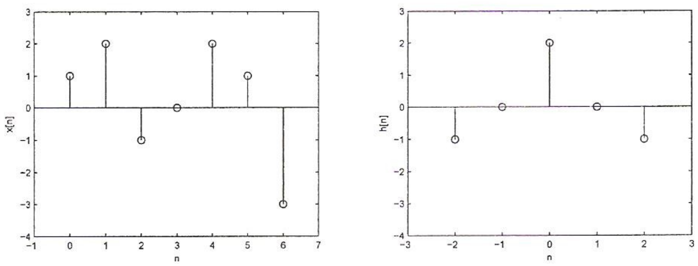
ΟΡΘΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

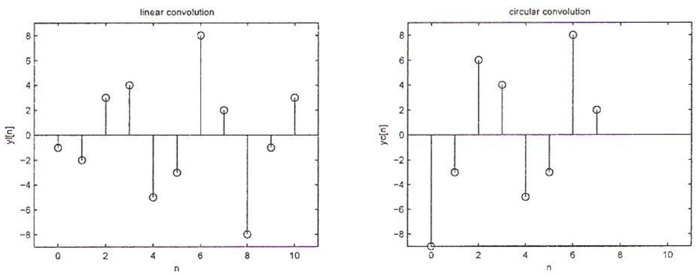
1.1:

(α),(β)



Ισχύει ότι $Y[k] = X[k]H[k]$, $k = 0, 1, ..., 7$, και $y[n] \leftrightarrow_{DFT} Y[k]$. Επομένως το $y[n]$ θα ισούται με την κυκλική συνέλιξη περιόδου 8 των $x[n]$,$h[n]$: $y_c[n] = x[n] \circledast_8 h[n]$. Ισοδύναμα, αντιστοιχεί σε κυκλική αναδίπλωση (με περίοδο N=8) της γραμμικής συνέλιξης $x[n] * h[n]$ που έχει 7+5-1=11 σημεία.

Στη λύση μας θεωρούμε ότι το σήμα $h[n]$ μετατοπίζεται δεξιά κατά 2 δείγματα. Οπότε, αν κάποιος θεωρήσει περιοδική επέκταση του $h[n]$ για να κάνει κυκλική συνέλιξη, τότε ο DFT του $h[n]$ και επομένως του $y[n]$ πολλαπλασιάζεται με W_N^{2k}. Εμείς όμως αγνοούμε αυτήν την μετατόπιση αφού ο τελικός στόχος είναι να βρεθούν οι ορθές τιμές της γραμμικής συνέλιξης μέσω της κυκλικής. Στο τέλος, αν κάποιος ενδιαφέρεται για την ορθή χρονική εκκίνηση της γραμμικής συνέλιξης, μπορεί στο τελικό αποτέλεσμα να εφαρμόσει την αντίθετη μετατόπιση.

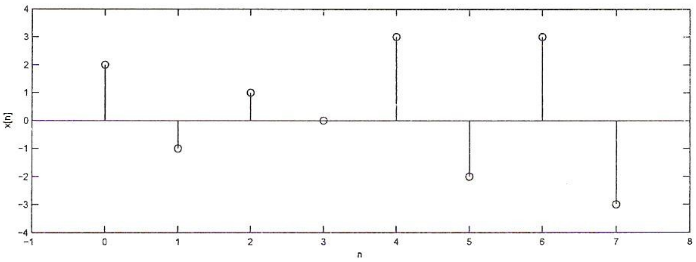


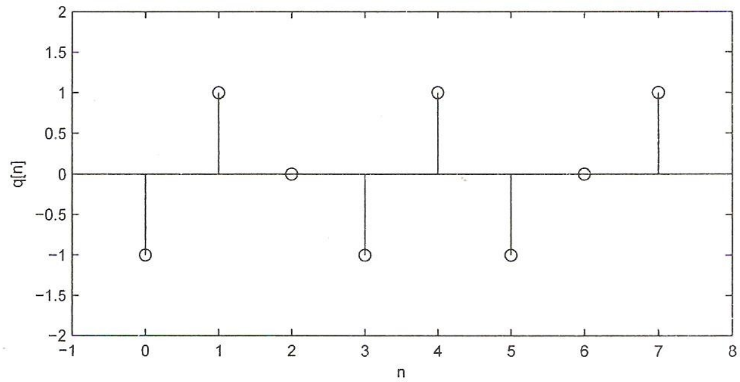
(γ) Για να μην υπάρχει αναδίπλωση, $N \geq 11$.

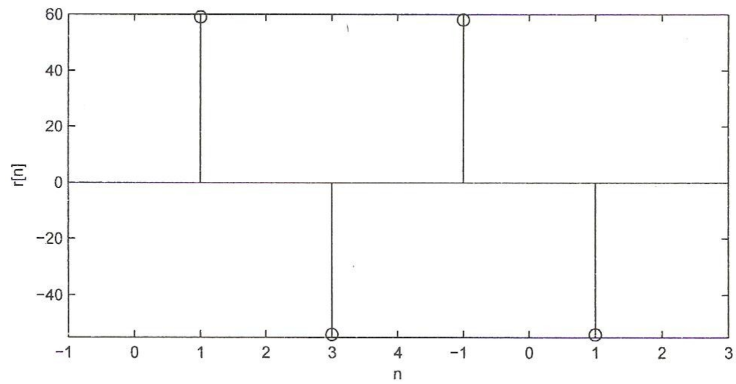
1.2:

(α) Βλέπε παρακάτω σχήμα.
(β) $Q[k] = (j)^{k+1} Im\{X[k]\}$, $k = 0, 1, ..., 7$, και $q[n] \leftrightarrow_{DFT} Q[k]$.
$\rightarrow Q[k] = (j)^k j Im\{X[k]\}$.
Αν $A[k] = j Im\{X[k]\} \leftrightarrow_{DFT} a[n] = \frac{x[n]-x[8-n]}{2}$, $1 \leq n \leq 7, a[0] = j Im(x[0]) = 0$.
τότε $Q[k] = (j)^k A[k] = e^{\frac{j2\pi k \cdot 2}{8}} A[k]$, $k = 0, 1, ..., 7$, $\leftrightarrow_{DFT} q[n] = a[((n+2))_8]$

(γ) $R[k] = |X[2k]|^2$, $k = 0, ...3$, και $r[n] \leftrightarrow_{DFT} R[k]$.
$\rightarrow R[k] = X[2k]X^*[2k]$, $x_2[n] \leftrightarrow_{DFT} X[2k]$. Όμως $x^*[((-n))_N] \leftrightarrow_{DFT} X^*[k]$, και $x[n]$ πραγματικό σήμα. Τελικά, έχουμε ότι $r[n] = x_2[n] \circledast_4 x_2[((-n))_4]$,
όπου $x_2[n]$ προκύπτει με περιοδική αναδίπλωση του $x[n]$ (με περίοδο N=4): $x_2[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-4r]$.







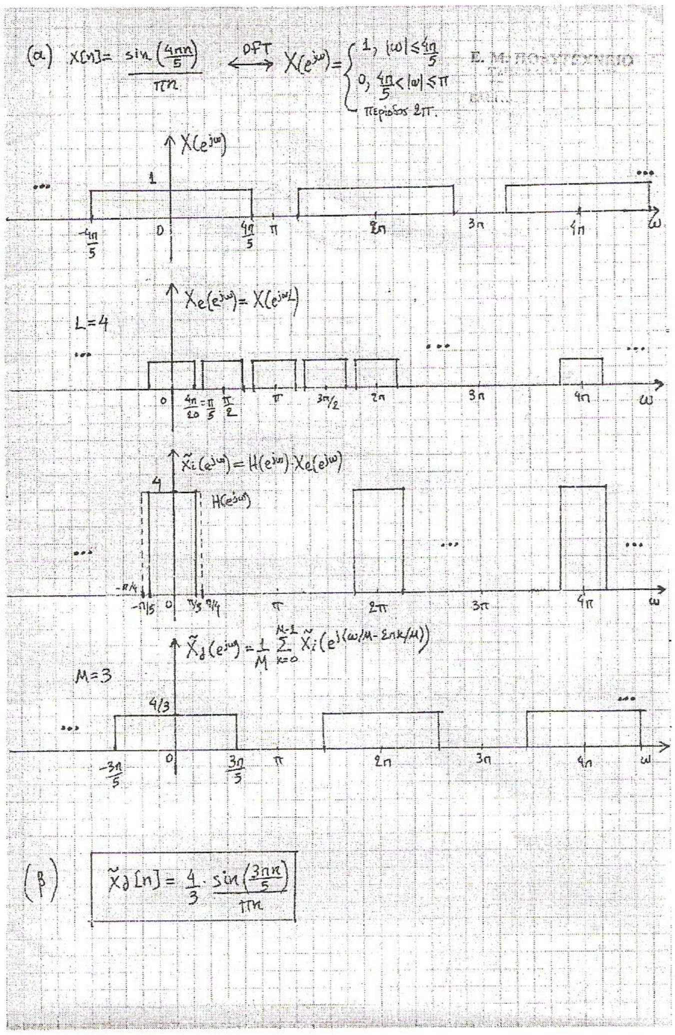
n	0	1	2	3	4	5	6	7
$q[n]$	-1	1	0	-1	1	-1	0	1
$r[n]$	59	-54	58	-54				

1.3: Λύση στο παρακάτω σχήμα.

1.4:

(α)Το συνολικό σύστημα (διακριτό $\rightarrow$ συνεχές σήμα (D/C), Φίλτρο συνεχούς χρόνου ($H_c(j\Omega)$), συνεχές $\rightarrow$ διακριτό σήμα (C/D)), ισοδυναμεί με διακριτού χρόνου σύστημα με απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega}) = H_c(j\frac{\omega}{T})$.
Λύνοντας την διαφορική εξίσωση έχουμε: $(j\Omega)^2 Y_c(j\Omega) + 4(j\Omega)Y_c(j\Omega) + 3Y_c(j\Omega) = X_c(j\Omega)$
$\rightarrow H_c(j\Omega) = \frac{1}{(j\Omega)^2+4(j\Omega)+3}$,
Άρα για $T = 0.1s$, $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{-100\omega^2+40j\omega+3}$, για $|\omega| \leq \pi$ και περίοδο 2π.
(β) $H_c(s) = \frac{1/2}{s+1} - \frac{1/2}{s+3}$, ($s = j\Omega(Laplace)$) $\rightarrow h_c(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})u[t]$.
Για το σύστημα μας ισχύει ότι $h[n] = Th_c(nT)$
$\rightarrow h[n] = \frac{1}{20}(e^{-0.1n} - e^{-0.3n})u[n]$.

1.5:
(α) Εξ' ορισμού, $X[2k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{2kn}$
$= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n]W_N^{2kn} + x[n+(N/2)]W_N^{2k(n+(N/2))}) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] + x[n+(N/2)])W_N^{2kn}$.
(Χρησιμοποιήθηκε ότι $W_N^{kN} = 1$).
Επειδή ισχύει ότι $W_N^{2kn} = W_{N/2}^{kn}$, το $X[2k]$ εκφράσθηκε σαν DFT $N/2$ σημείων της ακολουθί-



ας $x[n] + x[n + (N/2)]$.

(β) $X[4k+1] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{(4k+1)n}$
$= \sum_{n=0}^{(N/4)-1} (x[n] W_N^n W_N^{4kn} + x[n+(N/4)] W_N^{n+(N/4)} W_N^{4k(n+(N/4))}$
$+ x[n+(N/2)] W_N^{n+(N/2)} W_N^{4k(n+(N/2))} + x[n+(3N/4)] W_N^{n+(3N/4)} W_N^{4k(n+(3N/4))})$
$= \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \{(x[n] - x[n+(N/2)]) - j(x[n+(N/4)] - x[n+(3N/4)])\} W_N^n W_N^{4kn}$.
(Χρησιμοποιήθηκε ότι $W_N^{N/4} = -j, W_N^{3N/4} = j, W_N^{N/2} = -1, W_N^{kN} = 1$). Όμοια με πριν, επειδή $W_N^{4kn} = W_{N/4}^{kn}$, το $X[4k+1]$ εκφράσθηκε σαν DFT $N/4$ σημείων.
Ομοίως,
$X[4k+3] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \{(x[n] - x[n+(N/2)]) + j(x[n+(N/4)] - x[n+(3N/4)])\} W_N^{3n} W_N^{4kn}, k = 0, 1, ..., (N/4) - 1$.

Τα ερωτήματα (α),(β) δείχνουν ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον υπολογισμό ενός DFT N σημείων με τον υπολογισμό ενός DFT $N/2$ σημείων, και 2 DFTs $N/4$ σημείων.

(γ) Υποθέτουμε ότι $N = 16$, και ορίζουμε τις παρακάτω σχέσεις :

$g[n] = x[n] + x[n + (N/2)], n = 0, 1, ..., (N/2) - 1$

$f_1[n] = x[n] - x[n + (N/2)], n = 0, 1, ..., (N/4) - 1$

$f_2[n] = x[n + (N/4)] - x[n + (3N/4)], n = 0, 1, ..., (N/4) - 1$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ο τρόπος υπολογισμού των τιμών του $X[k]$.

(δ) Αγνοώντας τους πολλαπλασιασμούς με το εκθετικό W_N^0, παρατηρούμε συνολικά 17 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς. Πολλαπλασιασμός με το $-j$ απαιτεί 0 πραγματικούς πολλαπλασιασμούς, ενώ πολλαπλασιασμός μεταξύ μιγαδικών περιέχει 4 πραγματικούς πολλαπλασιασμούς. Από τους 17 πολλαπλασιασμούς, οι 9 είναι με το $(-j)$. Άρα συνολικά έχουμε $8 \times 4 = 32$ πραγματικούς πολλαπλασιασμούς.

Με την ίδια λογική, για τον κλασσικό radix-2 FFT με $N = 16$, παρατηρούμε 17 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς, από τους οποίους οι 7 με το $-j$. Οπότε τελικά έχουμε $10 \times 4 = 40$ πραγματικούς πολλαπλασιασμούς.