Ε.Μ.Π., Σχολή Η.Μ. & Μ.Υ. ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ Ακαδ.Ετος 2017-**2018**
Ημερ/νια: 30-03-2018 **1ο Σύνολο Αναλυτ. Ασκήσεων** Παραδοτέο: 17-04-2018

---

Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός βιβλίου για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Παραδίδονται γραπτώς και προσωπικώς στην Γραμματεία Εργ. Ρομποτικής (Αιθ. 2.1.12, παλαιό Κτ.Ηλεκτρ.) 9.00-14.30.

---

**Ασκηση 1.1**: Εστω τα πεπερασμένα σήματα διακριτού χρόνου

$$\begin{aligned} x[n] &= 2\delta[n] - \delta[n-1] + 3\delta[n-2] - 2\delta[n-3] + \delta[n-5] - 3\delta[n-7], \\ h[n] &= \delta[n] - \delta[n-2]. \end{aligned}$$

**(α)** Αν $X[k], H[k]$ είναι οι 8-σημείων DFT των σημάτων $x[n], h[n]$ και $Y[k] = X[k]H[k]$, να βρείτε τις τιμές του σήματος $y[n]$ που προκύπτει με ένα 8-σημείων αντίστροφο DFT του $Y[k]$. Εξηγείστε.
**(β)** Να σχεδιάσετε τα σήματα $x[n]$, $h[n]$ και $y[n]$.
**(γ)** Αν επαναλάβετε το (α) με DFT $N$ σημείων, να βρείτε την τιμή του $N$ ώστε $y[n] = x[n] * h[n]$ για $n = 0, 1, ..., N-1$. Εξηγείστε.
**(δ)** Με βάση τον μετασχηματισμό $X[k]$, ορίζομε τις ακολουθίες

$$\begin{aligned} P[k] &= (-1)^k \mathrm{Re}\{X[k]\}, \quad k = 0, ..., 7. \\ Q[k] &= \mathrm{Im}\{X[2k]\}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

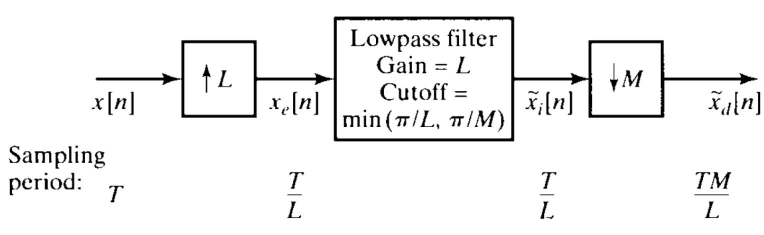
ως τους DFT των σημάτων $p[n]$ και $q[n]$, αντίστοιχα. Χωρίς να υπολογίσετε τους ευθείς και αντιστρόφους DFT των σχετικών ακολουθιών, αλλά χρησιμοποιώντας μόνο τις ιδιότητες του DFT:
**(δ.1)** Να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $p[n]$. Εξηγείστε.
**(δ.2)** Να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $q[n]$. Εξηγείστε.

---

**Ασκηση 1.2**: Για το ακόλουθο σύστημα αλλαγής του ρυθμού δειγματοληψίας στο Σχήμα 1, σας δίνεται το σήμα εισόδου $x[n]$ και το σήμα εξόδου $\tilde{x}_d[n]$ για μια συγκεκριμένη επιλογή των παραμέτρων υπερδειγματοληψίας (interpolation) $L$ και υποδειγματοληψίας (decimation) $M$:

$$x[n] = \sin(\pi n/3)/(\pi n/3), \quad \tilde{x}_d[n] = \sin(5\pi n/6)/(5\pi n/6)$$

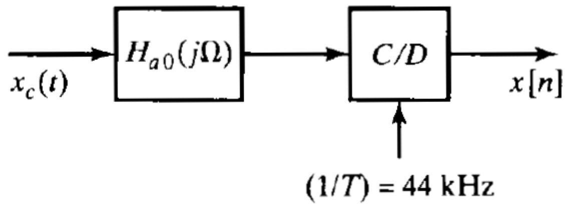
**(α)** Να βρείτε μια επιλογή για τις παραμέτρους $M/L$ με βάση τα ανωτέρω δεδομένα, και να διερευνήσετε αν η επιλογή σας είναι μοναδική. Εξηγείστε.
**(β)** Να σχεδιάσετε τα φάσματα (DTFT) των σημάτων $x[n]$, $x_e[n]$, $\tilde{x}_i[n]$ και $\tilde{x}_d[n]$, σημειώνοντας κρίσιμες τιμές στους άξονες.




Σχήμα 1: Παρεμβολή και Αποδεκατισμός σε διακριτό χρόνο.

---

**Ασκηση 1.3**: Σε πολλές εφαρμογές ηχητικών σημάτων, χρειάζεται να δειγματοληπτήσουμε ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x_c(t)$ με συχνότητα δειγματοληψίας $1/T$=44 kHz. Στο Σχήμα 2, φαίνεται ένα απλό τέτοιο σύστημα δειγματοληψίας, το οποίο περιλαμβάνει στην αρχή του ένα συνεχούς χρόνου βαθυπερατό φίλτρο $\mathrm{H}_{a0}(j\Omega)$ ώστε να αποφευχθούν φαινόμενα φασματικής αλλοίωσης.




Σχήμα 2:

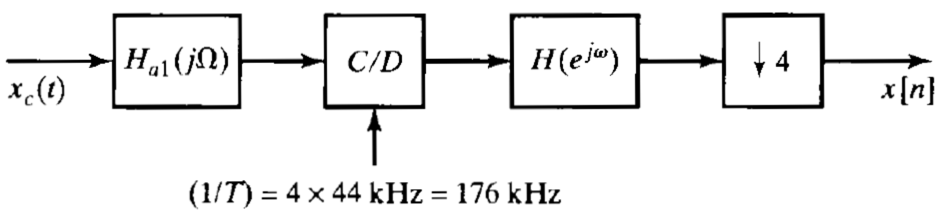
Σε πολλές εφαρμογές, αντί για το προηγούμενο συμβατικό σύστημα, χρησιμοποιείται το σύστημα του Σχήματος 3, το οποίο χρησιμοποιεί μέθοδο '4x υπερδειγματοληψίασ'. Συγκεκριμένα για το σύστημα αυτό ισχύουν τα παρακάτω:

$$\mathrm{H}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \pi/4, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο, και

$$\mathrm{H}_{a1}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \le \Omega_p, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_s \end{cases}$$

για κάποια $0 \le \Omega_p \le \Omega_s \le \infty$.




Σχήμα 3:

Αν υποθέσομε ότι το $\mathrm{H}(e^{j\omega})$ είναι ιδανικό, βρείτε τις ελάχιστες προδιαγραφές για το φίλτρο αποφυγής φασματικής αλλοίωσης $\mathrm{H}_{a1}(j\Omega)$, δηλαδή την μικρότερη τιμή για το $\Omega_p$ και την μεγαλύτερη τιμή για το $\Omega_s$, έτσι ώστε το συνολικό σύστημα του Σχήματος 3, να είναι ισοδύναμο με το σύστημα στο Σχήμα 2.

**Ασκηση 1.4**: (Γραμμική Πρόβλεψη) [τα μέρη (α),(β) είναι ανεξάρτητα]
**(α)** Για τον σχεδιασμό ενός βέλτιστου γραμμικού προβλέπτη τάξης $p = 3$ με τη μέθοδο της Αυτοσυσχέτισης, σας δίνονται οι παραθυρωμένες τιμές της αυτοσυσχέτισης του σήματος :
$r_x[0] = 1.2,\ r_x[1] = 0.75,\ r_x[2] = 0.6,\ r_x[3] = 0.5.$
Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Levinson-Durbin, βρείτε τους βέλτιστους LPC συντελεστές $\{\alpha_i\}$, και τους αντίστοιχους συντελεστές ανάκλασης $\{k_i\}$.
**(β)** Για ένα γραμμικό προβλέπτη τάξης $p = 4$, εάν οι βέλτιστοι LPC συντελεστές είναι

$$\alpha_1 = -0.3775, \quad \alpha_2 = -0.23, \quad \alpha_3 = 0.4825, \quad \alpha_4 = 0.6,$$

χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο Levinson-Durbin για να βρείτε του αντίστοιχους συντελεστές ανάκλασης $\{k_i\}$.

*Σημείωση*: Ο αλγόριθμος Levinson-Durbin με τον ορθό συμβολισμό περιγράφεται στις συνοπτικές σημειώσεις (διαφάνειες) του μαθήματος.

---

**Ασκηση 1.5**: (Wavelets)
Εστω ένα 1Δ συνεχούς χρόνου σήμα $f(t)$ με πεπερασμένη ενέργεια $\int |f(t)|^2 dt = \|f\|^2$ ($\|\cdot\|$ συμβολίζει Ευκλείδεια νόρμα), και $\psi(t)$ μια πραγματική συνάρτηση (μητρικό κυματίδιο) με $\|\psi\| = 1$ και

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\Psi(\Omega)|^2}{\Omega} d\Omega < \infty, \quad \Psi(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-\Omega t} dt.$$

Ορίζουμε τον Wavelet μετ/σμό, ο οποίος είναι μια 2Δ συνάρτηση χρόνου-κλίμακας

$$\mathcal{W}f(a,b) = \int f(t)\psi^{a,b}(t)dt = \langle f, \psi^{a,b}\rangle, \quad \psi^{a,b}(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{t-b}{a}), \quad a > 0,\ b \in \mathbb{R},$$

δηλ. $\mathcal{W}f(a,b)$ ισούται με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, \psi^{a,b}\rangle$ του σήματος $f$ με δι-παραμετρικά κυματίδια (άτομα χρόνου-κλίμακας) $\psi^{a,b}$ μεταβαλλομένης μετατόπισης $b$ και κλίμακας $a > 0$.
Να αποδειχθούν τα εξής:
**(α)** Το σήμα μπορεί να ανακατασκευασθεί πλήρως από τον Wavelet μετ/σμό:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi^{a,b}\rangle \psi^{a,b}(t) db \frac{da}{a^2}$$

**(β)** Η ενέργεια του σήματος διατηρείται:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{W}f(a,b)|^2 db \frac{da}{a^2}$$