

Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός του βιβλίου για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Παραδίδονται γραπτώς και προσωπικώς στην Γραμματεία Εργ. Ρομποτικής (Αιθ. 2.1.12, παλαιό Κτ.Ηλεκτρ.) 9.00-14.30. Εξηγείστε την εργασία σας.

Ασκηση 3.1: Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 4z^{-2})}{(1 - 0.64z^{-2})}.$$

(α) Βρείτε εκφράσεις για ένα σύστημα ελάχιστης φάσης $H_1(z)$ και ένα all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$ έτσι ώστε

$$H(z) = H_1(z)H_{ap}(z).$$

(β) Βρείτε εκφράσεις για ένα διαφορετικό σύστημα ελάχιστης φάσης $H_2(z)$ και ένα FIR σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης $H_{lin}(z)$ έτσι ώστε

$$H(z) = H_2(z)H_{lin}(z).$$

Ασκηση 3.2 Έστω ότι μας δίνεται μια στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου

$$x[n] = A \cos(n\omega_o + \phi) + w[n]$$

όπου $w[n]$ είναι λευκός Gaussian θόρυβος με μεταβλητότητα σ_w^2 . Για κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις να βρείτε την αυτοσυσχέτιση r_x του $x[n]$, και εάν η ανέλιξη είναι WSS να βρείτε και το φάσμα ισχύος της:

(α) A είναι μια Gaussian τυχαία μεταβλητή με μηδενική μέση τιμή και μεταβλητότητα σ_A^2 , ενώ ω_o και ϕ είναι σταθερές.

(β) ϕ είναι μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, ενώ A και ω_o είναι σταθερές.

Ασκηση 3.3: Έστω ότι μας δίνεται μια AR(2) στοχαστική διαδικασία που δημιουργείται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] + w[n]$$

όπου $w[n]$ είναι λευκός θόρυβος με μηδενική μέση τιμή και μεταβλητότητα $\sigma_w^2 = 1$.

(α) Να βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$ του φίλτρου που συνθέτει το σήμα $y[n]$ από το $w[n]$.

(β) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_y(e^{j\omega})$ του $y[n]$.

(γ) Να βρείτε την αυτοσυσχέτιση $r_y[k]$ του $y[n]$.

Ασκηση 3.4 (Τυχαία διακριτά σήματα, Φασματική Παραγοντοποίηση. Θεωρία: βιβλίο [2], κεφ. 3)

Έστω ότι μας δίνεται μια διακριτού χρόνου πραγματική στοχαστική διαδικασία $x[n]$ με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση:

$$r_x[k] = 5 \left(\frac{1}{3}\right)^{|k|} + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{|k-1|} + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{|k+1|}$$

- (α) Βρείτε ένα ΓΧΑ φίλτρο το οποίο με είσοδο λευκό θόρυβο $v[n]$ μοναδιαίας μεταβλητότητας $\sigma_v^2 = 1$ θα δώσει μια στοχαστική ανάλιξη με τη δεδομένη αυτοσυσχέτιση.
- (β) Βρείτε ένα ευσταθές και αιτιατό ΓΧΑ φίλτρο το οποίο όταν διεγείρεται από το $x[n]$ παράγει λευκό θόρυβο μηδενικής μέσης τιμής και μοναδιαίας μεταβλητότητας.
-

Ασκηση 3.5 (Wiener φίλτρα)

Πρόβλημα 7.8 από βιβλίο [2], σελ.383. (Όταν χρειάζεστε αριθμητικές τιμές, μπορείτε να θέσετε ενδεικτικά $A = N_o = 1$ και $\delta = \pi/4$.)

- [1] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer with J.R. Buck, *Discrete-time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1999.
- [2] M. H. Hayes, *Statistical Digital Processing and Modeling*, Wiley, 1996.