
Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός βιβλίου για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Παραδίδονται γραπτώς και προσωπικώς στην Γραμματεία Εργ. Ρομποτικής (Αιθ. 2.1.12, παλαιό Κτ.Ηλεκτρ.) 9.00-14.30.

Ασκηση 3.1: (Τυχαία διακριτά σήματα, Φάσμα Ισχύος)
Έστω ότι μας δίνεται μια στοχαστική ανέλιξη $x[n]$ με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση:

$$r_x[k] = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{|k|} + 2\left(\frac{1}{4}\right)^{|k-1|} + 2\left(\frac{1}{4}\right)^{|k+1|}$$

(α) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_x(z)$ ως συνάρτηση της μιγαδικής συχνότητας z.
(β) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_x(e^{j\omega})$ ως πραγματική συνάρτηση της συχνότητας ω.
(γ) Με φασματική παραγοντοποίηση του $P_x(z)$, να βρείτε ένα αιτιατό και ευσταθές φίλτρο $H(z)$ το οποίο με είσοδο λευκό θόρυβο $v[n]$ μηδενικής μέσης τιμής και μοναδιαίας μεταβλητότητας θα δώσει μια στοχαστική ανέλιξη με τη δεδομένη αυτοσυσχέτιση.
Εξηγείστε την εργασία σας.

Ασκηση 3.2 (Σύγκριση FIR vs. IIR Wiener φίλτρων)
Εστω μια στοχαστική ανέλιξη $d[n]$ τύπου AR(1) που δημιουργείται από την εξίσωση διαφορών

$$d[n] = 0.75d[n-1] + w[n]$$

όπου $w[n]$ είναι λευκός θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής και μεταβλητότητας $\sigma_w^2 = 1$. Παρατηρούμε το σήμα

$$x[n] = d[n] + v[n]$$

όπου $v[n]$ είναι λευκός θόρυβος (μηδενικής μέσης τιμής και μοναδιαίας μεταβλητότητας) ασυσχέτιστος με το σήμα $d[n]$.
(α) Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση $r_d[k]$. Εν συνεχεία, για αποθορυβοποίηση του σήματος $x[n]$ και προσεγγιστική εκτίμηση του $d[n]$ σχεδιάζομε τα εξής τρία διαφορετικά φίλτρα:
(β) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο **FIR-2** φίλτρο Wiener με συνάρτηση μεταφοράς

$$W(z) = w[0] + w[1]z^{-1}$$

Να βρείτε την κρουστική απόκριση $w[n]$ του βέλτιστου φίλτρου και το αντίστοιχο προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος $\xi_{fir2} = E\{|e[n]|^2\}$, όπου $e[n] = d[n] - x[n] * w[n]$.
(γ) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο **FIR-3** φίλτρο Wiener με συνάρτηση μεταφοράς

$$W(z) = w[0] + w[1]z^{-1} + w[2]z^{-2}$$

Να βρείτε την κρουστική απόκριση $w[n]$ του βέλτιστου φίλτρου και το αντίστοιχο προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος $\xi_{fir3} = E\{|e[n]|^2\}$.
(δ) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο **μη-αιτιατό IIR** φίλτρο Wiener. Να βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς $H_{nc}(z)$ του βέλτιστου φίλτρου, την κρουστική απόκριση $h_{nc}[n]$, και το αντίστοιχο προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος $\xi_{iir,nc} = E\{|e[n]|^2\}$, όπου $e[n] = d[n] - x[n] * h_{nc}[n]$.
Συγκρίνετε τα λάθη των τριών ανωτέρω φίλτρων που σχεδιάσατε.
Εξηγείστε την εργασία σας.

Σημείωση: Η θεωρία των Wiener φίλτρων εξηγείται στο Κεφ. 7 του [1].

Ασκηση 3.3: (PCA, SVD)
(α) Μας δίνεται μια ακολουθία δεδομένων (τυχαία διανύσματα με μηδενικό μέσο) $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^d$, $n = 1, ..., N$, και θέλομε να βρούμε μια κατεύθυνση (μοναδιαίο διάνυσμα) $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^d$ και σταθερές a_n έτσι ώστε, αν προσεγγίσομε κάθε δεδομένο μας (διάνυσμα στήλης) $\boldsymbol{x}_n$ με ένα διάνυσμα $a_n\boldsymbol{e}$, το συνολικό μέσο τετραγωνικό λάθος J να είναι ελάχιστο:

$$J(a_1, ..., a_n, \boldsymbol{e}) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \|\boldsymbol{x}_n - a_n\boldsymbol{e}\|^2, \quad \|\cdot\| = \text{Euclidean norm}$$

Απο την θεωρία της PCA (Principal Component Analysis) προκύπτει ότι το βέλτιστο $\boldsymbol{e}$ είναι το ιδιοδιάνυσμα του $\boldsymbol{R}_x$ που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή λ_1, όπου $\boldsymbol{R}_x = (1/N)\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}_n\boldsymbol{x}_n^T$ είναι ο εμπειρικός πίνακας αυτοσυσχέτισης (sample autocorrelation matrix) των δεδομένων, και ότι τα βέλτιστα a_n που ελαχιστοποιούν το J είναι

$$a_n = \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{e} \rangle = \boldsymbol{x}_n^T\boldsymbol{e}$$

Πως σχετίζεται η ανωτέρω PCA λύση με την SVD (Singular Value Decomposition) του $N \times d$ πίνακα $\boldsymbol{X}$ που σχηματίζεται στιβάζοντας τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_n$, $n = 1, ..., N$, ως γραμμές;
(β) Βρείτε αριθμητικά τα βέλτιστα $a_n, \boldsymbol{e}$ για τα εξής δεδομένα ($N = 5, d = 3$):

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ασκηση 3.4 Εκτίμηση Φάσματος Ισχύος τυχαίων σημάτων με χρήση MATLAB
Στόχος της άσκησης είναι η εκτίμηση του φάσματος ισχύος μιας τυχαίας διαδικασίας με δύο διαφορετικές μη-παραμετρικές μεθόδους και η σύγκριση των αποτελεσμάτων. Οι δυο μέθοδοι που θα δοκιμαστούν είναι η μέθοδος του Περιοδογράμματος (Periodogram) και η μέθοδος Welch (Averaged Modified Periodogram).
Το Περιοδόγραμμα ενός σήματος $x[n]$ μήκους N δειγμάτων υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\hat{P}_{per}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\left|X_N(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}\right|^2, \tag{1}$$

όπου στην πράξη ο DTFT $X_N(e^{j\omega})$ του σήματος αντικαθίσταται από τον DFT $X_N[k]$, οπότε υπολογίζουμε το $\hat{P}_{per}(e^{j2\pi k/N})$.
Στο MATLAB το Περιοδόγραμμα του σήματος $x[n]$ υπολογίζεται με χρήση της συνάρτησης
"***P= periodogram(x)***".

Στην μέθοδο Welch, για την εκτίμηση του φάσματος ισχύος, υπολογίζεται ένας μέσος όρος των επιμέρους εκτιμήσεων σε διαδοχικά επικαλυπτόμενα παράθυρα:

$$\hat{P}_W(e^{j\omega}) = \frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1} \hat{P}_M^{(m)}(e^{j\omega}), \tag{2}$$

όπου $\hat{P}_M^{(m)}(e^{j\omega})$ είναι το τροποποιημένο περιοδόγραμμα (modified periodogram) για το m-οστό πλαίσιο ανάλυσης :

$$\hat{P}_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{NU}\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n]e^{-j\omega n}\right|^2, \tag{3}$$

όπου U η ενέργεια του σήματος παραθύρου $w[n]$. Το παράθυρο μπορεί να είναι οποιοδήποτε, και στην περίπτωση μας θα χρησιμοποιηθεί το Hamming. Η μέθοδος Welch υλοποιείται στην MATLAB με χρήση της συνάρτησης "***P = pwelch(x, window, noverlap)***", με τις παραμέτρους *window* και *noverlap* να ρυθμίζουν το μήκος των πλαισίων και την επικάλυψη τους.
Το σήμα που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι το άθροισμα δύο ημιτόνων με τυχαία φάση, με παρουσία προσθετικού λευκού θορύβου $v[n]$ μοναδιαίας μεταβλητότητας:

$$x[n] = \cos(\omega_1 n + \phi_1) + 5\sin(\omega_2 n + \phi_2) + v[n] \tag{4}$$

όπου ϕ_1 και ϕ_2 τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Θεωρήστε $\omega_1 = 0.4\pi$, $\omega_2 = 0.5\pi$, και μήκος σήματος $N = 1024$. Ο λευκός θόρυβος μπορεί να υλοποιηθεί στην MATLAB με χρήση της εντολής "*u= randn(1,N)*".
Ζητούμενα:
(α) Κώδικας MATLAB που να δημιουργεί το σήμα x και να παράγει τις δύο διαφορετικές εκτιμήσεις του φάσματος ισχύος.
(β) Διαγράμματα για τις δύο εκτιμήσεις.
(γ) Σχολιασμός αποτελεσμάτων: Συγκρίνετε τα δύο διαγράμματα ως προς το resolution και το variance του φάσματος ισχύος. Συμφωνούν οι παρατηρήσεις σας με το θεωρητικά αναμενόμενο; Σε ποιά από τις δύο μεθόδους παρατηρείτε περισσότερη μείωση θορύβου;

Σημείωση: Η θεωρία των μη-παραμετρικών εκτιμητών φάσματος εξηγείται στο Κεφ. 8.2 [1].

---

[1] M. H. Hayes, *Statistical Digital Processing and Modeling*, Wiley, 1996.