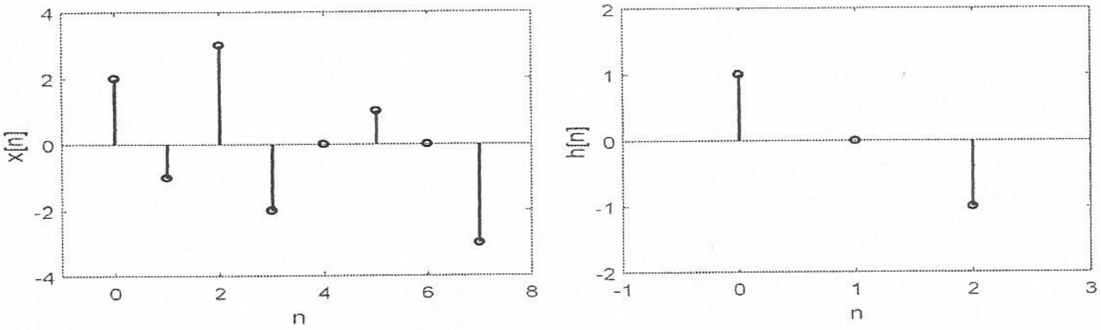
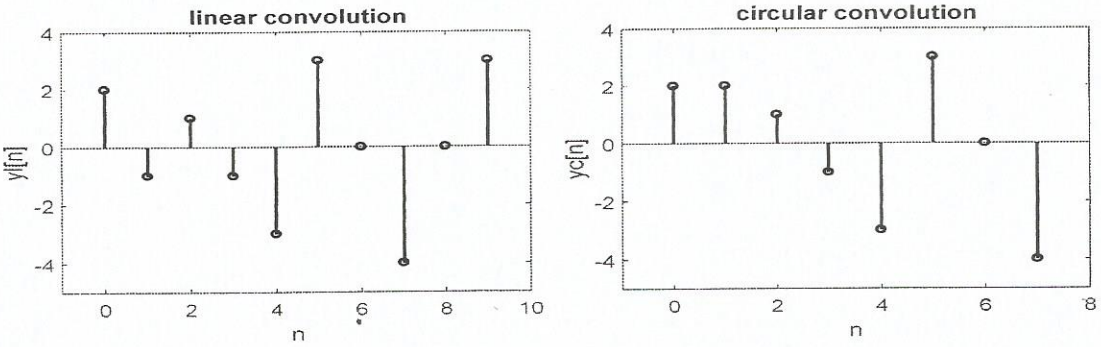
1.1

(α), (β)



Ισχύει ότι $Y[k] = X[k]H[k]$, $k = 0, 1, ..., 7$, και $y[n] \leftrightarrow_{DFT} Y[k]$. Επομένως το $y[n]$ θα ισούται με την κυκλική συνέλιξη περιόδου 8 των $x[n]$,$h[n]$: $y_c[n] = x[n] \circledast_8 h[n]$. Ισοδύναμα, αντιστοιχεί σε κυκλική αναδίπλωση (με περίοδο N=8) της γραμμικής συνέλιξης $y_l[n] = x[n] * h[n]$ που έχει 8+3-1=10 σημεία.



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y_l[n]$	2	-1	1	-1	-3	3	0	-4	0	3
$y_c[n]$	2	2	1	-1	-3	3	0	-4		

(γ) Για να μην υπάρχει αναδίπλωση, $N \geq 10$.

(δ.1) $P[k] = (-1)^k Re\{X[k]\}$, $k = 0, ..., 7$, και $p[n] \leftrightarrow_{DFT} P[k]$.
Έστω $X_r[k] = \text{Re}\{X[k]\}$, και $x_r[n] \leftrightarrow_{DFT} X_r[k]$. Τότε για το $x_r[n]$ ισχύει: $x_r[n] = \frac{x[n]+x[8-n]}{2}$, $1 \leq n \leq 7$, $x_r[0] = \Re(x[0])$.
$\rightarrow P[k] = e^{\frac{j2\pi k \cdot 4}{8}} X_r[k]$, $k = 0, ..., 7$, $\leftrightarrow_{DFT} p[n] = x_r[((n+4))_8]$.

(δ.2) $Q[k] = \text{Im}\{X[2k]\}$, $k = 0, ..., 3$, και $q[n] \leftrightarrow_{DFT} Q[k]$.
Έστω $X_2[k] = X[2k]$, και $x_2[n] \leftrightarrow_{DFT} X_2[k]$. Τότε το $x_2[n]$ προκύπτει με περιοδική αναδίπλωση του $x[n]$ (με περίοδο N=4): $x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-4k], n = 0, ..., 3$.
Για το $q[n]$ ισχύει ότι $q[n] = \frac{x_2[n]-x_2[4-n]}{2j}$, $1 \leq n \leq 3$, $q[0] = \text{Im}(x[0]) = 0$.

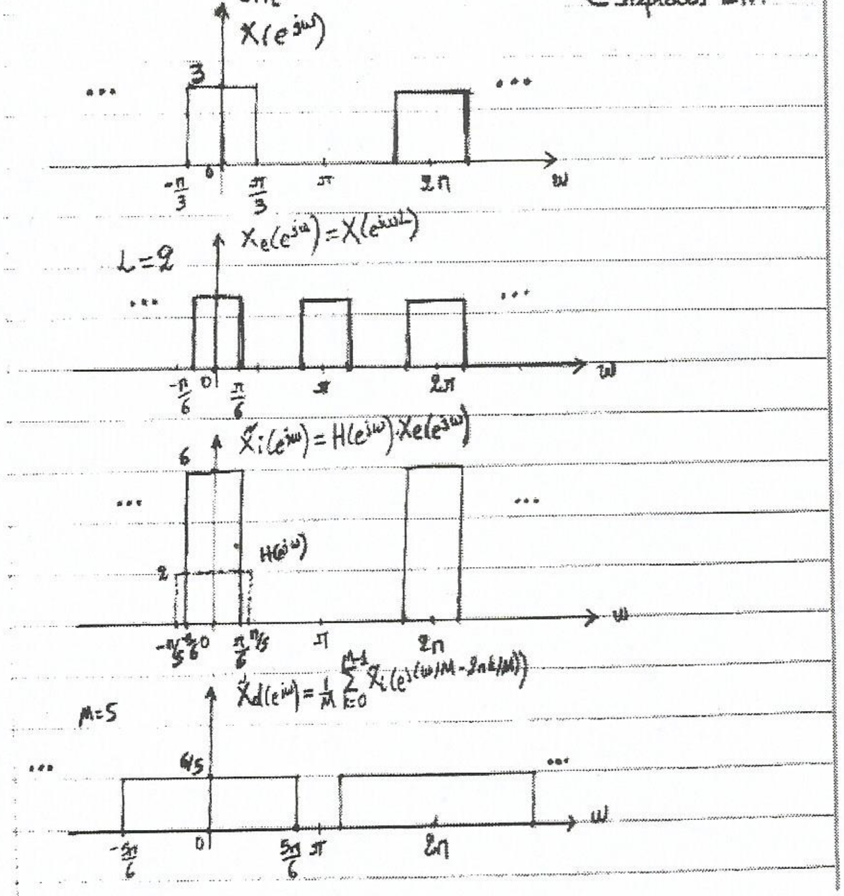
n	0	1	2	3	4	5	6	7
$p[n]$	0	-0.5	1.5	-2	2	-2	1.5	-0.5
$q[n]$	0+0j	0-2.5j	0+0j	0+2.5j				

1.2

(α) Από την μορφή των $x[n]$ και $\tilde{x}_d[n]$, προκύπτει ότι για τις παραμέτρους υπερδειγματοληψίας L και υποδειγματοληψίας M θα πρέπει να ισχύει $\frac{L}{M} = \frac{2}{5}$. Επιλέγουμε $L = 2$ και $M = 5$.

$M=5,\ L=2$

(β) $x[n] = 3\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi n} \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 3, & |\omega| \le \frac{\pi}{3} \\ 0, & \frac{\pi}{3} < |\omega| \le \pi \\ \text{περίοδος } 2\pi. \end{cases}$



1.3

Για να είναι τα δύο συστήματα ισοδύναμα, τα Ω_p και Ω_s θα πρέπει να επιλεχθούν έτσι ώστε να ισχύουν τα εξής:

(α) Το διάστημα $|\Omega| \le \Omega_p$ να αντιστοιχεί στο διάστημα $|\omega| \le \pi/4$:

$$\Omega_p T = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \Omega_p = 44000\pi \quad (22 \text{ kHz})$$

(β) Να μην προκύπτει φασματική επικάλυψη στην περιοχή $|\Omega| \le \Omega_p$ κατά την δειγματοληψία:

$$\frac{2\pi}{T} - \Omega_s = \Omega_p \Longrightarrow \Omega_s = 308000\pi \quad (154 \text{ kHz})$$

1.4

(α) $r_x[0]= 1.2$, $r_x[1]= 0.75$, $r_x[2]= 0.6$, $r_x[3]= 0.5$

Levinson-Durbin: $E^{(0)}= r_x[0]= 1.2$

<u>Τάξη $i = 1$</u>

$$\kappa_1 = \frac{-r_x[1]}{E^{(0)}} = \frac{-0.75}{1.2} = -0.625, \quad \alpha_1^{(1)} = -\kappa_1 = 0.625, \quad E^{(1)} = (1-\kappa_1^2)E^{(0)} = 0.7312$$

<u>Τάξη $i = 2$</u>

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= -(r_x[2] - \alpha_1^{(1)} r_x[1])/E^{(1)} = -0.1795 \\ \alpha_2^{(2)} &= -\kappa_2 = 0.1795 \\ \alpha_1^{(2)} &= \alpha_1^{(1)} + \kappa_2\alpha_1^{(1)} = 0.5128 \\ E^{(2)} &= (1-\kappa_2^2)E^{(1)} = 0.7076 \end{aligned}$$

<u>Τάξη $i = 3 = p$</u>

$$\begin{aligned} \kappa_3 &= -(r_x[3] - (\alpha_1^{(2)} r_x[2] + \alpha_2^{(2)} r_x[1]))/E^{(2)} = -0.0815 \\ \alpha_3^{(3)} &= -\kappa_3 = 0.0815 \\ \alpha_1^{(3)} &= \alpha_1^{(2)} + \kappa_3\alpha_2^{(2)} = 0.4982 \\ \alpha_2^{(3)} &= \alpha_2^{(2)} + \kappa_3\alpha_1^{(2)} = 0.1377 \end{aligned}$$

Άρα <u>LPC</u> = $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$= (0.4982, 0.1377, 0.0815)
και <u>PARCOR</u>= $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$= (-0.625, -0.1795, -0.0815).

(β) $\alpha_1^{(4)} = \alpha_1 = -0.3775$, $\alpha_2^{(4)} = \alpha_2 = -0.23$, $\alpha_3^{(4)} = \alpha_3 = 0.4825$, $\alpha_4^{(4)} = \alpha_4 = 0.6$

<u>Τάξη $i = 4 = p$</u>

$$\begin{aligned} \kappa_4 &= -\alpha_4^{(4)} = -0.6 \\ \alpha_1^{(3)} &= \frac{\alpha_1^{(4)} - \kappa_4\alpha_3^{(4)}}{1-\kappa_4^2} = -0.1375 \\ \alpha_2^{(3)} &= \frac{\alpha_2^{(4)} - \kappa_4\alpha_2^{(4)}}{1-\kappa_4^2} = -0.575 \\ \alpha_3^{(3)} &= \frac{\alpha_3^{(4)} - \kappa_4\alpha_1^{(4)}}{1-\kappa_4^2} = 0.4 \end{aligned}$$

<u>Τάξη $i = 3$</u>

$$\begin{aligned} \kappa_3 &= -\alpha_3^{(3)} = -0.4 \\ \alpha_1^{(2)} &= \frac{\alpha_1^{(3)} - \kappa_3\alpha_2^{(3)}}{1-\kappa_3^2} = -0.4375 \\ \alpha_2^{(2)} &= \frac{\alpha_2^{(3)} - \kappa_3\alpha_1^{(3)}}{1-\kappa_3^2} = -0.75 \end{aligned}$$

<u>Τάξη $i = 2$</u>

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= -\alpha_2^{(2)} = 0.75 \\ \alpha_1^{(1)} &= \frac{\alpha_1^{(2)} - \kappa_2\alpha_1^{(2)}}{1-\kappa_2^2} = -0.25 \end{aligned}$$

<u>Τάξη $i = 1$</u>

$$\kappa_1 = -\alpha_1^{(1)} = 0.25$$

Άρα <u>PARCOR</u>= $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$ = (0.25, 0.75, -0.4, -0.6).

1.5

Στο άρθρο [D90](σελ.998, παράρτημα Α), με βάση την ιδιότητα του μετ/σμού Fourier να διατηρεί εσωτερικά γινόμενα, αποδεικνύεται ότι

$$\int\int \langle f_1, \psi^{a,b}\rangle \langle \psi^{a,b}, f_2\rangle db \frac{da}{a^2} = C_\psi \langle f_1, f_2\rangle$$

Θέτοντας $f_1 = f_2 = f$ αποδεικνύεται το (β):

$$\frac{1}{C_\psi}\int\int|\underbrace{\langle f,\psi^{a,b}\rangle}_{\mathcal{W}f(a,b)}|^2 db\frac{da}{a^2} = \frac{1}{C_\psi}\int\int\langle f,\psi^{a,b}\rangle\langle\psi^{a,b},f\rangle db\frac{da}{a^2} = \langle f,f\rangle = \|f\|^2 = \int|f(t)|^2 dt$$

Λόγω της δι-γραμμικότητας και συνέχειας του εσωτερικού γινομένου και της πεπερασμένης ενέργειας όλων των εμπλεκομένων σημάτων, ισχύει ότι

$$\frac{1}{C_\psi}\langle\int\int \mathcal{W}f(a,b)\psi^{a,b}(t)db\frac{da}{a^2}\ ,\ f(t)\rangle = \langle f,f\rangle$$

από το οποίο προκύπτει το (α).

[D90] I. Daubechies, "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis", IEEE Trans. Information Theory, vol.36, Sep. 1990.

2.1

Με χρήση του μετ/σμού Z, το δοθέν σήμα με τρία ημίτονα (τα δύο με αποσβέσεις και χωρίς θόρυβο),

$$x[n] = (A_1(r_1)^n\cos(\omega_1 n) + A_2(r_2)^n\cos(\omega_2 n) + A_3\sin(\omega_3 n))u[n], \quad \omega_1\neq\omega_2\neq\omega_3$$

μπορεί να θεωρηθεί ως η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς

$$X(z) = \frac{A_1 - A_1 r_1\cos(\omega_1)z^{-1}}{1-2r_1\cos(\omega_1)z^{-1}+r_1^2z^{-2}} + \frac{A_2 - A_2 r_2\cos(\omega_2)z^{-1}}{1-2r_2\cos(\omega_2)z^{-1}+r_2^2z^{-2}} + \frac{A_3\sin(\omega_3)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_3)z^{-1}+z^{-2}} = \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}+b_4z^{-4}+b_5z^{-5}}{1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}-a_3z^{-3}-a_4z^{-4}-a_5z^{-5}-a_6z^{-6}}$$

με συντελεστές
$b_0 = A_1 + A_2$
$b_1 = -2A_1r_2\cos(\omega_2)-A_1r_1\cos(\omega_1)-2A_1\cos(\omega_3)-2A_2r_1\cos(\omega_1)-A_2r_2\cos(\omega_2)-2A_2\cos(\omega_3)+ A_3\sin(\omega_3)$
$b_2 = A_1r_2^2 + 2A_1r_1r_2\cos(\omega_1)\cos(\omega_2) + A_1 + 2\cos(\omega_3)(2A_1r_2\cos(\omega_2) + A_1r_1\cos(\omega_1)) + A_2r_1^2 + 2A_2r_2r_1\cos(\omega_1)\cos(\omega_2) + 2\cos(\omega_3)(2A_2r_1\cos(\omega_1) + A_2r_2\cos(\omega_2)) - 2A_3r_2\cos(\omega_2)\sin(\omega_3) - 2A_3\sin(\omega_3)r_1\cos(\omega_1)$
$b_3 = -A_1r_1r_2^2\cos(\omega_1)-2A_1r_2\cos(\omega_2)-A_1r_1\cos(\omega_1)-2\cos(\omega_3)(A_1r_2^2+2A_1r_1r_2\cos(\omega_1)\cos(\omega_2))- A_2r_2r_1^2\cos(\omega_2) - 2A_2r_1\cos(\omega_1) - A_2r_2\cos(\omega_2) - 2\cos(\omega_3)(A_2r_1^2 + 2A_2r_2r_1\cos(\omega_1)\cos(\omega_2)) + A_3\sin(\omega_3)r_2^2 + A_3\sin(\omega_3)r_1^2 + 4A_3\sin(\omega_3)\cos(\omega_1)\cos(\omega_2)r_1r_2$
$b_4 = A_1r_2^2+2A_1r_1r_2\cos(\omega_1)\cos(\omega_2)+2\cos(\omega_3)A_1r_1r_2^2\cos(\omega_1)+A_2r_1^2+2A_2r_2r_1\cos(\omega_1)\cos(\omega_2)+ 2\cos(\omega_3)A_2r_2r_1^2\cos(\omega_2) - 2A_3\sin(\omega_3)r_1\cos(\omega_1)r_2^2 - 2A_3\sin(\omega_3)r_1^2r_2\cos(\omega_2)$
$b_5 = -A_1r_1r_2^2\cos(\omega_1) - A_2r_2r_1^2\cos(\omega_2) + A_3\sin(\omega_3)r_1^2r_2^2$

$a_1 = 2[r_2\cos(\omega_2) + r_1\cos(\omega_1) + \cos(\omega_3)]$
$a_2 = -[r_2^2 + 4r_1r_2\cos(\omega_1)\cos(\omega_2) + r_1^2 + 4r_2\cos(\omega_2)\cos(\omega_3) + 4\cos(\omega_3)r_1\cos(\omega_1) + 1]$
$a_3 = 2[r_1\cos(\omega_1)r_2^2+r_1^2r_2\cos(\omega_2)+r_1\cos(\omega_1)+r_2\cos(\omega_2)+\cos(\omega_3)r_2^2+\cos(\omega_3)r_1^2+4r_1r_2\cos(\omega_1)\cos(\omega_2)\cos$
$a_4 = -[r_1^2r_2^2 + r_2^2 + 4r_1r_2\cos(\omega_1)\cos(\omega_2) + r_1^2 + 4\cos(\omega_3)\cos(\omega_1)r_1r_2^2 + 4\cos(\omega_3)\cos(\omega_2)r_2r_1^2]$
$a_5 = -2[r_1^2r_2\cos(\omega_2) - r_1\cos(\omega_1)r_2^2 - \cos(\omega_3)r_1^2r_2^2]$
$a_6 = -r_1^2r_2^2$

Αυτή η συνάρτηση μεταφοράς συνεπάγεται την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$x[n] - \sum_{k=1}^{6} a_k x[n-k] = \sum_{k=0}^{5} b_k \delta[n-k], \quad n \geq 0,$$

που γίνεται μια εξίσωση τέλειας (με μηδενικό λάθος) γραμμικής πρόβλεψης για $n \geq n_0 = 6$.

2.5

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$x[n]$	0	1	1	1	1	2	4	5	7	9	0	0	0	0
$\tilde{x}[n]$	0	1	2	1	2	1	2	3	4	5	6	5	4	3
$d[n]$	0	0	-1	0	-1	1	2	2	3	4	-6	-5	-4	-3
$\hat{d}[n]$	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$c[n]$	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$\hat{x}[n]$	1	2	1	2	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2

3.1

Στοχαστική ανέλιξη $x[n]$ με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση

$$r_x[k] = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{|k|} + 2\left(\frac{1}{4}\right)^{|k-1|} + 2\left(\frac{1}{4}\right)^{|k+1|}$$

(α) Φάσμα ισχύος ως συνάρτηση της μιγαδικής συχνότητας z: Με χρήση του μετ/σμού Z αποδεικνύεται ότι,

$$\alpha^{|n|} \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}, \quad |\alpha| < |z| < 1/|\alpha|$$

Εφαρμόζοντας αυτό το αποτέλεσμα στην ακολουθία αυτοσυσχέτισης προκύπτει ότι

$$P_x(z) = \frac{15}{16} \cdot \frac{5 + 2z + 2z^{-1}}{(1 - z/4)(1 - z^{-1}/4)} = \frac{15}{16} \cdot \frac{(1+2z)(1+2z^{-1})}{(1 - z/4)(1 - z^{-1}/4)}$$

(β) Φάσμα ισχύος ως *πραγματική* συνάρτηση της συχνότητας ω: Με χρήση του μετ/σμού DTFT,

$$P_x(e^{j\omega}) = 15 \cdot \frac{5 + 4\cos(\omega)}{17 - 8\cos(\omega)}$$

(γ) Με φασματική παραγοντοποίηση,

$$P_x(z) = \sigma_o^2 \frac{B(z)}{A(z)} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_o^2 & = & 15/16 \\ A(z) & = & 1 - (1/4)z^{-1} \\ B(z) & = & 1 + 2z \end{array} \right.$$

$$P_x(z) = H(z)H(z^{-1}), \quad H(z) = \sigma_o \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{1+2z}{1 - z^{-1}/4} = z\frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}/2}{1 - z^{-1}/4} = zG(z),$$

Το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(z)$ είναι αιτιατό και ευσταθές. Αν η είσοδος του είναι λευκός θόρυβος $v[n]$ μοναδιαίας μεταβλητότητας, η έξοδος θα είναι μια στοχαστική ανέλιξη με τη δεδομένη αυτοσυσχέτιση $r_x[k]$. Σημείωση: Το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(z)$ σε σχέση με την $H(z)$ εισάγει μία καθυστέρηση αλλά δεν αλλάζει το φάσμα ισχύος της εξόδου.

3.2

(α) Από την ανάλυση στην ενότητα 3.6.2 του [1], αποδεικνύεται ότι η αυτοσυσχέτιση του $d[n]$ ισούται με:

$$r_d[k] = \frac{1}{1-(0.75)^2}(0.75)^{|k|} = \frac{16}{7}(0.75)^{|k|}$$

(β) FIR-2 Wiener denoising: Η κρουστική απόκριση του φίλτρου με συνάρτηση μεταφοράς $W(z) = w[0] + w[1]z^{-1}$ είναι

$$w[n] = w[0]\delta[n] + w[1]\delta[n-1]$$

Οι βέλτιστοι συντελεστές προκύπτουν λύνοντας το σύστημα των Wiener-Hopf εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] \\ r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}[0] \\ r_{dx}[1] \end{bmatrix}$$

Χρειαζόμαστε πρώτα τον υπολογισμό των συσχετίσεων $r_x[k]$ και $r_{dx}[k]$. Επειδή τα $d[n]$ και $v[n]$ είναι ασυσχέτιστα,

$$r_{dx}[k] = r_d[k], \quad r_x[k] = r_d[k] + r_v[k] = r_d[k] + \delta[k] \quad (*)$$

Επομένως το 2×2 σύστημα εξισώσεων και η λύση του είναι:

$$\begin{bmatrix} 3.2857 & 1.7143 \\ 1.7143 & 3.2857 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2857 \\ 1.7143 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5818 \\ 0.2182 \end{bmatrix}$$

Το μέσο τετραγωνικό λάθος του FIR-2 Wiener φίλτρου ισούται με

$$\xi_{fir2} = r_d[0] - \sum_{k=0}^{1} w[k] r_d[k] = 0.5818.$$

(γ) FIR-3 Wiener: Η κρουστική απόκριση του FIR Wiener φίλτρου με συνάρτηση μεταφοράς $W(z) = w[0] + w[1]z^{-1} + w[2]z^{-2}$ είναι

$$w[n] = w[0]\delta[n] + w[1]\delta[n-1] + w[2]\delta[n-2]$$

Οι βέλτιστοι συντελεστές προκύπτουν λύνοντας τις Wiener-Hopf εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] & r_x[2] \\ r_x[1] & r_x[0] & r_x[1] \\ r_x[2] & r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}[0] \\ r_{dx}[1] \\ r_{dx}[2] \end{bmatrix}$$

Από (*) προκύπτουν οι απαραίτητες συσχετίσεις $r_x[k]$ και $r_{dx}[k]$. Η λύση του ανωτέρω 3×3 συστήματος εξισώσεων είναι :

$$(w[0], w[1], w[2]) = (0.5703, 0.1875, 0.0703)$$

Το μέσο τετραγωνικό λάθος του FIR-3 Wiener φίλτρου ισούται με

$$\xi_{fir3} = r_d[0] - \sum_{k=0}^{2} w[k] r_d[k] = 0.5703.$$

(δ) IIR non-causal Wiener: Για την κρουστική απόκριση $h_{nc}[n]$ και συνάρτηση μεταφοράς $H_{nc}(z)$ του IIR non-causal Wiener φίλτρου ισχύουν

$$h[k] * r_x[k] = r_{dx}[k], \quad H_{nc}(z) = \frac{P_{dx}(z)}{P_x(z)}$$

Επομένως, επειδή τα $d[n]$ και $v[n]$ είναι ασυσχέτιστα και άρα

$$P_{dx}(z) = P_d(z), \quad P_x(z) = P_d(z) + P_v(z),$$

και επειδή το φάσμα ισχύος του $d[n]$ ισούται με

$$r_d[k] = \frac{16}{7}(0.75)^{|k|} \overset{Z}{\longleftrightarrow} P_d(z) = \frac{1}{(1-0.75z^{-1})(1-0.75z)}, \quad 3/4 < |z| < 4/3,$$

η συνάρτηση μεταφοράς προκύπτει

$$H_{nc}(z) = \frac{P_{dx}(z)}{P_x(z)} = \frac{P_d(z)}{P_d(z)+P_v(z)} = \frac{1}{2.5625 - 0.75(z+z^{-1})} = \frac{16}{41 - 12(z+z^{-1})}$$

Παραγοντοποιώντας κατάλληλα το $2.5625 - 0.75(z+z^{-1})$ προκύπτει ότι

$$H_{nc}(z) = \frac{1}{2.3198(1-0.3233z^{-1})(1-0.3233z)}$$

και με αντίστροφο Z μετ/σμό βρίσκουμε την κρουστική απόκριση $h_{nc}[n] = 0.4813(0.3233)^{|n|}$. Επαναλαμβάνοντας την ανάλυση στην ενότητα 7.3.1 του [1] αποδεικνύεται ότι, το μέσο τετραγωνικό λάθος (εκφράζοντας το στο πεδίο χρόνου και συχνότητας) ισούται με

$$\xi_{iir,nc} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_v(e^{j\omega})H_{nc}(e^{j\omega})d\omega = \frac{\sigma_v^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{nc}(e^{j\omega})d\omega = \sigma_v^2 h_{nc}[0] = 0.4813.$$

Προφανώς ισχύει ότι

$$\xi_{iir,nc} < \xi_{fir3} < \xi_{fir2}$$

-----

[1] M. H. Hayes, Statistical Digital Processing and Modeling, Wiley, 1996.

3.3

(α) Η προσέγγιση αντιστοιχεί σε PCA τάξης $p = 1$.
$\boldsymbol{R}_x = \frac{1}{N}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^T$, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_d)$, όπου ο ορθογώνιος πίνακας $\boldsymbol{V}$ έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{v}_k$, $k = 1, ..., d$, με ιδιοτιμές λ_k. Από SVD, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T$ και $\boldsymbol{R}_x = \boldsymbol{V}\frac{\boldsymbol{\Sigma}^2}{N}\boldsymbol{V}^T$, όπου $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, ..., \sigma_r)$ και $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r$. Αρα οι ιδιοκατευθύνσεις είναι τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{v}_k$, και οι ιδιοτιμές $\lambda_k = \sigma_k^2/N$. Η k στήλη του $\boldsymbol{X}\boldsymbol{V}$ είναι η k-th principal component (PC), δηλ. το διάνυσμα προβολών $\boldsymbol{x}_n^T\boldsymbol{v}_k$ των δεδομένων στην k ιδιοκατεύθυνση. Επειδή μειώνομε την διάσταση των δεδομένων σε $p = 1$ κύρια συνιστώσα, αυτό αντιστοιχεί στην επιλογή $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{v}_1$ και επομένως $[a_1, a_2, ..., a_N]^T = \boldsymbol{X}\boldsymbol{v}_1$.
(β) Εφαρμόζοντας τα ανωτέρω στα αριθμητικά δεδομένα $\boldsymbol{x}_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ προκύπτουν

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} -0.4347 \\ 0.0265 \\ -0.9002 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.0354 \\ 0.4125 \\ 0.9267 \\ 2.2043 \\ 0.4919 \end{bmatrix}$$

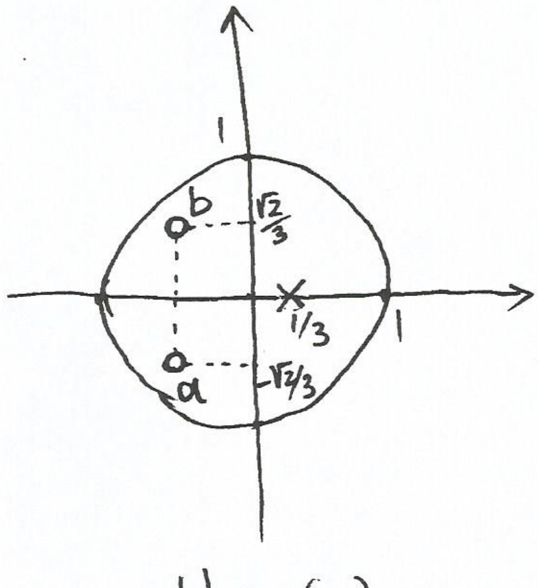
2.2

α)

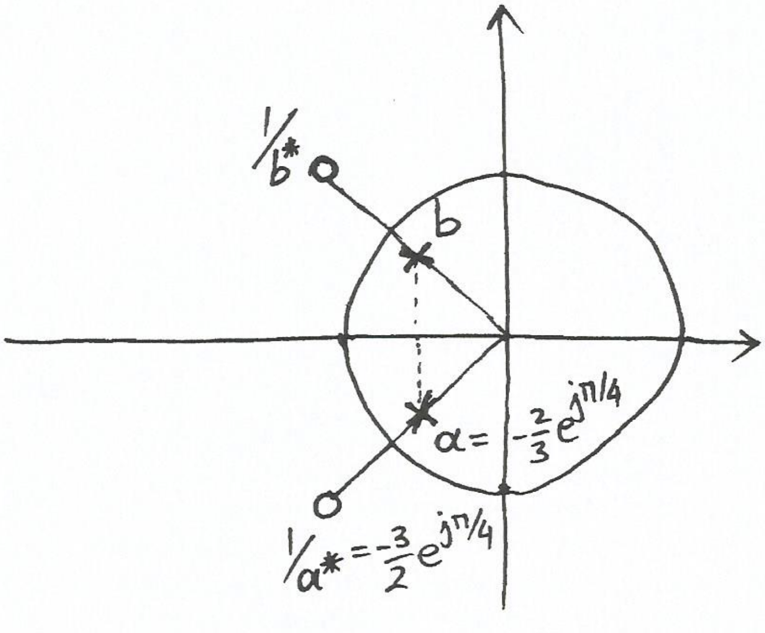
$$H(z)=\frac{1+\frac{3\sqrt{2}}{2}z^{-1}+\frac{9}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{9}{4}\cdot\frac{\left(z^{-1}+\frac{2}{3}e^{-j\pi/4}\right)\left(z^{-1}+\frac{2}{3}e^{+j\pi/4}\right)}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$H(z)=\underbrace{\left[\frac{9}{4}\,\frac{\left(1+\frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{2}{3}e^{+j\pi/4}z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right]}_{H_{MIN}(z)}\cdot\underbrace{\left[\frac{\left(z^{-1}+\frac{2}{3}e^{-j\pi/4}\right)\left(z^{-1}+\frac{2}{3}e^{+j\pi/4}\right)}{\left(1+\underbrace{\frac{2}{3}e^{-j\pi/4}}_{=-b}z^{-1}\right)\left(1+\underbrace{\frac{2}{3}e^{+j\pi/4}}_{=-a}z^{-1}\right)}\right]}_{H_{ap}(z)}$$

β) Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



$H_{MIN}(z)$



$H_{ap}(z)$

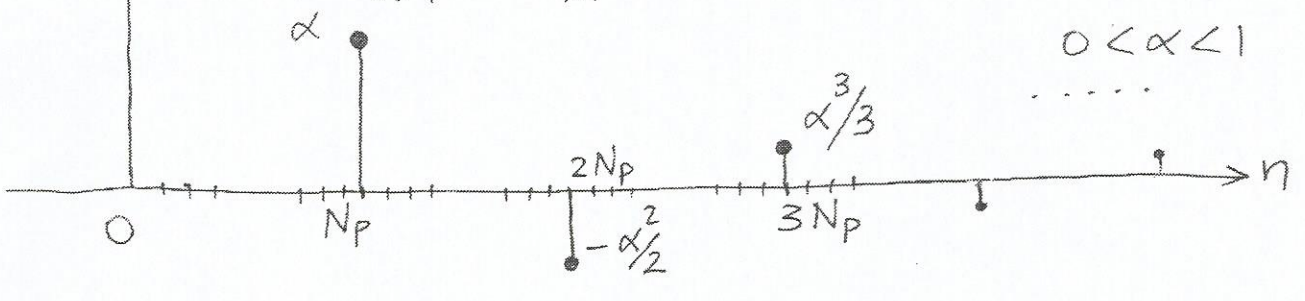
Περιοχή Σύγκλισης : $|z|>1/3$

$|z|>|a|=|b|=\frac{2}{3}$

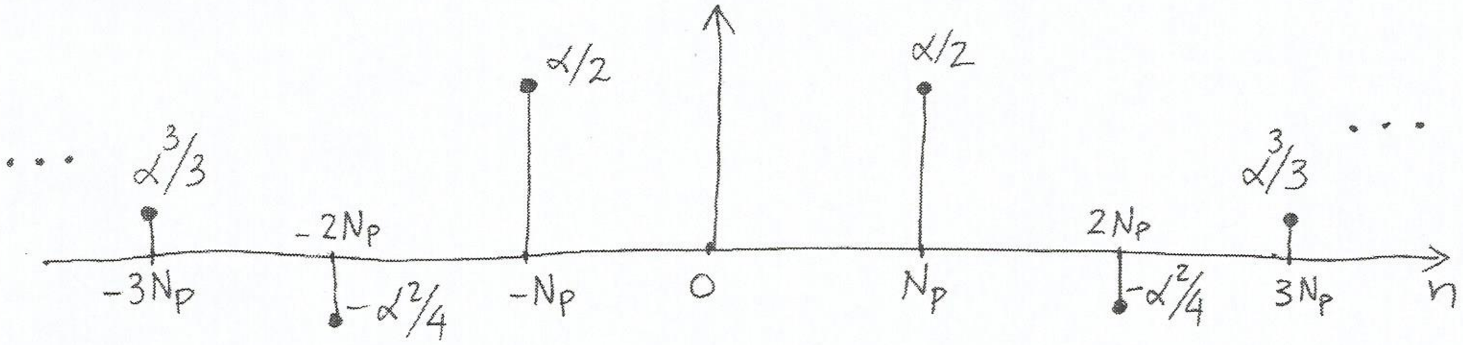
2.4 (a) $x[n] = \delta[n] + \alpha\,\delta[n-N_p]$, $\quad |\alpha| < 1$.

$$X(z) = 1 + \alpha z^{-N_p} \rightsquigarrow \hat{X}(z) = \log X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\alpha^n}{n} z^{-nN_p}.$$

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\alpha^m}{m} \delta[n - mN_p]$$



(b) $c[n] = (\hat{x}[n] + \hat{x}[-n])/2$



(c) $\hat{x}_p[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n + rN]$: Περιοδική επανάληψη με περίοδο$=N$ και υπέρθεση όλων των επαναλήψεων. Αυτό θα δημιουργήσει aliasing στον χρόνο.

Αν $N_p | N$, τότε το $\hat{x}_p[n]$ θα έχει μη-μηδενικές τιμές μόνο σε ακέραια πολλαπλάσια του N_p. Αυτό δεν θα ισχύει αν $N_p \nmid N$.

(d) $\hat{c}_p[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{c}[n + rN]$

(e) $N > 2 \cdot N_p$