Übungsblatt 0

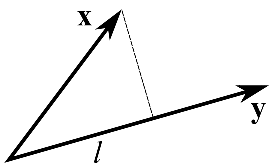
Willkommen zur Übung vor der ersten Vorlesung *Computergrafik*. Dieses Blatt behandelt die wesentlichen mathematischen Grundlagen, die für das Verständnis dieser Veranstaltung vorteilhaft sind. Es soll Ihnen als Orientierung dafür dienen, welche mathematischen Themen sie evtl. noch einmal kurz wiederholen sollten.

Aufgabe 1. Geben seien die drei Vektoren $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$.

1. Berechnen Sie das *innere Produkt* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.
2. Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{z}$?
3. Berechnen Sie das *äußere Produkt* $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y}^\top$ von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$, sowie $(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})\mathbf{z}$.
4. Welchen *Rang* hat $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$?

Aufgabe 2. Geben seien die Vektoren $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$

1. Berechnen Sie die Länge von $\mathbf{x}$
2. Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$?
3. Wie groß ist der Flächeninhalt, des durch $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aufgespannten Dreiecks?
4. Wie groß ist der Anteil l des Vektors $\mathbf{x}$ in Richtung des Vektors $\mathbf{y}$?



5. Sind die Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ linear unabhängig?
6. Welchen Rang hat die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$?

Aufgabe 3. Skizzieren Sie die Region, die zu allen Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ gehören, für die nachfolgenden vier Normen.

1. $\|\mathbf{x}\|_0 = \sum_{i=1, x_i \neq 0}^{n} 1$
2. $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
3. $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
4. $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$

Aufgabe 4. Gegeben sind die 2×2 Matrizen

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} cc\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{bmatrix}.$$

1. Bestimmen sie die Determinanten der Matrizen.
2. Sind die Matrizen orthogonal?
3. Sind die Matrizen invertierbar? Wenn Ja, geben Sie die Inversen an, wenn Nein, erklären Sie warum nicht.
4. Was ist der Unterschied zwischen R_1 und R_2?
5. Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen an.

Hinweis: Lösen Sie die Aufgabe mit einem kleinen Python Skript und verwenden Sie dabei das Paket `numpy`.

Aufgabe 5. Gegeben seien die beiden komplexen Zahlen $c_1 = 1+2i$ und $c_2 = 3+4i$.

1. Geben Sie die konjugiert komplexen Zahlen $\overline{c_1}$ und $\overline{c_2}$ an.
2. Berechnen Sie $c_3 = c_1 \cdot c_2$
3. Berechnen Sie $c_4 = c_2 \cdot \overline{c_2}$
4. Berechnen Sie $c_5 = c_1/c_2$
5. Geben Sie die Eulerform ($c = l \cdot e^{i\varphi}$) der beiden komplexen Zahlen an.

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die Ableitungen von

1. $y = 2x^3 + 3x^2 + 17x + 42$ bzgl. x
2. $y = \frac{1}{1+e^{-x}}$ bzgl. x
3. $y = |x|$ bzgl. x
4. x^x bzgl. x
5. $z = \sin(x) \cdot \cos(y)$ bzgl. x und y
6. $(x, y) = (\sin(r) \cdot s,\ \cos(s^2) \cdot r^2)$ bzgl. r und s