Příklad 1.
Určete pravděpodobnost, že při hodu 20stěnnou spravedlivou (férovou) kostkou padne číslo větší než 14.

$\Omega = \{1, 2, \ldots 20\}$

$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$P = \frac{6}{20} = 0{,}3$

Příklad 2.
Určete pravděpodobnost, že při hodu 20stěnnou kostkou padne číslo větší než 14, víte-li, že sudá čísla padají 2x častěji než lichá.

$\Omega = \{1, 2, \ldots 20\}$

$P(L_i) = P(1) = P(3) \ldots$

$+ P(\Omega) = 1$

$\underline{P(S_i) = 2P(L_i)}$

$\underline{P(1) + P(2) + \ldots + P(20) = 1}$

$10 \cdot P(S_i) + 10 \cdot P(L_i) = 1 \rightarrow 20P(L_i) + 10P(L_i) = 1$

$\underline{P(S_i) = 2P(L_i)}$

$30 \cdot P(L_i) = 1$

$P(S_i) = \frac{2}{30}$

$P(L_i) = \frac{1}{30}$

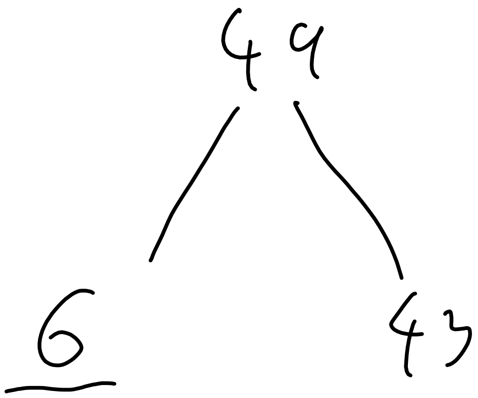
$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

$$P(A) = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{1}{30} + \frac{2}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Příklad 3.
Určete pravděpodobnost, že ve sportce uhodnete 4 čísla.
(Ve sportce se losuje 6 čísel ze 49.)

$$|\Omega| = C(49, 6)$$

$$|A| = C(6, 4) \cdot C(43, 2)$$



$$P = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C(6,4) \cdot C(43,2)}{C(49,6)} \doteq \underline{\underline{0{,}001}}$$

Příklad 4.
Z abecedního seznamu studentů zapsaných na dané cvičení vybere učitel prvních 12 a nabídne jim sázku: „Pokud se každý z Vás narodil v jiném znamení zvěrokruhu, dám každému z Vás 100 Kč. Pokud jsou však mezi Vámi alespoň dva studenti, kteří se narodili ve stejném znamení, dá mi každý z Vás 100 Kč.“ Vyplatí se studentům sázku přijmout? S jakou pravděpodobností studenti vyhrají?

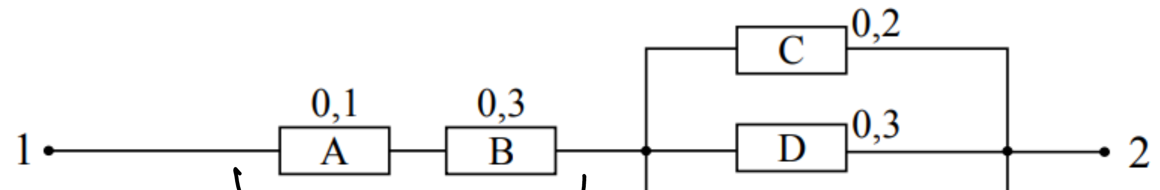
$$|\Omega| = V^*(12,12) = 12^{12}$$

$$|A| = V(\underline{12},\underline{12}) = P(12) = 12!$$

$$P = \frac{12!}{12^{12}} \doteq 5 \cdot 10^{-5} = 0{,}00005$$

$$= 0{,}005\%$$

Příklad 5.
Spočtěte pravděpodobnost toho, že z bodu 1 do bodu 2 bude protékat elektrický proud, je-li část el. obvodu včetně pravděpodobnosti poruch jednotlivých součástek vyznačen na následujícím obrázku.
(Poruchy jednotlivých součástek jsou na sobě nezávislé.)



B1

$P(\underline{A}) = 0{,}1$

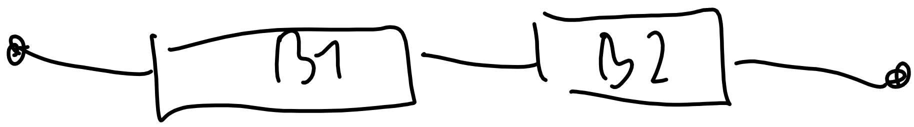
$P(\bar{A}) = 0{,}9$

B2

$P(\bar{A}) \quad P(\bar{B})$

$P(B1) = 1 - (1-0{,}1)\cdot(1-0{,}3) = 0{,}37$

$P(B2) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}012$

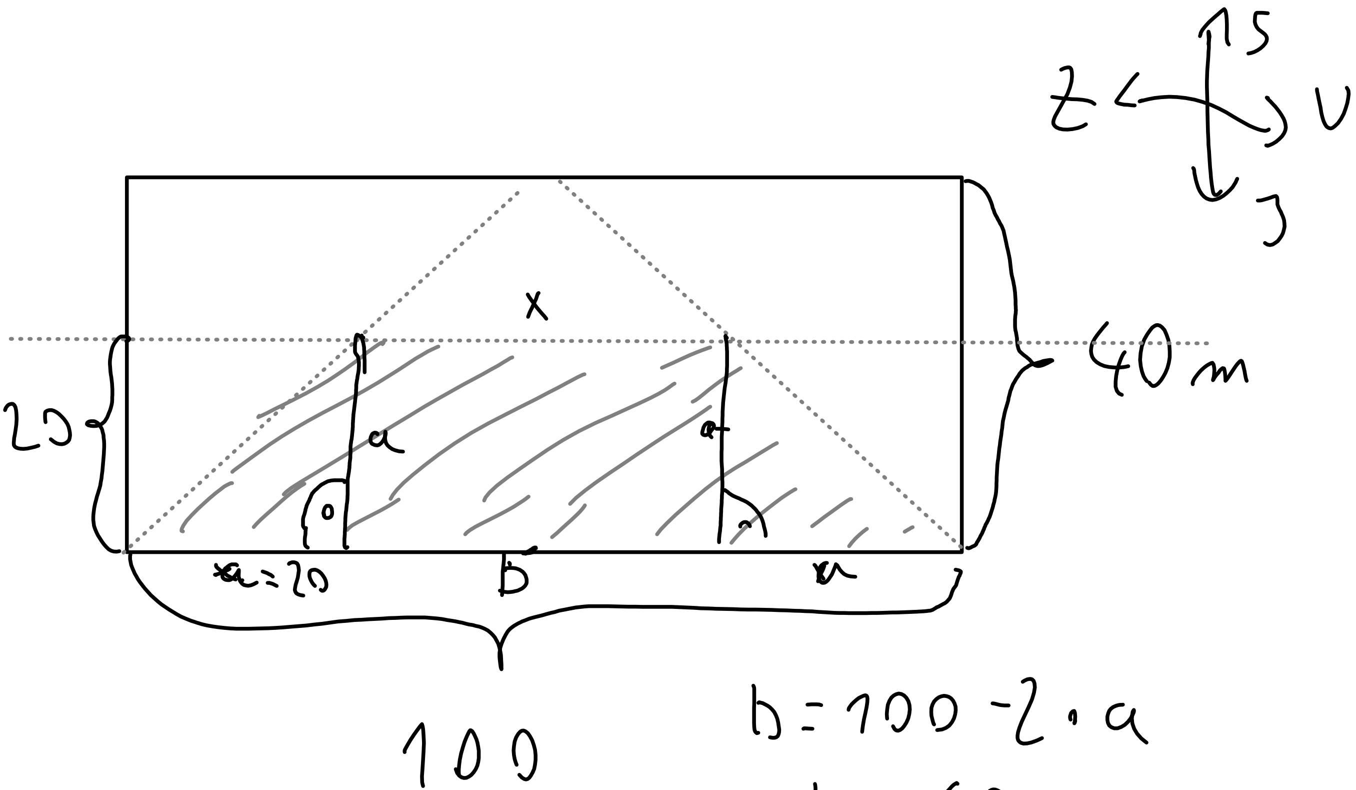


$P(S) = 1 -$

$\underline{P(\bar{S})} = 1 - P(S) = \underline{(1 - P(B1))\cdot(1 - P(B2))}$

$= \underline{\underline{0{,}622}}$

Příklad 6.
Ohrada má obdélníkový tvar, východní a západní stěna mají délku 40 m, jižní a severní pak 100 m. V této ohradě běhá kůň. Jaká je pravděpodobnost, že je k jižní stěně blíž než ke zbývajícím třem?



$b = 100 - 2 \cdot a$

$b = 60\ m$

$= \frac{20 \cdot 20}{2} \cdot 2 = 20^2$

$= 20.60$

$|\Omega| = 40.100$

$P = \frac{20.20 + 20.60}{40.100} = \underline{\underline{0,4}}$

Příklad 7.
U pacienta je podezření na jednu ze čtyř vzájemně se vylučujících nemocí - N1, N2, N3, N4 s pravděpodobností výskytu
P(N1)=0,1; P(N2)=0,2; P(N3)=0,4; P(N4)=0,3.
Laboratorní zkouška A je pozitivní v případě první nemoci v 50 % případů, u druhé nemoci v 75 % případů, u třetí nemoci v 15 % případů a u čtvrté v 20 % případů.
Jaká je pravděpodobnost, že výsledek laboratorní zkoušky bude pozitivní?

A - zkouška je pozitivní

$i \neq j$

$P(N_i \cap N_j) = 0$

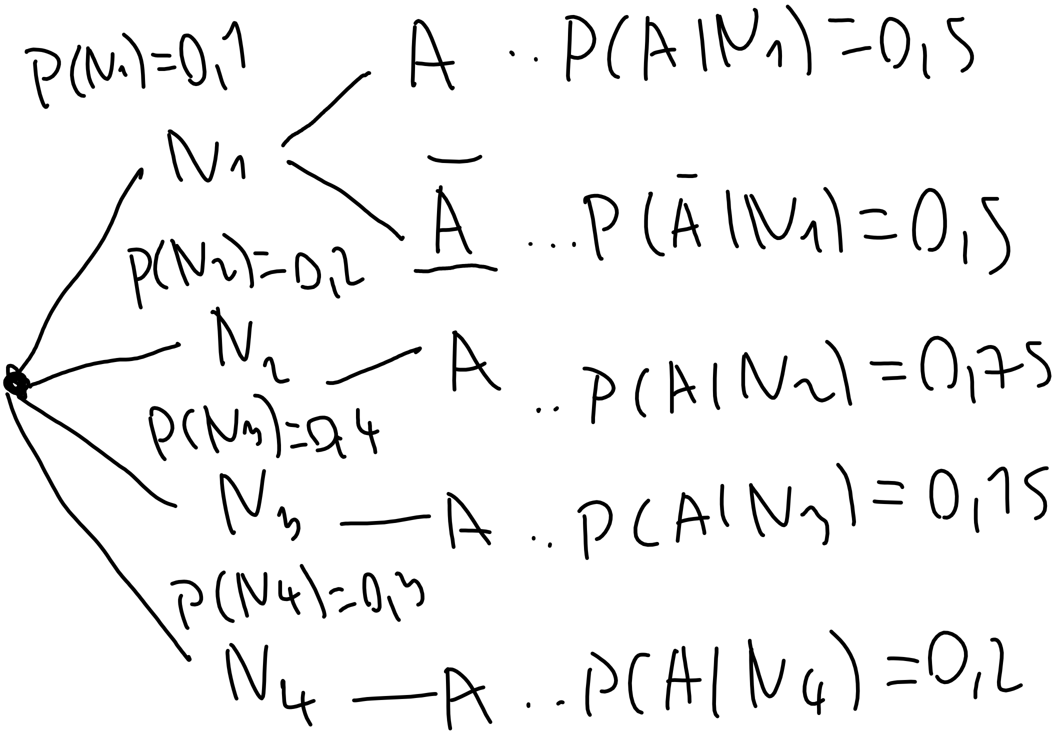
$P(A|N_1) = 0{,}5$

$P(A|N_2) = 0{,}75$

$P(A|N_3) = 0{,}15$

$P(A|N_4) = 0{,}2$

$P(A) = ?$



$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} \underbrace{P(N_i) \cdot P(A|N_i)}_{P(A \cap N_i)} = \underline{\underline{0{,}32}}$$

Příklad 8.
Telegrafické znaky se skládají ze signálů „tečka“, „čárka“. Je statisticky zjištěno, že se zkomolí 25 % sdělení „tečka“ a 20 % signálů „čárka“. Dále je známo, že signály se používají v poměru 3:2.
Určete pravděpodobnost, že byl přijat správně signál, jestliže byl přijat signál „tečka“.

$\left.\begin{matrix} O\bullet \\ O- \end{matrix}\right\}$ UMVDJ

$P\bullet$

$P-$

$P(P\bullet \mid O\bullet) = 0{,}75$

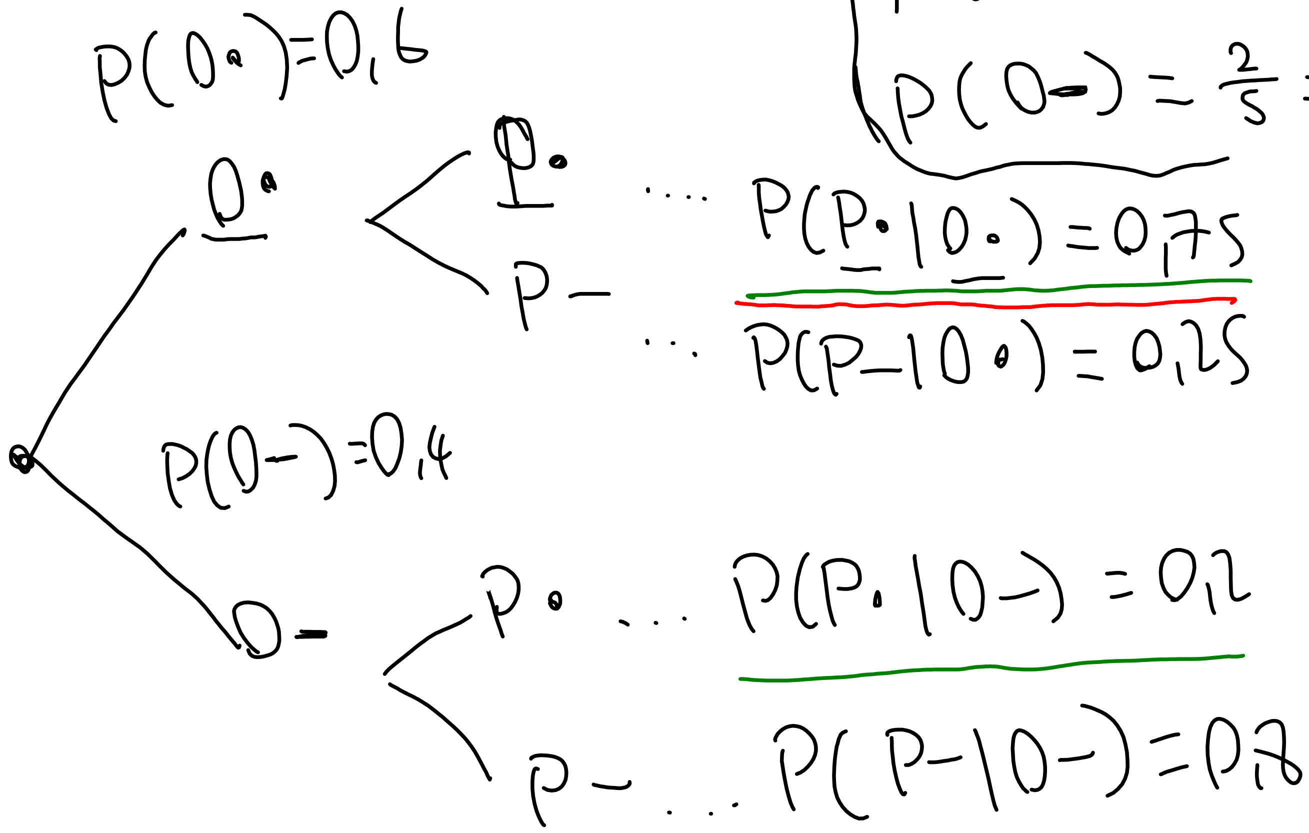
$P(P- \mid O\bullet) = 0{,}25$

$P(P\bullet \mid O-) = 0{,}2$

$P(P- \mid O-) = 0{,}8$

$P(O\bullet) = \frac{3}{5} = 0{,}6$

$P(O-) = \frac{2}{5} = 0{,}4$



$$P(O\bullet \mid P\bullet) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}75}{0{,}6 \cdot 0{,}75 + 0{,}4 \cdot 0{,}2} \doteq \underline{\underline{0{,}85}}$$

Příklad 9.
V jednom městě jezdí 85 % zelených taxíků a 15 % modrých.
Svědek dopravní nehody vypověděl, že nehodu zavinil řidič modrého taxíku, který pak ujel. Testy provedené za obdobných světelných podmínek ukázaly, že svědek dobře identifikuje barvu taxíku v 80 % případů a ve 20 % případů se mýlí.

- Jaká je pravděpodobnost, že viník nehody skutečně řídil modrý taxík?
- Následně byl nalezen další nezávislý svědek, který rovněž tvrdí, že taxík byl modrý. Jaká je nyní pravděpodobnost, že viník nehody skutečně řídil modrý taxík?
- Ovlivní pravděpodobnost, že viník nehody skutečně řídil modrý taxík to, zda dva výše zmínění svědci vypovídali postupně nebo najednou?

Z … zavinil zelený $\qquad P(Z)=0{,}85$

M … zavinil modrý $\qquad P(M)=0{,}15$

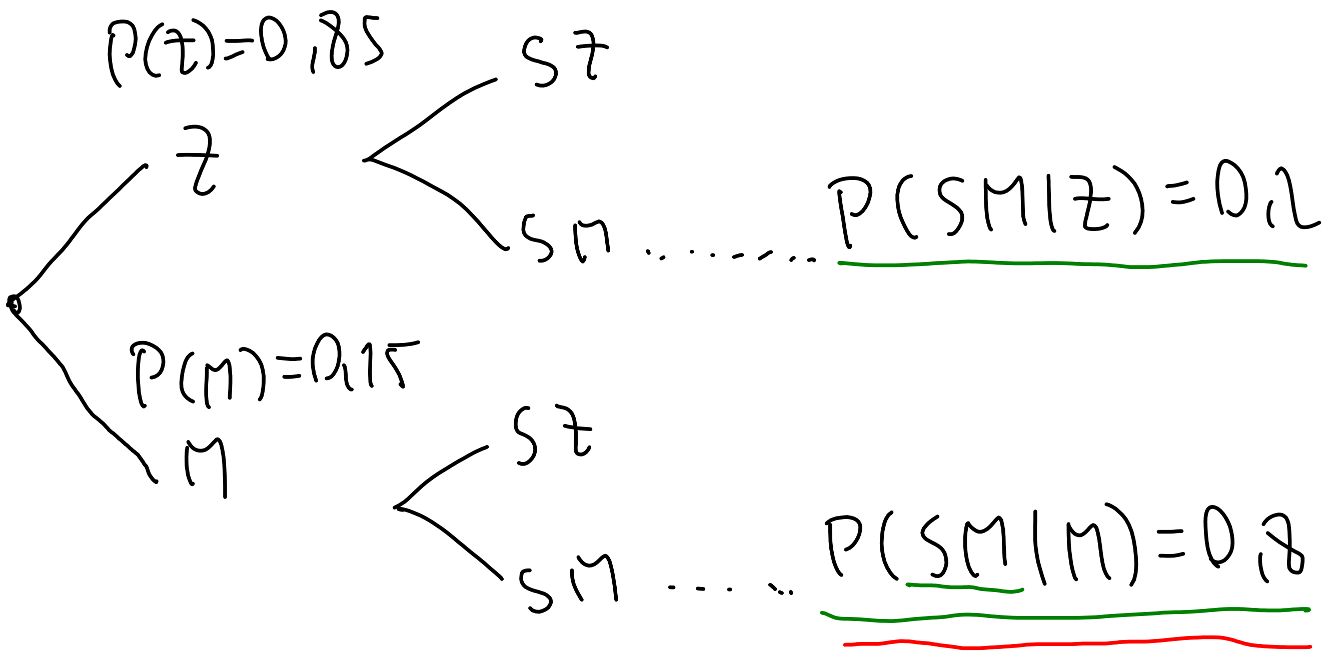
SZ … svědek zelený $\qquad P(SZ|Z)=0{,}8$

SM … svědek modrý $\qquad P(SM|Z)=0{,}2$

$P(SZ|M)=0{,}2$

$P(SM|M)=0{,}8$

a) $P(M|SM)=?$



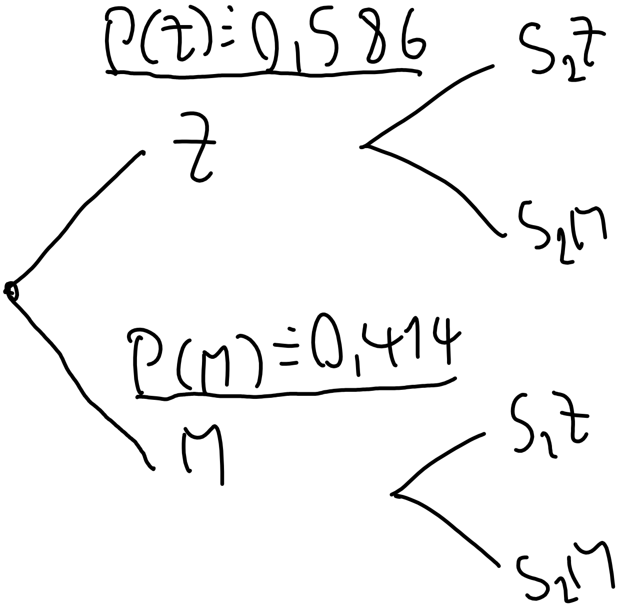
$$P(M|SM) = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}8}{0{,}85 \cdot 0{,}2 + 0{,}15 \cdot 0{,}8} \doteq \underline{0{,}414}$$

b) $P(M) \doteq 0{,}414$

$P(Z) = 1 - 0{,}414$

$P(S_1M \cap S_2M) =$

$\underline{\underline{P(S_1M) \cdot P(S_2M)}}$

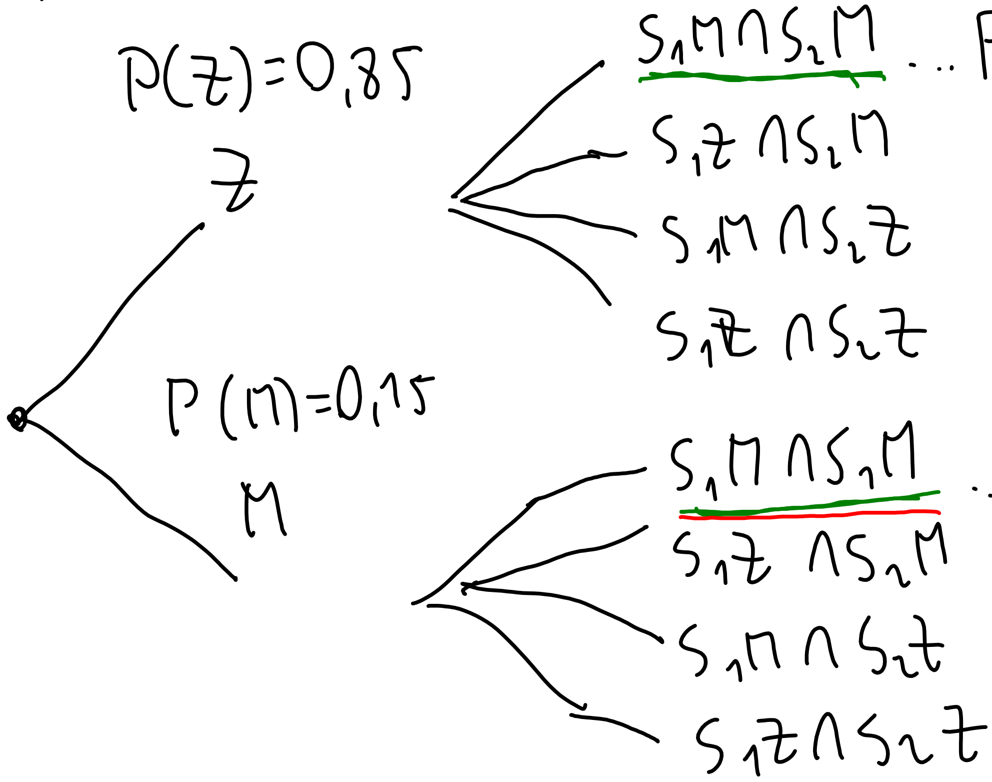


$\underline{P(S_2M|Z) = 0{,}2}$

$\underline{\underline{P(S_2M|M) = 0{,}8}}$

c) $$P(M|S_2M) = \frac{0{,}414 \cdot 0{,}8}{0{,}586 \cdot 0{,}2 + 0{,}414 \cdot 0{,}8} \doteq \underline{\underline{0{,}738}}$$

c)



$$P(S_1M \cap S_2M \mid Z) = P(S_1M \mid Z) \cdot P(S_2M \mid Z) = 0{,}2 \cdot 0{,}2$$

$$P(S_1M \cap S_2M \mid M) = P(S_1M \mid M) \cdot P(S_2M \mid M) = 0{,}8 \cdot 0{,}8$$

$$P(M \mid S_1M \cap S_2M) = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8}{0{,}85 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}15 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8} =$$

$$\doteq \underline{\underline{0{,}738}}$$

Příklad 10.
Potřebujeme zjistit odpověď na určitou citlivou otázku. Jak odhadnout, kolik procent dotazovaných na otázku odpoví ANO a přitom všem respondentům zaručit naprostou anonymitu? Jedním z řešení je tzv. dvojitě anonymní anketa:
Necháme respondenty hodit korunou a dvojkorunou a ti, kterým padl na koruně líc napíšou na lísteček odpověď (ANO/NE) na citlivou otázku. Ostatní respondenti napíší, zda jim padl na dvojkoruně líc (ANO/NE).
Jakým způsobem určíme podíl studentů, kteří na citlivou otázku odpověděli ANO?
Předpokládejme, že respondenti byli dotazování, zda podváděli u zkoušky. Z anketních lístků se zjistilo, že „ANO“ odpovědělo 120 respondentů a „NE“ odpovědělo 200 respondentů.
Kolik procent studentů podvádělo u zkoušky?

J ... jednokorunové A $\bar{J}$ ... -"- N

D ... dvoukorunové A $\bar{D}$ ... -"- N

A ... skutečná odpověď A ..... -"-

$P(J)=0{,}5$

J → A ... $P(A|J)=P(A)=x$

J → N ... $P(N|J)=P(N)=1-x$

$P(\bar{J})=0{,}5$

$\bar{J}$ → D ... $P(D|\bar{J})=P(D)=0{,}5$

$\bar{J}$ → $\bar{D}$ ... $P(\bar{D}|\bar{J})=P(\bar{D})=0{,}5$

DA ... dotazníků ano

$$P(DA)=\frac{120}{320}$$

$$P(DA) = \underline{P(J)} \cdot \underbrace{P(A|J)}_{P(A)=x} + \underline{P(\bar{J})} \cdot \underbrace{P(D|\bar{J})}_{\underline{P(D)}}$$

$$\frac{120}{320} = \frac{12}{32} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8} = 0{,}5 \cdot x + 0{,}5 \cdot 0{,}5$$

$$0{,}5 \cdot x = \frac{3}{8} - 0{,}25 \quad | \cdot 2$$

$$x = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$