

Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός βιβλίου για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Παραδίδονται γραπτώς και προσωπικώς στην Γραμματεία Εργ. Ρομποτικής (Αιθ. 2.1.12, παλαιό Κτ.Ηλεκτρ.) 9.00-14.00.

Ασκηση 1.1: Εστω τα πεπερασμένα σήματα διακριτού χρόνου

$$\begin{aligned}x[n] &= 2\delta[n] + 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] - 2\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + 4\delta[n-5] - 2\delta[n-7], \\h[n] &= \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2].\end{aligned}$$

(α) Αν $X[k], H[k]$ είναι οι 8-σημείων DFT των σημάτων $x[n], h[n]$ και $Y[k] = X[k]H[k]$, να βρείτε τις τιμές του σήματος $y[n]$ που προκύπτει με ένα 8-σημείων αντίστροφο DFT του $Y[k]$. Εξηγήστε.

(β) Να σχεδιάσετε τα σήματα $x[n], h[n]$ και $y[n]$.

(γ) Αν επαναλάβετε το (α) με DFT N σημείων, να βρείτε την τιμή του N ώστε $y[n] = x[n] * h[n]$ για $n = 0, 1, \dots, N-1$. Εξηγήστε. Επίσης, να σχεδιάσετε το σήμα συνέλιξης $y[n]$.

(δ) Με βάση τον μετασχηματισμό $X[k]$, ορίζουμε τις ακολουθίες

$$\begin{aligned}P[k] &= (-1)^k X[2k], \quad k = 0, \dots, 3. \\Q[k] &= j^{k+1} \text{Im}\{X[k]\}, \quad k = 0, \dots, 7.\end{aligned}$$

ως τους DFT των σημάτων $p[n]$ και $q[n]$, αντίστοιχα. Χωρίς να υπολογίσετε τους ευθείς και αντιστροφούς DFT των σχετικών ακολουθιών, αλλά χρησιμοποιώντας μόνο ιδιότητες του DFT:

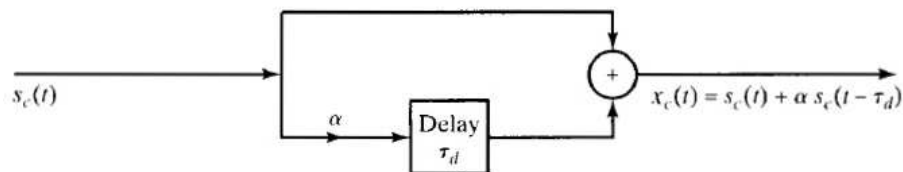
(δ.1) Να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $p[n]$. Εξηγήστε.

(δ.2) Να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $q[n]$. Εξηγήστε.

Ασκηση 1.2: Στο Σχήμα 1, απεικονίζεται ένα απλό μοντέλο ενός καναλιού επικοινωνίας πολλαπλών διαδρομών. Υποθέτουμε ότι το σήμα εισόδου, $s_c(t)$, είναι φασματικά περιορισμένο:

$$S_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \pi/T$$

και ότι το σήμα εξόδου, $x_c(t)$, δειγματοληπτείται με περίοδο δειγματοληψίας T , παίρνοντας τελικά το σήμα διακριτού χρόνου $x[n] = x_c(nT)$.



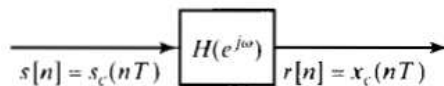
Σχήμα 1

(α) Προσδιορίστε το μετασχηματισμό Fourier των σημάτων $x_c(t), x[n]$ συναρτήσει του $S_c(j\Omega)$.

(β) Θέλουμε να προσομοιώσουμε το παραπάνω σύστημα μέσω ενός συστήματος διακριτού χρόνου, όπως αυτό που απεικονίζεται στο Σχήμα 2. Για το σκοπό αυτό, πρέπει να επιλέξουμε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(e^{j\omega})$, έτσι ώστε η έξοδος $r[n] = x_c(nT)$ όταν η είσοδος

$s[n] = s_c(nT)$. Να βρεθεί η κατάλληλη $H(e^{j\omega})$ συναρτήσει των παραμέτρων T, τ_d .

(γ) Προσδιορίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος διακριτού χρόνου, $h[n]$, για τις εξής δύο περιπτώσεις: i) $\tau_d = T$. ii) $\tau_d = T/2$.



Σχήμα 2

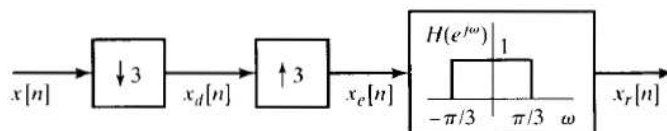
Άσκηση 1.3: Θεωρήστε το σύστημα του Σχήματος 3. Για το καθένα από τα παρακάτω σήματα εισόδου $x[n]$, αποφανθείτε για το κατά πόσο η ανακατασκευασμένη έξοδος $x_r[n]$ ισούται με την είσοδο, και εξηγήστε την απάντησή σας:

(α) $x[n] = \cos(\pi n/4)$

(β) $x[n] = \cos(\pi n/2)$

(γ) $x[n] = \left[\frac{\sin(\pi n/8)}{\pi n} \right]^2$

Υπόδειξη: Για το ερώτημα (γ), να υπολογιστεί πρώτα ο Fourier μετασμός.



Σχήμα 3

Άσκηση 1.4: Έστω ότι από δειγματοληψία ενός συνεχούς σήματος λαμβάνετε το ψηφιακή σήμα $x[n]$. Στον υπολογιστή σας έστω ότι αποθηκεύετε το σήμα $y[n]$ που έχει παραχθεί από υποδειγματοληψία του $x[n]$:

$$y[n] = x[2n + \lambda], \quad \lambda = \begin{cases} 0, \text{AM} = 2p + 1 \\ 1, \text{AM} = 2p \end{cases} \quad (1)$$

όπου AM = Αριθμός Μητρώου. Για να ξαναδημιουργήσουμε το αρχικό σήμα $x[n]$ από το αποθηκευμένο $y[n]$ εφαρμόζουμε την εξής σχέση:

$$z[n] = y\left[\frac{n}{2}\right] \quad (2)$$

εισάγοντας μηδενικά στις θέσεις όπου το n δεν είναι άρτιος. Στη συνέχεια μπορούμε είτε να εφαρμόσουμε παρεμβολή, αντικαθιστώντας τα μηδενικά με τις εξής τιμές:

$$z[2p + 1] = \frac{1}{2}(z[2p] + z[2p + 2])$$

είτε να επαναλάβουμε τα προηγούμενα δείγματα:

$$z[2p + 1] = z[2p] \quad (3)$$

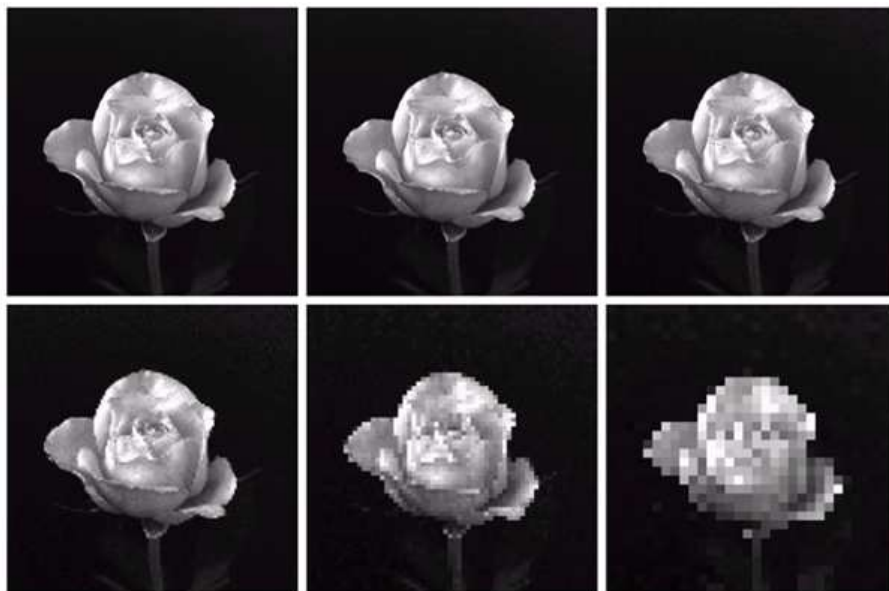
Α) Στο Σχήμα 4(α) φαίνεται η εικόνα $x[m, n]$ ενός τριαντάφυλλου διαστάσεων 1024×1024 σημείων, οριζόντια και κατακόρυφα. Εφαρμόζουμε δειγματοληψία (δια 2) και προς τις 2 διαστάσεις διαδοχικά 5 φορές και λαμβάνουμε τις εικόνες $x[2m, 2n], x[4m, 4n], x[8m, 8n], x[16m,$

$16n]$, $x[32m, 32n]$ που επίσης απεικονίζονται στο Σχήμα 4(α). Στη συνέχεια ξεκινάμε από κάθε μία από τις 5 αυτές εικόνες και ξαναδημιουργούμε την αρχική εικόνα εφαρμόζοντας τις σχέσεις (2) και (3) (σε 2 διαστάσεις). Η αρχική εικόνα (πάνω αριστερά) και οι 5 εικόνες που προκύπτουν φαίνονται στο Σχήμα 4(β). Τι παρατηρείτε? Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί η ποιότητα ανακατασκευής διαφέρει σε αυτές?

Β) Έστω ότι έχουμε μια διακριτή εικόνα σκακιέρας, με $64 (8 \times 8)$ τετράγωνα, εναλλάξ ένα μαύρο και ένα λευκό. Το κάθε μαύρο ή λευκό τετράγωνο αποτελείται από $64 (8 \times 8)$ δείγματα ίδιας απόχρωσης (με τιμή 0 τα μαύρα, 1 τα λευκά). Η εικόνα $x[n]$ έχει επομένως συνολικά $64 \times 64 ([0...63, 0...63])$ δείγματα. Εφαρμόζουμε υποδειγματοληψία σύμφωνα με την (1), 4 φορές διαδοχικά, ταυτόχρονα τόσο για το n , όσο και για το m . Σχεδιάστε την εικόνα που θα δημιουργηθεί τελικά. Αν εφαρμόσετε τη διαδικασία ανακατασκευής της αρχικής εικόνας, μέσω των εξισώσεων (2),(3), ξεκινώντας από την τελική αυτή εικόνα, 4 φορές διαδοχικά, τι μορφή θα έχει η προκύπτουσα εικόνα?



Σχήμα 4(α)



Σχήμα 4(β)

Ασκηση 1.5: (LPC):

(α) Για το σχεδιασμό ενός βέλτιστου γραμμικού προβλέπτη τάξης $p = 3$ με τη μέθοδο της Αυτοσυσχέτισης, σας δίνονται οι παραθυρωμένες τιμές της αυτοσυσχέτισης του σήματος :

$$r_x[0] = 1.5, r_x[1] = 0.7, r_x[2] = 0.6, r_x[3] = 0.3.$$

(α.1) Επαληθεύσετε ότι ο πίνακας αυτοσυσχέτισης

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] & r_x[2] & r_x[3] \\ r_x[1] & r_x[0] & r_x[1] & r_x[2] \\ r_x[2] & r_x[1] & r_x[0] & r_x[1] \\ r_x[3] & r_x[2] & r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix}$$

που σχηματίζεται από τις ανωτέρω αριθμητικές τιμές των $r_x[k]$ είναι θετικά ορισμένος.

(α.2) Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Levinson-Durbin, βρείτε τους βέλτιστους LPC συντελεστές $\{\alpha_i\}$, και τους αντίστοιχους βέλτιστους συντελεστές ανάκλασης $\{k_i\}$.

(β) Για ένα γραμμικό προβλέπτη τάξης $p = 4$, εάν οι βέλτιστοι LPC συντελεστές $\{\alpha_i\}$ είναι οι

$$\alpha_1 = 0.02, \alpha_2 = -0.1298, \alpha_3 = 0.695, \alpha_4 = -0.1,$$

χρησιμοποιείτε τον αλγόριθμο Levinson-Durbin για να βρείτε του αντίστοιχους συντελεστές ανάκλασης $\{k_i\}$.

Σημείωση: Ο αλγόριθμος Levinson-Durbin με τον ορθό συμβολισμό περιγράφεται στις συνοπτικές σημειώσεις (διαφάνειες) του μαθήματος.

Άσκηση 1.6(*):¹ **(α)** Να αποδείξετε το αποτέλεσμα (4.16) του Παραδείγματος 4.4 στο Κεφ.4 [3] για το φασματογράφημα ($|\text{STFT}|^2$) ενός γραμμικού chirp σήματος $f(t) = \exp(jat^2)$, όπου ο STFT² χρησιμοποιεί Gaussian παράθυρο $g(t)$ με $\|g\| = 1$.

Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα (και μετά χρησιμοποιήστε) τον Fourier μετασχηματισμό ενός σήματος

$$y(t) = \exp[-(a - jb)t^2]$$

γενικεύοντας την ακόλουθη τεχνική εύρεσης μετασχηματισμού ενός Gaussian σήματος $x(t) = \exp(-t^2)$: παραγωγίζουμε την Fourier εξίσωση $X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) \exp(-j\Omega t) dt$, ολοκληρώνουμε κατά μέρη και μετά επιλύουμε την προκύπτουσα διαφορική εξίσωση

$$2 \frac{X(\Omega)}{d\Omega} + \Omega X(\Omega) = 0$$

η οποία μας δίνει $X(\Omega) = K \exp(-\Omega^2/4)$.

(β) Να αποδείξετε το αποτέλεσμα (4.45) του Κεφ.4 [3], το οποίο ανακατασκευάζει ένα σήμα $f(t)$ από τον Wavelet μετασχηματισμό $Wf(u, s)$ κτίζοντας τις λεπτομέρειες (υψίσυχνα μέρη) μέσω των διαστολών $\psi_s(t) = \psi(t/s)/\sqrt{s}$ του μητρικού κυματιδίου ψ για μικρές κλίμακες $s < s_0$, ενώ η υπόλοιπη δομή (σε χαμηλές συχνότητες) συσσωρεύεται μέσω της βαθυπερατής συνάρτησης κλιμάκωσης ϕ στην κλίμακα s_0 , δηλ. από την $\phi_{s_0}(t)$.

Σημ.: Η ϕ ορίζεται από την ψ μέσω της σχέσης (4.42) του Κεφ.4 [3].

Wavelet References:

[1] I. Daubechies, "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis", IEEE Trans. Information Theory, Sep. 1990.

[2] "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation", IEEE Trans. PAMI, July 1989.

[3] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Acad.Press, 1999.

[4] Διαφάνειες Διαλέξεων.

¹ (*) Η άσκηση αυτή είναι προαιρετική. Η λύση της σας δίνει bonus 20% επί της 1ης σειράς αναλυτικών ασκήσεων.

² Στο [3] ο STFT (Short-time Fourier Transform) ονομάζεται Windowed Fourier Transform.