

### Příklad 1.

Určete pravděpodobnost, že při hodu 20stěnnou spravedlivou (férovou) kostkou padne číslo větší než 14.

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 20\}$$

$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

$$P = \frac{6}{20} = 0,3$$

### Příklad 2.

Určete pravděpodobnost, že při hodu 20stěnnou kostkou padne číslo větší než 14, víte-li, že sudá čísla padají 2x častěji než lichá.

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 20\}$$

$$P(L_i) = P(1) = P(3) \dots$$

$$\underline{P(S_i) = 2 P(L_i)}$$

$$+ P(\Omega) = 1$$

$$\underline{P(1) + P(2) + \dots + P(20) = 1}$$

$$10 \cdot P(S_i) + 10 \cdot P(L_i) = 1 \rightarrow 20 P(L_i) + 10 P(L_i) = 1$$

$$\underline{P(S_i) = 2 P(L_i)}$$

$$30 \cdot P(L_i) = 1$$

$$P(S_i) = \frac{2}{30}$$

$$P(L_i) = \frac{1}{30}$$

$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

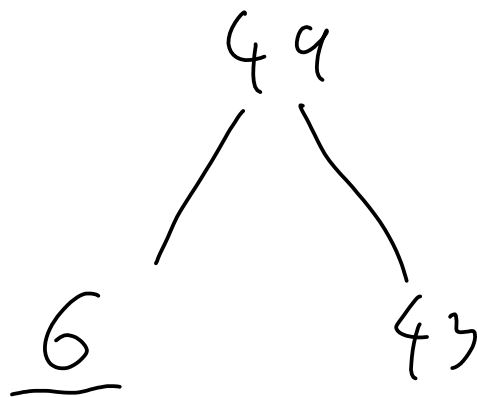
$$P(A) = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{1}{30} + \frac{2}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 0,3$$

Příklad 3.

Určete pravděpodobnost, že ve sportce uhodnete 4 čísla.  
(Ve sportce se losuje 6 čísel ze 49.)

$$|\Omega| = C(49, 6)$$

$$|A| = C(6, 4) \cdot C(43, 2)$$



$$P = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C(6, 4) \cdot C(43, 2)}{C(49, 6)} \approx \underline{\underline{0,007}}$$

Příklad 4.

Z abecedního seznamu studentů zapsaných na dané cvičení vybere učitel prvních 12 a nabídne jim sázku: „Pokud se každý z Vás narodil v jiném znamení zvěrokruhu, dám každému z Vás 100 Kč. Pokud jsou však mezi Vámi alespoň dva studenti, kteří se narodili ve stejném znamení, dá mi každý z Vás 100 Kč.“ Vyplatí se studentům sázku přijmout? S jakou pravděpodobností studenti vyhrají?

$$|\Omega| = V^*(12, 12) = 12^{12}$$

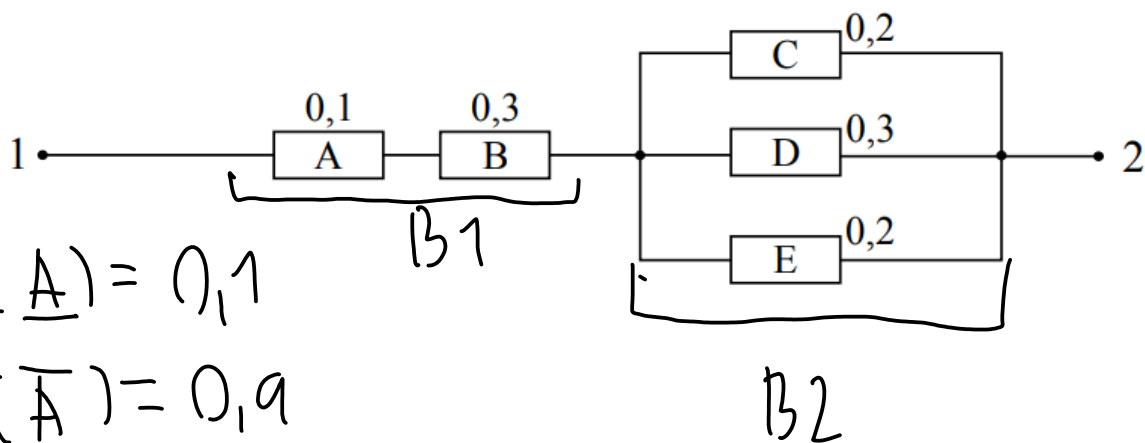
$$|A| = V(\underline{12}, \underline{12}) = P(12) = 12!$$

$$P = \frac{12!}{12^{12}} \approx 5 \cdot 10^{-5} = 0,00005$$

$$= 0,005\%$$

### Příklad 5.

Spočtete pravděpodobnost toho, že z bodu 1 do bodu 2 bude protékat elektrický proud, je-li část el. obvodu včetně pravděpodobnosti poruch jednotlivých součástí vyznačen na následujícím obrázku. (Poruchy jednotlivých součástí jsou na sobě nezávislé.)



$$P(A) = 0,1$$

$$P(\bar{A}) = 0,9$$

$$P(\bar{A})$$

$$P(\bar{B})$$

$$P(\bar{B})$$

$$P(B1) = 1 - (1 - 0,1) \cdot (1 - 0,3) = 0,37$$

$$P(B2) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,012$$



$$P(S) = 1 -$$

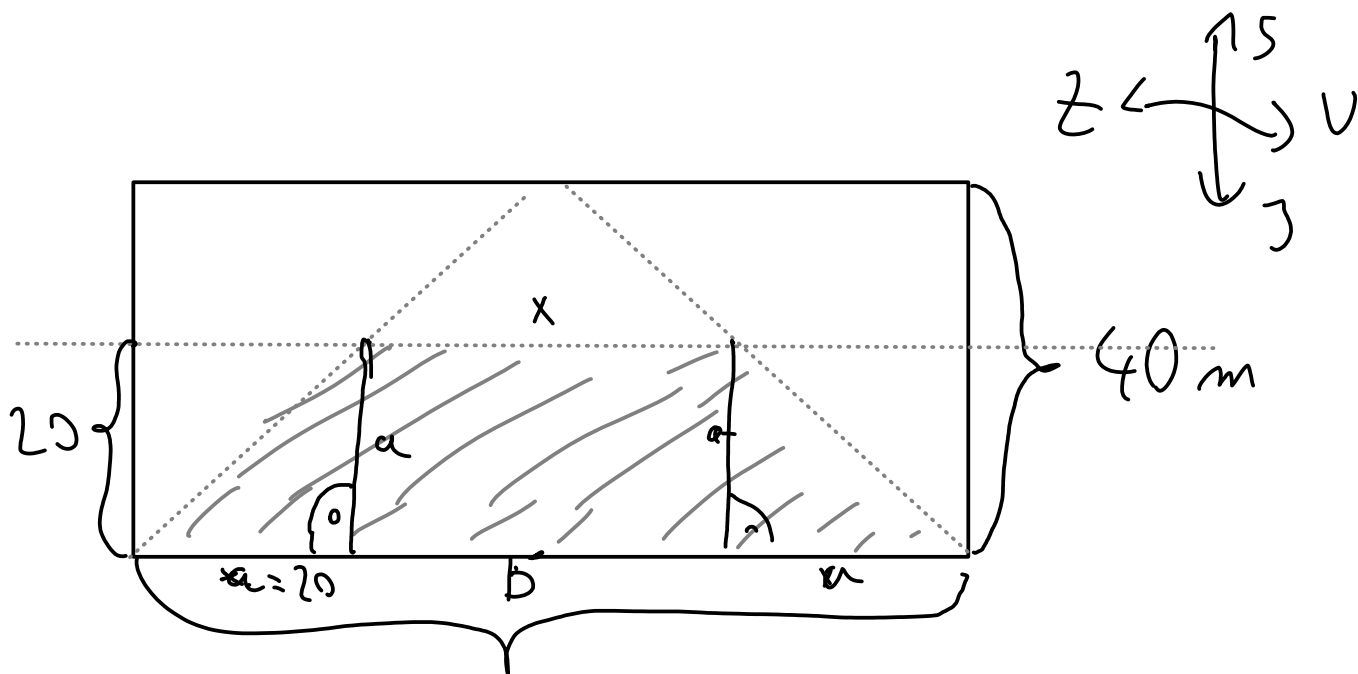


$$\underline{P(\bar{S}) = 1 - P(S) = (1 - P(B1)) \cdot (1 - P(B2))}$$

$$= \underline{\underline{0,622}}$$

# Příklad 6.

Ohrada má obdélníkový tvar, východní a západní stěna mají délku 40 m, jižní a severní pak 100 m. V této ohradě běhá kůň. Jaká je pravděpodobnost, že je k jižní stěně blíž než ke zbývajícím třem?



$$b = 100 - 2 \cdot a$$

$$b = 60 \text{ m}$$

$$= \frac{20 \cdot 20}{2} \cdot 2 = 20^2$$

$$60 \cdot 20 = 20 \cdot 60$$

$$S = 40 \cdot 100$$

$$P = \frac{20 \cdot 20 + 20 \cdot 60}{40 \cdot 100} = \underline{\underline{0,4}}$$

### Příklad 7.

U pacienta je podezření na jednu ze čtyř vzájemně se vylučujících nemocí -  $N_1, N_2, N_3, N_4$  s pravděpodobností výskytu

$$P(N_1)=0,1; P(N_2)=0,2; P(N_3)=0,4; P(N_4)=0,3.$$

Laboratorní zkouška A je pozitivní v případě první nemoci v 50 % případů, u druhé nemoci v 75 % případů, u třetí nemoci v 15 % případů a u čtvrté v 20 % případů.

Jaká je pravděpodobnost, že výsledek laboratorní zkoušky bude pozitivní?

A - Zkouška je pozitivní  $i \neq j$

$$P(A | N_1) = 0,5$$

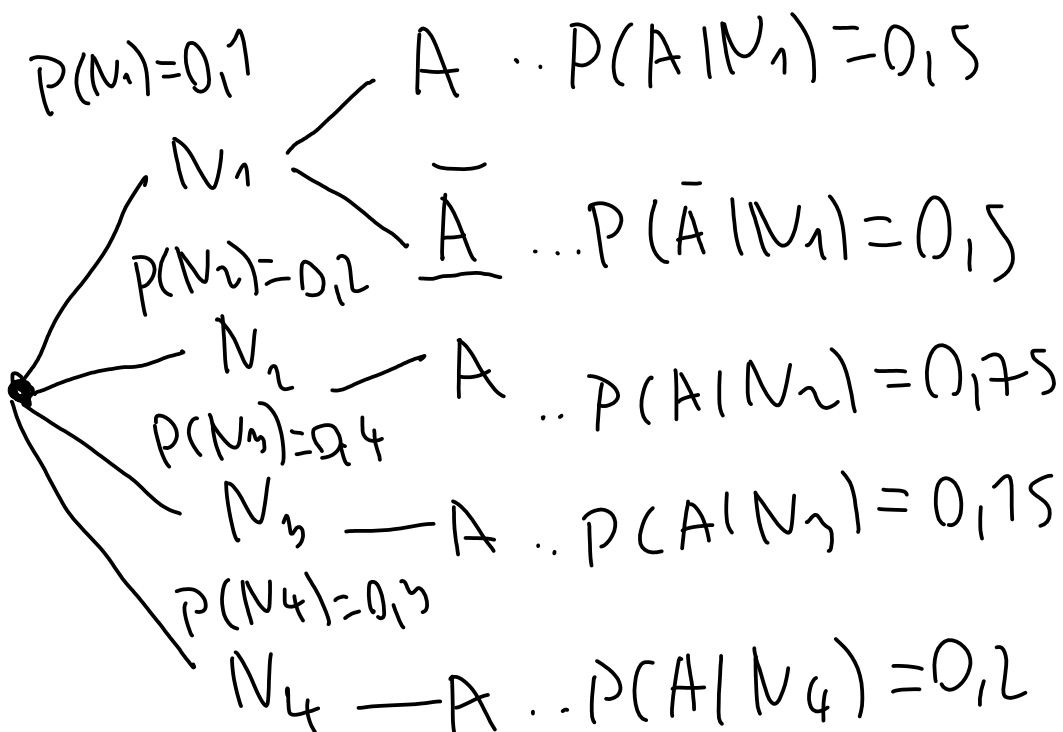
$$P(N_i \cap N_j) = 0$$

$$P(A | N_2) = 0,75$$

$$P(A | N_3) = 0,15$$

$$P(A | N_4) = 0,2$$

$$P(A) = ?$$



$$P(A) = \sum_{i=1}^4 \underbrace{P(N_i) \cdot P(A|N_i)}_{P(A \cap N_i)} = \underline{\underline{0,32}}$$

# Příklad 8.

Telegrafické znaky se skládají ze signálů „tečka“, „čárka“. Je statisticky zjištěno, že se zkomolí 25 % sdělení „tečka“ a 20 % signálů „čárka“. Dále je známo, že signály se používají v poměru 3:2. Určete pravděpodobnost, že byl přijat správně signál, jestliže byl přijat signál „tečka“.

$0 \cdot$   
 $0 -$

$$P(P \cdot | 0 \cdot) = 0,75$$

$$P(P - | 0 \cdot) = 0,25$$

$P \cdot$

$$P(P \cdot | 0 -) = 0,2$$

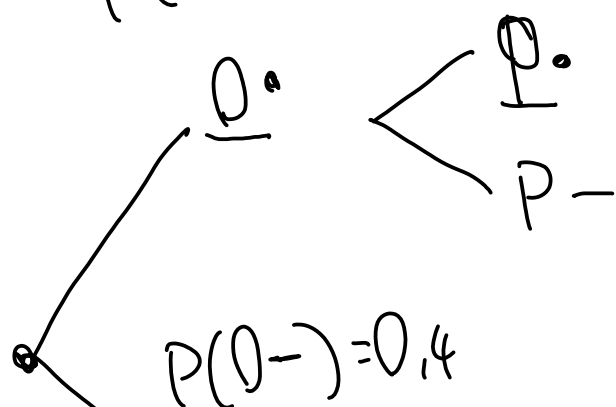
$P -$

$$P(P - | 0 -) = 0,8$$

$$P(0 \cdot) = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$P(0 -) = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$P(0 \cdot) = 0,6$$



$$P(0 -) = 0,4$$

$$P(P \cdot | 0 \cdot) = 0,75$$

$$P(P - | 0 \cdot) = 0,25$$

$$P(P \cdot | 0 -) = 0,2$$

$$P(P - | 0 -) = 0,8$$

$$P(\underline{0 \cdot} | \underline{P \cdot}) = \frac{0,6 \cdot 0,75}{0,6 \cdot 0,75 + 0,4 \cdot 0,2} = \underline{\underline{0,85}}$$



### Příklad 9.

V jednom městě jezdí 85 % zelených taxíků a 15 % modrých.

Svědka dopravní nehody vypověděl, že nehodu zavinil řidič modrého taxíku, který pak ujel. Testy provedené za obdobných světelných podmínek ukázaly, že svědek dobře identifikuje barvu taxíku v 80 % případů a ve 20 % případů se mýlí.

- Jaká je pravděpodobnost, že viník nehody skutečně řídil modrý taxík?
- Následně byl nalezen další nezávislý svědek, který rovněž tvrdí, že taxík byl modrý. Jaká je nyní pravděpodobnost, že viník nehody skutečně řídil modrý taxík?
- Ovlivní pravděpodobnost, že viník nehody skutečně řídil modrý taxík to, zda dva výše zmínění svědci vypovídali postupně nebo najednou?

$Z$  ... zavinil zelený

$$P(Z) = 0,85$$

$M$  ... zavinil modrý

$$P(M) = 0,15$$

$SZ$  ... svědek zelený

$$P(SZ|Z) = 0,8$$

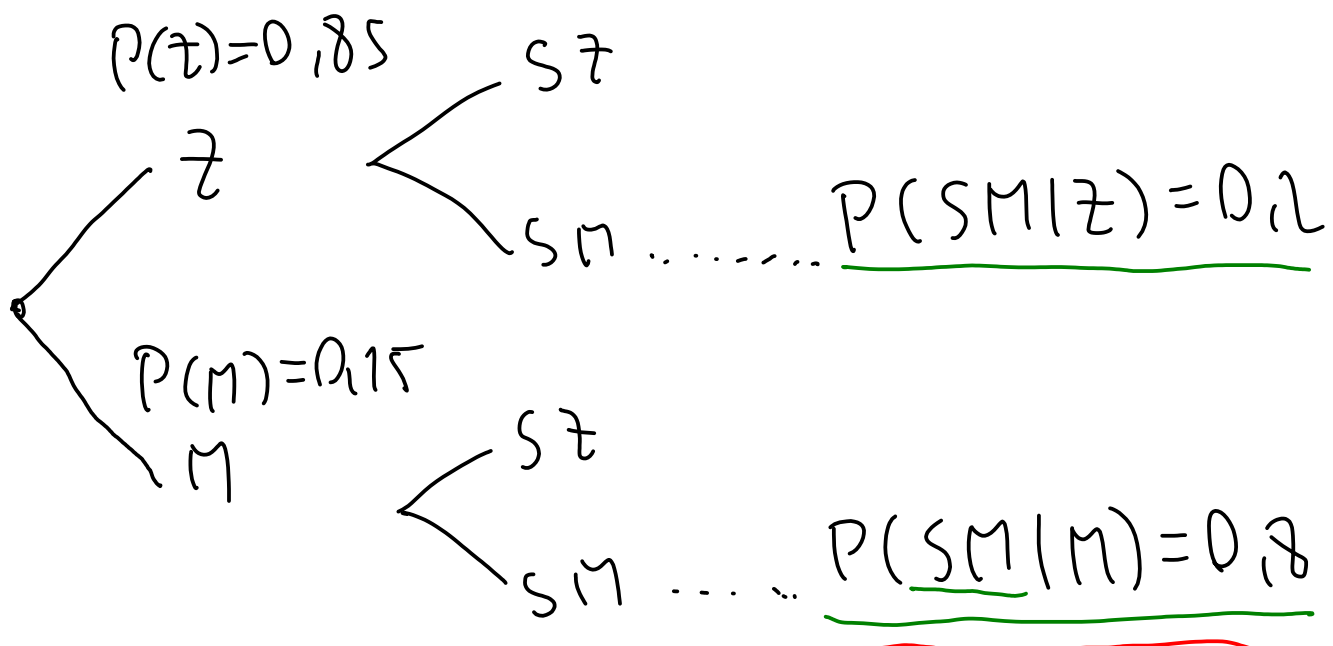
$SM$  ... svědek modrý

$$P(SM|Z) = 0,2$$

$$P(SZ|M) = 0,2$$

$$P(SM|M) = 0,8$$

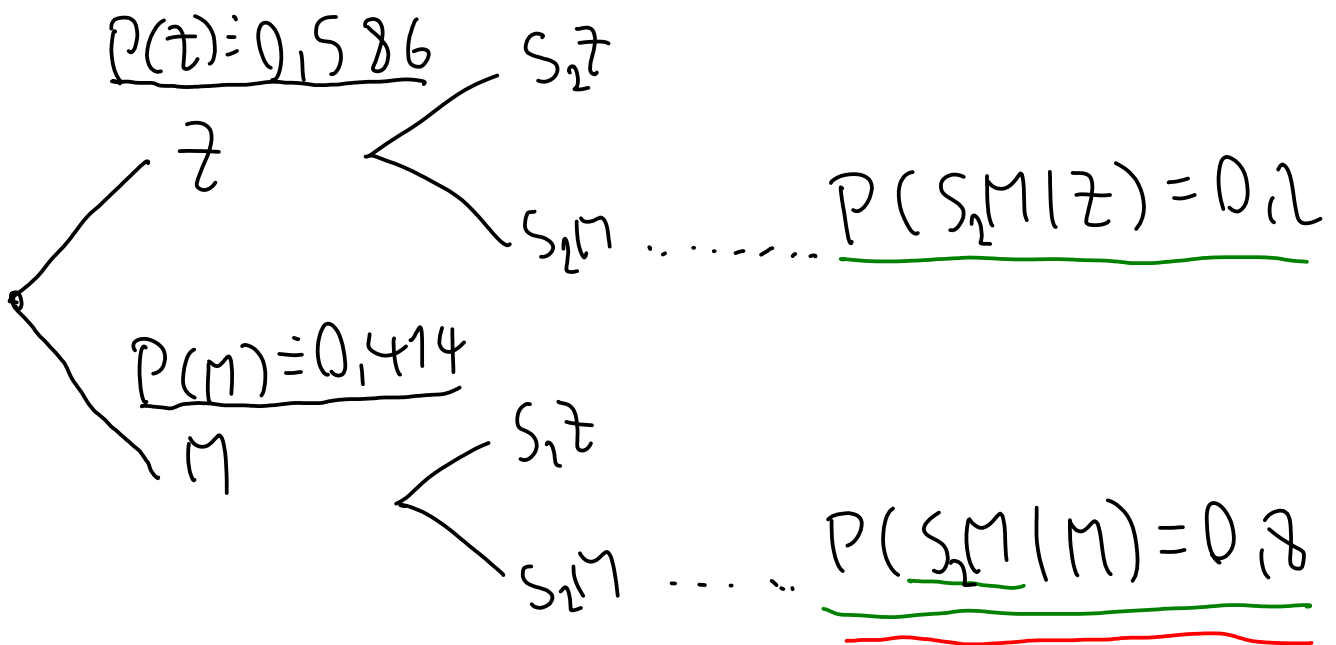
a)  $P(M|SM) = ?$



$$P(\underline{M} | \underline{S_1 M}) = \frac{0,15 \cdot 0,8}{0,85 \cdot 0,2 + 0,15 \cdot 0,8} \stackrel{0}{=} \underline{\underline{0,414}}$$

b)  $P(M) = 0,414$   
 $P(\bar{z}) = 1 - 0,414$

$$P(S_1 M \cap S_2 M) = \underline{\underline{P(S_1 M) \cdot P(S_2 M)}}$$



$$b) P(M | S_2 M) = \frac{0,414 \cdot 0,8}{0,586 \cdot 0,2 + 0,414 \cdot 0,8} \stackrel{0}{=} \underline{\underline{0,738}}$$

c)

$$P(Z) = 0,85$$

Z

$$P(M) = 0,15$$

M

$$\underline{S_1 M \cap S_2 M}$$

$$S_1 Z \cap S_2 M$$

$$S_1 M \cap S_2 Z$$

$$S_1 Z \cap S_2 Z$$

$$\underline{S_1 M \cap S_2 M}$$

$$S_1 Z \cap S_2 M$$

$$S_1 M \cap S_2 Z$$

$$S_1 Z \cap S_2 Z$$

$$\dots P(S_1 M \cap S_2 M | Z)$$

$$\parallel P(S_1 M | Z) \cdot P(S_2 M | Z)$$

$$\parallel 0,2 \cdot 0,2$$

$$\dots P(S_1 M \cap S_2 M | M)$$

$$\parallel P(S_1 M | M) \cdot P(S_2 M | M)$$

$$\parallel 0,8 \cdot 0,8$$

$$P(\underline{M} | \underline{S_1 M \cap S_2 M}) = \frac{0,15 \cdot 0,8 \cdot 0,8}{0,85 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,15 \cdot 0,8 \cdot 0,8} =$$

$$\underline{\underline{0,738}}$$

### Příklad 10.

Potřebujeme zjistit odpověď na určitou citlivou otázku. Jak odhadnout, kolik procent dotazovaných na otázku odpoví ANO a přitom všem respondentům zaručit naprostou anonymitu? Jedním z řešení je tzv. dvojité anonymní anketa:

Necháme respondenty hodit korunou a dvojkorunou a ti, kterým padl na koruně líc napíší na lísteček odpověď (ANO/NE) na citlivou otázku. Ostatní respondenti napíší, zda jim padl na dvojkoruně líc (ANO/NE). Jakým způsobem určíme podíl studentů, kteří na citlivou otázku odpověděli ANO?

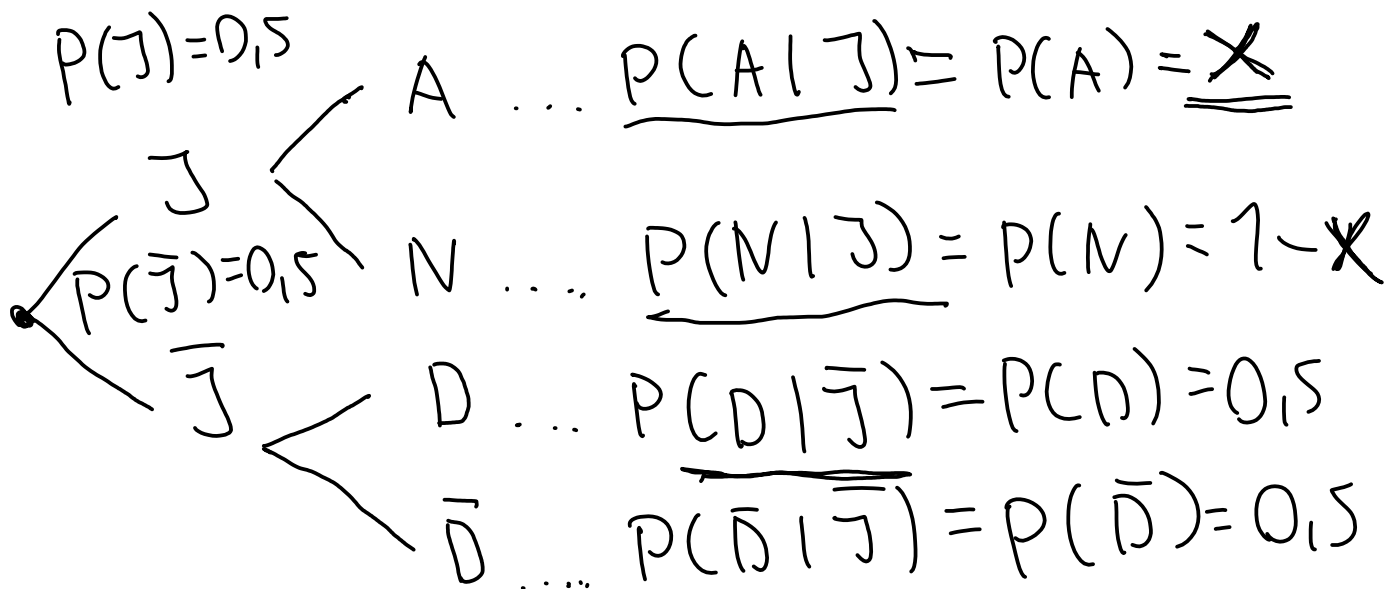
Předpokládejme, že respondenti byli dotazováni, zda podváděli u zkoušky. Z anketních lístků se zjistilo, že „ANO“ odpovědělo 120 respondentů a „NE“ odpovědělo 200 respondentů.

Kolik procent studentů podvádělo u zkoušky?

J ... jednoborně A       $\bar{J}$  ... - - - N

D .... dvojborně A       $\bar{D}$  .... - - - N

A ... skutečně odpověděl A      - - - -



DA ... dotazovala ano

$$\underline{\underline{P(DA) = \frac{120}{320}}}$$

$$P(DA) = \underbrace{P(\bar{J})}_{0.5} \cdot \underbrace{P(A|\bar{J})}_{P(A)=X} + \underbrace{P(J)}_{0.5} \cdot \underbrace{P(D|J)}_{P(D)}$$

$$\frac{120}{320} = \frac{12}{32} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8} = 0,5 \cdot X + 0,5 \cdot 0,5$$

$$0,5 \cdot X = \frac{3}{8} - 0,25 \quad | \cdot 2$$

$$X = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

# Bonusová úloha:

## Příklad 3 (Monty Hall problem)

Soutěžní cena – auto – je umístěna náhodně za jedny ze tří dveří. Za každými ze zbývajících dveří je cena útěchy – koza. Úkolem soutěžícího je zvolit si jedny dveře. Poté moderátor otevře jedny ze dvou zbývajících dveří, ale jen ty, za nimiž je koza. Teď má soutěžící možnost buď ponechat svou původní volbu, nebo změnit volbu na zbývající dveře. Soutěžící vyhrává cenu, která je za dveřmi, které si zvolil. Soutěžící nemá žádné předchozí znalosti, které by mu umožnily odhalit co je za dveřmi.

Zvýší se šance na výhru auta, pokud soutěžící změní svou původní volbu?

