3.1 Test z teorie

1. Vytvořte dvojice pojem - příklad.

   a) náhodný pokus 1) Doba přenosu testovacího datového souboru je delší než 30 s.

   b) náhodný jev 2) Měření doby přenosu testovacího datového souboru.

   c) náhodná veličina 3) Doba přenosu testovacího datového souboru.

2. Určete pravdivost následujících výroků.

   ~~a)~~ Náhodnou veličinu chápeme jako výsledek náhodného pokusu.
   b) Diskrétní náhodná veličina může nabývat konečného nebo spočetného množství hodnot.
   c) Distribuční funkce náhodné veličiny X v bodě t udává pravděpodobnost, že X nabývá hodnot menších než t.
   $F(t) = P(X < t)$
   $\int_{-\infty}^{t} f(x)$
   d) Má-li náhodná veličina spojitou distribuční funkci, je spojitá.
   e) Je-li X diskrétní náhodná veličina, pak $\sum_i P(X = x_i) = 1$.
   $P(X = x_1) \neq 0$
   ~~f)~~ Oborem hodnot distribuční funkce jsou všechna reálná čísla.
   ~~g)~~ Medián je střední hodnota.
   ~~h)~~ Nabývá-li funkce $f(x$ hodnoty 1,3, nemůže jít o hustotu pravděpodobnosti.
   i) Rozdělení spojité náhodné veličiny můžeme popsat distribuční funkci a hustotou pravděpodobnosti.
   $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ $f(x) \geq 0$

3. Určete, která ze zadaných funkcí nemůže představovat pravděpodobnostní funkci.

   a) $P(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & k \in \{2; 3; 6\} \\ 0 & k \notin \{2; 3; 6\} \end{cases}$ ✓ $\sum_i P(X = x_i) = 1$ $P(X = x_1) \in \langle 0, 1\rangle$ ✓

   $P(X \neq x_1) = 0$ ✓

   $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = 1$

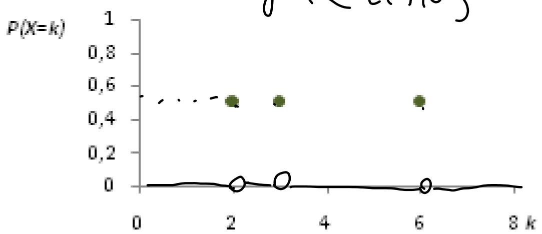
   b)

k	2	3	6
$P(x = k)$	0,2	0,4	0,4

   $= 1$

   $+ P(X = y) = 0$
   $y \notin \{2, 3, 6\}$

   ~~c)~~



$\sum P(X = x_1) > 1$

4. Určete, zda by grafy znázorněných funkcí mohly představovat distribuční funkci.

$D_f(F) = \mathbb{R}$

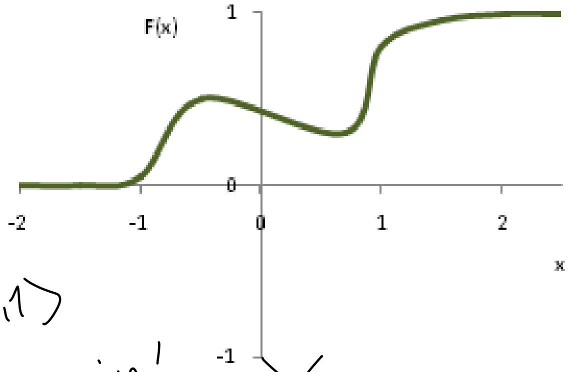
$H_f(F) \in \langle 0,1 \rangle$

F ... zleva spojitá

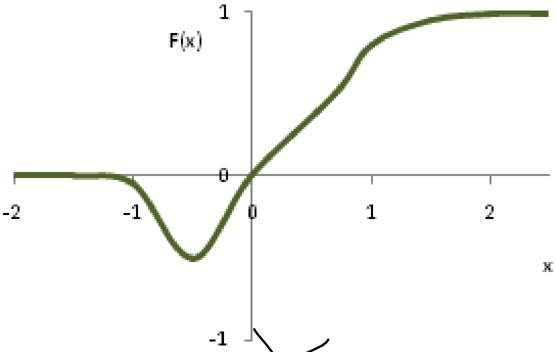
F ... neklesající

$+ \; F(t)=1 \; .. \; t \to \infty$

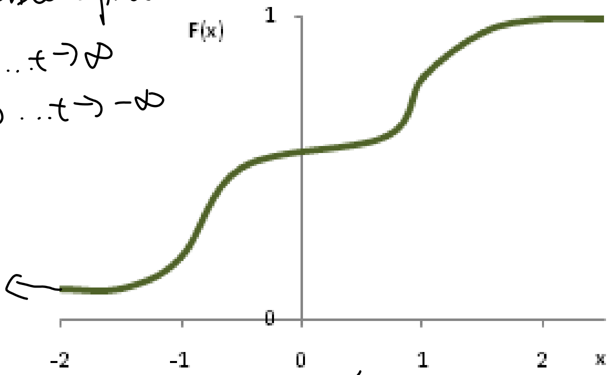
$F(t)=0 \; ... \; t \to -\infty$



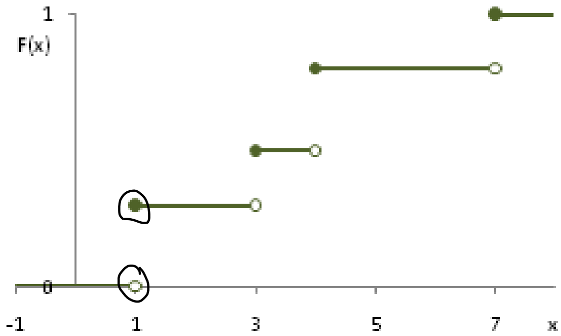
a)



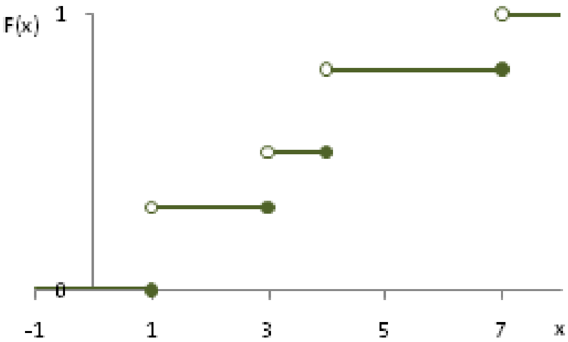
b)



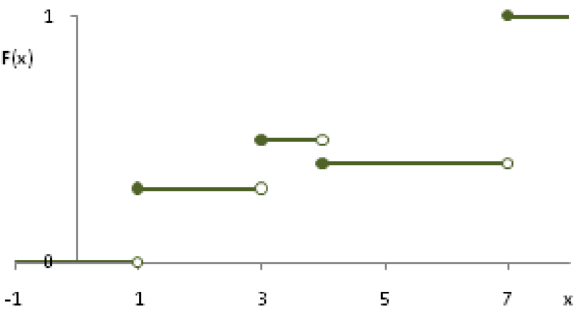
c)



d)



e)

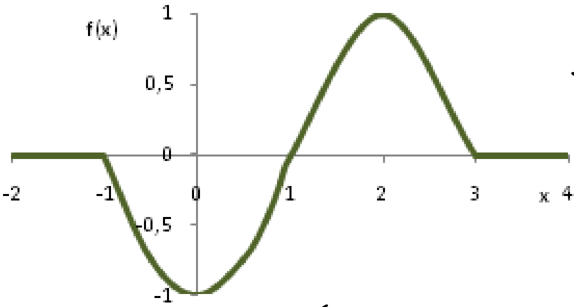


f)

5. Určete, zda by grafy znázorněných funkcí mohly představovat hustotu pravděpodobnosti.

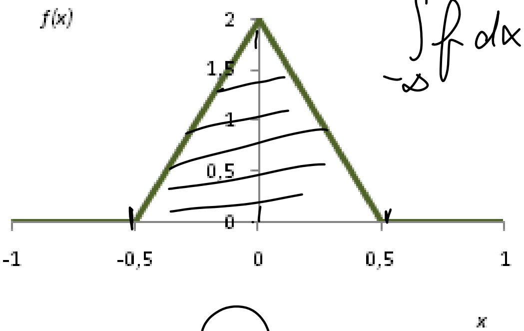
$f(x)$ $\quad D_f(f) = \mathbb{R}$ $\quad H_f(f) \in \langle 0, \infty)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

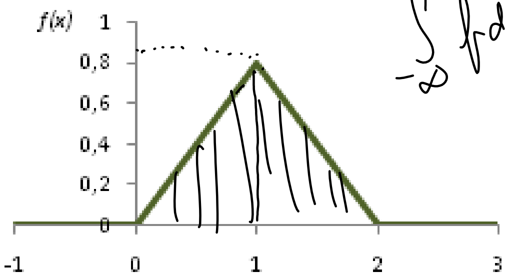


a)

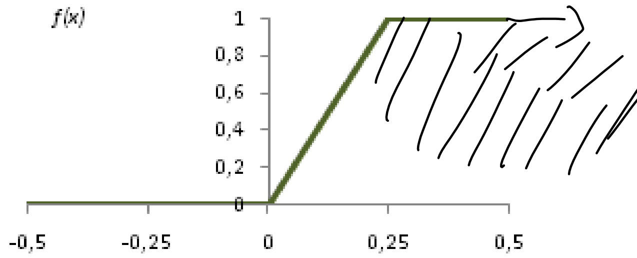
$\int_{-\infty}^{\infty} f \, dx = 1$



b)



$\int_{-\infty}^{\infty} f\,dx < 1$



~~c)~~ ~~d)~~

6. Nechť náhodná veličina X představuje životnost (dobu do poruchy) monitorů na počítačové učebně E320. Určete pravdivost následujících výroků.

   a) X je spojitou náhodnou veličinou.
   ~~b)~~ Rozdělení X může být popsáno pravděpodobnostní funkcí.
   c) Pro popis X lze použít intenzitu poruch.

7. Vyjádřete následující pravděpodobnosti pomocí distribuční funkce.

   a) $P(X < 10)$, $= F(10)$
   b) $P(X \geq 5)$, $= 1 - P(X < 5) = 1 - F(5)$
   c) $P(5 \leq X < 10)$. $= P(X<10) - P(X<5) = F(10) - F(5)$

   10
   5

8. Nechť X je ~~diskrétní~~ náhodná veličina. Vyjádřete co nejjednodušeji následující pravděpodobnosti pomocí $P(X = 10), P(X < 10), P(X > 10), P(X = 5), P(X < 5), P(X > 5)$.

   a) $P(X \leq 10)$, $= P(X<10) + P(X=10)$
   b) $P(X \geq 10)$, $= P(X>10) + P(X=10) = 1 - P(X<10)$
   c) $P(5 < X \leq 10)$, $P(X \leq 10) - P(X \leq 5) = P(X<10) + P(X=10) - P(X<5) - P(X=5)$
   d) $P(5 \leq X \leq 10)$. $P(X \leq 10) - P(X<5) = P(X<10) + P(X=10) - P(X<5)$

9. Nechť X je spojitá náhodná veličina. Vyjádřete co nejjednodušeji následující pravděpodobnosti pomocí $P(X = 10), P(X < 10), P(X > 10), P(X = 5), P(X < 5), P(X > 5)$.

   a) $P(X \leq 10)$, $= P(X<10)$
   b) $P(X \geq 10)$, $= P(X>10)$
   c) $P(5 < X \leq 10)$, $= P(X<10) - P(X<5)$
   d) $P(5 \leq X \leq 10)$. $=$ — " —

10. Nechť X je spojitá náhodná veličina. Vyjádřete následující pravděpodobnosti pomocí hustoty pravděpodobnosti.

    a) $P(X \leq 10)$,
    b) $P(X \geq 10)$,
    c) $P(5 < X \leq 10)$,
    d) $P(5 \leq X \leq 10)$.

    a) $\int_{-\infty}^{10} f(x)\,dx$ c) $\int_{5}^{10} f(x)\,dx$

    b) $\int_{10}^{\infty} f(x)\,dx$ d) — " —

3.2 Diskrétní náhodná veličina - příklady

1. Majitel servisního střediska nabídl prodejně automobilů, která si zřídila autopůjčovnu své služby. Za každý automobil zapůjčený jeho prostřednictvím obdrží od autopůjčovny 500,- Kč. Zároveň se však zavázal, že každý den investuje do údržby zapůjčených automobilů 800,- Kč. Počet automobilů zapůjčených prostřednictvím servisního střediska za 1 den je popsán následující pravděpodobnostní funkci:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	0,01	0,40	0,25	0,15	0,10	0,06	0,03

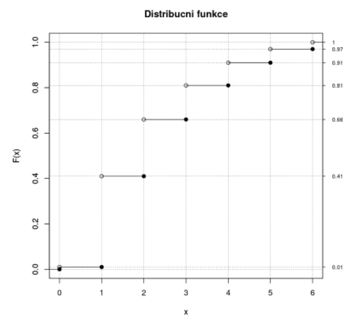
a) Hodnota pravděpodobnostní funkce pro 5 automobilů byla špatně čitelná. Určete ji.

Řešení:

$$\sum_i P(X=x_i)=1 \rightarrow P(X=5)=1-\sum_{x_i\neq 5} P(X=x_i)=0{,}06$$

[0,06]

b) Určete a zakreslete distribuční funkci náhodné veličiny X, která je definována jako počet zapůjčených automobilů.



Řešení:

$$F(t)=P(X<t)=\sum_{x_i<t} P(X=x_i)$$

$t\in$	$(-\infty,0\rangle$	$(0,1\rangle$	$(1,2\rangle$	$(2,3\rangle$	$(3,4\rangle$	$(4,5\rangle$	$(5,6\rangle$	$(6,\infty)$
$F(t)$	0	0,01	0,41	0,66	0,81	0,91	0,97	1

c) Určete střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku a modus počtu zapůjčených automobilů během jednoho dne.

Řešení:

$$E(X)=\sum_i x_i\,P(X=x_i)=2{,}23$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=1{,}9571$$

$$E(X^2)=\sum_i x_i^2\cdot P(X=x_i)$$

$$\sigma \doteq 1{,}399$$

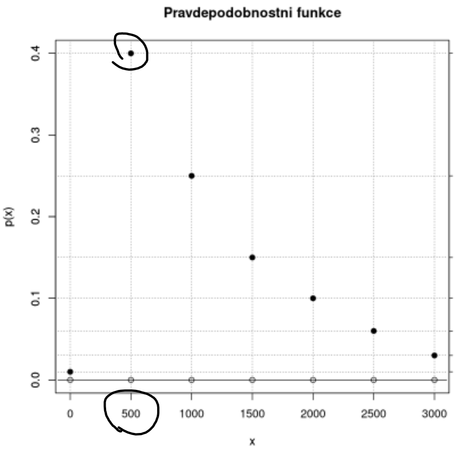
$$\hat{x}=1$$

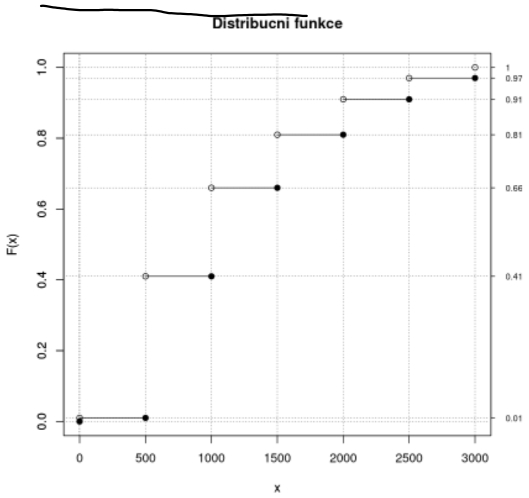
$[E(X) = 2,23;\ D(X) = 1,96;\ \sigma(X) = 1,4\ ;\hat{x} = 1]$

d) Určete pravděpodobnostní funkci a distribuční funkci náhodné veličiny Y, která je definována jako denní příjem majitele servisu.

$Y = aX + b$

Řešení: $Y = 500 \cdot X$





e) Určete střední hodnotu, směrodatnou odchylku a modus příjmu majitele servisu ze zapůjčených automobilů během jednoho dne.

Řešení:

$\hat{y} = 500$

$E(Y) = 1115$

$D(Y) = 489\,275$

$\sigma(Y) \doteq 699{,}5$

$X \ldots Y = aX + b$

$E(Y) = E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$

$D(Y) = D(aX+b) = a^2 \cdot D(X)$

[$E(Y) = 1\,115$ Kč; $\sigma(Y) = 700$ Kč; $\hat{y} = 500$ Kč]

f) Určete pravděpodobnost, že příjem majitele servisu (náhodná veličina Y) z půjčování automobilů převýší jeho výdaje.

Řešení: $Z = 500 \cdot X - 800$

$P(Z > 0) = 0{,}59$

[0,59]

g) Určete střední hodnotu, směrodatnou odchylku a modus náhodné veličiny Z, která je definována jako zisk majitele servisu ze zapůjčených automobilů během jednoho dne.

Řešení:

$\hat{z} = -300$

$E(Z) = 315$

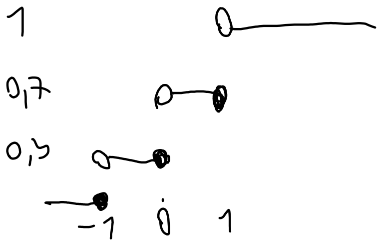
$\sigma(Z) \doteq 699{,}5$

$D(Z) = 489\,275$

[$E(Z) = 315$ Kč; $\sigma(Z) = 700$ Kč; $\hat{z} = -300$ Kč]

2. Pro distribuční funkci náhodné veličiny X platí:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ 0,3 & -1 < x \leq 0 \\ 0,7 & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



a) Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X, její střední hodnotu a směrodatnou odchylku.

Řešení:

$X \in \{-1, 0, 1\}$

x_i	-1	0	1
$p(x_i)$	0,3	0,4	0,3

$E(X) = 0$

$\sigma(X) \doteq 0,77$

[$E(X) = 0$; $\sigma(X) = 0,77$]

b) Náhodná veličina $Y = 1 - 3X$, určete $P(y), F(y), E(Y), D(Y)$.

Řešení:

$X = -1 \; \ldots \; Y = 4$

$X = 0 \; \ldots \; Y = 1$

$X = 1 \; \ldots \; Y = -2$

y_i	-2	1	4
$p(y_i)$	0,3	0,4	0,3

$E(Y) = 1$

$D(Y) = 5,4$

[$E(Y) = 1; D(Y) = 5,4$]

c) Náhodná veličina $W = 3X^2$, určete $P(w), F(w), E(W), D(W)$.

Řešení:

$X = -1 \; \ldots \; W = 3$

$X = 0 \; \ldots \; W = 0$

$X = 1 \; \ldots \; W = 3$

w_i	0	3
$p(w_i)$	0,4	0,6

$E(W) = 1,8$

$D(W) = 2,16$

[$E(W) = 1,8; D(W) = 2,16$]

3. V dílně jsou dva stroje pracující ~~nezávisle~~ na sobě. Pravděpodobnost poruchy prvního stroje je 0,2, pravděpodobnost poruchy druhého stroje je 0,3. Náhodná veličina X je definována jako počet současně porouchaných strojů. Určete:

   a) pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X,

   Řešení:

$X \in \{0, 1, 2\}$

S1 ... stroj 1 porucha

S2 ... —"— 2 —"—

x_i	0	1	2
$P(x_i)$	0,56	0,38	0,06

$P(\bar{S1} \cap \bar{S2}) = (1-0,2)\cdot(1-0,3)$

$P(S1 \cap S2) = P(S1)\cdot P(S2)$

   b) distribuční funkci náhodné veličiny X,

   Řešení:

$t \in$	$(-\infty, 0\rangle$	$(0, 1\rangle$	$(1, 2\rangle$	$(2, \infty)$
$F(t)$	0	0,56	0,94	1

   c) střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

   Řešení:

$E(X) = 0,5$

$D(X) = 0,37$

$[E(X) = 0,50;\ D(X) = 0,37]$