Ασκηση 2.1: Θεωρείστε ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα συνεχούς χρόνου με συνάρτηση $H_c(s)$. Η είσοδος $x_c(t)$ και η έξοδος $y_c(t)$ ικανοποιούν μία κανονική γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Ένας τρόπος να προσομοιωθεί ένα τέτοιο σύστημα είναι χρησιμοποιώντας αριθμητικές τεχνικές για την ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης. Σε αυτή την άσκηση θεωρούμε πως η τραπεζοειδής ολοκλήρωση (trapezoidal integration formula) είναι ισοδύναμη με τον μετασχηματισμό της συνάρτησης μεταφοράς συνεχούς χρόνου $H_c(s)$ σε διακριτού χρόνου συνάρτηση $H(z)$ χρησιμοποιώντας διγραμμικό μετ/σμό (bilinear transformation). Δηλαδή θεωρείστε την επόμενη συνάρτηση μεταφοράς συνεχούς χρόνου

$$H_c(s) = \frac{A}{s+c},$$

όπου A και c σταθερές. Η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση είναι

$$\dot{y}_c(t) + cy_c(t) = Ax_c(t),$$

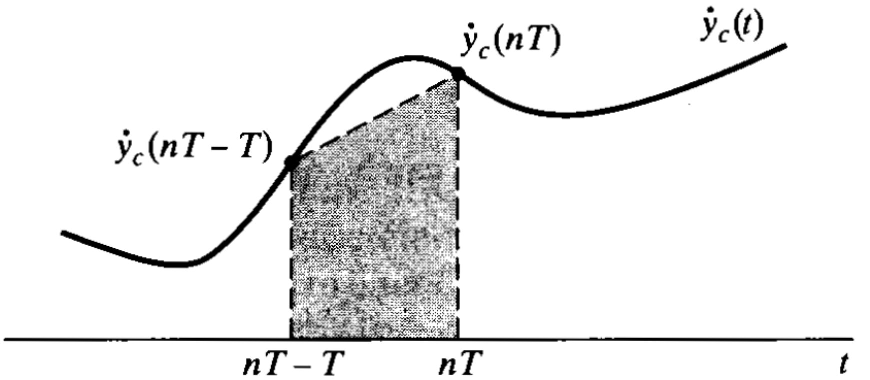
όπου

$$\dot{y}_c(t) = \frac{dy_c(t)}{dt},$$

(α) Δείξτε ότι το $y_c(nT)$ μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια του $\dot{y}_c(t)$ ως

$$y_c(nT) = \int_{nT-T}^{nT} \dot{y}_c(\tau)d\tau + y_c(nT-T).$$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα σε αυτήν την εξίσωση εκπροσωπεί το εμβαδό κάτω από την συνάρτηση $\dot{y}_c(t)$ για το διάστημα $(nT-T)$ ως το nT. Στο επόμενο σχήμα βλέπετε τη συνάρτηση $\dot{y}_c(t)$ και μία σκιασμένη τραπεζοειδή περιοχή όπου το εμβαδόν είναι περίπου ίσο με το εμβαδό κάτω από την καμπύλη. Αυτή η προσέγγιση της ολοκλήρωσης είναι γνωστή ως *τραπεζοειδής προσέγγιση*. Είναι φανερό ότι όσο το T πλησιάζει το μηδέν, η προσέγγιση καλυτερεύει. Χρησιμοποιείστε την προσέγγιση αυτή για να βρείτε την έκφραση για το $y_c(nT)$ σε σχέση με τα $y_c(nT-T)$, $\dot{y}_c(nT)$ και $\dot{y}_c(nT-T)$.



(β) Χρησιμοποιείστε την διαφορική εξίσωση για να βρείτε μία έκφραση για το $\dot{y}_c(nT)$, και αντικαταστήστε την στην έκφραση που βρήκατε στο ερώτημα (α).

(γ) Ορίστε $x[n] = x_c(nT)$ και $y[n] = y_c(nT)$. Με αυτές τις εκφράσεις και τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β) βρείτε μία εξίσωση διαφορών όπου θα συνδέσετε τα $x[n]$ και $y[n]$, και θα καθορίσετε τη συνάρτηση διακριτού-χρόνου $H(z) = Y(z)/X(z)$ που προκύπτει.
(δ) Δείξτε ότι, για αυτό το παράδειγμα,

$$H(z) = H_c(s)|_{s=(2/T)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]};$$

δείξτε δηλαδή ότι η $H(z)$ μπορεί να βρεθεί απευθείας από την $H_c(s)$ μέσω του διγραμμικού μετ/σμού. (Για υψηλότερου βαθμού διαφορικές εξισώσεις, επαναλαμβανόμενες τραπεζοειδείς ολοκληρώσεις σε υψηλότερου βαθμού παράγωγο της εξόδου θα έχει τα ίδια αποτελέσματα και για ένα γενικό σύστημα συνεχούς χρόνου με ρητή συνάρτηση μεταφοράς.)

Ασκηση 2.2: (Cepstrum) Εστω το LPC σύστημα μοντελοποίησης φωνής με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z^{-k}}$$

όπου $\{\alpha_k : k = 1, ..., p\}$ είναι οι LPC συντελεστές και $h(n)$ είναι η κρουστική απόκριση. Αν $\hat{h}(n)$ είναι το complex cepstrum του σήματος $h(n)$, να αποδείξετε ότι αυτό το cepstrum του LPC μοντέλου μπορεί να υπολογισθεί αναδρομικά με την σχέση

$$\hat{h}(n) = \alpha_n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{h}(k)\alpha_{n-k}, \quad n \geq 1.$$

Ασκηση 2.3 (LPC αλγόριθμος Levinson-Durbin και Μέθοδος Πλέγματος)
(α) Να αποδείξετε ότι η βασική αναδρομή

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(i)} &= -\kappa_i \\ \alpha_j^{(i)} &= \alpha_j^{(i-1)} + \kappa_i \alpha_{i-j}^{(i-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, i-1 \end{aligned}$$

του αλγορίθμου Levinson-Durbin μπορεί να γραφεί και με πίνακες ως εξής:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \kappa_i \begin{bmatrix} \mathbf{J}\boldsymbol{\alpha}^{(i-1)} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, ..., p.$$

όπου $\mathbf{J}$ είναι ο πίνακας ανταλλαγής και

$$\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = [\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, ..., \alpha_i^{(i)}]^T$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο υπολογισμός των συντελεστών ανάκλασης $\{\kappa_i\}$ με την μέθοδο πλέγματος για γραμμική πρόβλεψη μέσω της εξίσωσης Itakura-Saito δίνει τις ίδιες τιμές με τον αλγόριθμο Levinson-Durbin.

Ασκηση 2.4 (LPC, συντελεστές πρόβλεψης/ανάκλασης) Για το σχεδιασμό ενός βέλτιστου γραμμικού προβλέπτη τάξης $p = 3$ με τη μέθοδο της Αυτοσυσχέτισης, σας δίνονται οι παραθυρωμένες τιμές της αυτοσυσχέτισης του σήματος:
$r_x[0] = 2, r_x[1] = 0.75, r_x[2] = 0.5625, r_x[3] = 0.4219.$

(α) Βρείτε εάν αυτή η ακολουθία αυτοσυσχέτισης είναι θετικά ορισμένη. Εξηγείστε συνοπτικά.

(β) Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Levinson-Durbin, βρείτε τους βέλτιστους LPC συντελεστές $\{\alpha_i\}$, και τους αντίστοιχους βέλτιστους συντελεστές ανάκλασης $\{k_i\}$.

Σημείωση: Ο αλγόριθμος Levinson-Durbin με τον ορθό συμβολισμό περιγράφεται στις συνοπτικές σημειώσεις (διαφάνειες) του μαθήματος.

Εξηγείστε την εργασία σας.

Ασκηση 2.5 Σχεδιασμός και Υλοποίηση Ψηφιακών Φίλτρων με MATLAB
Χρησιμοποιώντας όλες τις παρακάτω μεθόδους:

1. IIR με αναλογικό lowpass Butterworth, μετασχηματισμό συχνότητας και bilinear μετασχηματισμό.

2. IIR με αναλογικό lowpass Chebyshev I, μετασχηματισμό συχνότητας και bilinear μετασχηματισμό.

3. IIR με αναλογικό lowpass Elliptic, μετασχηματισμό συχνότητας και bilinear μετασχηματισμό.

4. FIR με Kaiser window.

Σχεδιάστε ένα ψηφιακό φίλτρο που να έχει την ακόλουθη επιθυμητή απόκριση:
Bandpass: Passband: $[0.50, 0.70]\pi$, ripple: 1dB, Stopbands: $[0, 0.475]\pi$, $[0.75, 1]\pi$, attenuation: 60dB.
Αναπαραστήστε γραφικά το πλάτος, τη φάση και το group-delay στο $[0, 1]\pi$ και γύρω από το transition band. Συγκρίνετε την τάξη και το μήκος του φίλτρου για όλες τις ανωτέρω μεθόδους σχεδιασμού.
Χρήσιμα MATLAB εργαλεία: fdatool
ΠΑΡΑΔΟΤΕΑ: Γραφικές παραστάσεις, σύγκριση των αποτελεσμάτων από τις διάφορες μεθόδους σχεδίασης, κώδικας MATLAB.
