

Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός βιβλίου για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Παραδίδονται γραπτώς και προσωπικώς στην Γραμματεία Εργ. Ρομποτικής (Αιθ. 2.1.12, παλαιό Κτ.Ηλεκτρ.) 9.00-14.00.

Ασκηση 1.1: Εστω τα πεπερασμένα σήματα διακριτού χρόνου

$$\begin{aligned}x[n] &= 2\delta[n] - 2\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 2\delta[n-3] - 6\delta[n-4] + 2\delta[n-5] - 4\delta[n-7], \\h[n] &= \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2].\end{aligned}$$

(α) Αν $X[k], H[k]$ είναι οι 8-σημείων DFT των σημάτων $x[n], h[n]$ και $Y[k] = X[k]H[k]$, να βρείτε τις τιμές του σήματος $y[n]$ που προκύπτει με ένα 8-σημείων αντίστροφο DFT του $Y[k]$. Εξηγήστε.

(β) Να σχεδιάσετε τα σήματα $x[n], h[n]$ και $y[n]$.

(γ) Αν επαναλάβετε το (α) με DFT N σημείων, να βρείτε την τιμή του N ώστε $y[n] = x[n] * h[n]$ για $n = 0, 1, \dots, N-1$. Εξηγήστε.

(δ) Με βάση τον μετασχηματισμό $X[k]$, ορίζουμε τις ακολουθίες

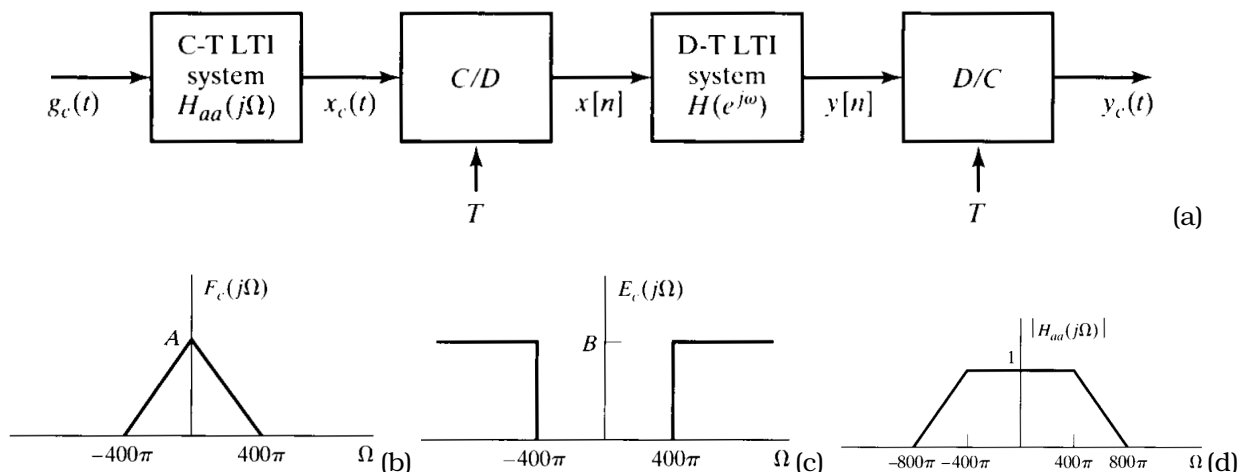
$$\begin{aligned}P[k] &= (-1)^k X[2k], \quad k = 0, \dots, 3. \\Q[k] &= j^{k+1} \text{Im}\{X[k]\}, \quad k = 0, \dots, 7.\end{aligned}$$

ως τους DFT των σημάτων $p[n]$ και $q[n]$, αντίστοιχα.

(δ.1) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες του DFT, να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $p[n]$. Εξηγήστε.

(δ.2) Να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $q[n]$. Εξηγήστε.

Ασκηση 1.2: Θεωρείστε το σύστημα του Σχ. 1(a) για ψηφιακή επεξεργασία ενός σήματος $g_c(t)$ συνεχούς χρόνου. Το σήμα εισόδου είναι $g_c(t) = f_c(t) + e_c(t)$, όπου οι Fourier μετασχηματισμοί των σημάτων $f_c(t), e_c(t)$ απεικονίζονται στο Σχ.1(b),(c). Επειδή το σήμα εισόδου δεν είναι ζωνοπεριορισμένο, χρησιμοποιούμε και ένα anti-aliasing φίλτρο $H_{aa}(j\Omega)$ πριν την δειγματοληψία (βλέπε Σχ. 1(a)). Η απόκριση πλάτους $|H_{aa}(j\Omega)|$ αυτού του φίλτρου απεικονίζεται στο Σχ. 1(d), και η απόκριση φάσης του είναι $\angle H_{aa}(j\Omega) = -\Omega^3$.



(α) Εάν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $\Omega_s = 2\pi/T = 1600\pi$, καθορίστε το πλάτος και την φάση της απόκρισης συχνότητας $H(e^{j\omega})$ του συστήματος διακριτού-χρόνου, ώστε η έξοδος να είναι $y_c(t) = f_c(t)$.

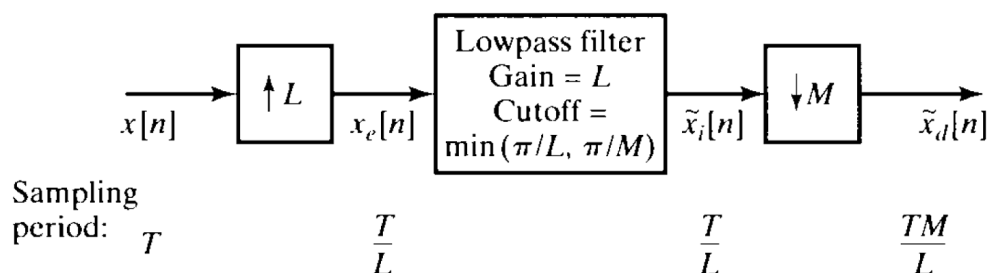
(β) Είναι δυνατόν να έχουμε $y_c(t) = f_c(t)$ εάν $\Omega_s < 1600\pi$; Αν ναι, ποια είναι η ελάχιστη τιμή της Ω_s ; Καθορίστε την $H(e^{j\omega})$ για αυτήν την επιλογή της Ω_s .

Άσκηση 1.3: Για το ακόλουθο σύστημα αλλαγής του ρυθμού δειγματοληψίας, σας δίνεται το σήμα εισόδου $x[n]$ και οι παράγοντες υπερδειγματοληψίας (interpolation) L και υποδειγματοληψίας (decimation) M , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2:

$$x[n] = \sin^2(\pi n/3)/(\pi n)^2, \quad L = 3, \quad M = 4$$

(α) Να σχεδιάσετε τα φάσματα (DTFT) των σημάτων $x_e[n]$, $\tilde{x}_i[n]$ και $\tilde{x}_d[n]$, σημειώνοντας κρίσιμες τιμές στους άξονες.

(β) Να βρείτε το σήμα εξόδου $\tilde{x}_d[n]$. Εξηγήστε.



Σχήμα 2:

Άσκηση 1.4: Διερεύνηση υλοποίησης μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) με MATLAB:

Θεωρούμε σήματα πεπερασμένου μήκους. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε παλμούς και τον DTFT τους. Για τον υπολογισμό του DTFT θα χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση `dtfft` όπως δίνεται ακολούθως, η οποία ουσιαστικά χρησιμοποιεί κατάλληλα τη συνάρτηση `fft` του MATLAB.

Αφού ο DTFT είναι περιοδικός, η περιοχή από $\omega = \pi$ έως 2π είναι στην πραγματικότητα η περιοχή αρνητικών συχνοτήτων, οπότε οι τιμές του μετασχηματισμού `fft` απλά πρέπει να αλλάξουν σειρά. Αυτό επιτυγχάνεται με χρήση της συνάρτησης `fftshift`, η οποία αντιστρέφει τη θέση του πάνω και του κάτω μισού ενός διανύσματος.

Θεωρήστε τώρα τον ακόλουθο τριγωνικό παλμό $p[n]$ πεπερασμένου μήκους

$$p[n] = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 2L-n-1, & L \leq n \leq 2L-2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (1)$$

του οποίου ο DTFT είναι $P(e^{j\omega})$.

(α) Βρείτε την αναλυτική έκφραση του $P(e^{j\omega})$.

(β) Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `dtft` για να υπολογίσετε τον DTFT ενός παλμού $L = 24$ σημείων. Απεικονίστε τον μετασχηματισμό $P(e^{j\omega})$ για ω στο εύρος $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Απεικονίστε χωριστά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, αλλά παρατηρήστε ότι αυτές οι αναπαραστάσεις δεν είναι τόσο χρήσιμες. Αντί αυτών, απεικονίστε το πλάτος του DTFT. Για να φαίνεται η απεικόνιση ομαλή, επιλέξτε αριθμό σημείων συχνότητας τουλάχιστον ίσο με 5 έως 10 φορές το μήκος του παλμού. Πειραματιστείτε για διάφορα πλήθη δειγμάτων στη συχνότητα. Προσέξτε για τη σωστή αναπαράσταση του άξονα των συχνοτήτων ω .

(γ) Παρατηρήστε ότι τα σημεία μηδενισμού του μετασχηματισμού βρίσκονται σε τακτά διαστήματα. Επαναλάβετε τον υπολογισμό του DTFT και την απεικόνιση του πλάτους του για ένα παλμό με μήκος $L = 31$. Ελέγξτε πάλι τη θέση των σημείων μηδενισμού και σημειώστε το ύψος της κορυφής. Προσδιορίστε ένα γενικό κανόνα για τη θέση των μηδενικών και για την τιμή `dc` του μετασχηματισμού.

(δ) Αφού ο μετασχηματισμός Fourier είναι μιγαδικός, εκτός από το πλάτος του, μας ενδιαφέρει και η φάση. Αναπαραστήστε τη φάση του μετασχηματισμού και ελέγξτε αν είναι όπως αναμένεται από τη θεωρία. Αν η αναπαράστασή σας φαίνεται λανθασμένη, σκεφτείτε ότι η φάση υπολογίζεται modulo- 2π , οπότε άλματα 2π στη φάση δικαιολογούνται όταν η φάση διπλώνεται στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Σχολιάστε. Για μια αναπαράσταση της φάσης χωρίς τέτοια προβλήματα, χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `unwrap` του MATLAB. Αν όχι, τότε δείτε μήπως έχετε πάρει πολύ λίγα δείγματα του DTFT.

Παραδοτέο: Συνοπτική αναφορά που θα απαντάει στα ανωτέρω ερωτήματα και θα περιλαμβάνει τις ζητούμενες γραφικές αναπαραστάσεις.

Συνάρτηση MATLAB για υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

```
function [H,W] = dtft(h,N)
%DTFT    calculate DTFT at N equally spaced frequencies
%  usage:  H = dtft( h, N )
%          h: finite-length input vector, whose length is L
%          N: number of frequencies for evaluation over [-pi,pi)
%          ==> constraint: N >= L
%          H: DTFT values (complex)
%          W: (2nd output) vector of freqs where DTFT is computed
%
N = fix(N);
L = length(h); h = h(:);
if ( N < L )
    error('DTFT: # data samples cannot exceed # freq samples')
end
W = (2*pi/N) * [0:(N-1)]';
mid = ceil(N/2) + 1;
W(mid:N) = W(mid:N) - 2*pi;      %<-- move [pi, 2pi) to [-pi, 0)
W = fftshift(W);
H = fftshift( fft( h, N ) );    %<-- move negative freq components
```

Ασκηση 1.5: (LPC):

(α) Για το σχεδιασμό ενός βέλτιστου γραμμικού προβλέπτη τάξης $p = 2$ με τη μέθοδο της Αυτοσυσχέτισης, σας δίνονται οι παραθυρωμένες τιμές της αυτοσυσχέτισης του σήματος : $r_x[0] = 1, r_x[1] = 0.7, r_x[2] = 0.49$.

(α.1) Επαληθεύσετε ότι ο πίνακας αυτοσυσχέτισης

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] & r_x[2] \\ r_x[1] & r_x[0] & r_x[1] \\ r_x[2] & r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix}$$

που σχηματίζεται από τις ανωτέρω αριθμητικές τιμές των $r_x[k]$ είναι θετικά ορισμένος.

(α.2) Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Levinson-Durbin, βρείτε τους βέλτιστους LPC συντελεστές $\{\alpha_i\}$, και τους αντίστοιχους βέλτιστους συντελεστές ανάκλασης $\{k_i\}$.

(β) Για ένα γραμμικό προβλέπτη τάξης $p = 4$, εάν οι βέλτιστοι LPC συντελεστές $\{\alpha_i\}$ είναι οι

$$\alpha_1 = -0.39, \quad \alpha_2 = -0.256, \quad \alpha_3 = -0.402, \quad \alpha_4 = 0.2,$$

χρησιμοποιείτε τον αλγόριθμο Levinson-Durbin για να βρείτε του αντίστοιχους συντελεστές ανάκλασης $\{k_i\}$.

Σημείωση: Ο αλγόριθμος Levinson-Durbin με τον ορθό συμβολισμό περιγράφεται στις συνοπτικές σημειώσεις (διαφάνειες) του μαθήματος.

Ασκηση 2.1: Εστω το LPC σύστημα μοντελοποίησης ακουστικού σήματος με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^p \alpha_k z^{-k}}$$

όπου $\{\alpha_k : k = 1, \dots, p\}$ είναι οι LPC συντελεστές και $h[n]$ είναι η κρουστική απόκριση. Αν $\hat{h}[n]$ είναι το complex cepstrum του σήματος $h[n]$, να αποδείξετε αναλυτικά ότι αυτό το cepstrum του LPC μοντέλου μπορεί να υπολογισθεί αναδρομικά με την σχέση

$$\hat{h}[n] = \alpha_n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{h}[k] \alpha_{n-k}, \quad n \geq 1.$$

Ασκηση 2.2: (Τυχαία διακριτά σήματα)

(α) AR(2): Έστω ότι μας δίνεται μια AR(2) στοχαστική διαδικασία που δημιουργείται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = y[n-1] - \frac{1}{4}y[n-2] + w[n]$$

όπου $w[n]$ είναι λευκός θόρυβος με μηδενική μέση τιμή και μεταβλητότητα $\sigma_w^2 = 1$.

(α.1) Να βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$ του φίλτρου που συνθέτει το σήμα $y[n]$ από το $w[n]$.

(α.2) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_y(e^{j\omega})$ του $y[n]$.

(α.3) Να βρείτε την αυτοσυσχέτιση $r_y[k]$ του $y[n]$.

(β) (Φάσμα Ισχύος)

Έστω ότι μας δίνεται μια στοχαστική ανέλιξη $x[n]$ με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση:

$$r_x[k] = \frac{25}{24}(0.2)^{|k|}$$

(β.1) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_x(z)$ ως συνάρτηση της μιγαδικής συχνότητας z .

(β.2) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_x(e^{j\omega})$ ως **πραγματική** συνάρτηση της συχνότητας ω .

(β.3) Με φασματική παραγοντοποίηση του $P_x(z)$, να βρείτε ένα αιτιατό και ευσταθές φίλτρο $H(z)$ το οποίο με είσοδο λευκό θόρυβο $v[n]$ μηδενικής μέσης τιμής και μοναδιαίας μεταβλητότητας θα δώσει μια στοχαστική ανέλιξη με τη δεδομένη αυτοσυσχέτιση.

Εξηγείστε την εργασία σας.

Ασκηση 2.3 (Σχεδιασμός FIR συστήματος)

Ένα ιδανικό σύστημα διακριτού-χρόνου *μετασχηματισμού Hilbert* (ο οποίος χρησιμοποιείται ευρέως σε τηλεπικοινωνίες) δημιουργεί ιδανική μετατόπιση φάσης -90 μοίρες ($-\pi/2$ ακτίνια) για $0 < \omega < \pi$ και μετατόπιση φάσης $+90$ μοίρες ($+\pi/2$ ακτίνια) για $-\pi < \omega < 0$. Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας είναι σταθερό (μονάδα) για τις τιμές $0 < \omega < \pi$ και $-\pi < \omega < 0$. Συστήματα σαν αυτό ονομάζονται *ideal 90-degree phase shifters*.

(α) Βρείτε μία εξίσωση για την ιδανική απόκριση συχνότητας $H_d(e^{j\omega})$ ενός ιδανικού διακριτού-χρόνου μετασχηματισμού Hilbert ο οποίος περιλαμβάνει σταθερή (μη-μηδενική) καθυστέρηση ομάδας. Σχεδιάστε την απόκριση φάσης του συστήματος για $-\pi < \omega < \pi$.

(β) Υποθέστε ότι θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο παραθύρωσης για τον σχεδιασμό της προσέγγισης γραμμικής φάσης για τον ιδανικό Hilbert μετασχηματισμό. Χρησιμοποιήστε $H_d(e^{j\omega})$ από το ερώτημα (α) για την εύρεση της ιδανικής κρουστικής απόκρισης $h_d[n]$, εάν το FIR σύστημα είναι τέτοιο ώστε $h[n] = 0$ για $n < 0$ και $n > M$.

(γ) Ποιά είναι η καθυστέρηση του συστήματος εάν $M = 21$; Σχεδιάστε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας της FIR προσέγγισης, θεωρώντας τετραγωνικό παράθυρο.

Ασκηση 2.4 Ένα αιτιατό Γ.Χ.Α σύστημα διακριτού χρόνου έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}z^{-1} + \frac{9}{4}z^{-2}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

(α) Να βρείτε τις συναρτήσεις μεταφοράς για ένα minimum-phase σύστημα $H_{min}(z)$ και ένα all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z).$$

Εξηγείστε συνοπτικά.

(β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων και μηδενικών για το minimum-phase σύστημα $H_{min}(z)$ και για το all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$, και να βρείτε τις περιοχές σύγκλισης των αντίστοιχων Z μετ/σμών.

Ασκηση 2.5 Σχεδιασμός και Υλοποίηση Ψηφιακών Φίλτρων με MATLAB

Χρησιμοποιώντας όλες τις παρακάτω μεθόδους σχεδιάστε μέσω του MATLAB εργαλείου fda-tool:

1. IIR με αναλογικό Butterworth.
2. IIR με αναλογικό Chebyshev I.
3. IIR με αναλογικό Elliptic.
4. FIR με Kaiser window.

Σχεδιάστε ένα ψηφιακό φίλτρο που να έχει την ακόλουθη επιθυμητή απόκριση :

Bandpass: Passband: $[0.3, 0.6]\pi$, ripple: 1dB, Stopbands: $[0, 0.28]\pi$, $[0.62, 1]\pi$, attenuation: 80dB.

Αναπαραστήστε γραφικά το πλάτος, τη φάση και το group-delay στο $[0, 1]\pi$ και γύρω από το transition band. Συγκρίνετε την τάξη και το μήκος του φίλτρου για όλες τις ανωτέρω μεθόδους σχεδιασμού.

ΠΑΡΑΔΟΤΕΑ: Γραφικές παραστάσεις, σύγκριση των αποτελεσμάτων από τις διάφορες μεθόδους σχεδίασης, κώδικας MATLAB.

Ασκηση 3.1 (Σύγκριση FIR vs. IIR Wiener φίλτρων)

Εστω μια στοχαστική ανέλιξη $d[n]$ τύπου AR(1) που δημιουργείται από την εξίσωση διαφορών

$$d[n] = 0.6d[n-1] + w[n]$$

όπου $w[n]$ είναι λευκός θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής και μεταβλητότητας $\sigma_w^2 = 0.64$. Παρατηρούμε το σήμα

$$x[n] = d[n] + v[n]$$

όπου $v[n]$ είναι λευκός θόρυβος (μηδενικής μέσης τιμής και μοναδιαίας μεταβλητότητας) ασυσχέτιστος με το σήμα $d[n]$.

(α) Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση $r_d[k]$. Εν συνεχεία, για αποθρομβοποίηση του σήματος $x[n]$ και προσεγγιστική εκτίμηση του $d[n]$ σχεδιάζουμε τα εξής τρία διαφορετικά φίλτρα:

(β) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο **FIR** φίλτρο Wiener με συνάρτηση μεταφοράς

$$W(z) = w[0] + w[1]z^{-1} + w[2]z^{-2}$$

Να βρείτε την κρουστική απόκριση $w[n]$ του βέλτιστου φίλτρου και το αντίστοιχο προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος $\xi_{fir} = E\{|e[n]|^2\}$, όπου $e[n] = d[n] - x[n] * w[n]$.

(γ) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο **μη-αιτιατό IIR** φίλτρο Wiener. Να βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς $H_{nc}(z)$ του βέλτιστου φίλτρου, την κρουστική απόκριση $h_{nc}[n]$, και το αντίστοιχο προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος $\xi_{iir,nc} = E\{|e[n]|^2\}$, όπου $e[n] = d[n] - x[n] * h_{nc}[n]$.

(δ) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο **αιτιατό IIR** φίλτρο Wiener. Να βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς $H_c(z)$ του βέλτιστου φίλτρου, την κρουστική απόκριση $h_c[n]$, και το αντίστοιχο προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος $\xi_{iir,c} = E\{|e[n]|^2\}$, όπου $e[n] = d[n] - x[n] * h_c[n]$.

Συγκρίνετε τα λάθη των τριών ανωτέρω φίλτρων που σχεδιάσατε.

Εξηγήστε την εργασία σας.

Σημείωση: Η θεωρία των Wiener φίλτρων εξηγείται στο Κεφ. 7 του [1].

Ασκηση 3.2 Δίνεται το θορυβώδες τυχαίο σήμα (δηλ. μια στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου)

$$y[n] = x[n] + v[n], \quad x[n] = \cos(\omega_o n + \phi),$$

όπου ϕ είναι μία τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και $v[n]$ είναι λευκός θόρυβος ασυσχέτιστος με την ημιτονοειδή ανέλιξη. Γνωρίζουμε ότι η σηματοθορυβική σχέση (SNR), δηλ. ο λόγος της ισχύος του καθαρού σήματος $x[n]$ δια της ισχύος του θορύβου $v[n]$ εκφρασμένος σε κλίμακα decibel (dB) είναι

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} (\text{ισχύς σήματος} / \text{ισχύς θορύβου}) = 6.9897 \text{ dB}.$$

(α) Βρείτε την ισχύ, S , του τυχαίου ημιτονοειδούς σήματος $x[n] = \cos(\omega_o n + \phi)$ χωρίς το θόρυβο. Επίσης, βρείτε την ισχύ, N , του θορύβου $v[n]$.

(β) Βρείτε τις τιμές της αυτοσυσχέτισης $r_y[k] = E\{y[n]y[n-k]\}$ για $k = 0, 1, 2$.

(γ) Με βάση τα ανωτέρω, και υποθέτοντας ότι

$$\omega_o = \pi/3,$$

να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο γραμμικό φίλτρο Wiener με συνάρτηση μεταφοράς

$$W(z) = w[0] + w[1]z^{-1}$$

για γραμμική πρόβλεψη ενός βήματος και τάξης $p = 2$ του σήματος $x[n]$ από το θορυβώδες σήμα $y[n]$. Δηλαδή, εδώ το επιθυμητό σήμα είναι $d[n] = x[n+1]$. Να βρείτε τους συντελεστές γραμμικής πρόβλεψης $w[0], w[1]$.

Άσκηση 3.3 Εκτίμηση Φάσματος Ισχύος τυχαίων σημάτων με χρήση MATLAB

Στόχος της άσκησης είναι η εκτίμηση του φάσματος ισχύος μιας τυχαίας διαδικασίας με δύο διαφορετικές μη-παραμετρικές μεθόδους και η σύγκριση των αποτελεσμάτων. Οι δυο μέθοδοι που θα δοκιμαστούν είναι η μέθοδος του Περιοδογράμματος (Periodogram) και η μέθοδος Welch (Averaged Modified Periodogram).

Το Περιοδόγραμμα ενός σήματος $x[n]$ μήκους N δειγμάτων υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση :

$$\hat{P}_{per}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} |X_N(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \right|^2, \quad (1)$$

όπου στην πράξη ο DTFT $X_N(e^{j\omega})$ του σήματος αντικαθίσταται από τον DFT $X_N[k]$, οπότε υπολογίζουμε το $\hat{P}_{per}(e^{j2\pi k/N})$.

Στο MATLAB το Περιοδόγραμμα του σήματος $x[n]$ υπολογίζεται με χρήση της συνάρτησης “**P= periodogram(x)**”.

Στην μέθοδο Welch, για την εκτίμηση του φάσματος ισχύος, υπολογίζεται ένας μέσος όρος των επιμέρους εκτιμήσεων σε διαδοχικά επικαλυπτόμενα παράθυρα :

$$\hat{P}_W(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{m=0}^{K-1} \hat{P}_M^{(m)}(e^{j\omega}), \quad (2)$$

όπου $\hat{P}_M^{(m)}(e^{j\omega})$ είναι το τροποποιημένο περιοδόγραμμα (modified periodogram) για το m -οστό πλαίσιο ανάλυσης :

$$\hat{P}_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] w[n] e^{-j\omega n} \right|^2, \quad (3)$$

όπου U η ενέργεια του σήματος παραθύρου $w[n]$. Το παράθυρο μπορεί να είναι οποιοδήποτε, και στην περίπτωση μας θα χρησιμοποιηθεί το Hamming. Η μέθοδος Welch υλοποιείται στην MATLAB με χρήση της συνάρτησης “**P = pwelch(x, window, noverlap)**”, με τις παραμέτρους *window* και *noverlap* να ρυθμίζουν το μήκος των πλαισίων και την επικάλυψη τους.

Το σήμα που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι το άθροισμα δύο ημιτόνων με τυχαία φάση, με παρουσία προσθετικού λευκού θορύβου $v[n]$ μοναδιαίας μεταβλητότητας :

$$x[n] = 4 \sin(\omega_1 n + \phi_1) + 5 \sin(\omega_2 n + \phi_2) + v[n] \quad (4)$$

όπου ϕ_1 και ϕ_2 τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανοημένες στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Θεωρήστε $\omega_1 = 0.4\pi$, $\omega_2 = 0.5\pi$, και μήκος σήματος $N = 1024$. Ο λευκός θόρυβος μπορεί να υλοποιηθεί στην MATLAB με χρήση της εντολής “**u= randn(1,N)**”.

Ζητούμενα :

(α) Κώδικας MATLAB που να δημιουργεί το σήμα x και να παράγει τις δύο διαφορετικές εκτιμήσεις του φάσματος ισχύος.

(β) Διαγράμματα για τις δύο εκτιμήσεις.

(γ) Σχολιασμός αποτελεσμάτων: Συγκρίνετε τα δύο διαγράμματα ως προς το resolution και το variance του φάσματος ισχύος. Συμφωνούν οι παρατηρήσεις σας με το θεωρητικά αναμενόμενο ; Σε ποιά από τις δύο μεθόδους παρατηρείτε περισσότερη μείωση θορύβου ;

Σημείωση: Η θεωρία των μη-παραμετρικών εκτιμητών φάσματος εξηγείται στο Κεφ. 8.2 του [1].

[1] M. H. Hayes, *Statistical Digital Processing and Modeling*, Wiley, 1996.