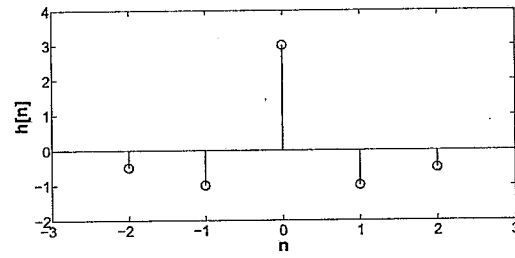
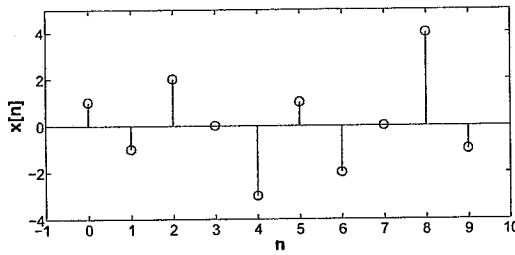


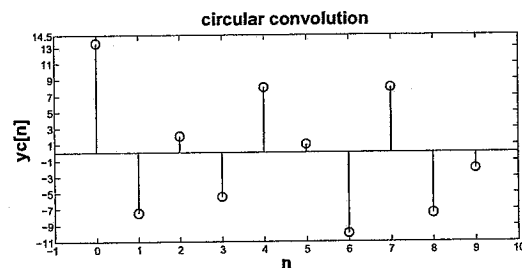
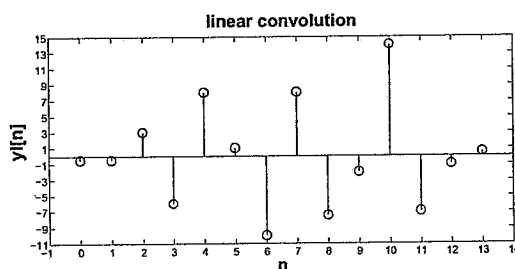
1.1

(α),(β)



Ισχύει ότι $Y[k] = X[k]H[k]$, $k = 0, 1, \dots, 9$, και $y[n] \leftrightarrow_{DFT} Y[k]$. Επομένως το $y[n]$ θα ισούται με την κυκλική συνέλιξη περιόδου 10 των $x[n], h[n]$: $y_c[n] = x[n] \otimes_{10} h[n]$. Ισοδύναμα, αντιστοιχεί σε κυκλική αναδίπλωση (με περίοδο $N=10$) της γραμμικής συνέλιξης $y_l[n] = x[n] * h[n]$ που έχει $10+5-1=14$ σημεία.

Στη λύση μας θεωρούμε ότι το σήμα $h[n]$ μετατοπίζεται δεξιά κατά 2 δείγματα. Οπότε, αν κάποιος θεωρήσει περιοδική επέκταση του $h[n]$ για να κάνει κυκλική συνέλιξη, τότε ο DFT του $h[n]$ και επομένως του $y[n]$ πολλαπλασιάζεται με W_N^{2k} . Εμείς όμως αγνοούμε αυτήν την μετατόπιση αφού ο τελικός στόχος είναι να βρεθούν οι ορθές τιμές της γραμμικής συνέλιξης μέσω της κυκλικής. Στο τέλος, αν κάποιος ενδιαφέρεται για την ορθή χρονική εκκίνηση της γραμμικής συνέλιξης, μπορεί στο τελικό αποτέλεσμα να εφαρμόσει την αντίθετη μετατόπιση.



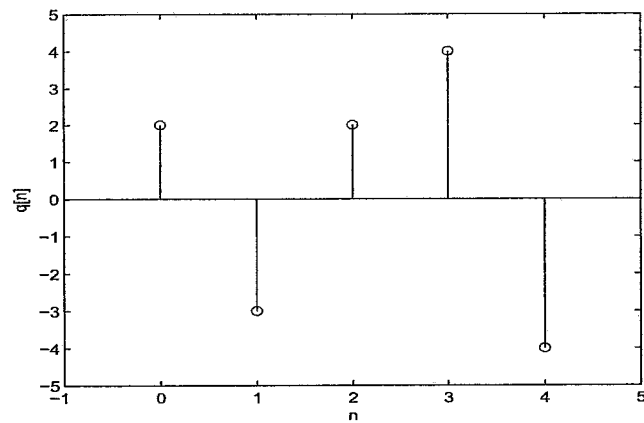
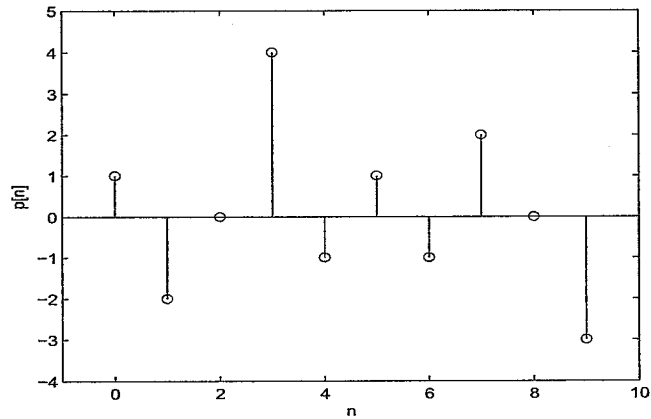
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$y_l[n]$	-0.5	-0.5	3	-6	8	1	-10	8	-7.5	-2	14	-7	-1	0.5
$y_c[n]$	13.5	-7.5	2	-5.5	8	1	-10	8	-7.5	-2				

(γ) Για να μην υπάρχει αναδίπλωση, $N \geq 14$.

(δ.1) $P[k] = (-1)^k X[k]$, $k = 0, \dots, 9$, και $p[n] \leftrightarrow_{DFT} P[k]$.
 $\rightarrow P[k] = e^{\frac{j2\pi k \cdot 5}{10}} X[k]$, $k = 0, \dots, 9$, $\leftrightarrow_{DFT} p[n] = x[(n+5)_{10}]$.

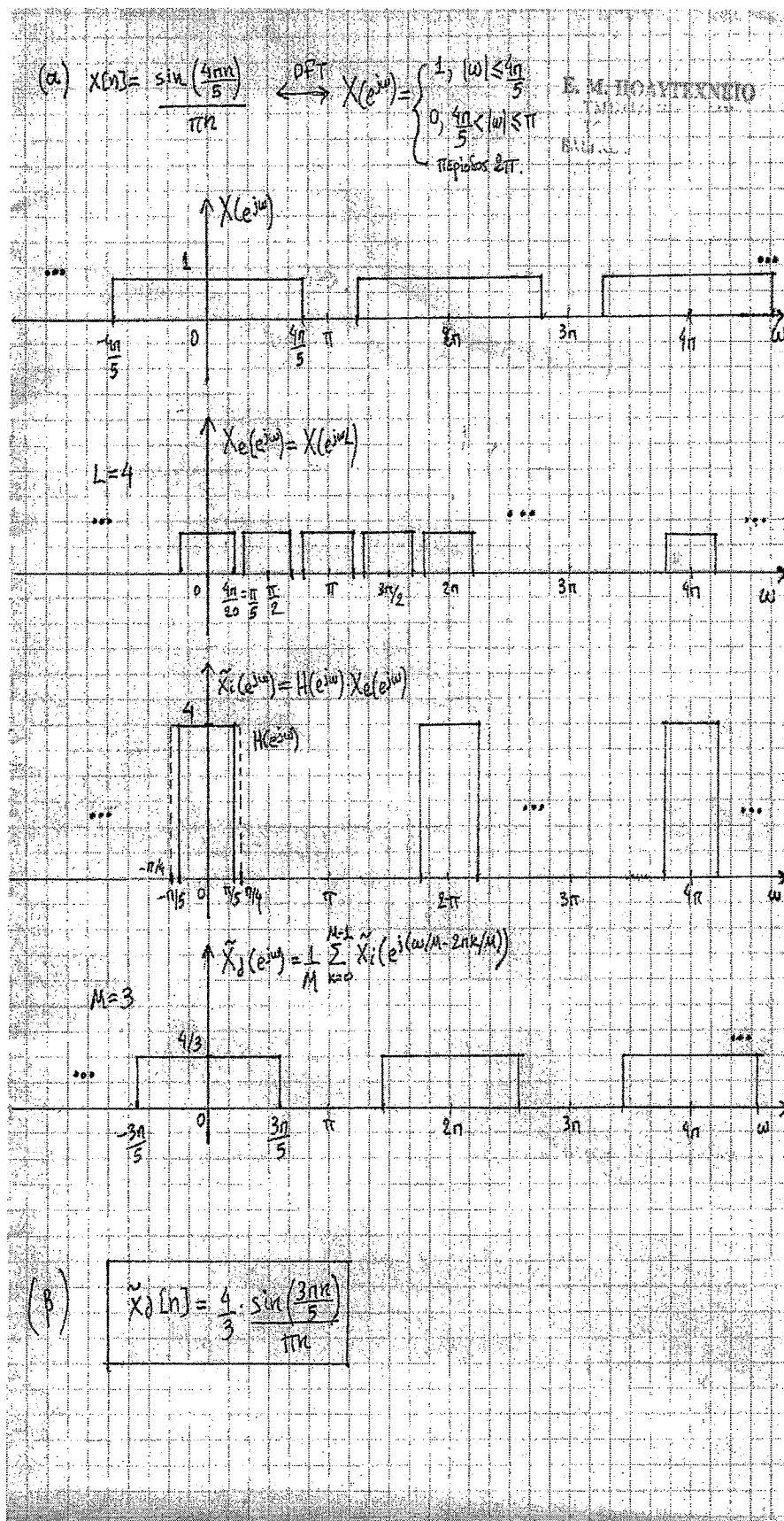
(δ.2) $Q[k] = X[2k]$, $k = 0, \dots, 4$, και $q[n] \leftrightarrow_{DFT} Q[k]$.

Το $q[n]$ προκύπτει με περιοδική αναδίπλωση του $x[n]$ (με περίοδο $N=5$): $q[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-5k]$,
 $n = 0, \dots, 4$.



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p[n]$	1	-2	0	4	-1	1	-1	2	0	-3
$q[n]$	2	-3	2	4	-4					

1.2 Λύση στο παρακάτω σχήμα.

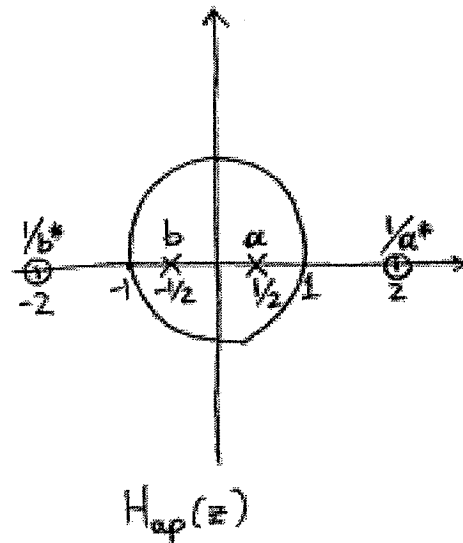
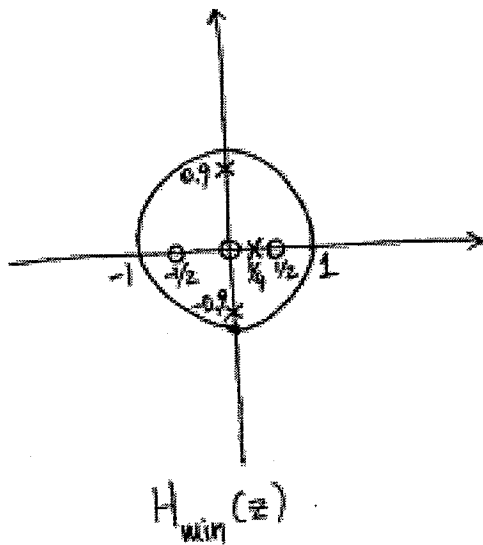


$$\boxed{\text{All-pass: } |z^{-1} - \alpha^*| / |1 - \alpha z^{-1}| = 1 \quad (z = e^{j\omega}) \quad (\text{All-pass})}$$

(a)

$$H(z) = \frac{(1 - 4z^{-2})}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + 0.81z^{-2})} = \frac{-4(z^{-1} - 1/2)(z^{-1} + 1/2)}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + j0.9z^{-1})(1 - j0.9z^{-1})}$$

$$= \underbrace{\frac{-4(1 - 1/2 z^{-1})(1 + 1/2 z^{-1})}{(1 - \frac{1}{4} z^{-1})(1 - j0.9 z^{-1})(1 + j0.9 z^{-1})}}_{H_{\min}(z)} \cdot \underbrace{\frac{(z^{-1} - 1/2)(z^{-1} + 1/2)}{(1 - 1/2 z^{-1})(1 + 1/2 z^{-1})}}_{H_{\text{ap}}(z)}$$

(b) Διάγραμμα πόλων μηδενικών

Περιοχή Ζώνης: $|z| > 0.9$
Σύγκλιση

$$|z| > 1/2$$

1.4

(α) Το συνολικό σύστημα (διακριτό \rightarrow συνεχές σήμα (D/C), Φίλτρο συνεχούς χρόνου ($H_c(j\Omega)$), συνεχές \rightarrow διακριτό σήμα (C/D)), ισοδυναμεί με διακριτού χρόνου σύστημα με απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega}) = H_c(j\frac{\omega}{T})$.

Λύνοντας την διαφορική εξίσωση έχουμε: $(j\Omega)^2 Y_c(j\Omega) + 4(j\Omega) Y_c(j\Omega) + 3 Y_c(j\Omega) = X_c(j\Omega)$
 $\rightarrow H_c(j\Omega) = \frac{1}{(j\Omega)^2 + 4(j\Omega) + 3}$.

Άρα για $T = 0.1s$, $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{-100\omega^2 + 40j\omega + 3}$, για $|\omega| \leq \pi$ και περίοδο 2π .

(β) $H_c(s) = \frac{1/2}{s+1} - \frac{1/2}{s+3}$, ($s = j\Omega$ (Laplace)) $\rightarrow h_c(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})u[t]$.

Για το σύστημα μας ισχύει ότι $h[n] = Th_c(nT)$

$\rightarrow h[n] = \frac{1}{20}(e^{-0.1n} - e^{-0.3n})u[n]$.

1.5

(α) Εξ ορισμού, $X[2k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{2kn}$
 $= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] W_N^{2kn} + x[n + (N/2)] W_N^{2k(n+(N/2))}) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] + x[n + (N/2)]) W_N^{2kn}$.

(Χρησιμοποιήθηκε ότι $W_N^{kN} = 1$).

Επειδή ισχύει ότι $W_N^{2kn} = W_{N/2}^{kn}$, το $X[2k]$ εκφράσθηκε σαν DFT $N/2$ σημείων της ακολουθίας $x[n] + x[n + (N/2)]$.

(β) $X[4k+1] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{(4k+1)n}$
 $= \sum_{n=0}^{(N/4)-1} (x[n] W_N^{4kn} + x[n + (N/4)] W_N^{4k(n+(N/4))} + x[n + (N/2)] W_N^{4k(n+(N/2))} + x[n + (3N/4)] W_N^{4k(n+(3N/4))})$
 $= \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \{(x[n] - x[n + (N/2)]) - j(x[n + (N/4)] - x[n + (3N/4)])\} W_N^{4kn}$.

(Χρησιμοποιήθηκε ότι $W_N^{N/4} = -j$, $W_N^{3N/4} = j$, $W_N^{N/2} = -1$, $W_N^{kN} = 1$). Όμοια με πριν, επειδή $W_N^{4kn} = W_{N/4}^{kn}$, το $X[4k+1]$ εκφράσθηκε σαν DFT $N/4$ σημείων.

Ομοίως,

$X[4k+3] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \{(x[n] - x[n + (N/2)]) + j(x[n + (N/4)] - x[n + (3N/4)])\} W_N^{4kn}$, $k = 0, 1, \dots, (N/4) - 1$.

Τα ερωτήματα (α), (β) δείχνουν ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον υπολογισμό ενός DFT N σημείων με τον υπολογισμό ενός DFT $N/2$ σημείων, και 2 DFTs $N/4$ σημείων.

(γ) Υποθέτουμε ότι $N = 16$, και ορίζουμε τις παρακάτω σχέσεις :

$g[n] = x[n] + x[n + (N/2)], n = 0, 1, \dots, (N/2) - 1$

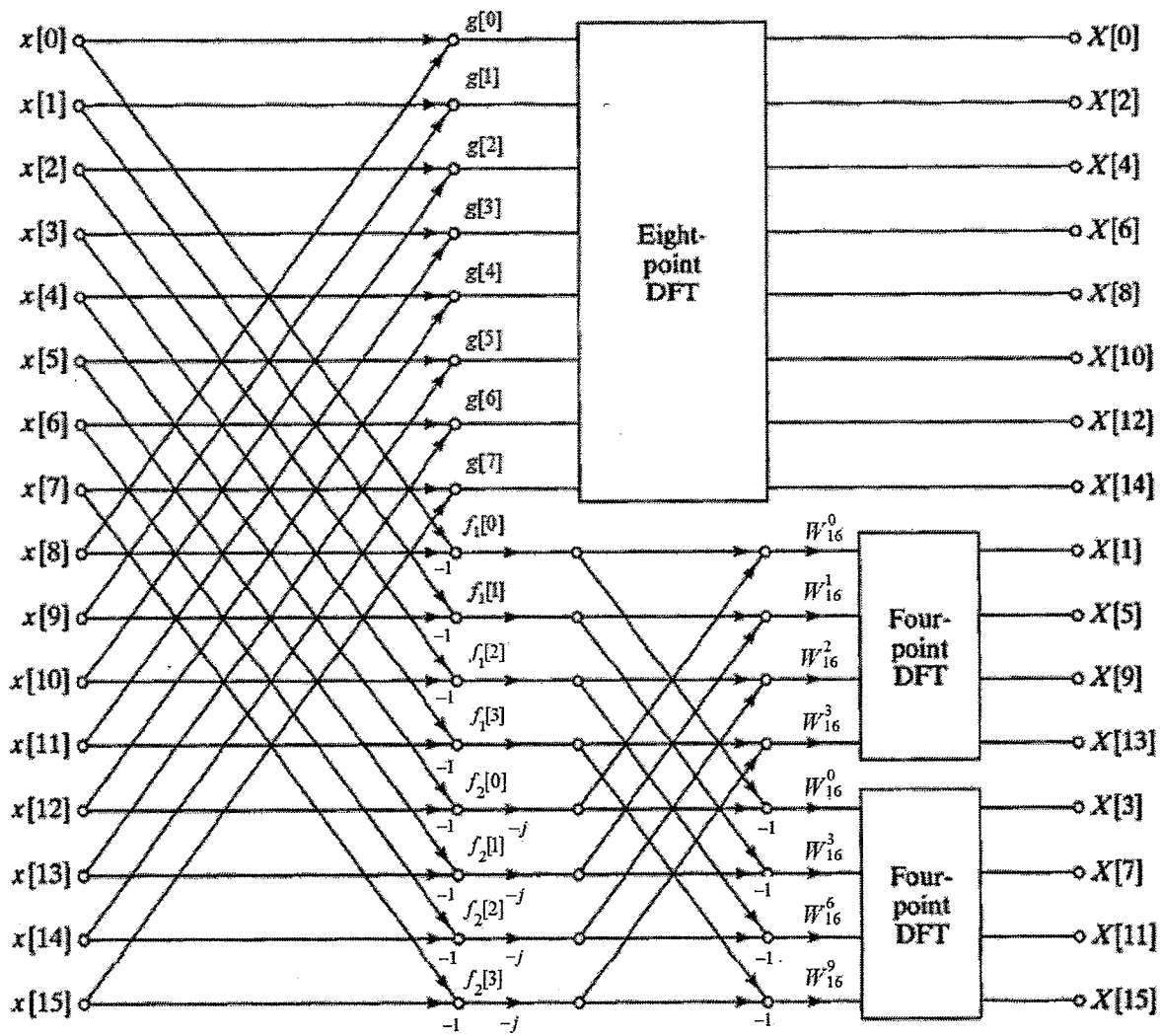
$f_1[n] = x[n] - x[n + (N/2)], n = 0, 1, \dots, (N/4) - 1$

$f_2[n] = x[n + (N/4)] - x[n + (3N/4)], n = 0, 1, \dots, (N/4) - 1$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ο τρόπος υπολογισμού των τιμών του $X[k]$.

(δ) Αγνοώντας τους πολλαπλασιασμούς με το εκθετικό W_N^0 , παρατηρούμε συνολικά 17 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς. Πολλαπλασιασμός με το $-j$ απαιτεί 0 πραγματικούς πολλαπλασιασμούς, ενώ πολλαπλασιασμός μεταξύ μιγαδικών περιέχει 4 πραγματικούς πολλαπλασιασμούς. Από τους 17 πολλαπλασιασμούς, οι 9 είναι με το $(-j)$. Άρα συνολικά έχουμε $8 \times 4 = 32$ πραγματικούς πολλαπλασιασμούς.

Με την ίδια λογική, για τον κλασσικό radix-2 FFT με $N = 16$, παρατηρούμε 17 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς, από τους οποίους οι 7 με το $-j$. Οπότε τελικά έχουμε $10 \times 4 = 40$ πραγματικούς πολλαπλασιασμούς.



2.1

(α.1) $r_x[0]=1.05, r_x[1]=0.8, r_x[2]=0.64$

Η ανωτέρα ακολουθία αυτοσυσχέτισης είναι θετικά ορισμένη εάν \Longleftrightarrow

Ο Πίνακας Αυτοσυσχέτισης

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] & r_x[2] \\ r_x[1] & r_x[0] & r_x[1] \\ r_x[2] & r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.05 & 0.8 & 0.64 \\ 0.8 & 1.05 & 0.8 \\ 0.64 & 0.8 & 1.05 \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος. Θα πρέπει όλες οι 3 κύριες υποορίζουσες να είναι θετικές. Πράγματι

$$\Delta_1 = \det[1] = 1.05 > 0, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 1.05 & 0.8 \\ 0.8 & 1.05 \end{bmatrix} = 0.4625 > 0, \quad \Delta_3 = \det \begin{bmatrix} 1.05 & 0.8 & 0.64 \\ 0.8 & 1.05 & 0.8 \\ 0.64 & 0.8 & 1.05 \end{bmatrix} = 0.2027 > 0$$

(α.2) Levinson-Durbin: $E^{(0)} = r_x[0] = 1.05$

Τάξη $i = 1$

$$\kappa_1 = \frac{-r_x[1]}{E^{(0)}} = \frac{-0.8}{1.05} = -0.7619, \quad \alpha_1^{(1)} = -\kappa_1 = 0.7619, \quad E^{(1)} = (1 - \kappa_1^2)E^{(0)} = 0.441$$

Τάξη $i = 2 = p$

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= -(r_x[2] - \alpha_1^{(1)}r_x[1])/E^{(1)} = -0.54 \\ \alpha_2^{(2)} &= -\kappa_2 = 0.54 \\ \alpha_1^{(2)} &= \alpha_1^{(1)} + \kappa_2\alpha_1^{(1)} = 0.35 \\ E^{(2)} &= (1 - \kappa_2^2)E^{(1)} = 0.3124 \end{aligned}$$

Άρα LPC = $(\alpha_1, \alpha_2) = (0.35, 0.54)$

και PARCOR = $(\kappa_1, \kappa_2) = (-0.7619, -0.54)$.

(β) $\alpha_1^{(4)} = \alpha_1 = -0.35, \alpha_2^{(4)} = \alpha_2 = 0.112, \alpha_3^{(4)} = \alpha_3 = 0.014, \alpha_4^{(4)} = \alpha_4 = 0.3$

Τάξη $i = 4 = p$

$$\begin{aligned} \kappa_4 &= -\alpha_4^{(4)} = -0.3 \\ \alpha_1^{(3)} &= \frac{\alpha_1^{(4)} - \kappa_4\alpha_3^{(4)}}{1 - \kappa_4^2} = -0.38 \\ \alpha_2^{(3)} &= \frac{\alpha_2^{(4)} - \kappa_4\alpha_2^{(4)}}{1 - \kappa_4^2} = -0.185 \\ \alpha_3^{(3)} &= \frac{\alpha_3^{(4)} - \kappa_4\alpha_1^{(4)}}{1 - \kappa_4^2} = -0.1 \end{aligned}$$

Τάξη $i = 3$

$$\begin{aligned} \kappa_3 &= -\alpha_3^{(3)} = 0.1 \\ \alpha_1^{(2)} &= \frac{\alpha_1^{(3)} - \kappa_3\alpha_2^{(3)}}{1 - \kappa_3^2} = -0.40 \\ \alpha_2^{(2)} &= \frac{\alpha_2^{(3)} - \kappa_3\alpha_1^{(3)}}{1 - \kappa_3^2} = 0.225 \end{aligned}$$

Τάξη $i = 2$

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= -\alpha_2^{(2)} = -0.225 \\ \alpha_1^{(1)} &= \frac{\alpha_1^{(2)} - \kappa_2\alpha_1^{(2)}}{1 - \kappa_2^2} = -0.52 \end{aligned}$$

Τάξη $i = 1$

$$\kappa_1 = -\alpha_1^{(1)} = 0.52$$

Άρα PARCOR = $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = (0.52, -0.225, 0.1, -0.3)$.

2.3

(α) AR(2) στοχαστική διαδικασία $y[n] = 0.7y[n-1] - 0.1y[n-2] + w[n]$.

(α.1) Συνάρτηση μεταφοράς και κρουστική απόκριση $h[n]$ του φίλτρου που συνθέτει το σήμα $y[n]$ από το $w[n]$:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2}} = \frac{-2/3}{1 - z^{-1}/5} + \frac{5/3}{1 - z^{-1}/2} \xrightarrow{\text{Inverse Z.T.}} h[n] = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] + \frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(α.2) Φάσμα ισχύος $P_y(e^{j\omega})$ του $y[n]$:

$$P_y(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 P_w(e^{j\omega}) = \frac{1}{|1 - 0.7e^{-j\omega} + 0.1e^{-2j\omega}|^2} = \frac{100}{(\cos 2\omega - 7 \cos \omega + 10)^2 + (7 \sin \omega - \sin 2\omega)^2}$$

(α.3) Η αυτοσυσχέτιση $r_y[k]$ μπορεί να βρεθεί από αντίστροφο Z μετ/σμό του μιγαδικού φάσματος ισχύος $P_y(z) = \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1})$. Εναλλακτικά μπορεί να βρεθεί και από τις εξισώσεις Yule-Walker για AR(2) ανέλιξη. Βλ. Hayes, σελ.112, εξ. (3.120)

β):

Στοχαστική ανέλιξη $x[n]$ με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση

$$r_x[k] = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{|k-1|} + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{|k+1|}$$

(β1) Φάσμα ισχύος ως συνάρτηση της μιγαδικής συχνότητας z : Με χρήση του μετ/σμού Z αποδεικνύεται ότι,

$$\alpha^{|n|} \xleftrightarrow{Z} \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha z)}, \quad |\alpha| < |z| < 1/|\alpha|$$

Εφαρμόζοντας αυτό το αποτέλεσμα στην ακολουθία αυτοσυσχέτισης προκύπτει ότι

$$P_x(z) = \frac{3}{4} \cdot \frac{10 + 3z + 3z^{-1}}{(1 - z/2)(1 - z^{-1}/2)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(1 + 3z)(1 + 3z^{-1})}{(1 - z/2)(1 - z^{-1}/2)}$$

(β2) Φάσμα ισχύος ως *πραγματική* συνάρτηση της συχνότητας ω : Με χρήση του μετ/σμού DTFT,

$$P_x(e^{j\omega}) = 3 \cdot \frac{10 + 6 \cos(\omega)}{5 - 4 \cos(\omega)}$$

(β3) Με φασματική παραγοντοποίηση,

$$P_x(z) = \sigma_o^2 \frac{B(z)}{A(z)} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \quad \begin{cases} \sigma_o^2 &= 3/4 \\ A(z) &= 1 - (1/2)z^{-1} \\ B(z) &= 1 + 3z \end{cases}$$

$$P_x(z) = H(z)H(z^{-1}), \quad H(z) = \sigma_o \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + 3z}{1 - z^{-1}/2} = z \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}/3}{1 - z^{-1}/2} = zG(z),$$

Το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(z)$ είναι αιτιατό και ευσταθές. Αν η είσοδος του είναι λευκός θόρυβος $v[n]$ μοναδιαίας μεταβλητότητας, η έξοδος θα είναι μια στοχαστική ανέλιξη με τη δεδομένη αυτοσυσχέτιση $r_x[k]$. Σημείωση: Το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(z)$ σε σχέση με την $H(z)$ εισάγει μία καθυστέρηση αλλά δεν αλλάζει το φάσμα ισχύος της εξόδου.

2.2

$$x[n] = A(\cos \omega_0 n + \phi) + w[n]$$

Υποθέτουμε ότι ο θόρυβος $w[n]$ είναι ασυγχέτιστος με τις τυχαιές παραμέτρους (A ή ϕ) του σήματος.

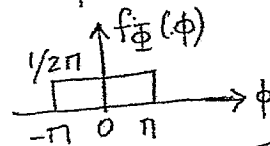
(α) $A \sim \mathcal{N}(0, \sigma_A^2)$, $\omega_0 \neq \phi$ σταθερές

$$\begin{aligned} x[k]x[l] &= [A \cos(\omega_0 k + \phi) + w[k]] [A \cos(\omega_0 l + \phi) + w[l]] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos[\omega_0(k+l) + 2\phi] + \frac{A^2}{2} \cos[\omega_0(k-l)] + w[k] \cdot w[l] \\ &\quad + A \cos(\omega_0 k + \phi) w[l] + A \cos(\omega_0 l + \phi) w[k] \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\{1\} \leadsto r_x[k, l] &= \frac{E\{A^2\}}{2} \left(\cos[\omega_0(k+l) + 2\phi] + \cos[\omega_0(k-l)] \right) \\ &\quad + E\{w[k]w[l]\} + \cancel{E\{A\}E\{w[l]\}} \cos(\omega_0 k + \phi) \\ &\quad + \cancel{E\{A\}E\{w[k]\}} \cos(\omega_0 l + \phi) \end{aligned}$$

$$\leadsto r_x[k, l] = \frac{\sigma_A^2}{2} \left(\cos[\omega_0(k+l) + 2\phi] + \cos[\omega_0(k-l)] \right) + \sigma_w^2 \delta[k-l].$$

Επομένως η $x[n]$ ΔΕΝ είναι WSS.

(β)  , $A, \omega_0 = \text{σταθερές}$:

$$\begin{aligned} E\{1\} \leadsto r_x[k, l] &= \frac{A^2}{2} \cos[\omega_0(k-l)] + \sigma_w^2 \delta[k-l] \\ &\quad + \frac{A^2}{2} E\{\cos[\omega_0(k+l) + 2\phi]\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[\omega_0(k+l) + 2\phi] d\phi \end{aligned}$$

$\therefore x[n]$ είναι WSS.

Φάσμα ισχύος: $P_x(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\{r_x[k]\} = \sigma_w^2 + \frac{\pi A^2}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi r)$

3.1:

(α) Μας δίνεται μια στοχαστική ανέλιξη $d[n] = 0.7d[n-1] + w[n]$, και το θορυβώδες σήμα $x[n] = d[n] + v[n]$. Επαναλαμβάνοντας την ανάλυση στην ενότητα 3.6.2 του [1], αποδεικνύεται ότι η αυτοσυσχέτιση του $d[n]$ ισούται με:

$$r_d[k] = \frac{\sigma_w^2}{1 - \alpha^2} \alpha^{|k|} = \frac{0.7^{|k|}}{0.51}$$

(β) *FIR Wiener*: Η χροστική απόκριση του FIR Wiener φίλτρου με συνάρτηση μεταφοράς $W(z) = w[0] + w[1]z^{-1} + w[2]z^{-2}$ είναι

$$w[n] = w[0]\delta[n] + w[1]\delta[n-1] + w[2]\delta[n-2]$$

Οι βέλτιστοι συντελεστές προκύπτουν λύνοντας τις Wiener-Hopf εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] & r_x[2] \\ r_x[1] & r_x[0] & r_x[1] \\ r_x[2] & r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}[0] \\ r_{dx}[1] \\ r_{dx}[2] \end{bmatrix}$$

Χρειαζόμαστε πρώτα τις συσχετίσεις $r_x[k]$ και $r_{dx}[k]$. Επειδή τα $d[n]$ και $v[n]$ είναι ασυσχέτιστα,

$$r_x[k] = r_d[k] + r_v[k] = 0.7^{|k|} + \delta[k], \quad r_{dx}[k] = r_d[k] = 0.7^{|k|}$$

Η λύση του ανωτέρω 3×3 συστήματος εξισώσεων είναι :

$$(w[0], w[1], w[2]) = (0.4189, 0.1750, 0.0811)$$

Το μέσο τετραγωνικό λάθος του FIR Wiener φίλτρου ισούται με

$$\xi_{fir} = r_d[0] - \sum_{k=0}^2 w[k]r_d[k] = 0.4189.$$

(γ) *IIR non-causal Wiener*: Για την χροστική απόκριση $h_{nc}[n]$ και συνάρτηση μεταφοράς $H_{nc}(z)$ του IIR non-causal Wiener φίλτρου ισχύουν

$$h[k] * r_x[k] = r_{dx}[k], \quad H_{nc}(z) = \frac{P_{dx}(z)}{P_x(z)}$$

Επομένως, επειδή τα $d[n]$ και $v[n]$ είναι ασυσχέτιστα και άρα

$$P_{dx}(z) = P_d(z), \quad P_x(z) = P_d(z) + P_v(z),$$

και επειδή το φάσμα ισχύος του $d[n]$ ισούται με

$$r_d[k] = 0.7^{|k|} \xleftrightarrow{Z} P_d(z) = \frac{0.51}{(1 - 0.7z^{-1})(1 - 0.7z)}, \quad 0.7 < |z| < 1/0.7,$$

η συνάρτηση μεταφοράς προκύπτει

$$H_{nc}(z) = \frac{P_{dx}(z)}{P_x(z)} = \frac{P_d(z)}{P_d(z) + P_v(z)} = \frac{0.51}{2 - 0.7(z + z^{-1})}$$

Παραγοντοποιώντας κατάλληλα το $2 - 0.7(z + z^{-1})$ προκύπτει ότι

$$H_{nc}(z) = \frac{0.51}{1.7141(1 - 0.4084z^{-1})(1 - 0.4084z)}$$

και με αντίστροφο Z μετ/σμό βρίσκουμε την κρουστική απόκριση $h_{nc}[n] = 0.2975(0.4084)^{|n|}$. Επαναλαμβάνοντας την ανάλυση στην ενότητα 7.3.1 του [1] αποδεικνύεται ότι, το μέσο τετραγωνικό λάθος (εκφράζοντας το στο πεδίο χρόνου και συχνότητας) ισούται με

$$\xi_{iir,nc} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_v(e^{j\omega}) H_{nc}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{\sigma_v^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{nc}(e^{j\omega}) d\omega = \sigma_v^2 h_{nc}[0] = 0.2975.$$

(δ) IIR Causal Wiener: Επαναλαμβάνοντας την ανάλυση στην ενότητα 7.3.3 του [1] αποδεικνύεται ότι, η συνάρτηση μεταφοράς $H_c(z)$ του IIR causal Wiener φίλτρου ισούται με

$$H_c(z) = \frac{1}{\sigma_o^2 Q(z)} \left[\frac{P_d(z)}{Q(z^{-1})} \right]_+, \quad P_x(z) = \sigma_o^2 Q(z) Q(z^{-1})$$

Απο τα δεδομένα της άσκησης και την ανωτέρω ανάλυση προκύπτει ότι

$$P_d(z) = \frac{0.51}{(1 - 0.7z^{-1})(1 - 0.7z)}$$

$$P_x(z) = P_d(z) + 1 = \frac{2 - 0.7(z + z^{-1})}{(1 - 0.7z^{-1})(1 - 0.7z)} = \frac{1.7141(1 - 0.4084z^{-1})(1 - 0.4084z)}{(1 - 0.7z^{-1})(1 - 0.7z)}$$

Αρα $Q(z) = (1 - 0.4084z^{-1})/(1 - 0.7z^{-1})$ και

$$\begin{aligned} \frac{P_d(z)}{Q(z^{-1})} &= \frac{0.51}{(1 - 0.7z^{-1})(1 - 0.4084z)} \\ &= \frac{0.51z^{-1}}{(1 - 0.7z^{-1})(z^{-1} - 0.4084)} = \frac{0.7142}{1 - 0.7z^{-1}} + \frac{0.2917}{z^{-1} - 0.4084} \end{aligned}$$

Επομένως κρατώντας μόνο τον παράγοντα που δημιουργεί αιτιατή απόκριση:

$$\left[\frac{P_d(z)}{Q(z^{-1})} \right]_+ = \frac{0.7142}{1 - 0.7z^{-1}} \Rightarrow H_c(z) = \frac{(1 - 0.7z^{-1})}{1.7141(1 - 0.4084z^{-1})} \frac{0.7142}{(1 - 0.7z^{-1})} = \frac{0.4167}{1 - 0.4084z^{-1}}$$

Με αντίστροφο Z μετ/σμό προκύπτει η κρουστική απόκριση $h_c[n] = 0.4167(0.4084)^n u[n]$. Για το μέσο τετραγωνικό λάθος

$$\xi_{iir,c} = r_d[0] - \sum_{k=0}^{\infty} h_c[k] r_d[k] = 1 - 0.4167 \sum_{k=0}^{\infty} (0.4084)^k (0.7)^k = 0.4165$$

Προφανώς ισχύει ότι

$$\xi_{iir,nc} < \xi_{iir,c} < \xi_{fir}$$

[1] M. H. Hayes, *Statistical Digital Processing and Modeling*, Wiley, 1996.

3.2: Στιβάζοντας τα διανύσματα $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$, $n = 1, \dots, N$, ως γραμμές πίνακα, σχηματίζεται ο $N \times d$ πίνακας δεδομένων \mathbf{X} από τον οποίο προκύπτει ο εμπειρικός πίνακας αυτοσυσχέτισης (sample autocorrelation matrix)

$$\mathbf{R}_x = \frac{1}{N} \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T$$

Αυτός διαγωνοποιείται ως $\mathbf{R}_x = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, όπου ο ορθογώνιος πίνακας \mathbf{V} έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα \mathbf{v}_k , $k = 1, \dots, d$, με ιδιοτιμές λ_k . Από SVD παραγοντοποίηση του \mathbf{X}

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T, \quad \mathbf{R}_x = \frac{1}{N} \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \frac{\mathbf{\Sigma}^2}{N} \mathbf{V}^T$$

όπου $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $r = \text{rank}(\mathbf{X}) \leq \min(N, d)$. Αρα οι ιδιοκατευθύνσεις είναι τα ιδιοδιανύσματα \mathbf{v}_k (δηλ. οι στήλες του \mathbf{V}), και οι ιδιοτιμές $\lambda_k = \sigma_k^2/N$ προκύπτουν από τις singular values σ_k . Η k -th principal component (PC), δηλ. οι προβολές $\mathbf{X} \mathbf{v}_k = [y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{Nk}]^T$, $y_{nk} = \mathbf{x}_n^T \mathbf{v}_k$, των δεδομένων στην k ιδιοκατεύθυνση είναι η k στήλη του $\mathbf{X} \mathbf{V} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}$.

Για να μειώσουμε την διάσταση των δεδομένων σε $p < d$ κύριες συνιστώσες, υποθέτουμε $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$, επιλέγουμε τις πρώτες p στήλες του \mathbf{U} και το $p \times p$ άνω-αριστερά τμήμα του $\mathbf{\Sigma}$. Οπότε ο πίνακας $\mathbf{U}_p \mathbf{\Sigma}_p$ μας δίνει τις πρώτες p κύριες συνιστώσες (PCs). Πολλαπλασιάζοντας αυτές με τις αντίστοιχες ιδιοκατευθύνσεις \mathbf{V}_p^T προκύπτει ένας πίνακας $\mathbf{X}_p = \mathbf{U}_p \mathbf{\Sigma}_p \mathbf{V}_p^T$ που έχει $\text{rank } p$ και προσεγγίζει τα δεδομένα με το μικρότερο μέσο τετραγωνικό λάθος από όλους τους πίνακες με $\text{rank } p$.