3.1:

Άσκηση 3.1: Έχουμε ότι:

$$H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+4z^{-2})}{(1-0.64z^{-2})} \Rightarrow H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}$$

(α) Ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει όλους τους πόλους και τα μηδενικά του μέσα στον μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$. Ένα σύστημα all-pass έχει όλους τους πόλους και τα μηδενικά σε ζεύγη αντίστροφων συζυγών θέσεων. Άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$H_1(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-2})}{(1-0.64z^{-2})}$$

και

$$H_{ap}(z) = \frac{(1+4z^{-2})}{(1+\frac{1}{4}z^{-2})}$$

(β) Ένα FIR σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης έχει πόλους και μηδενικά στις θέσεις $z = 1, -1, 0, \infty$ ή σε αντίστροφα συζυγή ζεύγη. Μπορούμε να γράψουμε:

$$H_2(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})}{(1-0.64z^{-2})(1+\frac{1}{4}z^{-2})}$$

και

$$H_{\text{lin}}(z) = (1+\frac{1}{4}z^{-2})(1+4z^{-2})$$

(3.2) $x[n] = A(\cos\omega_0 n+\phi)+w[n]$

Υποθέτομε ότι ο θόρυβος $w[n]$ είναι ασυσχέτιστος με τις τυχαίες παραμέτρους (A ή ϕ) του σήματος.

(α) $A \sim \mathcal{N}(0, \sigma_A^2)$, ω_0 & ϕ σταθερές

$$x[k]\,x[\ell] = \big(A\cos(\omega_0 k+\phi)+w[k]\big)\big(A\cos(\omega_0\ell+\phi)+w[\ell]\big)$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos[\omega_0(k+\ell)+2\phi] + \frac{A^2}{2}\cos[\omega_0(k-\ell)] + w[k]\cdot w[\ell]$$

$$+ A\cos(\omega_0 k+\phi)\,w[\ell] + A\cos(\omega_0\ell+\phi)\,w[k] \qquad (1)$$

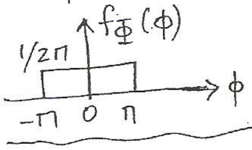
$$E\{(1)\} \leadsto r_x[k,\ell] = \frac{E\{A^2\}}{2}\Big(\cos[\omega_0(k+\ell)+2\phi] + \cos[\omega_0(k-\ell)]\Big)$$

$$+ E\{w[k]w[\ell]\} + \cancel{E\{A\}E\{w[\ell]\}}^{\,0}\cos(\omega_0 k+\phi)$$

$$+ \cancel{E\{A\}E\{w[k]\}}^{\,0}\cos(\omega_0\ell+\phi)$$

$$\leadsto r_x[k,\ell] = \frac{\sigma_A^2}{2}\Big(\cos[\omega_0(k+\ell)+2\phi] + \cos[\omega_0(k-\ell)]\Big) + \sigma_w^2\,\delta[k-\ell].$$

Επομένως η $x[n]$ ΔΕΝ είναι WSS.

(β) 

, $A, \omega_0 =$ σταθερές:

$$E\{(1)\} \leadsto r_x[k,\ell] = \frac{A^2}{2}\cos[\omega_0(k-\ell)] + \sigma_w^2\,\delta[k-\ell]$$

$$+ \frac{A^2}{2}\underbrace{\cancel{E\{\cos[\omega_0(k+\ell)+2\phi]\}}^{\,0}}_{=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[\omega_0(k+\ell)+2\phi]\,d\phi}$$

$\therefore$ $x[n]$ είναι WSS.

Φάσμα Ισχύος: $P_x(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}\{r_x[k]\} = \sigma_w^2 + \frac{\pi A^2}{2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi r)$

3.3

$$y[n] = y[n-1] - \tfrac{1}{2}y[n-2] + w[n]$$

$$w[n] \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow y[n] \qquad H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

(α) Πόλοι της $H(z)$: $p_{1,2} = \dfrac{1 \pm j}{2} = re^{\pm j\omega_p}$, $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\omega_p = \dfrac{\pi}{4}$

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r\cos(\omega_p)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \boxed{h[n] = r^n \frac{\sin(\omega_p(n+1))}{\sin(\omega_p)} u[n]}$$

(β) $$P_y(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \cdot P_w(e^{j\omega}) = \frac{1}{|1 - e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega}|^2} \cdot 1$$

$$\rightsquigarrow \quad P_y(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1 - \cos\omega + \frac{\cos 2\omega}{2}\right)^2 + \left(\sin\omega - \frac{\sin 2\omega}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\left[\left(\frac{3}{4} - \cos\omega\right)^2 + \frac{1}{16}\right]}$$

(γ) $$P_y(z) = \sigma_w^2 H(z) H^*(1/z^*) \underset{\uparrow}{=} H(z)H(z^{-1})$$

$h[n] \in \mathbb{R} \;\; \forall n.$

$$r_y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{P_y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2})(1 - z + \frac{1}{2}z^2)}\right\}$$

3.4

$$\alpha^{|n|} \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1-\alpha^{2}}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}, \quad |\alpha|<|z|<\frac{1}{|\alpha|}$$

Αυτοσυσχέτιση ⟶ Φάσμα Ισχύος ⟶ Φασματική Παραγοντοποίηση

$$r_x[k] = 5\left(\tfrac{1}{3}\right)^{|k|} + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^{|k-1|} + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^{|k+1|}$$

$$\downarrow \mathcal{Z}$$

$$P_x(z) = \frac{8/9}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-3z)}\left[5+2z^{-1}+2z\right] = \frac{8}{9}\cdot\frac{(1+2z)(1+2z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)}$$

$$= \sigma_0^{2}\,\frac{B(z)}{A(z)}\cdot\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \quad \boxed{\sigma_0^{2}=\frac{8}{9},\ A(z)=1-\frac{1}{3}z^{-1},\ B(z)=1+2z}$$

(α) $v[n] \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow x[n]$

Λευκός Θόρυβος $\sigma_v^2 = 1$

$$P_x(z) = H(z)H(z^{-1})$$

$$\boxed{H(z) = \sigma_0\cdot\frac{A(z)}{B(z)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1+2z}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = z\,\underbrace{\frac{4\sqrt{2}}{3}\,\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}_{=G(z)\ :\ \text{ΑΙΤΙΑΤΟ}}}$$

(β) $x[n] \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{H(z)}} \longrightarrow v[n] =$ λευκός θόρυβος

$$P_v(z) = 1$$

$H(z)$ είναι ελάχιστης φάσης

⇝ $1/H(z)$ είναι ευσταθές.

Εισάγοντας μια καθυστέρηση δεν αλλάζει το φάσμα ισχύος της εξόδου. Οπότε μπορούμε ισοδύναμα να επιλέξομε το

$$x[n] \longrightarrow \overset{\text{ΑΙΤΙΑΤΟ}}{\boxed{1/G(z)}} \longrightarrow w[n]=v[n+1], \quad \boxed{\frac{1}{G(z)} = \frac{z}{H(z)} = \frac{3}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}}$$

3.5:

Υποθέτομε ότι $A = N_0 = 1$ και $\delta = \pi/4$.
(a) Το IIR Wiener φίλτρο έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \frac{P_{dx}(e^{j\omega})}{P_x(e^{j\omega})} = \frac{P_d(e^{j\omega})}{P_x(e^{j\omega}) + P_v(e^{j\omega})} = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/4 \\ 1/2, & \pi/4 < |\omega| \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

(b) Αν $\hat{d}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$ είναι η έξοδος του Wiener φίλτρου, το μέσο τετραγωνικό λάθος προκύπτει (εκφράζοντας το στο πεδίο συχνότητας)

$$\xi_{min,IIR} = E\{(d[n] - \hat{d}[n])^2\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_v(e^{j\omega})H(e^{j\omega})d\omega = \frac{2}{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2}d\omega = \frac{1}{8}$$

Αν δεν υπάρχει φίλτρο, δηλ. $h[n] = \delta[n]$, τότε το λάθος είναι μεγαλύτερο:

$$\xi_{min,Nofilter} = E\{(v[n])^2\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_v(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{4}$$

(c) Για τον σχεδιασμό του FIR Wiener $W(z) = w[0] + w[1]z^{-1} + w[2]z^{-2}$ χρειαζόμαστε τον υπολογισμό των συσχετίσεων

$$r_x[k] = r_d[k] + r_v[k], \quad r_{dx}[k] = r_d[k]$$

Με αντίστροφο DTFT στα φάσματα ισχύος του καθαρού σήματος και του θορύβου προκύπτει

$$r_d[k] = \frac{\sin(k\pi/2)}{\pi k}, \quad r_v[k] = \frac{\sin(k\pi/2) - \sin(k\pi/4)}{\pi k}$$

Οι βέλτιστοι συντελεστές $w[k]$ προκύπτουν λύνοντας το 3×3 γραμμικό σύστημα των Wiener-Hopf εξισώσεων σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] & r_x[2] \\ r_x[1] & r_x[0] & r_x[0] \\ r_x[2] & r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d[0] \\ r_d[1] \\ r_d[2] \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8162 \\ -0.1695 \\ 0.2662 \end{bmatrix}$$

Το μέσο τετραγωνικό λάθος του FIR Wiener φίλτρου ισούται με

$$\xi_{min,FIR} = r_d[0] - \sum_{k=0}^{2} w[k]r_d[k] = 0.1459$$

Προφανώς ισχύει ότι

$$\xi_{min,IIR} < \xi_{min,FIR} < \xi_{min,Nofilter}$$