2.1

(α) Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int_{nT-T}^{nT} \dot{y}_c(\tau)d\tau + y_c(nT-T) = y_c(\tau)|_{nT-T}^{nT} + y_c(nT-T) = y_c(nT)$$

Χρησιμοποιούμε το εμβαδό της τραπεζοειδούς περιοχής για να αντικαταστήσουμε το ανωτέρω ολοκλήρωμα, και παίρνουμε

$$\begin{aligned} y_c(nT) &= \int_{nT-T}^{nT} \dot{y}_c(\tau)d\tau + y_c(nT-T) \\ &\simeq [\dot{y}_c(nT) + \dot{y}_c(nT-T)]\frac{T}{2} + y_c(nT-T) \end{aligned}$$

(β) Λύνοντας τη διαφορική εξίσωση ως προς $\dot{y}_c(nT)$, παίρνουμε

$$\dot{y}_c(nT) = Ax_c(nT) - cy_c(nT)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην απάντηση του ερωτήματος (α) έχουμε

$$y_c(nT) = [Ax_c(nT) - cy_c(nT) + Ax_c(nT-T) - cy_c(nT-T)]\frac{T}{2} + y_c(nT-T)$$

(γ) Η εξίσωση διαφορών είναι

$$y[n] = (Ax[n] - cy[n] + Ax[n-1] - cy[n-1])\frac{T}{2} + y[n-1]$$

$$y[n](1 + c\frac{T}{2}) - y[n-1](1 - c\frac{T}{2}) = A\frac{T}{2}(x[n] + x[n-1])$$

Άρα,

$$\begin{aligned} Y(z)[1 + c\frac{T}{2}] - Y(z)z^{-1}[1 - c\frac{T}{2}] &= A\frac{T}{2}X(z)[1 + z^{-1}] \\ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{A\frac{T}{2}(1 + z^{-1})}{1 + c\frac{T}{2} - z^{-1} + z^{-1}c\frac{T}{2}} \end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned} H_c(s)|_{s=\frac{2}{T}[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}]} &= \frac{A}{s+c}|_{s=\frac{2}{T}[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}]} \\ &= \frac{\frac{T}{2}A(1 + z^{-1})}{1 - z^{-1} + c\frac{T}{2}(1 + z^{-1})} \\ &= H(z) \end{aligned}$$

2.2

$$H(z) = \frac{G}{\underbrace{1-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k z^{-k}}_{=A(z)}} = \frac{G}{A(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \quad (1)$$

Υποθέτομε: 1) Το LPC φίλτρο είναι αιτιατό $\Leftrightarrow h(n)=0 \ \forall n<0$

2) Το LPC φίλτρο H είναι ευσταθές $\Rightarrow$ H είναι MIN-PHASE

$\Rightarrow \hat{h}(n)=0 \ \forall n<0$

$$\hat{H}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{h}(n) z^{-n} = \log H(z) = \log G - \log A(z) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{H}(z)}{dz} = \frac{-dA(z)/dz}{A(z)} \Rightarrow \left(-z\frac{d\hat{H}(z)}{dz}\right) A(z) = z\frac{dA(z)}{dz} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{matrix}\text{Αντίστροφος} \\ \text{Z μετ/σμός}\end{matrix}\right) \quad [n\hat{h}(n)] * a(n) = -n a(n) \quad (4)$$

όπου
$$a(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ -\alpha_n, & n=1,2,\dots,P \\ 0, & n<0,\ n>P. \end{cases}$$

$$(4) \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{n} k\hat{h}(k) a(n-k) = -n\,a(n), \quad n \geq 0$$

$$\rightsquigarrow n\hat{h}(n) - \sum_{k=1}^{n-1} k\hat{h}(k)\alpha_{n-k} = n\alpha_n, \quad n\geq 1$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \alpha_n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\hat{h}(k)\alpha_{n-k}, \quad n\geq 1 \\ &= \alpha_n + \sum_{m=1}^{n-1}\alpha_m\left(\frac{n-m}{n}\right)\hat{h}(n-m), \quad n\geq 1 \\ &= \alpha_n + \sum_{m=1}^{\min(P,n-1)}\alpha_m\left(\frac{n-m}{n}\right)\hat{h}(n-m), \quad n\geq 1. \end{aligned}}$$

Σημείωση: $\hat{h}(0) = \log G = \log h(0)$.

2.3 Συντελεστές Ανάκλασης:

Από Levinson-Durbin:

$$K_{i,LR} = -\frac{r(i) - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j^{(i-1)} r(i-j)}{E_{min}^{(i-1)}} \qquad (1)$$

Από Lattice:

$$K_{i,IS} = -\frac{\sum_m e^{(i-1)}[m]\, b^{(i-1)}[m-1]}{\left(\sum_m \left(e^{(i-1)}[m]\right)^2 \cdot \sum_m \left(b^{(i-1)}[m-1]\right)^2 \right)^{1/2}} \qquad (2)$$

(Itakura-Saito)

όπου

$$\left.\begin{aligned} e^{(i)}[m] &= s[m] - \sum_{j=1}^{i} \alpha_j^{(i)} s[m-j] \\ b^{(i)}[m] &= s[m-i] - \sum_{\ell=1}^{i} \alpha_\ell^{(i)} s[m-i+\ell] \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (3) στην (2), προκύπτει:

$$\sum_m e^{(i-1)}[m]\, b^{(i-1)}[m-1] = \underbrace{\sum_m s(m)s(m-i)}_{=r(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j^{(i-1)} \underbrace{\sum_m s(m-j)s(m-i)}_{=r(i-j)}$$

$$- \sum_{\ell=1}^{i-1} \alpha_\ell^{(i-1)} \underbrace{\sum_m s(m+\ell-i)s(m)}_{=r(i-\ell)}$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{i-1} \alpha_\ell^{(i-1)} \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j^{(i-1)} \underbrace{\sum_m s(m-j)s(m+\ell-i)}_{=r(i-\ell-j)}$$

$$\rightsquigarrow \sum_m e^{(i-1)}[m]\, b^{(i-1)}[m-1] = r(i) - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j^{(i-1)} r(i-j)$$

$$- \sum_{\ell=1}^{i-1} \alpha_\ell^{(i-1)} r(i-\ell) + \sum_{\ell=1}^{i-1} \alpha_\ell^{(i-1)} \underbrace{\boxed{\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j^{(i-1)} r(i-\ell-j)}}_{= r(i-\ell)}$$

{Απο Κανονικές Εξισώσεις Γραμ. Πρόβλεψης}

$$\rightsquigarrow \sum_m e^{(i-1)}[m]\, b^{(i-1)}[m-1] = r(i) - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j^{(i-1)} r(i-j) \qquad (4)$$

Επίσης

$$\sum_m \left(e^{(i-1)}[m]\right)^2 = \sum_m (s[m])^2 - 2\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j^{(i-1)} \underbrace{\sum_m s(m)s(m-j)}_{= r(j)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{\ell=1}^{i-1} \alpha_j^{(i-1)} \alpha_\ell^{(i-1)} \underbrace{\sum_m s(m-j)s(m-\ell)}_{= r(j-\ell)}$$

Απο την εξίσωση που δίνει την ελάχιστη ενέργεια λάθους πρόβλεψης

$$= r(0) - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j^{(i-1)} r(j) = E_{min}^{(i-1)} \qquad (5)$$

Παρόμοια, αποδεικνύεται ότι:

$$\sum_m \left(b^{(i-1)}[m-1]\right)^2 = E_{min}^{(i-1)} \qquad (6)$$

Από (4), (5) και (6) $\rightsquigarrow$ $\underline{\underline{k_{i,IS} = k_{i,LR}}} \quad \forall i.$

Σημείωση: Στις ανωτέρω αποδείξεις υποθέτομε ότι το παράθυρο άθροισης χρονικών δειγμάτων είναι:

$$\sum_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty}$$

Βέβαια το σήμα s[m] είναι ένα παραθυρωμένο τμήμα.

Λήμμα 1: $R^{(p)} \underline{\alpha}^{(p)} = \underline{r}^{(p)}$ $\Updownarrow$

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j^{(p)} r(p+1-\ell-j) = r(p+1-\ell)$$

$$\ell = 1, 2, \ldots, p.$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{r}^{(p)} = [r(1), \ldots, r(p)]^T \\ &R^{(p)} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(p-1) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(p-2) \\ \vdots & & & \\ r(p-1) & \cdots & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \\ &\underline{\alpha}^{(p)} = [\alpha_1^{(p)}, \ldots, \alpha_p^{(p)}]^T \end{aligned}}$$

Λήμμα 2:

$$\sum_m \left(e^{(i-1)}_{[m]}\right)^2 = \sum_m s^2[m] - 2\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j^{(i-1)} \sum_m s(m)s(m-j)$$

$$+ \sum_j \sum_\ell \alpha_j \alpha_\ell \sum_m s(m-j)s(m-\ell)$$

$$= r(0) - 2\left(\underline{\alpha}^{(i-1)}\right)^T \underline{r}^{(i-1)} + \left(\underline{\alpha}^{(i-1)}\right)^T R^{(i-1)} \underline{\alpha}^{(i-1)}.$$

$$= r(0) - \langle \underline{\alpha}^{(i-1)}, \underline{r}^{(i-1)} \rangle = E^{(i-1)}_{min}$$

Λήμμα 3:

$$\sum_m \left(b^{(i-1)}_{[m-1]}\right)^2 = \sum_m s^2[m-i] - 2\sum_\ell \alpha_\ell \sum_m s[m-i]s[m-i+\ell]$$

$$+ \sum_j \sum_\ell \alpha_j \alpha_\ell \sum_m s[m-i+j]s[m-i+\ell]$$

$$= r(0) - 2\left(\underline{\alpha}^{(i-1)}\right)^T \underline{r}^{(i-1)} + \left(\underline{\alpha}^{(i-1)}\right)^T R^{(i-1)} \underline{\alpha}^{(i-1)}$$

$$= r(0) - \langle \underline{\alpha}^{(i-1)}, \underline{r}^{(i-1)} \rangle = E^{(i-1)}_{min}.$$

2.4

(α) $r_x[0]=2$, $r_x[1]=0.75$, $r_x[2]=0.5625$, $r_x[3]=0.4219$

Η ανωτέρα ακολουθία αυτοσυσχέτισης είναι θετικά ορισμένη εάνν $\Longleftrightarrow$
Ο Πίνακας Αυτοσυσχέτισης

$$\mathbf{R_x} = \begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] & r_x[2] & r_x[3] \\ r_x[1] & r_x[0] & r_x[1] & r_x[2] \\ r_x[2] & r_x[1] & r_x[0] & r_x[1] \\ r_x[3] & r_x[2] & r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0.75 & 0.5625 & 0.4219 \\ 0.75 & 2 & 0.75 & 0.5625 \\ 0.5625 & 0.75 & 2 & 0.75 \\ 0.4219 & 0.5625 & 0.75 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος. Θα πρέπει όλες οι 4 κύριες υποορίζουσες να είναι θετικές. Πράγματι

$$\Delta_1 = det[2] = 2 > 0 \qquad \Delta_2 = det\begin{bmatrix} 2 & 0.75 \\ 0.75 & 2 \end{bmatrix} = 3.4375 > 0$$

$$\Delta_3 = det\begin{bmatrix} 2 & 0.75 & 0.5625 \\ 0.75 & 2 & 0.75 \\ 0.5625 & 0.75 & 2 \end{bmatrix} = 5.75 > 0 \quad \Delta_4 = det(\mathbf{R_x}) = 9.56 > 0$$

(β) Levinson-Durbin: $E^{(0)} = r_x[0] = 2$

<u>Τάξη $i=1$</u>

$$\kappa_1 = \frac{-r_x[1]}{E^{(0)}} = \frac{-0.75}{2} = -0.375, \quad \alpha_1^{(1)} = -\kappa_1 = 0.375, \quad E^{(1)} = (1-\kappa_1^2)E^{(0)} = 1.7188$$

<u>Τάξη $i=2$</u>

$$\begin{aligned} \kappa_2 = -(r_x(2) - \alpha_1^{(1)} r_x[1])/E^{(1)} &= -0.1636 \\ \alpha_2^{(2)} = -\kappa_2 &= 0.1636 \\ \alpha_1^{(2)} = \alpha_1^{(1)} + \kappa_2\alpha_1^{(1)} &= 0.3136 \\ E^{(2)} = (1-\kappa_2^2)E^{(1)} &= 1.6728 \end{aligned}$$

<u>Τάξη $i=3=p$</u>

$$\begin{aligned} \kappa_3 = -\left(r_x[3] - (\alpha_1^{(2)} r_x[2] + \alpha_2^{(2)} r_x[1])\right)/E^{(2)} &= -0.0734 \\ \alpha_3^{(3)} = -\kappa_3 = 0.0734, \alpha_2^{(3)} = \alpha_2^{(2)} + \kappa_3\alpha_1^{(2)} &= 0.1406 \\ \alpha_1^{(3)} = \alpha_1^{(2)} + \kappa_3\alpha_2^{(2)} &= 0.3016 \end{aligned}$$

Άρα <u>LPC</u> $= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.3016, 0.1406, 0.0734)$
και <u>$PARCOR$</u> $= (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (-0.375, -0.1636, -0.0734)$