

Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός βιβλίου για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Παραδίδονται γραπτώς και προσωπικώς στην Γραμματεία Εργ. Ρομποτικής (Αιθ. 2.1.12, παλαιό Κτ.Ηλεκτρ.) 9.00-14.30.

Ασκηση 1.1: Εστω τα πεπερασμένα σήματα διακριτού χρόνου

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 3\delta[n-4] + \delta[n-5] - 2\delta[n-6] + 4\delta[n-8] - \delta[n-9], \\ h[n] &= 3\delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n+1] - (\delta[n-2] + \delta[n+2])/2. \end{aligned}$$

(α) Αν $X[k], H[k]$ είναι οι 10-σημείων DFT των σημάτων $x[n], h[n]$ και $Y[k] = X[k]H[k]$, να βρείτε τις τιμές του σήματος $y[n]$ που προκύπτει με ένα 10-σημείων αντίστροφο DFT του $Y[k]$. Εξηγήστε.

(β) Να σχεδιάσετε τα σήματα $x[n], h[n]$ και $y[n]$.

(γ) Αν επαναλάβετε το (α) με DFT N σημείων, να βρείτε την τιμή του N ώστε $y[n] = x[n] * h[n]$ για $n = 0, 1, \dots, N-1$. Εξηγήστε.

(δ) Με βάση τον μετασχηματισμό $X[k]$, ορίζουμε τις ακολουθίες

$$\begin{aligned} P[k] &= (-1)^k X[k], \quad k = 0, \dots, 9. \\ Q[k] &= X[2k], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

ως τους DFT των σημάτων $p[n]$ και $q[n]$, αντίστοιχα.

(δ.1) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες του DFT, να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $p[n]$. Εξηγήστε.

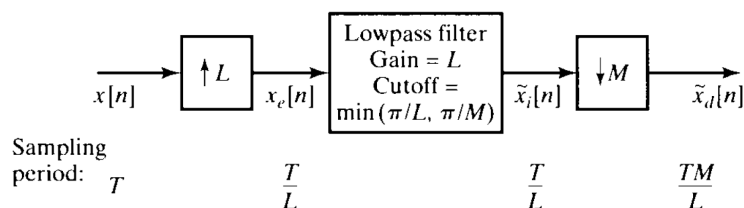
(δ.2) Να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $q[n]$. Εξηγήστε.

Ασκηση 1.2: Για το ακόλουθο σύστημα αλλαγής του ρυθμού δειγματοληψίας, σας δίνεται το σήμα εισόδου $x[n]$ και οι παράγοντες υπερδειγματοληψίας (interpolation) L και υποδειγματοληψίας (decimation) M , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1:

$$x[n] = \sin(4\pi n/5)/(\pi n), \quad L = 4, \quad M = 3$$

(α) Να σχεδιάσετε τα φάσματα (DTFT) των σημάτων $x_e[n]$, $\tilde{x}_i[n]$ και $\tilde{x}_d[n]$, σημειώνοντας κρίσιμες τιμές στους άξονες.

(β) Να βρείτε το σήμα εξόδου $\tilde{x}_d[n]$. Εξηγήστε.



Σχήμα 1: Παρεμβολή και Αποδεκατισμός σε διακριτό χρόνο.

Ασκηση 1.3: Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1 - 4z^{-2})}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + 0.81z^{-2})}$$

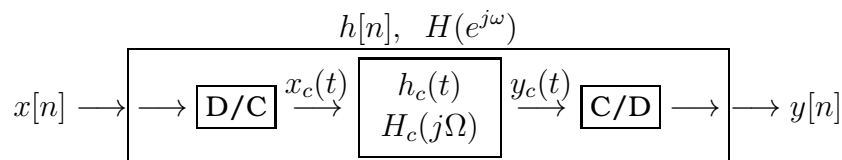
(α) Να βρείτε τις συναρτήσεις μεταφοράς για ένα minimum-phase σύστημα $H_{min}(z)$ και ένα all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z).$$

Εξηγείστε συνοπτικά.

(β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων και μηδενικών για το minimum-phase σύστημα $H_{min}(z)$ και για το all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$, και να βρείτε τις περιοχές σύγκλισης των αντίστοιχων Z μετ/σμών.

Άσκηση 1.4: Θεωρείστε το σύστημα στο ακόλουθο Σχήμα



όπου στα ιδανικά συστήματα D/C και C/D η περίοδος δειγματοληψίας είναι T , και το συνεχούς - χρόνου αιτιατό ΓΧΑ σύστημα χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 y_c(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_c(t)}{dt} + 3y_c(t) = x_c(t)$$

Το συνολικό σύστημα (D/C, ΣΧ-ΓΧΑ, C/D) είναι ισοδύναμο με ένα αιτιατό διακριτού-χρόνου ΓΧΑ σύστημα. Να βρείτε την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ και την κρουστική απόκριση $h[n]$ αυτού του ισοδύναμου διακριτού συστήματος όταν $T = 0.1s$.

Άσκηση 1.5:

Ο αλγόριθμος split-radix FFT (SRFFT) είναι μια τροποποίηση του FFT. Ο γράφος του αλγορίθμου split-radix είναι παρόμοιος με τον γράφο του αλγορίθμου radix-2, με τη διαφορά ότι απαιτεί λιγότερους πολλαπλασιασμούς. Σε αυτήν την άσκηση εξετάζουμε τον αλγόριθμο SRFFT για τον υπολογισμό του DFT $X[k]$ μιας ακολουθίας $x[n]$ μήκους N .

(α) Δείξτε ότι οι όροι του $X[k]$ με άρτιους δείκτες k υπολογίζονται ως ο μετασχηματισμός DFT $N/2$ σημείων

$$X[2k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] + x[n + N/2])W_N^{2kn}$$

για $k = 0, 1, \dots, (N/2) - 1$.

(β) Δείξτε ότι οι τιμές του $X[k]$ για περιττά k υπολογίζονται ως οι μετασχηματισμοί DFT $N/4$ σημείων

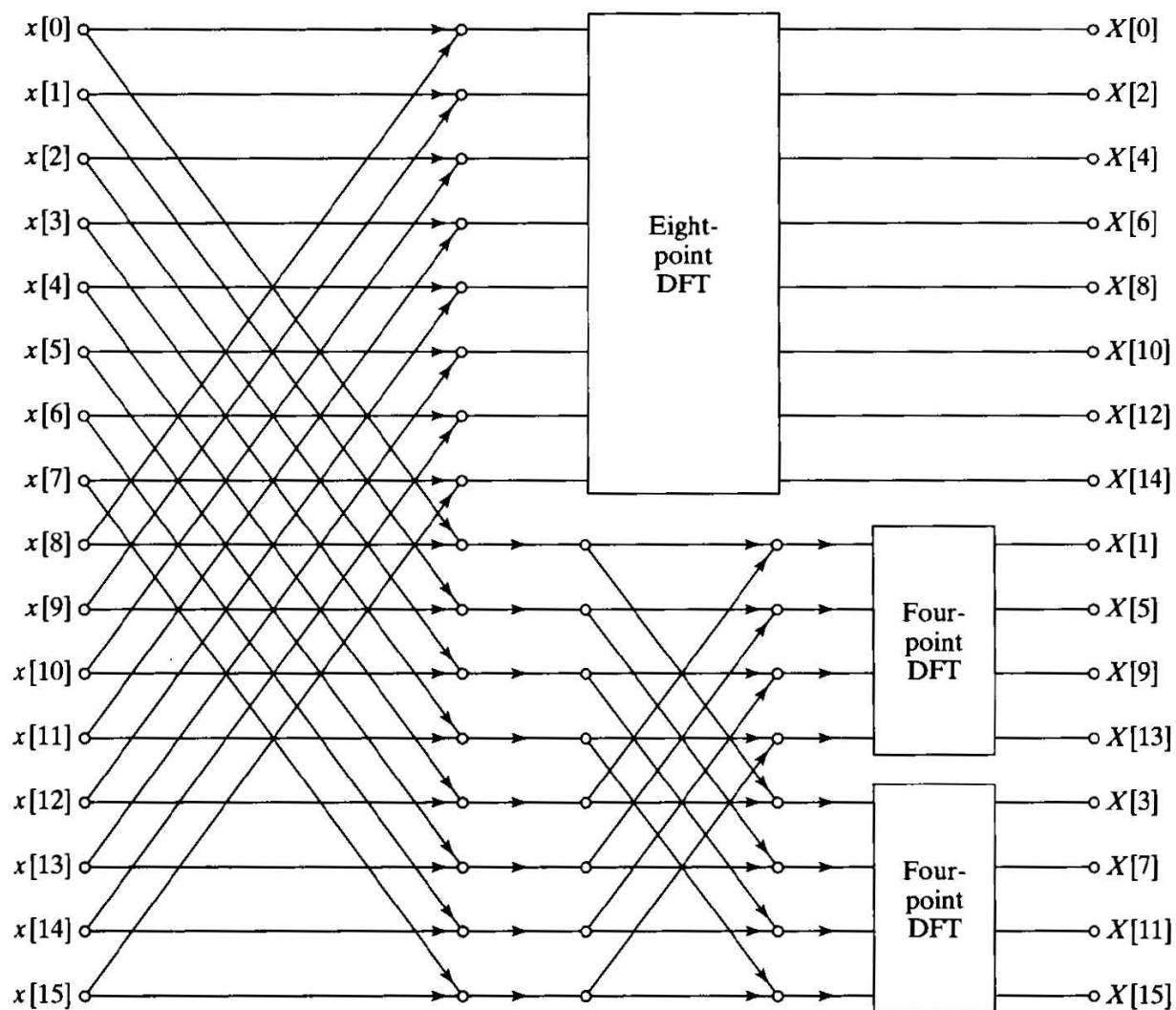
$$X[4k + 1] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \{(x[n] - x[n + N/2]) - j(x[n + N/4] - x[n + 3N/4])\}W_N^n W_N^{4kn}$$

για $k = 0, 1, \dots, (N/4) - 1$, και

$$X[4k + 3] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \{(x[n] - x[n + N/2]) + j(x[n + N/4] - x[n + 3N/4])\}W_N^{3n} W_N^{4kn}$$

για $k = 0, 1, \dots, (N/4) - 1$.

(γ) Το διάγραμμα του Σχ. 2 δείχνει την παραπάνω ανάλυση του DFT για $N = 16$ σημεία.



Σχήμα 2: Υπολογισμός του μετασχηματισμού SRFFT.

Ξανασχεδιάστε το διάγραμμα ονοματίζοντας τους κόμβους του με τους απαραίτητους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες.

(6) Υπολογίστε τον αριθμό των πραγματικών πολλαπλασιασμών που απαιτούνται για τον υπολογισμό ενός μετασχηματισμού DFT $N = 16$ σημείων, όταν εφαρμόζεται ο αλγόριθμος SRFFT για τον υπολογισμό των εσωτερικών DFT του Σχ. 2. Συγκρίνετε με τον αριθμό των πραγματικών πολλαπλασιασμών που απαιτούνται από τον αλγόριθμο 16 σημείων radix-2 decimation-in-frequency. Και στις δύο περιπτώσεις θεωρείστε ότι αγνοούνται οι πολλαπλασιασμοί με το εκθετικό W_N^0 .