

Pravděpodobnost a statistika - verze 19-01

Praktická část - 90 minut, (0 – 50) bodů, požadované minimum: 25 bodů

Očekává se od vás, že následující příběh budete nejenom číst, ale i hluboce prožívat. Tedy pokud nějakou z postav něco zajímá nebo něco sama počítá, vy to budete dělat s ní a výsledky zaznamenávat do zkuškového archu.

1. V království ponožek po dlouhá léta vládl klid. Poslední dobou však roste napětí, neboť *podkolenky* (P) se cítí být utlačovány *kotníkáči* (K). Této vyhrcoené situace využívají *obyčejné* (O) ponožky a skrytě podněcují další nenávistné střety. Složení obyvatelstva království ponožek je následující: 30 % kotníkáčů, 20 % obyčejných a 50 % podkolenek. Situace propukla v ponožkovou občanskou válku po úspěšném atentátu na krále ponožek (z řad kotníkáčů), ve kterém zůstala díra, že by z ní čouhal celý palec. Nikdo neví která skupina je za atentát zodpovědná, avšak strážné onen strašný den zahlédly utíkat ponožku se žlutým pruhem (\tilde{Z}). Ponožek se žlutým pruhem je mezi kotníkáči 5 %, mezi podkolenkami 5 % a mezi obyčejnými 50 %. Ačkoliv obyčejné ponožky tvrdí, že za atentátem určitě stojí podkolenky, vládnoucí třída jim nevěří. Určete pravděpodobnost, že za atentátem stojí obyčejné ponožky (tedy $P(O|\tilde{Z})$). (10b)
2. Vzhledem k vysoké pravděpodobnosti z minulé úlohy vás jistě nepřekvapí, že atentátník byl skutečně z řad obyčejných ponožek. Po tom, co se toto všichni dozvěděli, hodily podkolenky a kotníkáči své rozdílné délky za hlavu a vytvořili alianci proti těm proradným obyčejným ponožkám. Nyní obyčejné ponožky, kterých je v porovnání s ostatními výrazně méně, vedou partyzánský boj proti alianci kotníkáčů a podkolenek. Po úspěšné sabotáži prvního šuplíku, který se bez jedné kolejnice nedá otevřít a zůstalo v něm uvězněno 20 nevinných ponožek, se obyčejné ponožky zaměřily na šuplík druhý. V náhodných intervalech vysílají sebevražedné útočníky ozbrojené manikúrními nůžkami s cílem co nejvíce zredukovat alianční populaci. Tito útočníci jsou obzvláště nebezpeční, neboť po ustřížení horní části jsou pouze těžce rozeznatelní od kotníkáčů. Po několika takovýchto útocích zjistili alianční stratégové, že v časech útoků je jistý vzorec. Odhadli, že časy mezi jednotlivými útoky **v hodinách**, se řídí tímto rozdělením:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 3 \cdot e^{-3x}, & 0 \leq x \end{cases}.$$

- a) Pro efektivní plánování obrany je třeba pojmenovat tento typ rozdělení času mezi útoky, určit jeho distribuční funkci a načrtnout její graf. Proveďte! (4b)
 - b) Poslední útok byl obzvláště ničující a bude potřeba alespoň 30 minut, aby se z něj alianční vojska vzpamatovala. Jaká je pravděpodobnost, že se to podaří? (2b)
 - c) Obrana nemůže být stále v pohotovosti, jinak by se brzy úplně vyčerpala. Nejvhodnějším časem na odpočinek je ihned po posledním útoku. Jakou dobu odpočinku můžeme povolit aliančním vojskům, aby pravděpodobnost, že útočníci narazí na připravenou obranu aliance byla 99 %? (4b)
3. Hlídku u třetího šuplíku drží neoddělitelná dvojice kamarádů už od dětství, vojín levý a vojín pravý. Každý z nich vždy hlídá přesně polovinu dne. Ti dva však moc rozumu nepobrali a nejsou schopní si rozdělit služby tak, aby byl stále někdo na

hlídce. Hlídkají tedy úplně nezávisle na sobě. To však sleduje špeh z řad obyčejných ponožek. Monitoruje situaci a zhodnocuje optimální plán útoku.

- a) Začne tím, že určí pravděpodobnostní a distribuční funkci počtu vojínů na hlídce. **(3b)**
 - b) Jelikož ho matematika tuze baví, pokračuje určením střední hodnoty, směrodatné odchylky a modu počtu vojínů na hlídce. **(4b)**
 - c) Partyzáni se chtějí pokusit o záškodnickou akci. Neuspějí, pokud bude někdo na hlídce. Jaké je riziko, že záškodnická akce bude neúspěšná? **(3b)**
4. Anička už začíná být bezradná. Nejprve se v jejich nejoblíbenějších růžových kotníkáčích objevila díra, že z ní lezl celý palec, a teď se každý den několik ponožek ztratí. Celé to začalo být neúnosné, když z prvního šuplíku upadla kolejnice a nyní se s ním nedá hnout. Jako by snad její ponožky ožily a válčily mezi sebou. Nyní se Anička snaží rozlousknout tuto ponožkovou záhadu a proto si začala denně pečlivě zapisovat počty ztracených ponožek do Excelu [ponozky.xlsx](#)(vizte¹).²
- a) Jelikož se blíží léto, nejvíce se budou hodit kotníkáče. Aničku zajímá bodový a 95% intervalový odhad střední hodnoty, resp. mediánu počtu ztracených **kotníkových** ponožek za den. **(3b)**
 - b) Měsíčně³ Anička obdrží 120 **párů**⁴ **kotníkových** ponožek. (Aniččina rodina vlastní podnik na výrobu ponožek, a tak si jiné dárky než ponožky ani nedávají). Anička přemýšlí, pokud to rozpočítá na jednotlivé ponožky za den bude to dlouhodobě stačit na pokrytí ztrát ponožek? Tedy je možné, že střední hodnota (případně medián) ztrát kotníkových ponožek překoná tento denní přírůstek? Kdyby jen tak existoval nějaký statistický test, který by to zvládl ověřit na hladině významnosti 10 %, pomyslí si Anička. **(3b)**
 - c) Dni, ve kterém se ztratí 10 nebo více kotníkových ponožek, by se dalo říkat špatný. Aničku by zajímal bodový a 95% intervalový odhad pravděpodobnosti, že dnes bude zase špatný den. **(4b)**
5. Při podrobnějším studiu nasbíraných dat si Anička všimla, že jednotlivé ztráty typů ponožek jsou mezi sebou nezávislé. Teď by ji zajímalo, zda se ztrácí srovnatelné množství ponožek od každého druhu.
- a) Dobrým prvním krokem je vykreslení dat. Anička si matně vzpomíná na hodiny statistiky, kde používali takové ty obrázky s krabicemi. **(2b)**
 - b) Anička pokračuje ověřením, zda je možné, že by střední hodnoty (případně mediány) ztrát jednotlivých ponožek byly shodné. Poté jednotlivé skupiny ponožek rozdělí do homogenních skupin dle ztrátovosti. Anička není náročná, opět si vystačí s hladinou významnosti 10%. **(8b)**

Epilog: Po litém boji ponožky přistoupily na mírovou dohodu. Ačkoliv by se mohlo zdát, že je již po boji, opak je pravdou. Teprve teď si ponožky uvědomily, že jsou pouhými ponožkami ve světě lidí. Nyní se připravují na svrhnutí lidské rasy a nastolení vlády ponožek. To stejné platí i pro vás, praktická část zkoušky je sice hotova, ale ta teoretická vás ještě čeká!

¹<http://am-nas.vsb.cz/lit40/DATA/ponozky.xlsx>

²Poznámka pro čtenáře: čísla jsou opravdu v pořádku, Anička má velmi mnoho ponožek.

³30 dní

⁴Jeden pár jsou dvě ponožky.

Pravděpodobnost a statistika - verze 19-01

Teoretická část - 10 minut, (0 – 10) bodů, požadované minimum: 2 body

Bodování příkladů 1 – 5: +1 bod za správnou odpověď, 0 bodů za nesprávnou odpověď, 0 bodů za žádnou odpověď.

Bodování příkladu 6: +1 bod za správné určení pravdivosti výroku, -1 bod za chybné určení pravdivosti výroku, 0 bodů za žádnou odpověď.

1. Když zamítáme H_0 , ale ona přesto platí. Dopouštíme se
 - a) chyby I. druhu, značeno α .
 - b) chyby I. druhu, značeno $1 - \beta$.
 - c) chyby II. druhu, značeno α .
 - d) chyby II. druhu, značeno $1 - \beta$.
2. Je-li odhad relativního rizika $\widehat{RR} = 0.5$, pak
 - a) mezi znaky v asociační tabulce existuje závislost.
 - b) mezi znaky v asociační tabulce neexistuje závislost.
 - c) o závislosti znaků v asociační tabulce musí rozhodnout test.
3. Rozdělení pravděpodobnosti má zápornou šikmost, tedy
 - a) medián je menší než směrodatná odchylka.
 - b) medián je větší než směrodatná odchylka.
 - c) medián je menší než střední hodnota.
 - d) medián je větší než střední hodnota.
4. Nechť X je spojitá náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$ a hustotou pravděpodobností $f(x)$. Označte všechna pravdivá trzení.
 - a) $P(X \geq 4) = \int_4^\infty F(x) dx$
 - b) $P(X \leq 4) = P(X < 4)$
 - c) $P(5 < X < 6) = \int_5^6 f(x) dx$
 - d) $P(5 < X < 6) = P(X < 5) - P(X < 6)$

5. Necht A a B jsou nezávislé jevy. Označte všechny možnosti ekvivalentní $P(A|B)$.
- a) $P(A)$
 - b) $P(B)$
 - c) $P(B|A)$
 - d) $P(A \cap B) / P(B)$
6. U každého z výroků uveďte jeho pravdivostní hodnotu, např. $p(A) = 1$.
- a) A: Párová data poznáme podle stejného počtu pozorování v obou datových sloupcích.
 - b) B: Snížíme-li spolehlivost intervalového odhadu, pak se intervalový odhad roztáhne.
 - c) C: Negativně binomické rozdělení popisuje počet úspěchů k v n pokusech.
 - d) D: Normální rozdělení má kladnou šikmost.
 - e) E: Nulová korelace $\rho(X, Y)$ mezi náhodnými veličinami X a Y , znamená, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.