Cvičení 6 - Vybraná rozdělení spojité náhodné veličiny

Rozdělení NV	**Popis**	**Hustota pravděpodobnosti** **Distribuční funkce** **Intenzita poruch**	$\boldsymbol{E(X)}$	$\boldsymbol{D(X)}$
Rovnoměrné $Ro(a,b)$	$f(x)$ je na $(a;b)$ konstantní, jinde nulová	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in \langle a;b \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
Exponenciální $Exp(\lambda)$	doba do 1. události, doba mezi událostmi (pouze v období stabilního života)	$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}; t > 0; \lambda > 0$ $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; t > 0; \lambda > 0$ $\lambda(t) = \lambda = \text{konst.}; t > 0; \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Weibullovo $W(\Theta,\beta)$	doba do 1. události (poruchy)(vhodná volba β umožuje použití v libovolném období intenzity poruch)	$f(t) = \frac{\beta}{\Theta}\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}$ $F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}$ $\lambda(t) = \frac{\beta}{\Theta}\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1} \quad t > 0; \Theta > 0; \beta > 0$		
Normované normální $N(0,1)$	hodnoty distribuční funkce jsou tabelovány, hustota pravděpodobnosti je sudá funkce - Gaussův klobouk	$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}; -\infty < x < \infty$ $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$	0	1
Normální $N(\mu;\sigma^2)$	distribučí funkci určjeme pomocí standardizace normální náhodné veličiny	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$ $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\left(\frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dt$	μ	σ^2

	hustota pravděpod.: $f(x)$	Distrib. fce : $F(x)$
Rovnoměrné $Ro(a,b)$	dunif(x, a, b)	punif(x,a,b)
Exponenciální $Exp(\lambda)$	dexp(x, λ)	pexp(x, λ)
Weibullovo $W(\Theta,\beta)$	dweibull(x, β, Θ)	pweibull(x, β, Θ)
Normální $N(\mu;\sigma^2)$	dnorm(x, μ, σ)	pnorm(x, μ, σ)

Příklady:

Příklad 1.

Výška v populaci chlapců ve věku 3,5-4 roky má normální rozdělení se střední hodnotou 102 cm a směrodatnou odchylkou 4,5 cm. Určete, jaké procento chlapců v uvedeném věku má výšku menší nebo rovnou 93 cm.

X .... výška náhodně vybraného chlapce

$X \sim N(\mu = 102; \sigma = 4{,}5)$

$P(X \leq 93) = P\underbrace{(X < 93)}_{F(93)} =$

$= \text{pnorm}(93, 102, 4{,}5) \doteq 0{,}0228$

2,28%

2,28% chlapců má výšku menší nebo rovnou 93 cm.

Příklad 2.

Průměrná životnost strojní součástky je 30 000 hodin. Předpokládejme, že součástka je v období stabilního života. Určete:

a)

pravděpodobnost, že součástka nevydrží více než 2 000 hodin,

X ..... doba do poruchy součástky

$X \sim Exp(\lambda = 1/30000)$

$P(X < 2000) = F(2000)$

$30000 = E(X) = \frac{1}{\lambda} \Downarrow \lambda = \frac{1}{30000}$

$\doteq 0{,}064$

Prav., že součástka nevydrží více než 2000 h. je 6,4%

b)

pravděpodobnost, že součástka vydrží více než 35 000 hodin,

$P(X > 35000) = 1 - P(X < 35000) = 1 - F(35000)$

$= 0{,}3114$

Pravděp. je 31,14%

c)

dobu, do níž se porouchá 95 % součástek.

$P(X < w) = 0{,}95$

$F(w) = 0{,}95 \Rightarrow w = F^{-1}(0{,}95)$

$w = 89872$

doba do níž se porouchá 95% s. je 89872 hod.

Příklad 3.

Výrobní zařízení má poruchu v průměru jednou za 2000 hodin. Veličina Y představující dobu čekání na poruchu má exponenciální rozdělení. Určete dobu T0 tak, aby pravděpodobnost, že přístroj bude pracovat delší dobu než T0, byla 0,99.

Y .... doba do poruchy

$Y \sim Exp(\lambda = 1/2000)$

$E(Y) = 1/\lambda$

$P(Y > T_0) = 0{,}99$

$1 - P(Y < T_0) = 0{,}99 \quad \backslash -1, \cdot(-1)$

$P(Y < T_0) = 0{,}01$

$F(T_0) = 0{,}01 \Rightarrow T_0 = F^{-1}(0{,}01)$

$T_0 \doteq 20{,}1$

Čas po kterém bude v provozu 99% strojů je 20,1 hod.

Příklad 4.

Výsledky měření jsou zatíženy jen normálně rozdělenou chybou s nulovou střední hodnotou a se směrodatnou odchylkou 3 mm. Jaká je pravděpodobnost, že při 3 měřeních bude alespoň jednou chyba v intervalu (0 mm; 2,4mm)?

X .... chyba měření

$X \sim N(\mu = 0;\ \sigma = 3)$

$P(0 < X < 2{,}4) = F(2{,}4) - F(0) \doteq \underset{\doteq \pi}{0{,}288}$

$n = 3;\ \pi \doteq 0{,}288$

Y .... počet měř. s chybou v $I = \langle 0; 2{,}4)$

$Y \sim Bin(n = 3;\ \pi \doteq 0{,}288)$

$P(Y \geq 1) = 1 - \underbrace{P(Y < 1)}_{F(1)} \doteq 0{,}639$

Pravd. že alespoň jedno měření bude s chybou v Int. je 63,9%

Příklad 5.

Ve velké počítačové síti se průměrně přihlašuje 25 uživatelů za hodinu. Určete pravděpodobnost, že:

a)

se nikdo nepřihlásí během 14:30 - 14:36,

X ... počet přihlášených lidí v čase 14:30-14:36

$X \sim Poi(\lambda \cdot t = 25/10)$

$P(X=0) = 0{,}082$ $\quad \lambda = 25/60$

$t = 6$

Pravd. je $\underline{8{,}2\%}$

b)

do dalšího přihlášení uběhnou 2-3 minuty.

Y ... doba do dalšího přihlášení

$Y \sim Exp(\lambda = 25/60)$

$P(2<Y<3) = F(3) - F(2) \doteq 0{,}148$

Pravd. je 14,8%

c)

Určete maximální délku časového intervalu tak, aby pravděpodobnost, že se nikdo nepřihlásí byla alespoň 0,90.

$P(Y > w) = 0{,}90$

$1 - P(Y<w) = 0{,}90 \quad \backslash -1 \,;\, \cdot(-1)$

$P(Y<w) = 0{,}1$

$w = F^{-1}(0{,}1)$

$w \doteq 0{,}253$ min $\rightarrow w \doteq 15{,}20$

maximální délka tak aby procedura, že se nikde nepřihlásí byla 10%. je 15,2 sekund.

Příklad 6.

Náhodná veličina X má normální rozdělení N(μ; σ). Určete:

$$X \sim N(\mu, \sigma) \quad 0, 1$$

$$F_X(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \quad F_{N_0}$$

a)

P(μ − 2σ < X < μ + 2σ), =

$$= \underbrace{P(X < \mu + 2\sigma)} - P(X < \mu - 2\sigma)$$

$$F_X(\mu + 2\sigma) = \Phi\left(\frac{\cancel{\mu} + 2\sigma - \cancel{\mu}}{\sigma}\right) = \Phi(2)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) \doteq \underline{0{,}9545}$$

b)

nejmenší k ∈ Z, tak, aby P(μ − kσ < X < μ + kσ) > 0,99.

$$F(\mu + k \cdot \sigma) - \underbrace{F(\mu - k\sigma)}_{\parallel} = 0{,}99$$

$$1 - F(\mu + k \cdot \sigma)$$

$$2 \cdot F(\mu + k\sigma) - 1 = 0{,}99$$

$$F(\mu + k\sigma) = 0{,}995$$

$$F_X^{-1}(0{,}495) = \mu + k \cdot \sigma$$

$X \sim N(\mu, \sigma)$

$$\frac{F_X^{-1}(0{,}495) - \mu}{\sigma} = \underline{\underline{k}} \doteq 2{,}576$$

$$k \in \mathbb{Z} \rightarrow \underline{\underline{k = 3}}$$

Příklad 7.

Na prohlídce výstavy je promítán doprovodný film o životě autora vystavovaných děl. Jeho projekce začíná každých 20 minut. Určete pravděpodobnost, že pokud náhodně přijdete do promítacího sálu,

a)

nebudete na začátek filmu čekat víc než 5 minut,

X ...... doba do začátku dalšího prom.

$X \sim Ro(a = 0; b = 20)$

$P(X < 5) = 0{,}25$

Pravděp. je 25%

b)

budete čekat mezi 5 a 10 minutami,

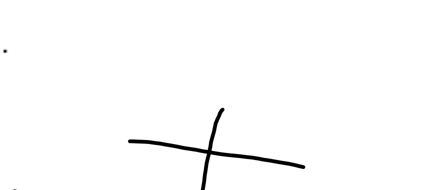
$P(5 < X < 10) = F(10) - F(5) = 0{,}25$

Pravd. je 25%

c)

střední hodnotu a směrodatnou odchylku doby čekání na začátek filmu.

$E(X) = \dfrac{a+b}{2} = 10$



$D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{400}{12} = \dfrac{100}{3}$

$\sigma = \sqrt{D(X)} \doteq 5{,}77$

Příklad 8.

Při kontrole jakosti přebíráme součástku pouze tehdy, jestliže se její rozměr pohybuje v mezích 26-27 mm. Rozměry součástek mají normální rozdělení se střední hodnotou 26,4 mm a směrodatnou odchylkou 0,2 mm. Jaká je pravděpodobnost, že rozměr součástky náhodně vybrané ke kontrole bude v požadovaných mezích?

X ... rozměr součástky

$X \sim N(\mu = 26{,}4;\ \sigma = 0{,}2)$

$P(26 < X < 27) = F(27) - F(26)$

$= 0{,}976$

Pravděp. že součástka bude v pož. mezích je 97,6%

Příklad 9.

Délka skoků sportovce Jakuba měřená v cm má normální rozdělení N(μ1; σ1), kde μ1 = 690 a σ1 = 10. Délka skoků sportovce Aleše měřená v cm má také normální rozdělení N(μ2; σ2), kde μ2 = 705 a σ2 = 15. Na závody se kvalifikuje ten, kdo ze dvou skoků alespoň jednou skočí více než 700 cm.

A ... délka skoků Aleše

$A \sim N(\mu = 705; \sigma = 15)$

$P(A > 700) = 1 - F_A(700) =$

$p_A = 0{,}631$

$\pi_A = 1 - (1 - p_A)^2 = \underline{0{,}864}$

J ... délk. skok. Jak.

$J \sim N(\mu = 690; \sigma = 10)$

$P(J > 700) = 1 - F_J(700) =$

$p_J \doteq 0{,}159$

$\pi_J = 1 - (1 - p_J)^2 \doteq \underline{0{,}292}$

a)

S jakou pravděpodobností se oba dva kvalifikují na závody?

$\pi_A \cdot \pi_J \doteq 0{,}252$

Pravd. je 25,2%

b)

S jakou pravděpodobností se kvalifikuje Aleš, ale Jakub ne?

$\pi_A \cdot (1 - \pi_J) \doteq 0{,}611$

Pravd. je 61,1%