# Cvičení 9. - Intervalové odhady

| Výběrová charakteristika | Rozdělení pravděpodobnosti | Poznámka |
|---|---|---|
| $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ | $N(0;1)$ | viz CLV |
| $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$ | $t_{n-1}$ | viz vlastnosti Studentova rozdělení |
| $\dfrac{S^2}{\sigma^2}(n-1)$ | $\chi^2_{n-1}$ | viz vlastnosti $\chi^2$ - rozdělení |
| $\dfrac{p-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}\sqrt{n}$ | $N(0;1)$ | viz vlastnosti realtivní četnosti, předpoklad: $n > \dfrac{9}{p(1-p)}$ |

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S}\cdot\sqrt{n} \sim t_{n-1}$$

$$P\Big(\underbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{S}\cdot\sqrt{n}} < \underline{t_{\alpha,n-1}}\Big) = \alpha$$

$$q \in (\alpha, n-1)$$

$$P\left(-\mu < \frac{t_{\alpha,n-1}}{\sqrt{n}}\cdot S - \bar{X}\right) = \alpha$$

$$P\Big(\mu > \underbrace{\bar{X} - \frac{t_{\alpha,n-1}}{\sqrt{n}}\cdot S}\Big) = \alpha$$

$$P(a < Y < b) = 1 - \underline{\underline{\alpha}}$$

$$P(Y \in (a, b)) = 1 - \alpha$$

$$P(\underline{a} > Y) = \alpha/2$$

$$P(Y > b) = \alpha/2$$

$$Y \sim t_{n-1}$$

$$a = t_{\alpha/2,\, n-1}$$

$$b = t_{1-\alpha/2,\, n-1}$$

# PŘÍKLADY

## Příklad 1.

Při kontrolních zkouškách 16 žárovek byl stanoven odhad střední hodnoty $\bar{x}$ = 3 000 hodin a směrodatné odchylky s = 20 hodin jejich životnosti. Za předpokladu,že životnost žárovky má normální rozdělení, určete 90% intervalový odhad pro parametry μ a σ

$n = 16$

$\bar{x} = 3000$

$s = 20$

$\mu$ ... střední hodnota

$\sigma$ ... směr odch

a) odhad $\mu$

t-test IO

$$\frac{\bar{X} - \mu}{s}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$$

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s} \cdot \sqrt{n} < a\right) = \alpha/2$$

$$a = t_{\alpha/2,\, n-1}$$

$$P\left(\bar{X} - \mu < a \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \alpha/2$$

$$P\left(\mu > \underbrace{\bar{X} - a \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha/2$$

$$P\left( \underline{\frac{\overline{X}-\mu}{s}\cdot\sqrt{n} > b} \right) = \alpha/2$$

$$\vdots \qquad\qquad b = t_{1-\alpha/2,\, n-1}$$

$$P\left( \mu < \underbrace{\overline{X} - b\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}} \right) = \alpha/2$$

$$\Rightarrow \quad P\left( \overline{X} - b\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} - a\,\frac{S}{\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$$

$\alpha = 0{,}1$

$$\underline{P\left(2991 < \mu < 3009\right) \doteq 0{,}9}$$

b) odhad $\sigma$ $\qquad \frac{S^2}{\sigma^2}\cdot(n-1) \sim \chi_{n-1}$

$$P\left(\frac{S^2}{\sigma^2}\cdot(n-1) < a\right) = \alpha/2$$

$$a = \chi_{\alpha/2,\, n-1}$$

$$P\left(\underline{\sqrt{\frac{S^2}{a}\cdot(n-1)} < \sigma}\right) = \alpha/2$$

$$P\left(\frac{S^2}{\sigma^2}\cdot(n-1) > b\right) = \alpha/2$$

$$b = \chi_{1-\alpha/2,\, n-1}$$

$$P\left(\underline{\sqrt{\frac{S^2}{b}\cdot(n-1)} > \sigma}\right) = \alpha/2$$

$$P\left(\underline{\sqrt{\frac{S^2}{b}(n-1)} < \sigma < \sqrt{\frac{S^2}{a}(n-1)}}\right) = 1-\alpha$$

$$P(15 < \sigma < 29) \geq 0{,}9$$

# Příklad 2.

Hloubka moře se měří přístrojem, jehož systematická chyba je rovna nule a náhodné chyby mají normální rozdělení se směrodatnou odchylkou 20 m. Kolik nezávislých měření je třeba provést,aby s pravděpodobností 95 % stanovila hloubku s chybou menší než 10 m?

$\sigma = 20$

$|\bar{X} - \mu| \leq 10$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$z_{\alpha/2} < 0$

$\alpha = 0{,}05$

$$P\left( \frac{\overbrace{\bar{X} - \mu}^{10}}{\sigma} \cdot \sqrt{n} > z_{1-\alpha/2} \right) = \alpha/2$$

$$\sqrt{n} > \frac{\sigma}{\bar{X} - \mu} \cdot z_{1-\alpha/2}$$

$$n > \frac{20^2}{10^2} \cdot z^2_{1-\alpha/2}$$

$n > 15.36$

$n \geq 16$

min. poč. poz. je 16.

# Příklad 3.

Úkolem je určit průměrnou hladinu cholesterolu v séru v určité populaci mužů. V náhodném výběru (pocházejícím z normálního rozdělení ) 25 mužů je výběrový průměr 6,3 mmol/l a výběrová směrodatná odchylka 1,3 mmol/l.

$n = 25$

$\bar{x} = 6{,}3$

$s = 1{,}3$

$\underline{\mu}$

t-test ID

$\alpha = 0{,}05$

$P(5{,}7 < \mu < 6{,}9) \geq 0{,}95$

# Příklad 4.

Předpokládejme, že v náhodném výběru 200 mladých mužů má 120 z nich vyšší než doporučenou hladinu cholesterolu v séru. Určete 95% interval spolehlivosti pro procento mladých mužů s vyšší hladinou cholesterolu v populaci.

$n = 200$

$x = 120$

$\pi = ?$

$\underline{p = 0,6}$

ověřit $\quad n > \frac{9}{p \cdot (1-p)} \quad n \geq 38 \checkmark$

$P(\underline{0,52 < \pi < 0,67}) \geq 0,95$

# Příklad 5.

V rámci výzkumné studie pracujeme s náhodným výběrem 70 žen z české populace. U každé z žen byl změřen hemoglobin s přesností 0,1 g/100 ml. Naměřené hodnoty jsou v uvedeny v souboru Hemoglobin.xls. Nalezněte 95% intervalové odhady směrodatné odchylky a střední hodnoty hemoglobinu v populaci českých žen. (Normalitu ověřte na základě exploračních grafů.)

měření hemoglob.

OP? ✓ žádná

a) $\mu$ ... míry polohy

NORMALITA?

QQ - OK

šikmost (a) = 0,16

špič. (u) = -0,50

✓

$P(11{,}64 < \mu < 12{,}32) \doteq 0{,}95$

$s \doteq 1{,}42$ $\bar{x} = 11{,}98$

b) $\sigma$ ... míra variab.

NORMAL

$$P(1,21 < \delta < 1,70) \geq 0,45$$

## Příklad 6.

Jaký musí být počet pozorování, jestliže chceme s pravděpodobností 0,95 stanovit průměrnou hodnotu hemoglobinu u novorozenců s chybou nejvýše 1,0 $g/l$. Populační rozptyl hodnot se odhaduje hodnotou 46,0 $g^2/l^2$.

$$\alpha = 0{,}05$$

$$|\bar{X} - \mu| = 1$$

$$\sigma^2 = 46 \rightarrow \sigma = \sqrt{46}$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} > z_{1-\alpha/2}\right) = \alpha/2$$

$$n > \left(z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\bar{X} - \mu}\right)^2$$

$$\underline{\underline{n \geq 177}}$$

Potř. alespoň 177 měření

# Příklad 7.

V datovém souboru pr7.xlsx naleznete měření hluku způsobeného větrákem počítače [dB]. Spočtěte 95% intervalový odhad průměrného hluku a 95% intervalový odhad variability hluku.

OP – 1 PP → odstraníme

a) míra polohy

$\boxed{\text{t-test}}$
WILCOX
SIGN

EXPLORAČNĚ NORM.

QQ – OK ✓

ŠIKM. = –0,08 ✓
ŠPIČ. = –0,55 ✓

t-test ID

$P(38{,}2 < \mu < 41{,}1) \geq 0{,}95$

$s = 3{,}7$

$\bar{x} = 39{,}7$

b) míra var. $\sigma$

NORM ✓

$P(2{,}4 < \sigma < 5{,}0) \geq 0{,}95$

# Příklad 8.

V datovém souboru pr8.xlsx naleznete měření doby do poruchy elektrické součástky [h]. Spočtěte 99% intervalový odhad průměrné životnosti daného typu součastky.

OP – dle box-plotu je
ale ponechávám (Exp-roz.)

míra polohy

NORM ✗

SYMETRIE ✗

~~t-test~~

~~Wilcox~~

Sign ✓

$S = 3500$

$\bar{X}_{0,5} = 2800$

$P(1000 < X_{0,5} < 5600) \geq 0{,}99$