση της απόδοσης της συσταδοποίησης είναι ο δείκτης Rand (Rand index) που μετράει την ομοιότητα μεταξύ δύο διαφορετικών ομαδοποιήσεων δεδομένων, μετρώντας όλα τα ζεύγη στα οποία συμφωνούν οι ομαδοποιήσεις, ως προς τα ζεύγη που διαφωνούν². Ο δείκτης κυμαίνεται από 0 (καμία ομοιότητα) έως 1 (τέλεια ομοιότητα). Υπολογίστε τον δείκτη Rand των δύο συσταδοποιήσεων του Ερωτήματος 2.3 σε σύγκριση με την πραγματική ομαδοποίηση των δεδομένων (δηλαδή την πραγματική τους κλάση) με την συνάρτηση `sklearn.metrics.adjusted_rand_score` και σχολιάστε το αποτέλεσμα τους.

Μέρος 4ο - Αποθορυβοποίηση σημάτων κινήσης με φίλτρα Butterworth και Wiener

- 4.1. Φορτώστε το αρχείο `sleep_01.npz`, υπολογίστε, και σχεδιάστε τον STFT μετασχηματισμό του για τους άξονες Y των σημάτων `acc` και `gyr`. Σε κάποιες χρονικές περιόδους που ο χρήστης ‘φαίνεται’ ακίνητος θα παρατηρήσετε ότι το σήμα καταλαμβάνει ένα μεγάλο μέρος του φάσματος, με ‘ασθενείς’ όμως τιμές. Γιατί συμβαίνει αυτό;

Υπόδειξη: Για να το παρατηρήσετε πιο εμφανώς, σχεδιάστε τον STFT με λογαριθμική κλίμακα (όσον αφορά το πλάτος του), ή θέτοντας ένα άνω όριο για το μέγιστο μέτρο του.

- 4.2. Ένα πρόβλημα που παρουσιάζουν τα MEMS (Microelectromechanical systems) που χρησιμοποιούνται στις διάφορες συσκευές για την κατασκευή επιταχυνσιόμετρων και γυροσκοπίων είναι η εμφάνιση θορύβου μηχανικής ή ηλεκτρικής φύσεως, όπως παρατηρήθηκε στο Ερώτημα 4.1.

Στο ερώτημα αυτό καλείστε να χρησιμοποιήσετε ένα ψηφιακό βαθυπερατό φίλτρο Butterworth για να φιλτράρετε τον άξονα Y των σημάτων `acc` και `gyr`. Υποθέστε ότι η ελάχιστη συχνότητα που εμφανίζει ο θόρυβος είναι 2 Hz, ενώ το χρήσιμο σήμα καταλαμβάνει ολόκληρο το εύρος 0 – 10 Hz. Σχεδιάστε το φιλτραρισμένο σήμα και τον STFT του και σχολιάστε τα αποτελέσματα.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `butter()` της βιβλιοθήκης `scipy.signal`. Για την τάξη του φίλτρου πειραματιστείτε με τις τιμές 2 – 7.

- 4.3. Αποθορυβοποίηση μπορούμε να πετύχουμε επίσης υλοποιώντας ένα μη-αιτιατό IIR φίλτρο Wiener για την απαλοιφή του θορύβου. Θεωρούμε ασυσχέτιστο θόρυβο με το σήμα, επομένως η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου Wiener θα είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{P_d(e^{j\omega})}{P_d(e^{j\omega}) + P_v(e^{j\omega})}, \quad (14)$$

όπου $P_d(e^{j\omega})$ είναι το φάσμα ισχύος του σήματος χωρίς θόρυβο και $P_v(e^{j\omega})$ το φάσμα ισχύος του θορύβου. Για να εκτιμήσετε το φάσμα ισχύος του θορύβου των σημάτων, βρείτε ένα τμήμα του σήματος όπου φαίνεται ότι ο χρήστης είναι ακίνητος, και υπολογίστε το σε αυτό το κομμάτι ως εξής:

$$P_v(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \right|^2, \quad (15)$$

όπου θα υλοποιήσετε το άθροισμα $\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n}$ δειγματοληπτώντας τη συχνότητα ω ως τον DFT μετασχηματισμό. Θυμηθείτε επίσης ότι για το φάσμα ισχύος του καθαρού σήματος ισχύει $P_d(e^{j\omega}) = P_x(e^{j\omega}) - P_v(e^{j\omega})$, όπου $P_x(e^{j\omega})$ το φάσμα του αρχικού, θορυβώδους σήματος. Στη συνέχεια, εφαρμόστε το φίλτρο Wiener σε κινούμενα τετραγωνικά παράθυρα μήκους $L = 400$, χωρίς επικάλυψη, στο αρχικό σήμα, έτσι ώστε να πάρετε το

²Περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε στην Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Rand_index

αποθορυβοποιημένο σήμα. Σχεδιάστε το αποθορυβοποιημένο σήμα και τον STFT του και σχολιάστε τα αποτελέσματα, συγκρίνοντας με το φίλτρο Butterworth.

Υπόδειξη: Για να φανεί καλύτερα η διαφορά μεταξύ του φιλτραρισμένου σήματος και του αρχικού, σχεδιάστε τα στο ίδιο διάγραμμα.

Σημείωση: Καθώς πρακτικά ο θόρυβος δεν είναι στάσιμος, αν θεωρήσετε ως καθαρό θόρυβο ένα τυχαίο απόσπασμα του σήματός σας, μπορεί για ορισμένες συχνότητες το φάσμα ισχύος του θορύβου να είναι ισχυρότερο από το συνολικό φάσμα ισχύος του θορυβώδους σήματος. Συνεπώς, συνίσταται να αντικαταστήσετε τις αρνητικές τιμές που θα προκύπτουν στα φάσματα ισχύος $P_d(e^{j\omega})$ με μηδενικά.

- 4.4. Εφαρμόστε τα φίλτρα Butterworth και Wiener που υλοποιήσατε σε έναν άξονα από 2 σήματα ύπνου, και 2 σήματα περπατήματος της επιλογής σας. Σχεδιάστε τα αποτελέσματα και σχολιάστε τα.

Μέρος 5ο - Εκτίμηση του Φάσματος Ισχύος σήματος καρδιάς με Περιοδογράμματα Schuster, Welch, και Lomb-Scargle³

Ένα πρόβλημα που συχνά συναντάται σε διάφορες επιστήμες είναι το γεγονός ότι πολλά συνεχή σήματα τα οποία θέλουμε να μελετήσουμε δεν μπορούμε να τα παρατηρήσουμε σε ισοκατατεμημένα χρονικά διαστήματα (έτσι ώστε οι παρατηρήσεις μας να έχουν σταθερό ρυθμό δειγματοληψίας). Για παράδειγμα οι φωτεινότητες κάποιων ουράνιων σωμάτων στην αστρονομία μπορούν να παρατηρηθούν μόνο όταν ο καιρός το επιτρέπει. Άλλες περιπτώσεις περιλαμβάνουν διακριτά σήματα όπως το σήμα μεταβλητότητας των καρδιακών παλμών, το οποίο αναγκαστικά παρατηρείται στα διαστήματα που συμβαίνει ο χτύπος της καρδιάς (και άρα δεν έχει σταθερό ρυθμό).

Το γεγονός αυτό προκαλεί δυσκολίες στην μελέτη των σημάτων, καθώς οι μέθοδοι που έχουμε δει έως τώρα απαιτούν το διακριτό σήμα να έχει ληφθεί με σταθερό ρυθμό δειγματοληψίας. Ένας τρόπος για να εφαρμόσουμε τις μεθόδους είναι να μετατρέψουμε το σήμα έτσι ώστε να έχει σταθερό ρυθμό δειγματοληψίας, με διάφορες τεχνικές παρεμβολής δειγμάτων (interpolation) - αυτό ακριβώς έχει γίνει και στα σήματα *hrm* που επεξεργαστήκατε στα προηγούμενα μέρη. Φυσικά όμως, οι τεχνικές αυτές εισάγουν θόρυβο, καθώς τα δείγματα που προσθέτουμε στο σήμα αποτελούν εκτιμήσεις και όχι πραγματικές παρατηρήσεις.

Στο μέρος αυτό θα μελετήσουμε δύο τέτοια σήματα τα οποία έχουν **μη σταθερό ρυθμό δειγματοληψίας**. Το ένα σήμα που θα χρησιμοποιήσετε βρίσκεται στο αρχείο *hrm_orig.npy* και αποτελεί ένα πραγματικό σήμα καρδιακής μεταβλητότητας. Το δεύτερο σήμα θα το δημιουργήσετε εσείς, έτσι ώστε να έχει τυχαία δειγματοληψία και συγκεκριμένα peaks συχνοτήτων.

- 5.1 Φορτώστε και μετατρέψτε το σήμα *hrm_orig.npy* έτσι ώστε να έχει ομοιόμορφη συχνότητα δειγματοληψίας ίση με 5 Hz.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `scipy.interpolate.cubic` χρησιμοποιώντας `cubic` μέθοδο interpolation. Για να βρείτε τις χρονικές στιγμές δειγματοληψίας του αρχικού σήματος μεταβλητότητας καρδιακών παλμών χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `numpy.cumsum` εφόσον οι τιμές του σήματος υποδηλώνουν χρονικές διαφορές σε milliseconds.

- 5.2 Δημιουργήστε ένα τυχαίο διάνυσμα μεγέθους $N = 1000$ δειγμάτων το οποίο να περιέχει τυχαίους χρόνους δειγματοληψίας t_n από 0 έως 100 sec. Στη συνέχεια, πάρτε τις τιμές του συνεχούς σήματος:

$$x(t) = \sin(2\pi t) + \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + v(t) \quad (16)$$

³Το ερώτημα αυτό είναι προαιρετικό, και επίλυσή του συνεισφέρει βαθμολογικό bonus μέχρι και 25% επί του βαθμού της άσκησης.

στις στιγμές t_n , όπου η μεταβλητή θορύβου $v(t)$ παίρνει ομοιόμορφα τυχαίες τιμές από 0 έως 0.1. Τέλος, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, μετατρέψετε το σήμα έτσι ώστε να έχει ρυθμό δειγματοληψίας 10 Hz. Ποιος είναι ο μικρότερος σταθερός ρυθμός δειγματοληψίας που θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε για να εντοπίσουμε τις δύο κύριες συχνότητες του σήματος;

- 5.3 Υλοποιήστε και σχεδιάστε την εκτίμηση του φάσματος ισχύος μέσω του κλασικού περιοδογράμματος Schuster, που δίνεται από τον τύπο:

$$P_{per}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \right|^2 \quad (17)$$

Όπως είδατε και στο Ερώτημα 4.3 το περιοδόγραμμα υπολογίζεται με χρήση του DFT. Υπολογίστε και σχεδιάστε το περιοδόγραμμα για τα δύο σήματα σταθερού ρυθμού δειγματοληψίας που έχετε δημιουργήσει στα ερωτήματα 5.1 και 5.2.

- 5.4 Υλοποιήστε και σχεδιάστε την εκτίμηση του φάσματος ισχύος χρησιμοποιώντας το περιοδόγραμμα Welch:

(α') Χωρίστε το σήμα σε τμήματα μήκους L , με επικάλυψη D και παραθυροποιήστε τα με παράθυρο Bartlett.

(β') Υπολογίστε το κλασικό περιοδόγραμμα σε κάθε τμήμα.

(γ') Υπολογίστε τον αριθμητικό μέσο των επιμέρους περιοδογραμμάτων ως προς το χρόνο.

Σχεδιάστε και συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά του ερωτήματος 5.2. Πού οφείλονται οι διαφορές μεταξύ των περιοδογραμμάτων που προέκυψαν με τις 2 μεθόδους;

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε $L = 100$ και $D = 50$ δείγματα.

- 5.5 Το περιοδόγραμμα Lomb-Scargle - LS [3, 6] αποτελεί μια μέθοδο εκτίμησης του φάσματος ισχύος που μπορεί να εφαρμοστεί σε δεδομένα που δεν έχουν παρατηρηθεί σε ισοδιατεταγμένα χρονικά διαστήματα (και άρα έχουν όχι ομοιόμορφο αλλά τυχαίο ρυθμό δειγματοληψίας). Αρχικά, χρησιμοποιώντας την φόρμουλα του Euler μπορούμε να αναλύσουμε το περιοδόγραμμα του Schuster ως εξής:

$$P_{per}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \right|^2 = \frac{1}{N} \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(\omega n) \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(\omega n) \right)^2 \right] \quad (18)$$

Οι Lomb και Scargle γενίκευσαν τον ανωτέρω τύπο έτσι ώστε το περιοδόγραμμα LS να ορίζεται ως:

$$P_{LS}(\Omega) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(\Omega(t_n - \tau)) \right]^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(\Omega(t_n - \tau))} + \frac{\left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(\Omega(t_n - \tau)) \right]^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(\Omega(t_n - \tau))} \right\} \quad (19)$$

όπου

$$\tau = \frac{1}{2\Omega} \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\Omega t_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\Omega t_n)} \right). \quad (20)$$

Παρατηρήστε ότι η γνωστή σχέση από τη θεωρία του μαθήματος που συνδέει τις γωνιακές συχνότητες, $\omega = \Omega T$ δεν εφαρμόζεται, καθώς δεν έχουμε πια σταθερή περίοδο δειγματοληψίας. Υπενθυμίζεται ότι οι μονάδες του Ω είναι rad/sec. Επιπλέον, ο χρόνος τώρα συμπεριλαμβάνεται με τη μορφή t_n σε μονάδες χρόνου (sec), καθώς οι στιγμές t_n της δειγματοληψίας στο βήμα n δεν είναι ισοδιατεταγμένες. Στην περίπτωση ισοδιατεταγμένων παρατηρήσεων, το περιοδόγραμμα παίρνει την κλασική μορφή του Schuster.

Στο τελευταίο αυτό ερώτημα, καλείστε να υλοποιήσετε τη δική σας συνάρτηση **lombscargle** η οποία να εκτιμά το φάσμα ισχύος ενός σήματος μη ομοιόμορφης δειγματοληψίας. Η συνάρτηση θα πρέπει να παίρνει ως ορίσματα:

(α') Το διάνυσμα που θα περιέχει τις χρονικές στιγμές t_n στις οποίες έγιναν οι παρατηρήσεις του σήματος.

(β') Το διάνυσμα (σήμα) $x[n]$ το οποίο θα περιέχει την τιμή του σήματος τη στιγμή t_n .

(γ') Τις γωνιακές συχνότητες Ω στις οποίες θέλουμε να υπολογίσουμε το φάσμα ισχύος.

και θα υπολογίζει την τιμή του περιοδογράμματος LS στις γωνιακές συχνότητες που ζητήθηκαν. Παρατηρήστε ότι δεν θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε τον μετασχηματισμό DFT όπως κάνατε για τα προηγούμενα περιοδογράμματα. Αντιθέτως, υπολογίστε ξεχωριστά τα διαφορετικά αθροίσματα που περιέχει η εξίσωση του περιοδογράμματος και στη συνέχεια αντικαταστήστε τις τιμές που βρήκατε στην Εξ. (19). Καθώς στα προηγούμενα ερωτήματα χρησιμοποιήσαμε ομοιόμορφη συχνότητα δειγματοληψίας ίση με 5 Hz, που σημαίνει ότι το προκύπτον φάσμα ισχύος καταλάμβανε το εύρος 0 έως 2.5 Hz, χρησιμοποιήστε και πάλι τα ίδια όρια για το Ω (φυσικά με την κατάλληλη μετατροπή από Hz σε rad/sec).

Αφού δημιουργήσετε τη συνάρτηση, εφαρμόστε την στα σήματα των ερωτημάτων 5.1 και 5.2. που έχουν τυχαίο ρυθμό δειγματοληψίας (δηλαδή πριν τα κάνετε interpolate). Σχολιάστε το αποτέλεσμα, συγκρίνοντας με τα αποτελέσματα των περιοδογραμμάτων Schuster και Welch με έμφαση στο τυχαίο σήμα που δημιουργήσατε (ερώτημα 5.2). Επιπλέον, μελετήστε την επίδραση του μεγέθους N του διανύσματος (μελετήστε τιμές από $N = 100$ έως $N = 10000$) που δημιουργήσατε (ερώτημα 5.2.), στην ικανότητα των διαφορετικών περιοδογραμμάτων να εντοπίσουν τις κύριες συχνότητες των σημάτων.

ΠΑΡΑΔΟΤΕΑ Ηλεκτρονική παράδοση του κώδικα Python και της περιεκτικής αναφοράς που θα απαντάει στα δοθέντα ερωτήματα και θα περιλαμβάνει τις ζητούμενες γραφικές αναπαραστάσεις.

References

- [1] G. Evangelopoulos and P. Maragos. Multiband modulation energy tracking for noisy speech detection. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 14:2024–2038, 2006.
- [2] G. Evangelopoulos, A. Zlatintsi, A. Potamianos, P. Maragos, K. Rapantzikos, G. Skoymas, and Y. Avrithis. Multimodal saliency and fusion for movie summarization based on aural, visual, and textual attention. *IEEE Transactions on Multimedia*, 15:1553–1568, 2013.
- [3] N. R. Lomb. Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophysics and Space Science*, 39:447–462, 1976.
- [4] P. Maragos. Summer School on Speech Signal Processing, S4P Lecture Slides: Lecture I: Nonlinear aspects of speech production: Modulations and energy operators, Interspeech-2018. <http://cvsp.cs.ntua.gr/interspeech2018.shtm>, 2018.

- [5] P. Maragos, J. F. Kaiser, and T. F. Quatieri. Energy separation in signal modulations with application to speech analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41:3024–3051, 1993.
- [6] J. D. Scargle. Studies in astronomical time series analysis. ii-statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *The Astrophysical Journal*, 263:835–853, 1982.
- [7] R. Townsend. Fast calculation of the lomb-scargle periodogram using graphics processing units. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 191:247, 2010.
- [8] J. T. VanderPlas. Understanding the lomb–scargle periodogram. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 236:16, 2018.