PID

1. 引文

1.1 Bang-Bang 控制（启停式控制）

示例：

存在一个供用户使用的蓄水池，可以使用水龙头为其补水。目标是保证该蓄水池的水始终有 50 升。

Bang-Bang 控制：

当水位线低于 50 升时，打开水龙头，直到水注到了 50 升的水位线以上为止。如果水位超过了，就关闭水龙头。优势在于，控制简单。缺陷则是，控制并不稳定，**容易出现震荡**。例如，当用户用水速度远超于水龙头的注水速度时。刚超过 50 升水位线时，水龙头关闭，但由于用户用水速度过快，水位线很快降到 50 升以下，则又需要打开水龙头。

1.2 P 控制（比例控制）

比例控制是一种最简单的控制方式。其控制器的输出与输入误差信号成比例关系。当仅有比例控制时系统输出存在稳态误差（Steady-state error）。

Figure 1，如下左图所示，输入的设定值$Setpoint = 50\ L$，末端有一个传感器，能反馈目前的水位线$Output$。误差$e(t)$就是目前的水位线和设定值的差值。K_p为比例系数，例如$K_p = 1$，当$Output = 48\ L$时，则注水的速度会被修正为$u(t) = K_p \times e(t) = 2\ L/s$。相比于 Bang-Bang 控制，比例控制在水量较少时，注水速度更快，水量接近 50L 时，注水速度更慢。控制相对精确。

存在的问题如下右图所示。无论K_p如何设置，水位最终都难以接近红线。原因在于，假设当$Output = 48\ L$时，注水速度会修正到$u(t) = 2\ L/s$，而此时用户的用水速度 $v(t) = 2\ L/s$。那么此时，$u(t) = v(t)$，水位永远会保持在 48L 的状态。缺陷在于，**无法消除静态误差。**

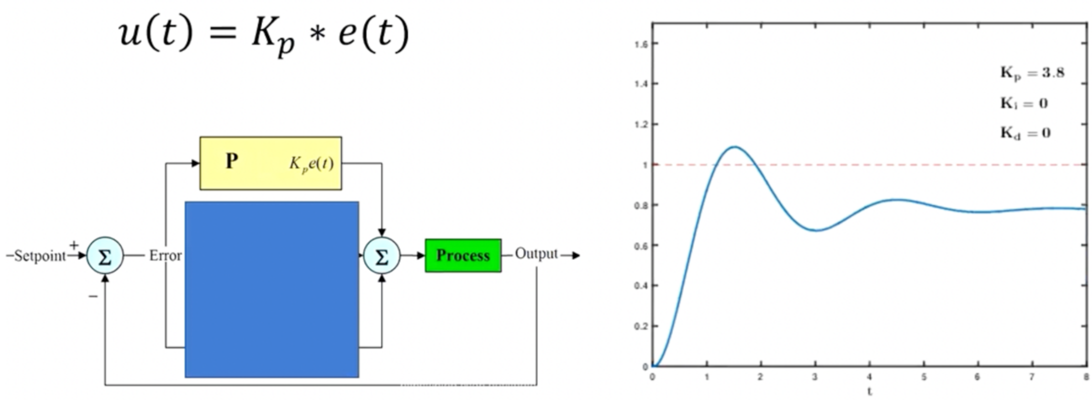


Figure 1.

1.3 PI 控制（比例+积分）

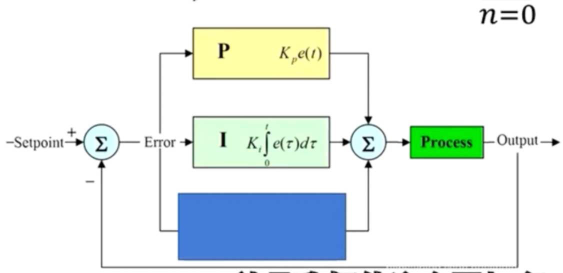
在积分控制中，控制器的输出与输入误差信号的积分成正比关系。对一个自动控制系统，如果在进入稳态后存在稳态误差，则称这个控制系统是有稳态误差的或简称有差系统（System with Steady-state Error）。为了消除稳态误差，在控制器中必须引入“积分项”。积分项对误差取决于时间的积分，随着时间的增加，积分项会增大。这样，即便误差很小，积分项也会随着时间的增加而加大，它推动控制器的输出增大使稳态误差进一步减小，直到接近于零。因此，比例+积分（PI）控制器，可以使系统在进入稳态后几乎无稳态误差。

Figure 2，左图式子分别表示了连续和离散表达式。通过累计误差，然后再乘以积分系数 K_i，来弥补上述提到的静态误差。

但如下右图所示，存在的问题则是，**出现了大幅度的震荡(或波动)，**需要一段时间才能达到稳态。

$$u(t) = K_p * e(t) + K_i * \int_0^t e(t)dt$$

$$u(t) = K_p * e(t) + K_i * \sum_{n=0}^{t} e(n)$$



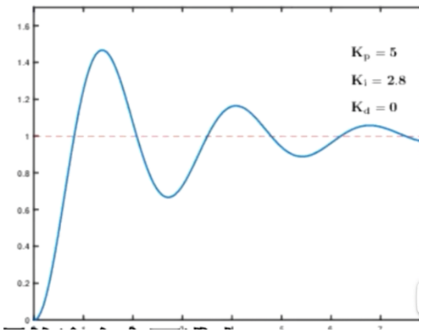


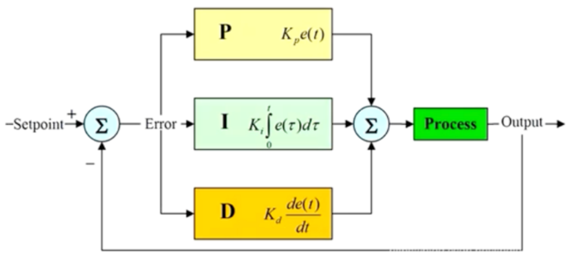
Figure 2. PI

1.4 PID 控制（比例+积分+微分)

在微分控制中，控制器的输出与输入误差信号的微分（即误差的变化率）成正比关系。自动控制系统在克服误差的调节过程中可能会出现振荡甚至失稳。其原因是由于存在有较大惯性组件（环节）或有滞后（delay）组件，具有抑制误差的作用， 其变化总是落后于误差的变化。解决的办法是使抑制误差的作用的变化“超前”，即在误差接近零时，抑制误差的作用就应该是零。这就是说，在控制器中仅引入“比例”项往往是不够的，比例项的作用仅是放大误差的幅值，而需要增加的是“微分项”，它能预测误差变化的趋势，这样，具有比例+微分的控制器，就能够提前使抑制误差的控制作用等于零，甚至为负值，从而避免了被控量的严重超调。所以对有较大惯性或滞后的被控对象，比例+微分（PD）控制器能改善系统在调节过程中的动态特性。

$$u(t) = K_p * e(t) + K_i * \int_0^t e(t)dt + K_d * \frac{de(t)}{dt}$$

$$u(t) = K_p * e(t) + K_i * \sum_{n=0}^{t} e(n) + K_d * [e(t) - e(t-1)]$$



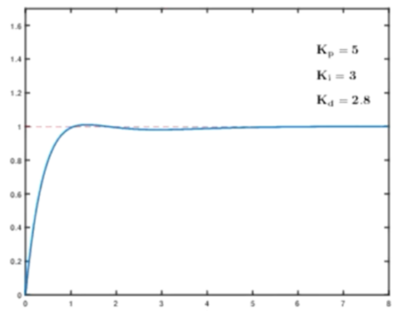


Figure 3. PID

1.5 PID 的适用系统

二阶以内的线性系统：

0 阶：

$$y = kx$$

1 阶：

$$T\frac{dy}{dt} + y = kx$$

2 阶：

$$T^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta T\frac{dy}{dt} + y = kx$$

- 对于高阶系统，可以考虑化简为二阶系统
- 对于非线形系统，可通过李亚普诺夫方法在非线形系统的平衡点处进行线性化

线性系统特性：

- **齐次性**

  对于$y = f(x)$，满足$ky = f(kx)$
- **叠加性**

  对于$y_1 = f(x_1)$和$y_2 = f(x_2)$，满足$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$

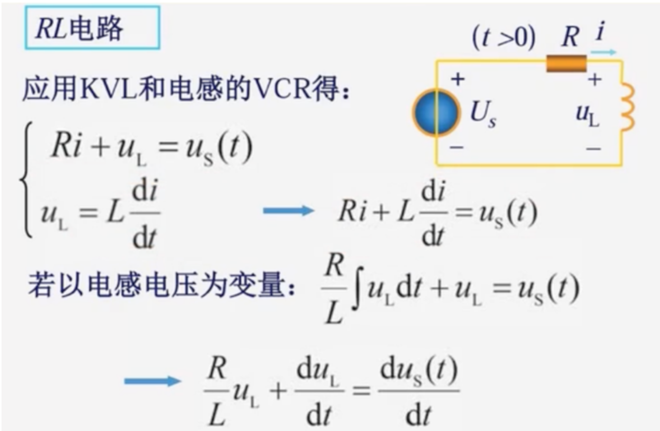


Figure 4. 一阶系统

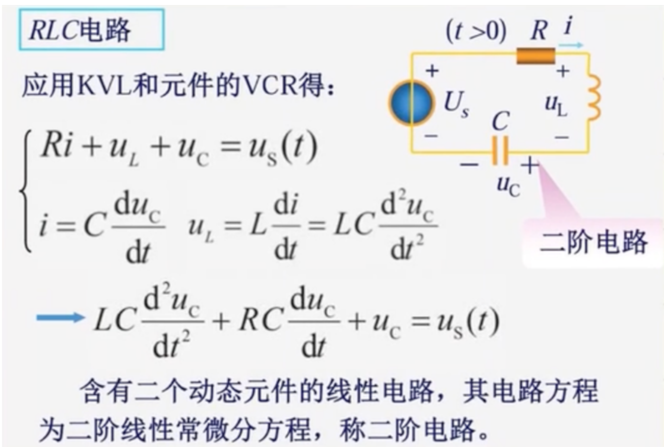


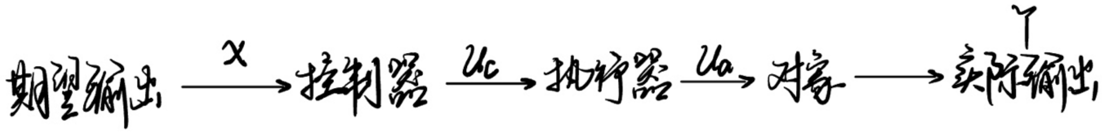
Figure 5. 二阶系统

2. 控制系统概述

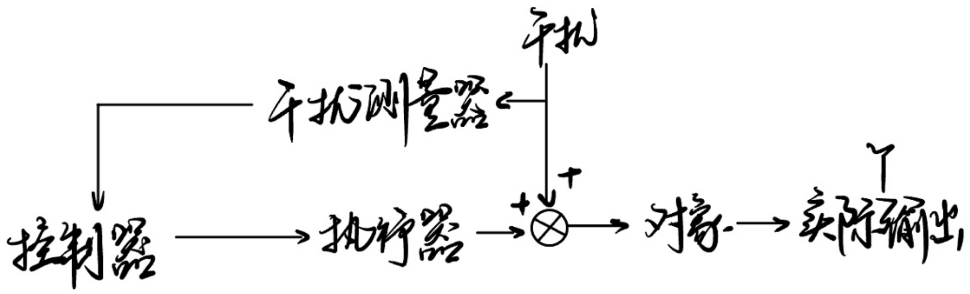
2.1

开环控制

- 一般开环控制系统

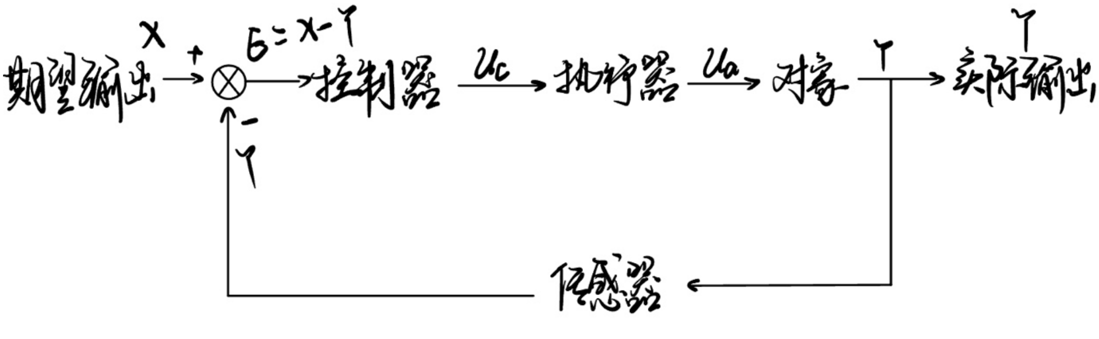


- 前馈控制系统

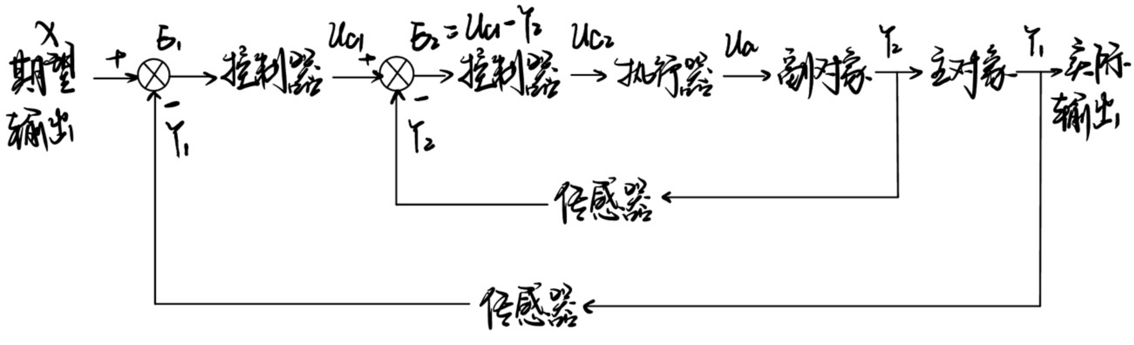


闭环控制

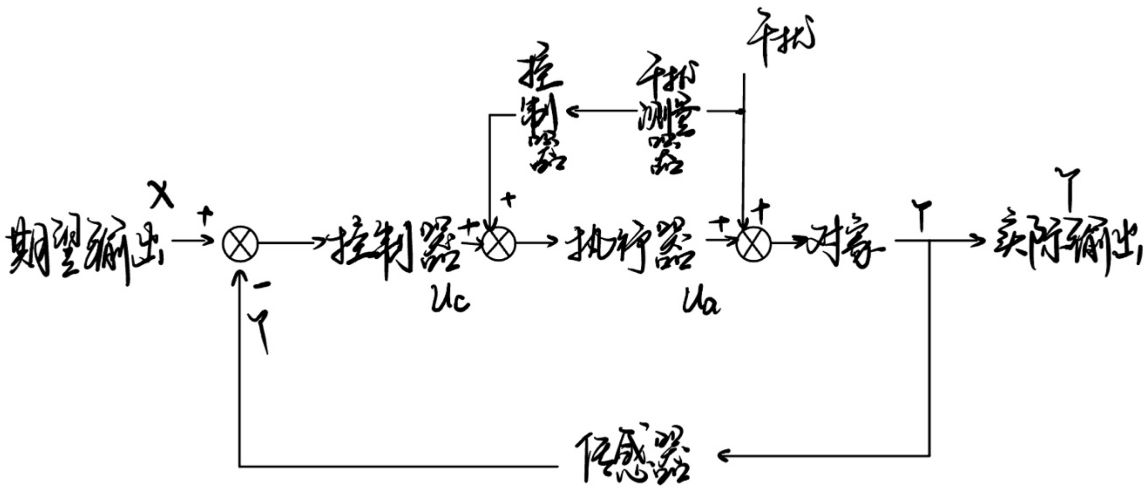
- 单闭环



- 双闭环



前馈-反馈复合控制系统



3. PID 公式解析

3.1 抽象公式

- **原始公式：**

$$C=\frac{1}{P}\left(e+\frac{1}{T_i}\int_0^t e\,dt+T_d\frac{de}{dt}\right)$$

  其中，P表示比例大小，T_i表示积分时间，T_d表示微分时间。

- **实际常用：**

  连续

$$C=K_p e_i+K_i\int_0^t e\,dt+k_d\frac{de}{dt}$$

  离散

$$C=K_p e_i+K_i\sum_{i=0}^{N}e_i+k_d\frac{de}{dt}\left(\frac{e_i-e_{i-1}}{\Delta t}\right)=K_p e_i+K_i\sum_{i=0}^{N}e_i+k_d\frac{de}{dt}(e_i-e_{i-1})$$

3.2 其余控制补充

- **积分限幅**
- **积分分离**