03117107 Αθανάσιος Δελής

Άσκηση 3.1 $\qquad P_w(z) = 1 = \sigma_w^2$ λευκός θόρυβος

$$r_x[k] = 26\left(\frac{1}{4}\right)^{|k|} + 5\left(\frac{1}{4}\right)^{|k-1|} + 5\left(\frac{1}{4}\right)^{|k+1|}$$

α) $P_x(z)$

$$a^{|n|} \xrightarrow{z} \frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)} \quad |a| < |z| < 1/|a|$$

Άρα έχουμε $P_x(z) = \frac{15}{16}\,\frac{26+5z+5z^{-1}}{(1-z/4)(1-z^{-1}/4)} = \frac{15}{16}\,\frac{(1+5z)(1+5z^{-1})}{(1-z/4)}$

β) $$P_x(e^{j\omega}) = \frac{15}{16}\,\frac{26+5(e^{j\omega}+e^{-j\omega})}{\frac{17}{16} - \frac{1}{4}(e^{j\omega}+e^{-j\omega})} =$$

$$= 15\,\frac{26+10\cos(\omega)}{17-8\cos(\omega)}$$

γ) $$P_x(z) = \sigma_0^2\,\frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} = \begin{cases} \sigma_0^2 = 15/16 \\ A(z) = 1-(1/4)z^{-1} \\ B(z) = 1+5z \end{cases}$$

$$P_x(z) = H(z)H(z^{-1}),\ H(z) = \sigma_0\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sqrt{15}}{4}\,\frac{1+5z}{1-z^{-1}/4} = z\,\frac{5\sqrt{15}}{4}\,\frac{1+z^{-1}/5}{1-z^{-1}/4}$$

$= z\,G(z)$ ευσταθές σύστημα

Άσκηση 3.3

$d[n] = 0.7\,d[n-1] + w[n] \qquad \sigma_w^2 = 1 \qquad x[n] = d[n] + v[n] \quad \sigma_v^2 = 1$

(α) $r_d[k]$

$$r_d[k] = \frac{1}{1-(0.7)^2}(0.7)^{|k|} = \frac{100(0.7)^{|k|}}{51}$$

(θ) $W(z) = W[0] + W[1] z^{-1}$

$w[n] = W[0]\,\delta[n] + W[1]\,\delta[n-1]$

Wiener-Hopf βέλτιστοι συντελεστές:

$$\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] \\ r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W[0] \\ W[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}[0] \\ r_{dx}[1] \end{bmatrix}$$

$r_{dx}[0] = r_d[0] = 1/0.51 = 1,961 \qquad r_x[0] = 2,961$

$d[n]$ και $v[n]$ ασυσχέτιστα: $r_{dx}[k] = r_d[k]$

$r_x[k] = r_d[k] + r_v[k] = r_d[k] + \delta[k]$

$r_{dx}[1] = r_d[1] = 0,7/0,51 = 1,373 \qquad r_x[1] = 1,373$

$$\begin{bmatrix} 2,961 & 1,373 \\ 1,373 & 2,961 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W[0] \\ W[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,961 \\ 1,373 \end{bmatrix}$$

$$MSE_{fir2} = r_d[0] - \sum_{k=0}^{1} W[k]\, r_d[k] = 1,961 - 0,57 \cdot 1,961 - 0,199 \cdot 1,373 = 0,57$$

(ι) $W(z) = W[0] + W[1] z^{-1} + W[2] z^{-2}$ FIR Wiener φίλτρο

$\Rightarrow W[n] = W[0]\,\delta[n] + W[1]\,\delta[n-1] + \delta[n-2]\, W[2]$

Wiener-Hopf:
$$\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] & r_x[2] \\ r_x[1] & r_x[0] & r_x[1] \\ r_x[2] & r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W[0] \\ W[1] \\ W[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}[0] \\ r_{dx}[1] \\ r_{dx}[2] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2,961 & 1,373 & 0,961 \\ 1,373 & 2,961 & 1,373 \\ 0,961 & 1,373 & 2,961 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W[0] \\ W[1] \\ W[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,961 \\ 1,373 \\ 0,961 \end{bmatrix} \qquad r_d[2] = \frac{0,49}{0,51} = 0,961$$

$r_x[2] = 0,961$

$(W[0], W[1], W[2]) = \cancel{(\ldots 0.175 \ldots)}\ (0,5612,\ 0,175,\ 0,0612)$

$$MSE_{fir3} = r_d[0] - \sum_{k=0}^{2} W[k]\, r_d[k] = 0.561$$

(δ) $h[k] * r_x[k] = r_{dx}[k]$ $\quad H_{nc}(z) = \dfrac{P_{dx}(z)}{P_x(z)}$

$d, v[n]$ ασυσχέτιστα: $P_{dx}(z) = P_d(z)$, $P_x(z) = P_d(z) + P_v(z)$

φάσμα σήματος: $r_d[k] = \dfrac{1.02}{51}(0.7)^{|k|} \xleftrightarrow{z} P_d(z) = \dfrac{1}{(1-0.7z^{-1})(1-0.7z)}$

$0.7 < |z| < \frac{10}{7}$

(*) Έχει αριθμητικό αλλά η ανισότητα ισχύει αυστηρώς

transfer function: $H_{nc}(z) = \dfrac{\Gamma_{dx}(z)}{\Gamma_x(z)} = \dfrac{P_d(z)}{P_d(z)+P_v(z)} = \dfrac{1}{2 - 0.7(z+z^{-1})}$

$H_{nc}(z) = \dfrac{1}{2.7144\,(1-0.4084z^{-1})(1-0.4084z)} \xrightarrow{z} h_{nc}[n] = 0.2975\,(0.4084)^{|n|}$

$\xi_{iir,nc} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_v(e^{j\omega}) H_{nc}(e^{j\omega})\,d\omega = \dfrac{\sigma_v^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{nc}(e^{j\omega})\,d\omega = \sigma_v^2 h_{nc}[0] = 0.2975$

(*) $\xi_{iir,nc} < MSE_{fir3} < MSE_{fir2}$

3.5 α,β) Έστω $\{e_k\}$ ιδιοκατευθύνσεις $p<<d$ κύριες συνιστώσες τότε τα x_n προσεγγίζονται με μέσο τετραγωνικό λάθος κατ' ελάχιστο

$\sum_{k=1}^{p} y_{kn} e^k \qquad y_{kn} = \langle x_n, e_k \rangle$

Φτιάχνω $N\times d$ πίνακα με τα x_n ως γραμμές

$R_x = \dfrac{1}{N} X^T X = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n x_n^T \rightarrow R_x = V \Lambda V^T$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$

V: ορθογώνιος στήλες ιδιοδιανύσματα v_k, $k=1,2,\dots,d$ ιδιοτιμές λ_k

SVD στο $X = U \Sigma V^T \Rightarrow R_x = \frac{1}{N} V \Sigma U^T U \Sigma V^T = V \frac{\Sigma^2}{N} V^T$

$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $r = \mathrm{rank}(X) \leq \min(N,d)$

v_k, στήλες V, ιδιοκατευθύνσεις, $\lambda_k = \sigma_k^2/N$ προκύπτουν από σ_k

$Xv_k = [y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{Nk}]^T \Rightarrow y_{nk} = x_n^T v_k$ μας δίνει την κολώνα του $\cancel{X}V = U\Sigma$

Μείωση διάστασης: επιλέγω p στήλες του U & το $p \times p$ άνω αριστερά-τμήμα του Σ, έστω $U_p \Sigma_p$ είναι p κύριες συνιστώσες. Πολλαπλασιάζοντας με ιδιοκατωθύνους V_p^T

έχω $X_p = U_p \Sigma_p V_p^T$ rank p

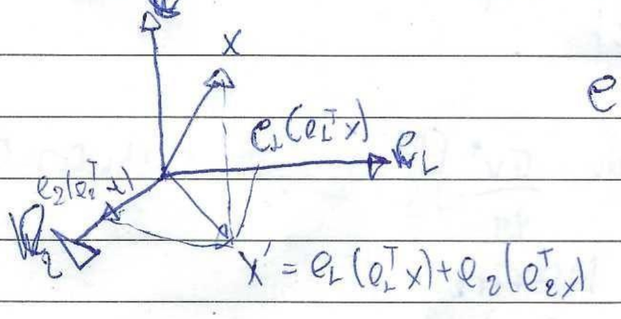
Ελαχιστοποίηση για $p=1$, $k=1$

όμως με $k=1$ $\{e_k\} \equiv \{e_1\} = e$ του ζητουμένου a και $y_{kn} \equiv y_{1n} \equiv a_n$

Άρα $a_n = x_n^T e$ σε ανάλυση με μια πρωτεύουσα συνιστώσα

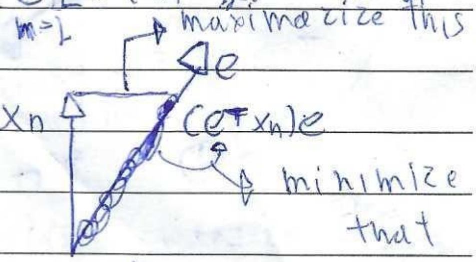
α) Άλλωστε ισχύει και

$$e_1 = \arg\max_{\|e\|=1} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \{(e^T x_n)^2\}$$ 1st PCA vector



$\langle x_n, e \rangle = e^T x_n = x_n^T e$

$$e_k = \arg\max_{\|e\|=1} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \{[e^T(x_n - \sum_{i=1}^{k-1} e_i e_i^T x_n)]^2\}$$



Πυθαγόρειο

$x \perp y$ $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

β) $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|x_n - (e^T x_n) e\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|(e^T x_n) e\|^2 + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_n)^2 =$

$= 1/N \sum_{n=1}^{N} \|e^T x_n\|^2 + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_n)^2$

$e^T x_n - e = (-e^T x_n) e$

$\|X \cdot Y\| = \|X\| \cdot \|Y\|$ αν $Y = cX$ & $\|e\|^2 = 1$

$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (e^T x_n)^2 = e^T X X^T e = e^T R_x e$

γ) $R_x = V \Lambda V^T$ Λ ελαχιστοποιεί rank L για λ_L τιμή αντιστοιχεί στο v_L ιδιοδιάνυσμα δ) Προσέγγιση για PCA $p=1$ με βάση α)

Η k στήλη του XV είναι η k-th principal component Xv_k των δεδομένων στην k διευκατεύθυνση. Επειδή μειώνουμε την διάσταση των δεδομένων σε $p=1$ κύρια συνιστώσα αυτό δίνει $e=v_1$ άρα $[a_1, a_2, \ldots, a_N]^T = Xv_1$

Έστω

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 0.2 \\ 1 & -0.3 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.3 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e = \begin{bmatrix} 0.95994558 \\ -0.19421895 \\ 0.20398487 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0199411 \\ 1.1195488 \\ 0.0411944 \\ 5.195788 \end{bmatrix}$$

Από κώδικα python το στ)

Άσκηση 1

α) $x[n] = \frac{1}{2} x[n-1] + u[n]$

$Z[x[n]] = X(z) = z^{-1} X(z) + U(z) \Rightarrow H(z) = \frac{2}{1-0.5z^{-1}}$

$P_x(z) = 1 \cdot H(z) H^*(1/z^*) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})} \frac{1}{(1-0.5z)} = \frac{1}{\frac{5}{4} - \frac{z}{2} - \frac{z^{-1}}{2}}$

$= \frac{4z}{5z - 2z^2 - 2}$

β) $P_x(e^{j\omega}) = \frac{2}{2-e^{-j\omega}} \cdot \frac{2}{2-e^{j\omega}} = \frac{2/3}{e^{j\omega} - 1/2} + \frac{4/3}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$.

$R_x(e^{j\omega}) = DTFT\{r_x[n]\} \Rightarrow r_x[n] = IDTFT(R_x(e^{j\omega})) =$

$= \frac{2}{3} IDTFT\left\{\frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right\} + \frac{4}{3} IDTFT\left\{\frac{e^{j\omega}}{\frac{1}{2} - e^{j\omega}}\right\} =$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] + \frac{8}{3} 2^{n-2} u[n-2]$

1) Yule-Walker method:

$$r_x[n] + \sum_{l=1}^{p} a(l)\, r_x[n-l] = \sigma_v^2 \, |b[0]|^2 \cdot \delta(k) \quad k \geq 0$$

$$H(z) = \frac{b(0)}{1 + \sum_{k=1}^{p} a(k) z^{-k}}$$

Άρα

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a(1) \end{bmatrix} = \sigma_v^2 \, |b(0)|^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

WSS: $r_x[-k] = r_x^*[k] = r_x[k]$ πραγματική στοχαστική X

Άρα

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |b(0)|^2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_x(0) = \frac{|b(0)|^2}{1 - a^2(1)}$$

$$r_x(1) = \frac{-a(1)}{1 - a^2(1)} \, |b(0)|^2$$

Είναι $r_x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|+1} r_x[1] \Rightarrow$

$$\Rightarrow r_x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} r_x(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_x[n] = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} = r_{x_2}[n]$$

στο (β) $r_x[n] = \frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] + 2^n u[-n-2]\right] = r_{x_1}[n]$

Παρατηρώ $r_{x_1}(n) \neq r_{x_2}(n)$ για $n = 0, 1$ και ~~κατά~~ στο υπόλοιπο $\mathbb{Z}$ ίδια

Άσκηση 3.4 κώδικας python: Καλύτερη εκτίμηση φάσματος το τροποποι

Καλύτερη φασματική εκτίμηση το τροποποιημένο περιοδόγραμμα

ανάλυση τροποποιημένου: $1.980 \cdot 2\pi/N > 0.89 \cdot 2\pi/N$ του κανονικού