Kombinatorické pravidlo součtu a součinu

Uvažujme dva kufříky, každý s dvěma zámky:
První má zámky vedle sebe a není poznat zda už je jeden otevřen.
Druhý je má za sebou a k druhému se dostaneme až po otevření prvního

Uvažujme, že všechny 4 zámky jsou stejné na 4 místný pin.

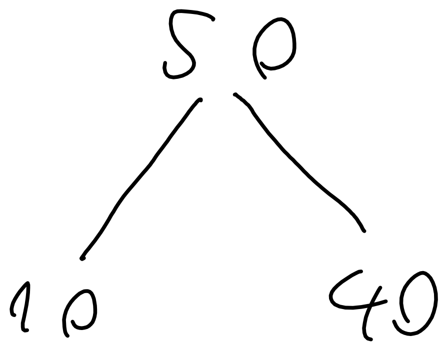
$V^*(10,4) = 10^4$

1) $V^*(10,4) \cdot V^*(10,4) = V^*(10,8) = 10^8$

2) $\underbrace{V^*(10,4)} + \underbrace{V^*(10,4)} = 2 \cdot 10^4 = 20000$

V soutěži se losuje 10 čísel z 50. My hádáme 10 čísel, jaká je pravděpodobnost, že uhádneme maximálně tři čísla.

V 3 čísla



$$\frac{C(10,3)\cdot C(40,7) + C(10,2)\cdot C(40,8) + C(10,1)\cdot C(40,9)}{C(50,10)}$$

Příklad 1.
Které heslo je bezpečnější?

Heslo o délce osm znaků složené pouze z číslic.
Heslo o délce pět znaků složené pouze z písmen anglické abecedy.

H1: $n = 10$ $k = 8$

$V^*(10, 8) = 10^8 = 100\ 000\ 000$

H2: $n = 26$ $k = 5$

$V^*(26, 5) = 11.881.376$

Příklad 2.
Jak dlouho by trvalo vyřešení problému obchodního cestujícího pro n = 10 měst hrubou silou, jestliže vyhodnocení délky každé z možných cest trvá 1 µs?

$P(10) = 10!$

$P(10-1) = 9!$

$\frac{1}{2} P(10-1) = 9!/2$

čas = 0,18 s

4

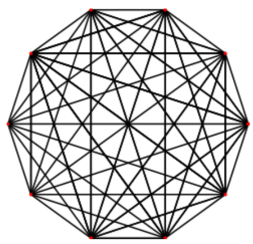
1 3

2

1 2 3 4

2 3 4 1

3 4 1 2



Příklad 3.
Jak rozdělit kořist mezi 2 loupežníky, aby dostali oba věci ve stejné hodnotě (případně co nejbližší hodnotě). Tj. lze rozdělit N zadaných čísel do dvou skupin tak, aby součet čísel v obou skupinách byl stejný?

Kolik možností by bylo třeba vyzkoušet, pokud bychom úlohu řešili hrubou silou?

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ A & B & A & B \end{matrix}\right\} \quad (A/B) \text{ totéž co hesla}$$

$n = 2$

$k = N = 10$

$V^*(2, 10) = 2^{10} = 1024$

Příklad 4.
Kolik anagramů slova "AUTO" můžeme vytvořit?

Kolik anagramů slova "AUTOMOBILKA" můžeme vytvořit? Kolik z nich začína na "K"?

$P^*(1,1,1,1) = P(4) = 4! = 24$

$P^*(2,1,1,2,1,1,1,1,1) = \frac{11!}{2! \cdot 2!} = 9979200$

$P^*(2,1,1,2,1,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 2!} = 907200$

Příklad 5.
V obchodě mají 6 druhů barevných hrníčků.

Kolika různými způsoby můžeme koupit 4 různě-barevné hrníčky?
Kolika různými možnostmi můžeme nakoupit 5 hrníčků (pokud nám nevadí více od stejné barvy)?
Jak se situace změní, pokud budou mít od každého pouze 4 kusy (a nám nevadí více stejné barvy)?

- $C(\overset{n}{6}, \overset{k}{4}) = 15$
- $C^*(6, 5) = \underline{252}$
- $C^*(6, 5) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stejné barvy po 5 kusech}}}{6} = \underline{246}$

Příklad 6. (sbírka kap. 1, př. 7,8)
Z urny se třemi koulemi, dvěma červenými a jednou bílou, budou současně vybrány dvě koule. Student a učitel uzavřou sázku. Pokud budou obě koule stejné barvy, vyhraje student. Pokud budou mít koule různou barvu, vyhraje učitel.

Je hra férová? Jaké jsou pravděpodobnosti výhry učitele a studenta? Jakou kouli je třeba přidat, aby hra byla férová?

1 2 3

→ 1 2 UČ
→ 1 3 UČ } 2/3
→ 2 3 ST → 1/3

$$P(U) = \frac{2}{3} = 0,\overline{66}$$

$$P(S) = \frac{1}{3} = 0,\overline{33}$$

1,2	S	U
1 3	U	U
1 4	U	U
2 3	U	S
2 4	U	S
3 4	S	S

$P(U) = \frac{2}{3}$

$P(S) = \frac{1}{3}$

$P(U) = P(S) = 0,5$

Příklad 7.
V balíčku je 5 různých párů ponožek (levá a pravá ponožka je vždy stejná).

Kolik různých dvojic ponožek lze vybrat?
Kolika různými způsoby se mohu obout? (tj. záleží na tom co je na které noze)

- NEZÁLEŽÍ NA POŘADÍ + OPAKOVÁNÍ

$\rightarrow C^*(n=5;\ k=2) = \underline{\underline{15}}$

- POŘADÍ + OPAKOVAT

$\rightarrow V^*(n=5,\ k=2) = 25$

ALTERNATIVA

$C^*(5,2) \cdot 2 - 5 = \underline{25}$

Příklad 8.
Mám 12 závaží o hmotnostech 1,2,...,12 kg.

Kolika způsoby je mohu rozdělit na 2 hromádky?
Kolika způsoby je mohu rozdělit na 3 hromádky?
Kolika způsoby je mohu rozdělit na 3 hromádky, má-li na všech být stejný počet závaží?
Kolika způsoby je mohu rozdělit na 3 hromádky o stejném počtu závaží, pokud hmotnost žádné z nich nesmí překročit 40 kg?

- $V^*(2,12) = 2^{12}$

$\underline{V^*(2,12)/2} - 1 = 2^{11} - 1$

- $\underline{V^*(3,12)} = 3^{12}$

$\underline{P(3) = 6}$

$$\frac{V^*(3,12) - 3}{P(3)} + 1 = \underline{\underline{88574}}$$

$$\frac{\left(V^*(3,12) - \left(V^*(2,12) - 2\right)\cdot 3 - 3\right)}{P(3)} = \underline{\underline{86526}}$$

$$\frac{C(12,4)\cdot C(8,4)\cdot C(4,4)}{P(3)} = \underline{\underline{5775}}$$

$$\frac{P(12)}{P(4)\cdot P(4)\cdot P(4)\cdot P(3)} = \underline{5775}$$

$$\underbrace{12+11+10+9} = \underline{42}$$

$$\underbrace{12+11+10+8} = \underline{41}$$

$$\underbrace{2}\cdot\underbrace{}_{}^{C(8,4)}\cdot\underbrace{}_{}^{C(4,4)}$$

$$\frac{2\cdot C(8,4)\cdot 3}{P(3)} = 70$$

$$5775 - 70 = \underline{\underline{5705}}$$

Příklad 9.
Mám 20 semínek od každého ze tří druhů zeleniny (mrkev, ředkvička, celer). Bohužel se pomíchala.

Do truhlíku zasadím 5 náhodných semínek. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi budou alespoň tři ředkvičky?
Do truhlíku zasadím 5 náhodných semínek. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude více mrkví než celerů?

$$\cancel{\frac{C(20,3)\cdot C(57,2)}{C(60,5)}}$$

$\check{R}=3$

$$\frac{C(20,3)\cdot C(40,2)}{C(60,5)}$$

$\check{R}=4$ $+$

$$\frac{C(20,4)\cdot C(40,1)}{C(60,5)}$$

$\check{R}=5$ $+$

$$\frac{C(20,5)}{C(60,5)}$$

$\check{R}\geq 3$

$$\frac{C(20,3)\cdot C(40,2)+C(20,4)\cdot C(40,1)+C(20,5)}{C(60,5)} =$$

$$\doteq 0{,}20$$

$\underline{R=1}$ $\underline{C=2}$

$$\frac{C(20,1)\cdot C(20,2)\cdot C(20,1)}{C(60,5)}$$

$M=1$ $C=0$

$M=2$ $C=1$

$M=2$ $C=0$

$M=3$ $C=0$

$M=3$ $C=1$

$M=3$ $C=2$

$M=4$ $C=0$

$M=4$ $C=1$

$M=5$ $C=0$

$M > C$ $\quad$ $M = C$ $\quad$ $M < C$

$=$

$M=0$	$C=0$
$M=1$	$C=1$
$M=2$	$C=2$

p

$$\frac{1-p}{2}$$