5. Vybraná rozdělení diskrétní náhodné veličiny

Název NV X	**Popis**	**Pravděpodobnostní funkce**	$\boldsymbol{E(X)}$	$\boldsymbol{D(X)}$
Binomická $Bi(n,\pi)$	počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech	$P(X=k)=\binom{n}{k}\pi^k(1-\pi)^k$	$n\pi$	$n\pi(1-\pi)$
Hypergeometrická $H(N,M,n)$	počet úspěchů v n **závislých** pokusech	$P(X=k)=\dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$		
Alternativní $A(\pi)$	počet úspěchů v 1 pokusu	$P(X=1)=\pi$ $P(X=0)=1-\pi$	π	$\pi(1-\pi)$
Geometrická $Ge(\pi)$	počet pokusů do 1. úspěchu (včetně)	$P(X=n)=\pi(1-\pi)^{n-1}$	$\dfrac{1}{\pi}$	$\dfrac{1-\pi}{\pi^2}$
Negativně binomická (Pascalova) $NB(k,\pi)$	počet pokusů do k. úspěchu (včetně)	$P(X=n)=\binom{n-1}{k-1}\pi^k(1-\pi)^{n-k}$	$\dfrac{k}{\pi}$	$\dfrac{k(1-\pi)}{\pi^2}$
Poissonova $Po(\lambda t)$	počet událostí v Poissonově procesu v uzavřené oblasti (v čase, na ploše, v objemu)	$P(X=k)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$	λt	λt

<table>
<tr><th>Popis</th><th colspan="2">Podmínky</th><th>Název NV X</th></tr>
<tr><td rowspan="3">počet úspěchů v n pokusech</td><td rowspan="2">nezávislé pokusy</td><td>$n=1$</td><td>Alternativní - $A(\pi)$</td></tr>
<tr><td>$n\geq 1$</td><td>Binomická - $Bi(n,\pi)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">závislé pokusy</td><td>Hypergeometrická - $H(N,M,n)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">počet pokusů do k. úspěchu (včetně)</td><td rowspan="2">nezávislé pokusy</td><td>$k=1$</td><td>Geometrická - $Ge(\pi)$</td></tr>
<tr><td>$k\geq 1$</td><td>Negativně binomická - $NB(k,\pi)$</td></tr>
<tr><td>počet události v uzavřené oblasti (v čase, na ploše, v objemu)</td><td colspan="2">ordinarita, stacionarita, beznáslednost procesu</td><td>Poissonova - $Po(\lambda t)$</td></tr>
</table>

Přehled důležitých R funkcí.

	Pravděp. fce	Dist. fce
Binomická $Bi(n, \pi)$	$P(X=k) =$ dbinom(k, n, π)	$F(k) =$ pbinom(k-1, n, π)
Hypergeometrická $H(N, M, n)$	$P(X=k) =$ dhyper(k, M, N-M, n)	$F(k) =$ phyper(k-1, M, N-M, n)
Negativně binomická $NB(k, \pi)$	$P(X=n) =$ dnbinom(n-k, k, π)	$F(n) =$ pnbinom(n-k-1, k, π)
Poissonova $Po(\lambda t)$	$P(X=k) =$ dpois(k, λt)	$F(k) =$ ppois(k-1, λt)

Příklady.

Příklad 1.

Bridž se hraje s 52 bridžovými kartami, které se rozdají mezi 4 hráče. Vždy 2 hráči hrají spolu. Při rozdávání (13 karet) jste dostali do rukou 2 esa. Jaká je pravděpodobnost, že váš partner bude mít zbývající dvě esa?

X... počet es v ruce spoluhráče

$X \sim H(N=39, M=2, n=13)$

$P(X=2) = \text{dhyper}(2, M, N-M, n) \doteq 0{,}105$

$2, 37, 13$

Pravděp., že kolega dostane 2 esa je 10,5%

Příklad 2.

Pokusy se zjistilo, že radioaktivní látka vyzařuje během 7,5 s průměrně 3,87 α-částice. Určete pravděpodobnost toho, že za 1 sekundu vyzáří tato látka alespoň jednu α-částici.

X... počet vyzářených α-částic za 1 s

$X \sim Poi\left(\lambda \cdot t = \frac{3{,}85}{7{,}5}\right)$

$\lambda = 3{,}87/7{,}5$

$t = 1$

$P(X \geq 1) = 1 - \underbrace{P(X<1)}_{F(1)} \doteq 0{,}403$

Pravděp., že se vyzáří alespoň 1 částice je 40,3%

Příklad 3.

Kamarád vás pošle do sklepa, abyste donesl(a) 4 lahvová piva - z toho dvě desítky a dvě dvanáctky. Nevíte, kde rozsvítit, proto vezmete z basy poslepu 4 láhve. S jakou pravděpodobností jste vyhověl(a), víte-li, že v base bylo celkem 10 desítek a 6 dvanáctek?

X ... počet 10° piv ve výběru 4 piv

$X \sim H(N = 16, M = 10; n = 4)$

$P(X=2) = \text{dhyper}(2, M, N-M, n) \doteq 0{,}371$

Pravděp., že vybereme je 37,1%.

Příklad 4.

V jednom mililitru určitého dokonale rozmíchaného roztoku se v průměru nachází 15 určitých mikroorganismů. Určete pravděpodobnost, že při náhodném výběru vzorku o objemu 1/2 mililitru bude ve zkumavce méně než 5 těchto mikroorganismu.

X ... počet mikroorg. ve vzorku

$X \sim Poi(\lambda t = \frac{15}{2})$

$\lambda = 15$

$t = 1/2$

$P(X < 5) = F(5) = \text{ppois}(5-1, \lambda t) \doteq 0{,}132$

$\quad \shortparallel$

$P(X \leq 5) - P(X=5)$

Pravděp., že je ve vzorku méně než 5 mik. je 13,2%

Příklad 5.

Na stůl vysypeme 15 mincí. Jaká je pravděpodobnost, že počet mincí ležících lícem nahoře, je od 8 do 15?

X... počet mincí ležících lícem z 15

$X \sim Bi(n = 15; \pi = 0{,}5)$

$P(8 \leq X \leq 15) = P(X \leq 15) - P(X < 8) = 0{,}5$

$P(8 \leq X) \qquad P(X < 16)$

Pravděp., že počet mincí lícem nahoru je od 8 do 15 je 50 %

Příklad 6.

Pravděpodobnost, že se dovoláme do studia rozhlasové stanice, která právě vyhlásila telefonickou soutěž je 0,08. Jaká je pravděpodobnost, že se dovoláme nejvýše na 4. pokus?

X... počet pokusů než se dovoláme

$X \sim NB(k = 1, \pi = 0{,}08)$

$P(X \leq 4) = P(X < 5) = \text{pnbinom}(5-k-1, k, \pi)$

$\doteq 0{,}284$

Pravděpodob., že se dovoláme nejvýše na 4 pokus je 28,4%.

Příklad 7.

V továrně se vyrobí denně 10 % vadných součástek. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme-li třicet součástek z denní produkce, tak nejméně dvě budou vadné?

X… počet vadných součástek z výběru

$X \sim Bi(n = 30, \pi = 0{,}1)$

$P(X \geq 2) = 1 - \underbrace{P(X < 2)}_{F(1)} = 1 - \text{pbinom}(2-1, n, \pi) \doteq 0{,}816$

Pravd., že ve výběru budou alespoň 2 vadné je 81,6 %.

Příklad 8.

Ve skladu je 200 součástek. 10 % z nich je vadných. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme-li ze skladu třicet součástek, tak nejméně dvě budou vadné?

200 součástek   20 součástek vadných

X… počet vadných ve výběru

$X \sim H(N = 200, M = 20; n = 30)$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \text{phyper}(2-1, M, N-M, n) \doteq 0{,}834$

Pravd., že ve výběru budou nejméně 2 vadné je 83,4 %.

Příklad 9.

V určité firmě bylo zjištěno, že na 33 % počítačů je nainstalován nějaký nelegální software. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci počtu počítačů s nelegálním softwarem mezi třemi kontrolovanými počítači.

X ... počet počítačů s neleg. soft. ve výběru

$X \sim Bi(n = 3, \pi = 0{,}33)$

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	0,301	0,444	0,219	0,036

t	$(-\infty, 0\rangle$	$(0, 1\rangle$	$(1, 2\rangle$	$(2, 3\rangle$	$(3, \infty)$
$F(t)$	0	0,301	0,745	0,964	1

Příklad 10.

Sportka je loterijní hra, v níž sázející tipuje šest čísel ze čtyřiceti devíti, která očekává, že padnou při budoucím slosování. K účasti ve hře je nutné zvolit alespoň jednu kombinaci 6 čísel (vždy 6 čísel na jeden sloupec) a pomocí křížků tato čísla označit na sázence společnosti Sazka a.s. do sloupců, počínaje sloupcem prvním. Sázející vyhrává v případě, že uhodne alespoň tři čísla z tažené šestice čísel. Jaká je pravděpodobnost, že proto, aby sázející vyhrál, bude muset vyplnit:

6 čísel ze 49   3 l výhra

Pro jeden sloupec

X ... počet uhodnutých čísel

$X \sim H(N=49, M=6, n=6)$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \text{phyper}(3-1, M, N-M, n)$

$\doteq 0{,}019$

a) právě 3 sloupce

Y ... počet vyplněných sloupců do výhry

$Y \sim NB(k=1, \pi \doteq 0{,}019)$

$P(Y=3) = \text{dnbinom}(3-k, k, \pi) \doteq 0{,}018$

Pravděpod., že vyplníme 3 sloupce než vyhrajeme je 1,8 %.

b) alespoň 5 skoupí

$P(Y \geq 5) = 1 - P(Y < 5) = 1 - \text{pnbinom}(5-k-1, k, \pi)$

$\doteq 0{,}928$

Pravděpodobnost, že vyplníme alespoň 5 skoupí než vyhrajeme je 92,8%.

c) méně než 10

$P(Y < 10) = \text{pnbinom}(10-k-1, k, \pi)$

$\doteq 0{,}156$

Pravděpod., že vyhrajeme při vyplnění méně než 10 skoupí je 15,6%.

d) více než 5 a nejvýše 10

$$P(5 < Y \leq 10) = \underset{F(11)}{P(Y \leq 10)} - \underset{F(6)}{P(Y \leq 5)}$$

pnbinom(11 − k − 1, k, π) − pnbinom(6 − k − 1, k, π)

$\doteq 0{,}082$

Pravděpod., že vyberujeme při vyplnění více než 5 a nejvýše 10 sloupců je 8,2 %

Příklad 11.

Pravděpodobnost, že hodíme 6 na 6stěnné kostce je 1/6. Házeme tak dlouho, než hodíme šestku 10 krát.

a)

Jaká je střední hodnota počtu hodů.

X .... počet hodů kostkou než 10x padne 6

$X \sim NB(k=10, \pi = 1/6)$

$E(X) = \frac{k}{\pi} = \frac{10}{1/6} = 60$

střední hodnota počtu hodů je 60

b)

S kolika hody nejméně musíme počítat, pokud chceme, aby pradvěpodobnost, že se nám podaří naházet 10 šestek, byla alespoň 70%.

$P(X \leq w) \geq 0{,}7$

$\tilde{F}(w)$

$w = \underline{68}$

musím počítat alespoň s 68 hody.