ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC - KỸ THUẬT MÁY TÍNH

## MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC (CO2011)

---

### Báo cáo Bài tập lớn

# “Dynamics of Love”

---

GVHH: Nguyễn Tiến Thịnh
Nguyễn An Khương
Nguyễn Văn Minh Mẫn
Mai Xuân Toàn
Trần Hồng Tài

SV thực hiện: Hà Thuỳ Dương - 2110103 - L01
Bùi Quang Hưng - 2111392 - L06
Nguyễn Trung Nghĩa - 2114184 - L06
Nguyễn Ngọc Thành Đạt - 2111013 - L06

Tp. Hồ Chí Minh, Tháng 11/2022

# Mục lục

# 1 Phương trình vi phân

## 1.1 Phương trình vi phân thường (ODE)

Phương trình vi phân thường tuyến tính cấp 1 thuần nhất có dạng tổng quát:

$$F(t, \dot{u}, u) = 0 \tag{1}$$

Trong đó:

- $F$ : Hàm vector phụ thuộc vào $t$, $u$, $\dot{u}$.
- $t$ : Biến thời gian.
- $u$ : Hàm vector phụ thuộc vào $t$.
- $\dot{u}$ : Đạo hàm của $u$ theo $t$.

Mô hình này mô tả sự phát triển của một đại lượng $u$ theo thời gian $t$.

## 1.2 Bài toán giá trị ban đầu (IVP)

Nghiệm của phương trình vi phân cấp 1 phụ thuộc vào hằng số $C$ tùy ý. Trong thực tế, người ta thường không quan tâm đến tất cả các nghiệm của phương trình mà chỉ chú ý đến những nghiệm $u(t)$ của phương trình $F(t, \dot{u}, u) = 0$ (1) thỏa mãn điều kiện:

$$u(t_0) = u_0 \tag{2}$$

Bài toán đặt ra như vậy gọi là **Bài toán Cauchy**. Điều kiện (2) được gọi là điều kiện ban đầu, $u_0$ và $t_0$ là các giá trị ban đầu.

## 1.3 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Xét bài toán Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, t), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Giả sử $f$ liên tục trên hình chữ nhật đóng $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times [u_0 - b, u_0 + b]$ $(a, b > 0)$ và $f$ thoả mãn điều kiện Lipschitz theo $u$ trong $R$, tức tồn tại $K > 0$ sao cho

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq K|u_1 - u_2|, \ \forall (t, u_1), (t, u_2) \in R$$

Khi đó tồn tại duy nhất nghiệm $u = \varphi(t)$ của phương trình $\dot{u} = f(u, t)$, liên tục trên $[t_0 - h, t_0 + h] \subset [u_0 - a, u_0 + a]$ và thoả mãn điều kiện ban đầu $u(t_0) = u_0$.

Như vậy, trên lớp hàm thoả mãn điều kiện Lipschitz bài toán Cauchy tồn tại nghiệm và nghiệm đó là duy nhất.

## 1.4 Hệ phương trình vi phân thường tuyến tính cấp 1 thuần nhất

Phần này ta sẽ nghiên cứu về một hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất có thể mô tả tình yêu giữa hai người.

### 1.4.1 Lập mô hình toán học

Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất với giá trị ban đầu (Xét hệ gồm 2 phương trình) có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = aR(t) + bJ(t), \\ \dot{J}(t) = cR(t) + dJ(t), \\ R(0) = R_0, \;\; J(0) = J_0. \end{cases} \tag{3}$$

Trong đó:

- $R(t) : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ : Tình yêu của Romeo dành cho Juliet vào thời điểm $t$.
- $J(t) : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ : Tình yêu Juliet dành cho Romeo vào thời điểm $t$.
- $R_0, J_0 \in \mathbb{R}$ : Tình yêu của Romeo dành cho Juliet và Juliet dành cho Romeo vào thời điểm ban đầu.
- $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ : Các hệ số hằng mô tả sự tương tác trong tình yêu của người này với người kia. Chúng ta có thể xác định phong cách lãng mạng trong tình yêu của Romeo dành cho Juliet cũng như Juliet dành cho Romeo thông qua các hệ số này.

| $a$ | $b$ | **Style** |
|---|---|---|
| $+$ | $+$ | Eager Beaver |
| $+$ | $-$ | Narcissistic Nerd |
| $-$ | $+$ | Cautious Lover |
| $-$ | $-$ | Hermit |

Bảng 1: Các phong cách lãng mạn trong tình yêu

### 1.4.2 Tìm nghiệm của mô hình

Các bước để tìm nghiệm của Hệ phương trình vi phân (3):

**Bước 1 :** Chuyển Hệ phương trình vi phân (3) về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} R_0 & J_0 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Tìm trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ từ phương trình đặc trưng:

$$det(A - \lambda I) = 0 \tag{5}$$

**Bước 3 :** Tìm vector riêng $V$ $(V \neq 0)$ của ma trận $A$ ứng với từng trị riêng $\lambda$.
(Xem chi tiết ở Bảng 2)

**Bước 4** : Tìm nghiệm tổng quát $u(t, C_1, C_2)$.
(Xem chi tiết ở Bảng 2)

**Bước 5 :** Xác định giá trị các hằng số $C_1$, $C_2$ từ điều kiện ban đầu $u(0) = u_0$.

| **Trường hợp** | **Vector riêng** $V$ | **Công thức nghiệm tổng quát** | |
|---|---|---|---|
| 2 nghiệm thực phân biệt ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) | $(A - \lambda_1 I)V_1 = 0$<br>$(A - \lambda_2 I)V_2 = 0$ | $u = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2$ | (I) |
| 1 nghiệm kép ($\lambda_1 = \lambda_2$) | $(A - \lambda_1 I)V_1 = 0$<br>$(A - \lambda_1 I)V_2 = V_1$ | $u = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_1 t}(tV_1 + V_2)$ | (II) |
| | Nếu $(A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ thì ta chọn $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ và áp dụng Công thức nghiệm tổng quát ở Trường hợp (I). | | (III) |
| Nghiệm phức $\lambda$ ($\lambda_1 = Re\lambda + \lvert Im\lambda \rvert i$) | $(A - \lambda_1 I)V_1 = 0$ | $u = V_1 e^{\lambda_1 t}$<br>$= V_1 e^{Re\lambda.t}\big(\cos(\lvert Im\lambda \rvert.t) + i\sin(\lvert Im\lambda \rvert.t)\big)$<br>$= e^{Re\lambda.t}\left(\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} g_3(t) \\ g_4(t) \end{bmatrix}\right)$<br>$= e^{Re\lambda.t}\left(C_1\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} g_3(t) \\ g_4(t) \end{bmatrix}\right)$<br>*Với $g(t)$ là các hàm số theo biến $t$ được rút ra từ biểu thức ở dòng trên. | (IV) |

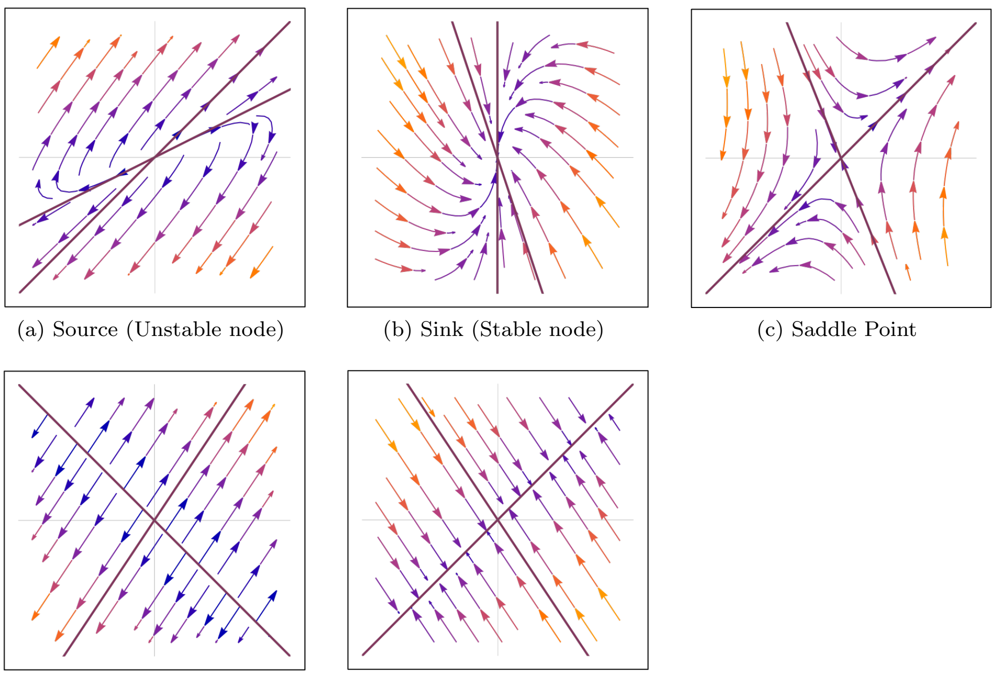
Bảng 2: Công thức nghiệm tổng quát cho từng trường hợp

### 1.4.3 Phân loại Biểu đồ pha (Phase Portraits)

(Xem kết hợp Bảng 2 và Bảng 3)

| **Trường hợp** | $Re\lambda_1$ | $Re\lambda_2$ | $\lvert Im\lambda_1\rvert$ | $\lvert Im\lambda_2\rvert$ | **Type** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 nghiệm thực phân biệt ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) | + | + | 0 | 0 | Source (Unstable node) | (I) |
| | − | − | 0 | 0 | Sink (Stable node) | |
| | + | − | 0 | 0 | Saddle point | |
| | 0 | + | 0 | 0 | Unstable line of fixed points | |
| | 0 | − | 0 | 0 | Stable line of fixed points | |
| 1 nghiệm kép ($\lambda_1 = \lambda_2$) | + | + | 0 | 0 | Unstable degenerate node | (II) |
| | − | − | 0 | 0 | Stable degenerate node | |
| | + | + | 0 | 0 | Unstable star | (III) |
| | − | − | 0 | 0 | Stable star | |
| Nghiệm phức ($\lambda = Re\lambda \pm Im\lambda.i$) | + | + | + | + | Unstable spiral | (IV) |
| | − | − | + | + | Stable spiral | |
| | 0 | 0 | + | + | Center | |

Bảng 3: Phân loại biểu đồ pha



(a) Source (Unstable node)

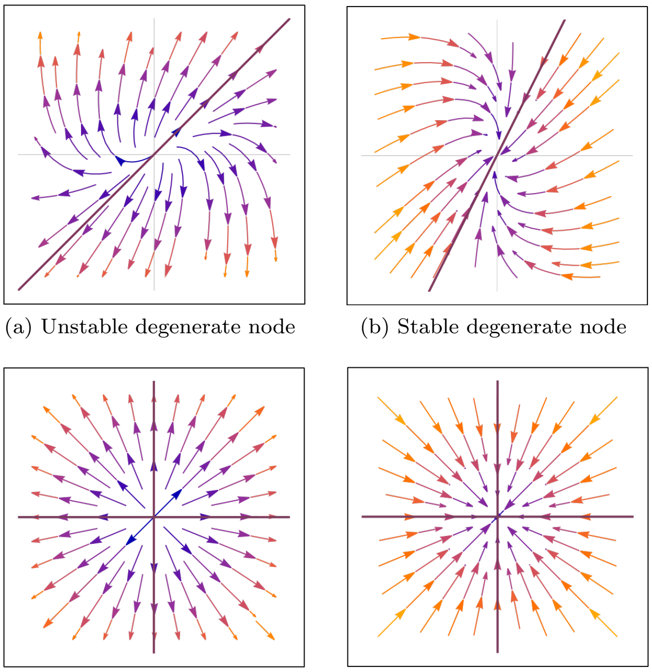
(b) Sink (Stable node)

(c) Saddle Point

(d) Unstable line of fixed points

(e) Stable line of fixed points

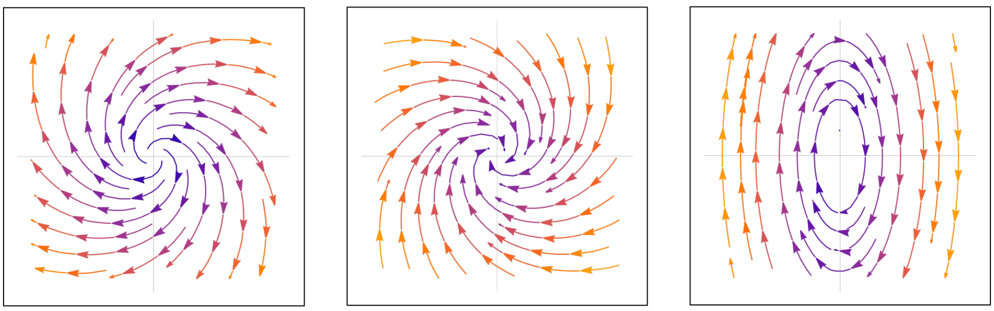
Hình 1: Biểu đồ pha trường hợp 2 nghiệm thực phân biệt ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)



(a) Unstable degenerate node (b) Stable degenerate node

(c) Unstable star (d) Stable star

Hình 2: Biểu đồ pha trường hợp 1 nghiệm kép ($\lambda_1 = \lambda_2$)



(a) Unstable spiral (b) Stable spiral (c) Center

Hình 3: Biểu đồ pha trường hợp nghiêm phức ($\lambda = Re\lambda \pm Im\lambda.i$)

# 2 Các ví dụ cụ thể cho từng cặp xu hướng

## 2.1 Eager Beaver and Eager Beaver

### 2.1.1 Ví dụ 1

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = R + 2J, \\ \dot{J} = 3R + 2J, \\ R(0) = 3, \ J(0) = 5. \end{cases} \tag{6}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{7}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = 4$ và $\lambda_2 = -1$.

**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ tương ứng với mỗi trị riêng.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được: $u = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm: $u = \frac{8}{5} e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = \frac{16}{5} e^{4t} - \frac{1}{5} e^{-t} \\ J(t) = \frac{24}{5} e^{4t} + \frac{1}{5} e^{-t} \end{cases}$$

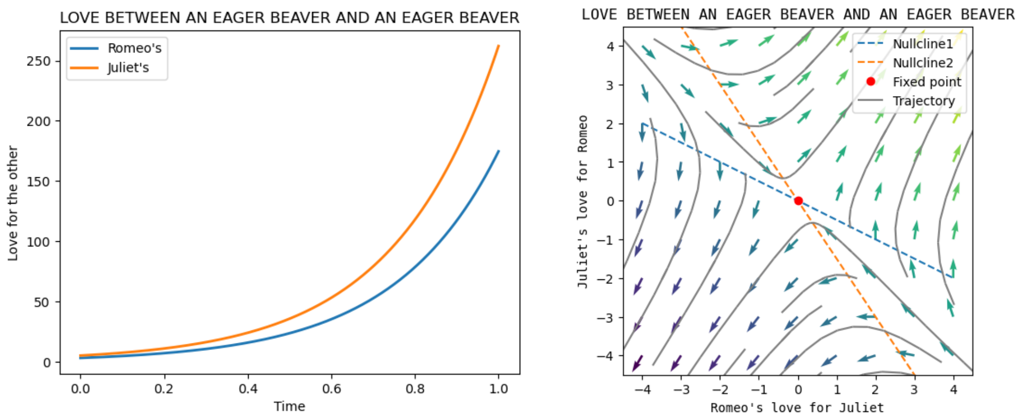
### 2.1.2 Ví dụ 2

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R + J, \\ \dot{J} = 6R + 4J, \\ R(0) = -3, \ J(0) = 1. \end{cases} \tag{8}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{9}$$




(a) The solutions (b) The phase portraits

Hình 4: *The love between an eager beaver and an eager beaver - 2.1.1*

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = 3 + \sqrt{7}$ và $\lambda_2 = 3 - \sqrt{7}$.

**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{7} \end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{7} \end{pmatrix}^T$ tương ứng với mỗi trị riêng.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được: $u = C_1 e^{(3+\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{7} \end{pmatrix} + C_2 e^{(3-\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{7} \end{pmatrix}$.

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm:

$$u = (-\frac{3}{2} + \frac{4\sqrt{7}}{14}) e^{(3+\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{7} \end{pmatrix} + (-\frac{3}{2} - \frac{4\sqrt{7}}{14}) e^{(3-\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm của hệ là:

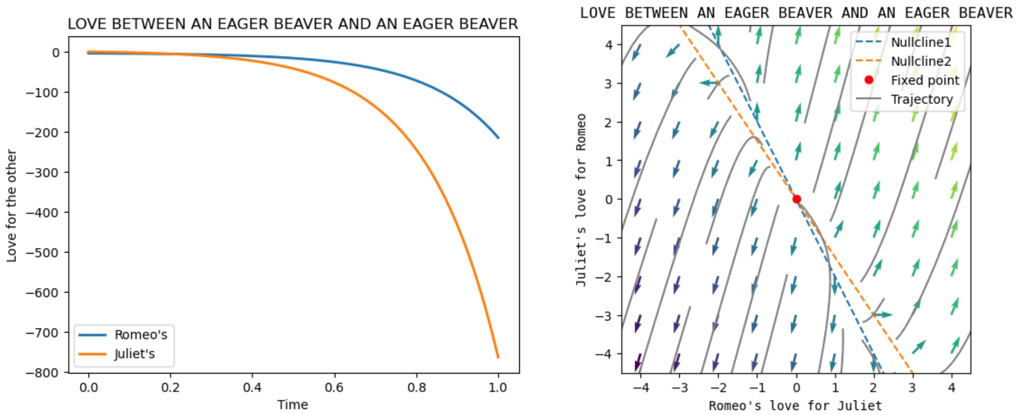
$$\begin{cases} R(t) = (-\frac{3}{2} + \frac{4\sqrt{7}}{14}) e^{(3+\sqrt{7})t} + (-\frac{3}{2} - \frac{4\sqrt{7}}{14}) e^{(3-\sqrt{7})t} \\ J(t) = (\frac{1}{2} - \frac{17\sqrt{7}}{14}) e^{(3+\sqrt{7})t} + (\frac{1}{2} + \frac{17\sqrt{7}}{14}) e^{(3-\sqrt{7})t} \end{cases}$$

## 2.2 Eager Beaver and Narcissistic Nerd

### 2.2.1 Ví dụ 1

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = R + 2J, \\ \dot{J} = R - J, \\ R(0) = 1, \; J(0) = 2. \end{cases}$$




(a) The solutions (b) The phase portraits

Hình 5: *The love between an eager beaver and an eager beaver - 2.1.2*

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = \sqrt{3}$ và $\lambda_2 = -\sqrt{3}$.

**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^T$ tương ứng với mỗi trị riêng.

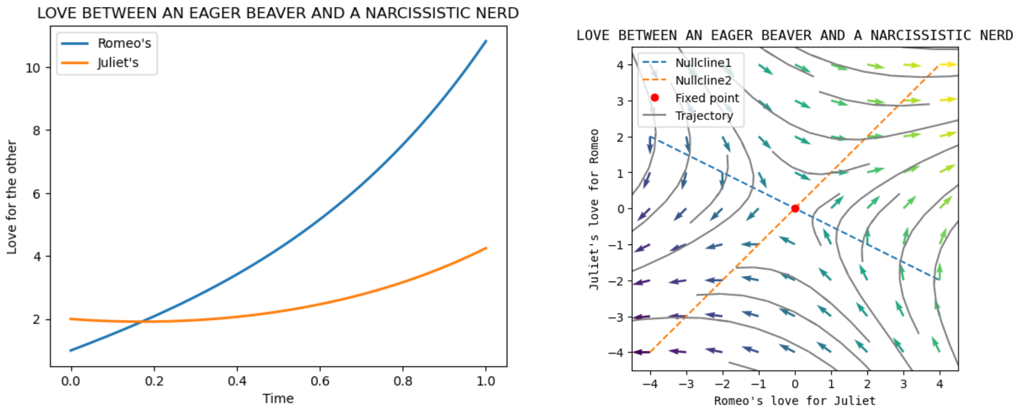
**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được: $u = C_1 e^{\sqrt{3}t} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\sqrt{3}t} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm:

$$u = (1 - \frac{\sqrt{3}}{6}) e^{\sqrt{3}t} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} + (1 + \frac{\sqrt{3}}{6}) e^{-\sqrt{3}t} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = (\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{6}) e^{\sqrt{3}t} + (\frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{6}) e^{-\sqrt{3}t} \\ J(t) = (1 - \frac{\sqrt{3}}{6}) e^{\sqrt{3}t} + (1 + \frac{\sqrt{3}}{6}) e^{-\sqrt{3}t} \end{cases}$$




(a) The solutions (b) The phase portraits

Hình 6: *The love between an eager beaver and a narcissistic nerd - 2.2.1*

### 2.2.2 Ví dụ 2

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = R - J, \\ \dot{J} = R + J, \\ R(0) = -1, \ J(0) = 5. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = 2 + i$ .

**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}^T$

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được:

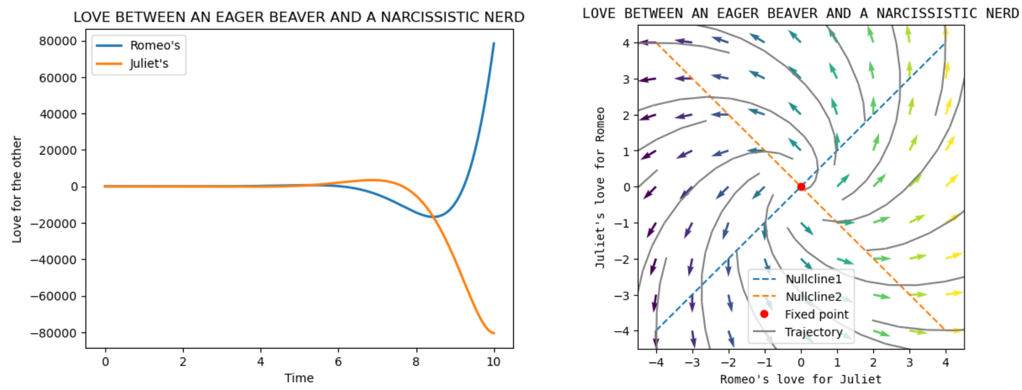
$u = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm:

$u = -5e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} - e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = -5e^{2t} \sin t - e^{2t} \cos t \\ J(t) = 5e^{2t} \ \cos t - e^{2t} \sin t \end{cases}$$




(a) The solutions

(b) The phase portraits

Hình 7: *The love between an eager beaver and an eager beaver - 2.2.2*

## 2.3 Eager Beaver and Cautious Lover

### 2.3.1 Ví dụ 1

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = -2R + 5J, \\ \dot{J} = R + 2J, \\ R(0) = 3, \ J(0) = 5. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = 3$ và $\lambda_2 = -3$.

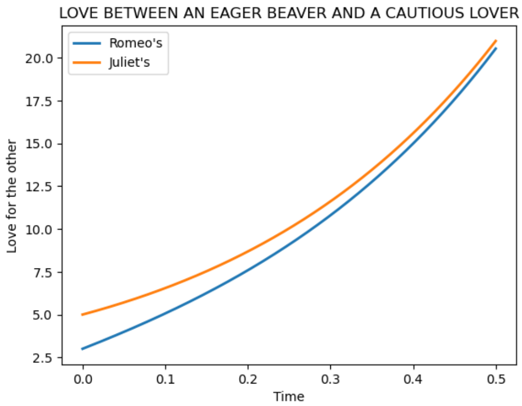
**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ tương ứng với mỗi trị riêng.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được: $u = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

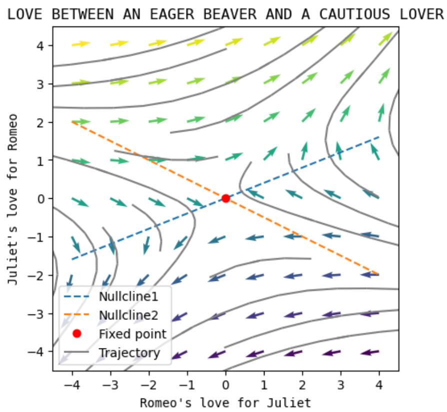
**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm: $u = 4e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = 4e^{3t} - e^{-3t} \\ J(t) = 4e^{3t} + e^{-3t} \end{cases}$$




(a) The solutions




(b) The phase portraits

Hình 8: *The love between an eager beaver and a cautious lover - 2.3.1*

### 2.3.2 Ví dụ 2

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R + 0J, \\ \dot{J} = -R + 2J, \\ R(0) = 1, \ J(0) = 2. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng kép $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda = 2$.

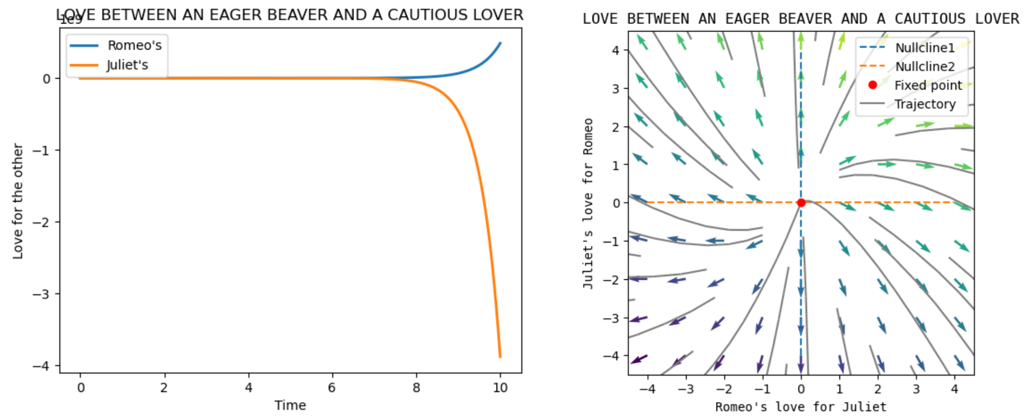
**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}^T$ tương ứng trị riêng kép này.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được: $u = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} (t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm: $u = 2e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{2t} (t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = e^{2t} \\ J(t) = (2 - t)e^{2t} \end{cases}$$




(a) The solutions (b) The phase portraits

Hình 9: *The love between an eager beaver and a cautious lover - 2.3.2*

## 2.4 Eager Beaver and Hermit

### 2.4.1 Ví dụ 1

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = 4R + 6J, \\ \dot{J} = -R - J, \\ R(0) = 2, \ J(0) = 0. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 1$.

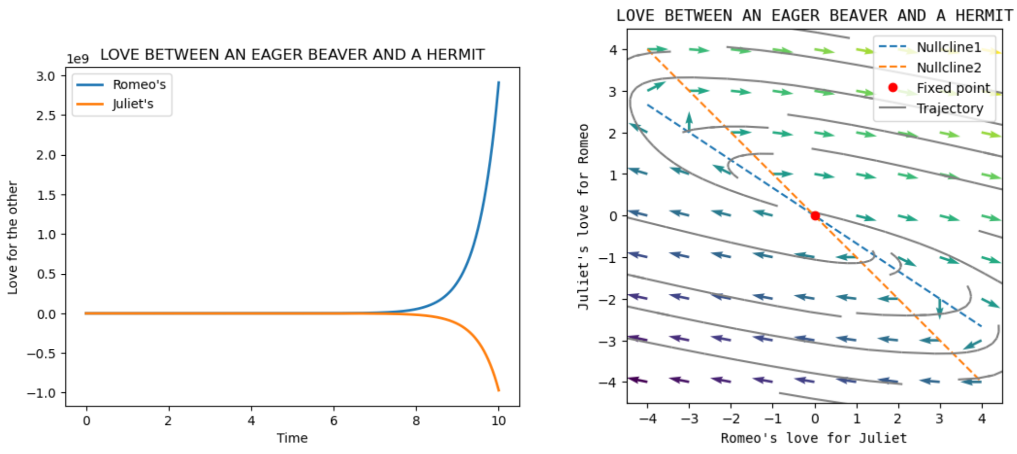
**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^T$ tương ứng với mỗi trị riêng.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được: $u = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm: $u = 2e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 2e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = 6e^{2t} - 4e^{t} \\ J(t) = -2e^{2t} + 2e^{t} \end{cases}$$




(a) The solutions

(b) The phase portraits

Hình 10: *The love between an eager beaver and a hermit - 2.4.1*

### 2.4.2 Ví dụ 2

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = -3R - J, \\ \dot{J} = 3R + J, \\ R(0) = 2, \ J(0) = 0. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = 0$ và $\lambda_2 = -2$.

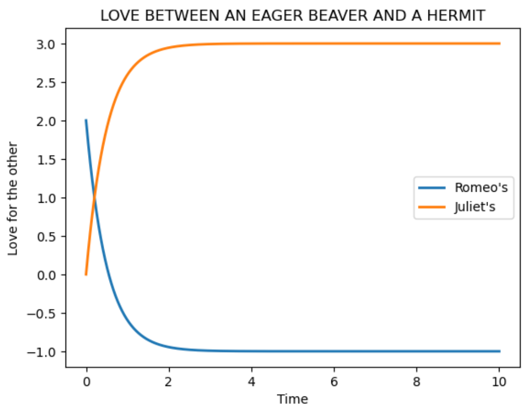
**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ tương ứng với mỗi trị riêng.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được: $u = C_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

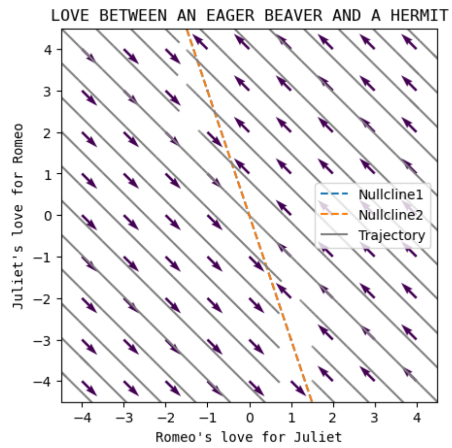
**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm: $u = \frac{1}{2} e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{-2t} \\ J(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} e^{-2t} \end{cases}$$




(a) The solutions




(b) The phase portraits

Hình 11: *The love between an eager beaver and a hermit - 2.4.2*

## 2.5 Narcissistic Nerd and Narcissistic Nerd

### 2.5.1 Ví dụ 1

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R - J, \\ \dot{J} = 5R - 4J, \\ R(0) = -2, \ J(0) = 4. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = -3$.

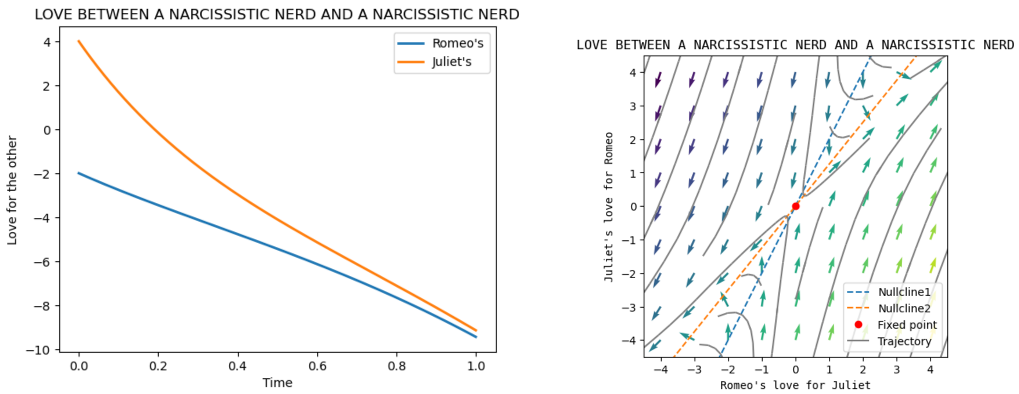
**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}^T$ tương ứng với mỗi trị riêng.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được: $u = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm: $u = -\frac{7}{2} e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = -\dfrac{7}{2}e^{t} + \dfrac{3}{2}e^{-3t} \\ J(t) = -\dfrac{7}{2}e^{t} + \dfrac{15}{2}e^{-3t} \end{cases}$$




(a) The solutions

(b) The phase portraits

Hình 12: *The love between a narcissistic nerd and a narcissistic nerd - 2.5.1*

### 2.5.2 Ví dụ 2

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = 3R - 2J, \\ \dot{J} = 4R - 1J, \\ R(0) = -2, \ J(0) = 4. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = 1 + 2i$ .

**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \end{pmatrix}^T$

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được:

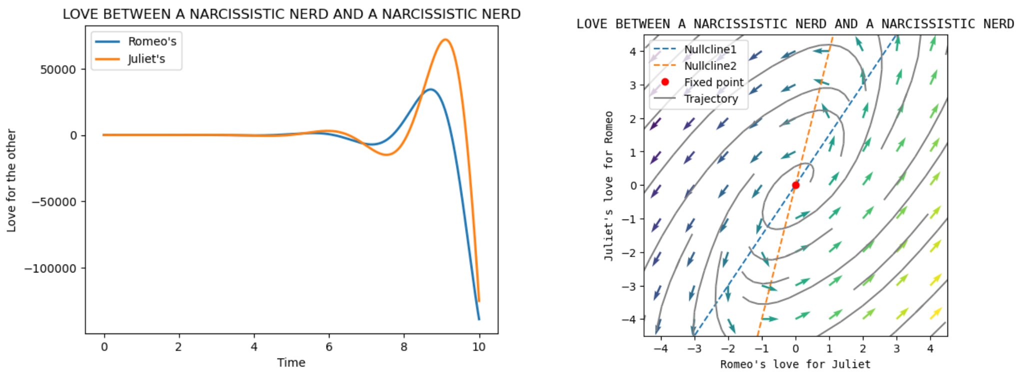
$$u = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}.$$

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm:

$$u = e^t \begin{pmatrix} -6\sin 2t - 2\cos 2t \\ 4\cos 2t - 8\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = -6e^t \sin 2t - 2e^t \cos 2t \\ J(t) = 4e^t \cos 2t - 8e^t \sin 2t \end{cases}$$




(a) The solutions

(b) The phase portraits

Hình 13: *The love between a narcissistic nerd and a narcissistic nerd - 2.5.2*

## 2.6 Narcissistic Nerd and Cautious Lover

### 2.6.1 Ví dụ 1

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R - J, \\ \dot{J} = -R + 2J, \\ R(0) = 1, \ J(0) = 4. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = 3$ và $\lambda_2 = 1$.

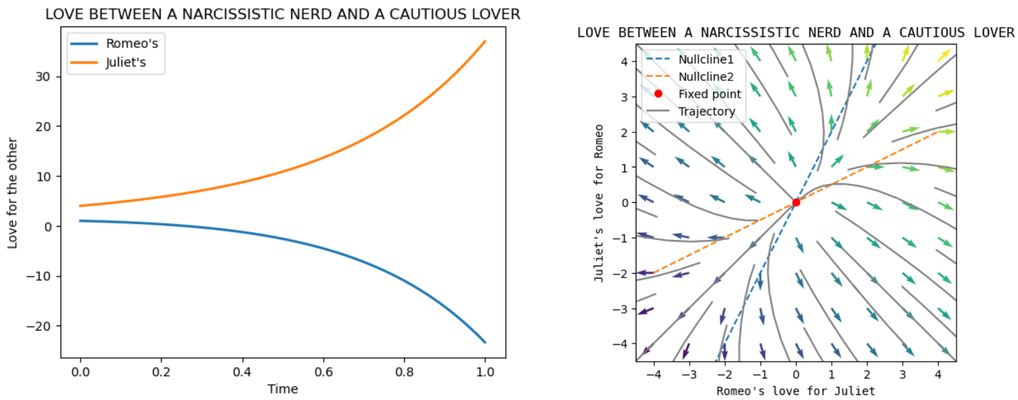
**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ tương ứng với mỗi trị riêng.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được: $u = C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + C_2e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm: $u = -\frac{3}{2}e^{3t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{5}{2}e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = -\frac{3}{2}e^{3t} + \frac{5}{2}e^{t} \\ J(t) = \frac{3}{2}e^{3t} + \frac{5}{2}e^{t} \end{cases}$$




(a) The solutions

(b) The phase portraits

Hình 14: *The love between a narcissistic nerd and a cautious lover - 2.6.1*

### 2.6.2 Ví dụ 2

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = R - 3J, \\ \dot{J} = -2R + 6J, \\ R(0) = 1, \;\; J(0) = 4. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix}1 & -3\\-2 & 6\end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix}R & J\end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = 0$ và $\lambda_2 = 7$.

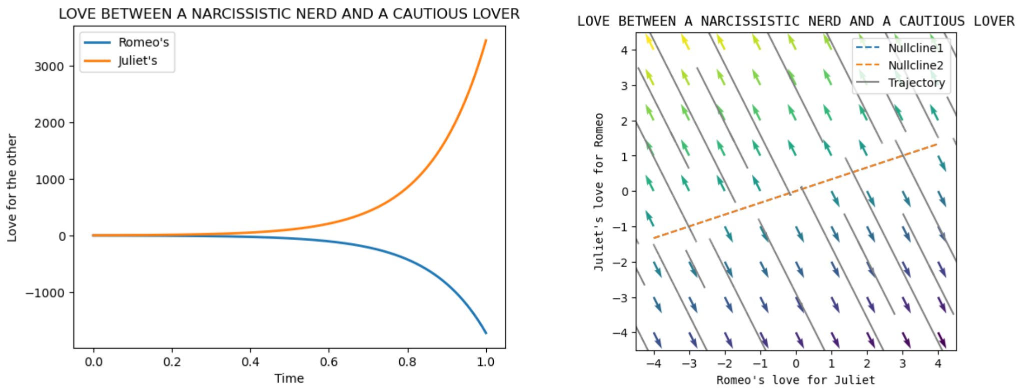
**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^T$ tương ứng với mỗi trị riêng.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được: $u = C_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm: $u = \frac{6}{7} e^{0t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{11}{7} e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = \frac{18}{7} - \frac{11}{7} e^{7t} \\ J(t) = \frac{6}{7} + \frac{22}{7} e^{7t} \end{cases}$$




(a) The solutions

(b) The phase portraits

Hình 15: *The love between a narcissistic nerd and a cautious lover - 2.6.2*

## 2.7 Narcissistic Nerd and Hermit

### 2.7.1 Ví dụ 1

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R - 2J, \\ \dot{J} = -R - 4J, \\ R(0) = 1, \; J(0) = -1. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = -1+\sqrt{11}$ và $\lambda_2 = -1-\sqrt{11}$.

**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix}-3-\sqrt{11} & 1\end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix}-3+\sqrt{11} & 1\end{pmatrix}^T$ tương ứng với mỗi trị riêng.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được:

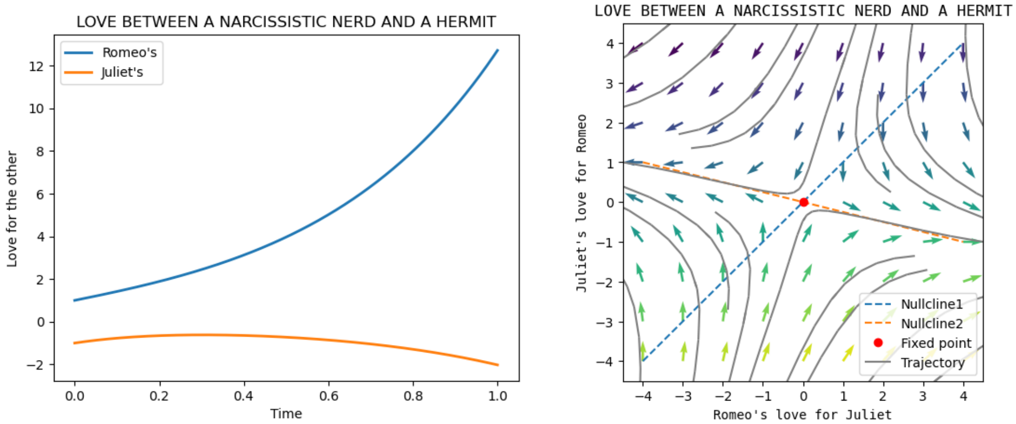
$$u = C_1 e^{(-1+\sqrt{11})t}\begin{pmatrix}-3-\sqrt{11}\\ 1\end{pmatrix} + C_2 e^{(-1-\sqrt{11})t}\begin{pmatrix}-3+\sqrt{11}\\ 1\end{pmatrix}.$$

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm:

$$u = (-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{11})e^{(-1+\sqrt{11})t}\begin{pmatrix}-3-\sqrt{11}\\ 1\end{pmatrix} + (-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{11})e^{(-1-\sqrt{11})t}\begin{pmatrix}-3+\sqrt{11}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = (\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{11}}{22})e^{(-1+\sqrt{11})t} + (\frac{1}{2}-\frac{5\sqrt{11}}{22})e^{(-1-\sqrt{11})t} \\ J(t) = (-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{11})e^{(-1+\sqrt{11})t} + (-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{11})e^{(-1-\sqrt{11})t} \end{cases}$$




(a) The solutions

(b) The phase portraits

Hình 16: *The love between a narcissistic nerd and a hermit - 2.7.1*

### 2.7.2 Ví dụ 2

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R-3J, \\ \dot{J} = -R-4J, \\ R(0)=3,\ J(0)=-3. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = -1 + 2\sqrt{3}$ và $\lambda_2 = -1 - 2\sqrt{3}$.

**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} -3 - 2\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix} -3 + 2\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^T$ tương ứng với mỗi trị riêng.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được:

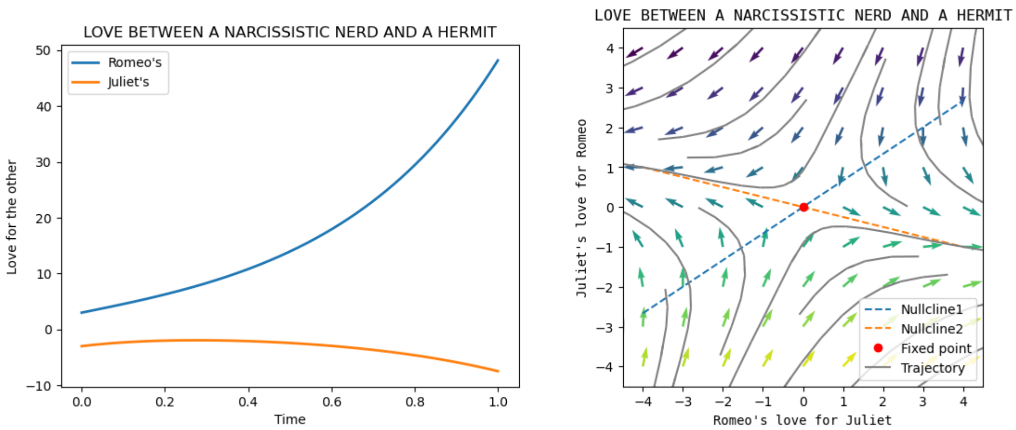
$$u = C_1 e^{(-1+2\sqrt{3})t} \begin{pmatrix} -3 - 2\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{(-1-2\sqrt{3})t} \begin{pmatrix} -3 + 2\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm:

$$u = (-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) e^{(-1+2\sqrt{3})t} \begin{pmatrix} -3 - 2\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} + (-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) e^{(-1-2\sqrt{3})t} \begin{pmatrix} -3 + 2\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = (\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}) e^{(-1+2\sqrt{3})t} + (\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}) e^{(-1-2\sqrt{3})t} \\ J(t) = (-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) e^{(-1+2\sqrt{3})t} + (-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) e^{(-1-2\sqrt{3})t} \end{cases}$$




(a) The solutions (b) The phase portraits

Hình 17: *The love between a narcissistic nerd and a hermit - 2.7.2*

## 2.8 Cautious Lover and Cautious Lover

### 2.8.1 Ví dụ 1

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = -2R + 5J, \\ \dot{J} = -R + 4J, \\ R(0) = 2, \; J(0) = -2. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = 3$ và $\lambda_2 = -1$.

**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}^T$ tương ứng với mỗi trị riêng.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được: $u = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm: $u = -3e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = -3e^{3t} + 5e^{-t} \\ J(t) = -3e^{3t} + e^{-t} \end{cases}$$

### 2.8.2 Ví dụ 2

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

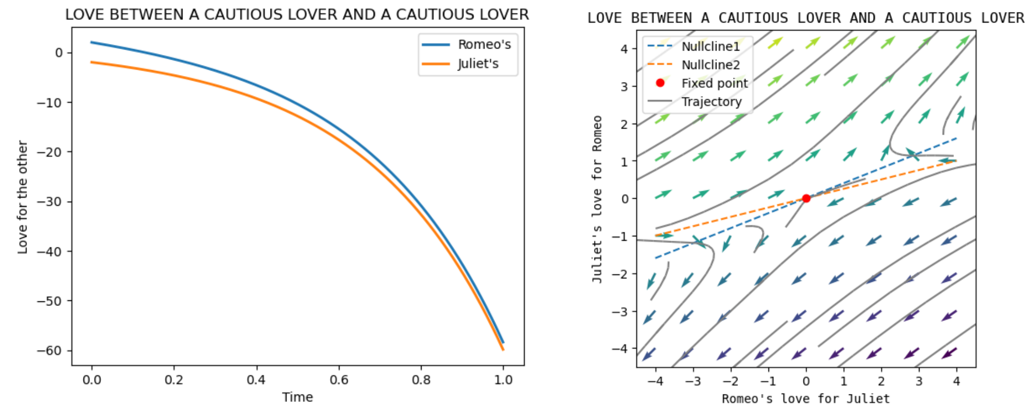
$$\begin{cases} \dot{R} = -R + 2J, \\ \dot{J} = -2R + 3J, \\ R(0) = -6, \; J(0) = 0. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} -6 & 0 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng kép $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda = 1$.




(a) The solutions (b) The phase portraits

Hình 18: *The love between a cautious lover and a cautious lover - 2.8.1*

**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}^T$ tương ứng trị riêng kép này.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được: $u = C_1e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2e^t(t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix})$.

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix}-6 & 0\end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm: $u = -18e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 12e^t(t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix})$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = (-6+12t)e^t \\ J(t) = 12te^t \end{cases}$$

## 2.9 Cautious Lover and Hermit

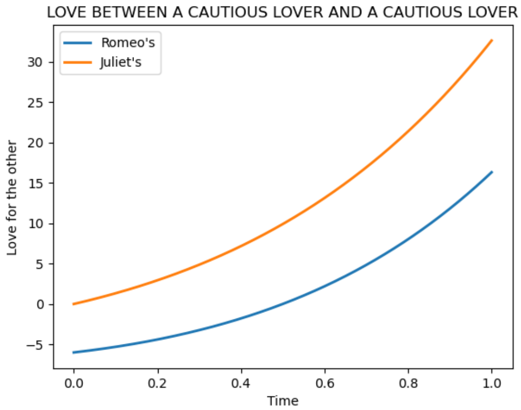
### 2.9.1 Ví dụ 1

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

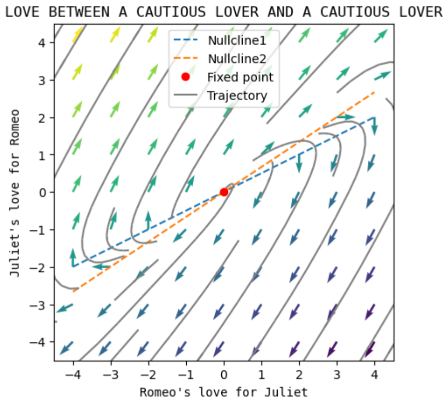
$$\begin{cases} \dot{R} = -R + J, \\ \dot{J} = -R - J, \\ R(0) = 3, \ \ J(0) = 1. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$




(a) The solutions




(b) The phase portraits

Hình 19: *The love between a cautious lover and a cautious lover - 2.8.2*

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = -1 + i$ .

**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}^T$

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được:

$$u = C_1 \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{e^t} \\ \frac{\cos t}{e^t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{\cos t}{e^t} \\ -\frac{\sin t}{e^t} \end{pmatrix}.$$

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm:

$$u = \frac{1}{e^t} \begin{pmatrix} \sin t + 3\cos t \\ \cos t - 3\sin t \end{pmatrix}.$$

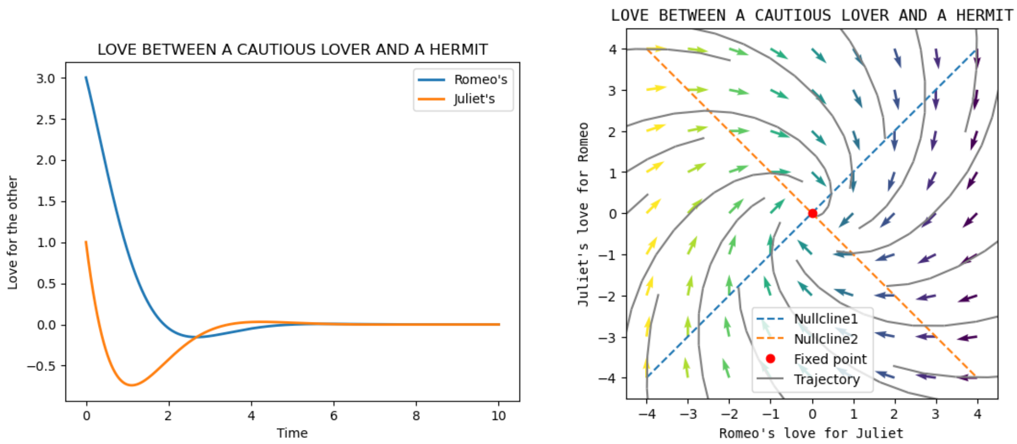
Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = \dfrac{\sin t + 3\cos t}{e^t} \\ J(t) = \dfrac{\cos t - 3\sin t}{e^t} \end{cases}$$

### 2.9.2 Ví dụ 2

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = -3R + 2J, \\ \dot{J} = -R - J, \\ R(0) = -1, \ J(0) = 1. \end{cases}$$




(a) The solutions (b) The phase portraits

Hình 20: *The love between a cautious lover and a hermit - 2.9.1*

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = -2 + i$ .

**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \end{pmatrix}^T$

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được:

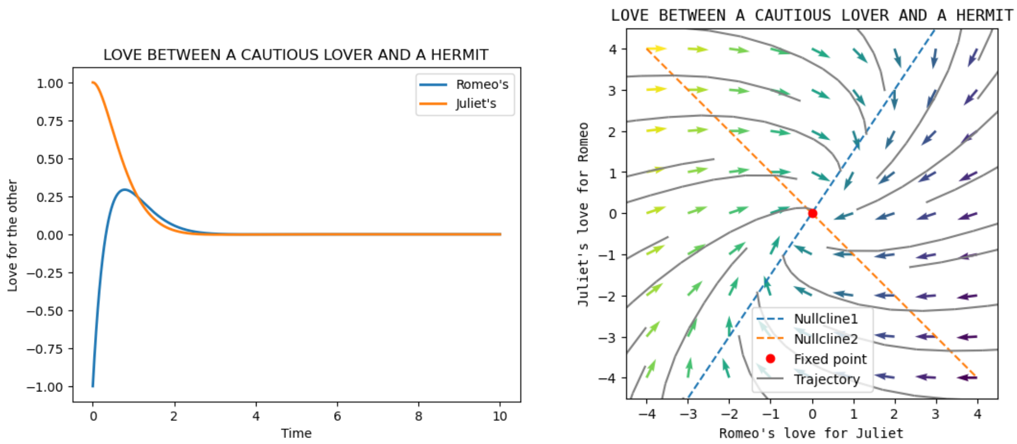
$$u = C_1 \begin{pmatrix} \dfrac{2\sin t}{e^{2t}} \\ \dfrac{\sin t + \cos t}{e^{2t}} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \dfrac{2\cos t}{e^{2t}} \\ \dfrac{\cos t - \sin t}{e^{2t}} \end{pmatrix}.$$

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm:

$$u = \frac{1}{e^{2t}} \begin{pmatrix} 3\sin t - \cos t \\ 2\sin t + \cos t \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = \dfrac{3\sin t - \cos t}{e^{2t}} \\ J(t) = \dfrac{2\sin t + \cos t}{e^{2t}} \end{cases}$$




(a) The solutions (b) The phase portraits

Hình 21: *The love between a cautious lover and a hermit - 2.9.2*

## 2.10 Hermit and Hermit

### 2.10.1 Ví dụ 1

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = -R - J, \\ \dot{J} = -R - J, \\ R(0) = 0, \ J(0) = -1. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = 0$ và $\lambda_2 = -2$.

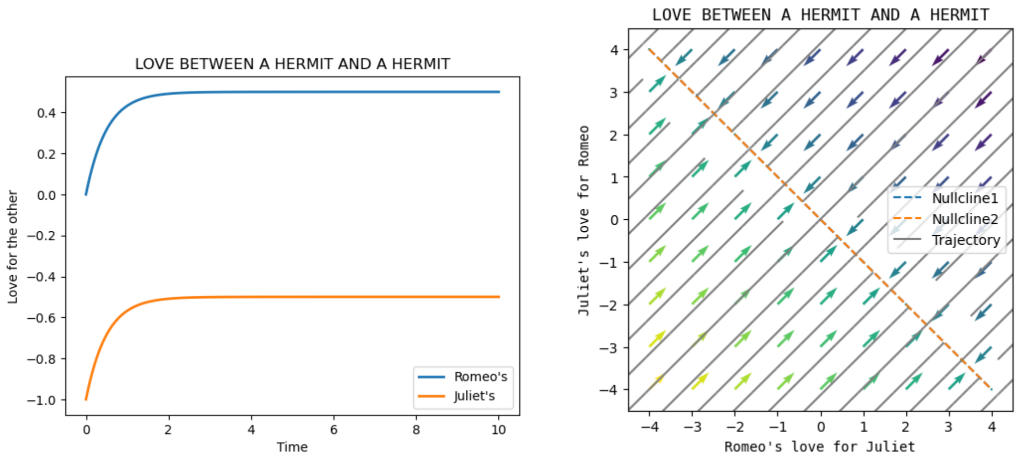
**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ tương ứng với mỗi trị riêng.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được: $u = C_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm: $u = \frac{1}{2} e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2t} \\ J(t) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2t} \end{cases}$$




(a) The solutions

(b) The phase portraits

Hình 22: *The love between a hermit and a hermit - 2.10.1*

### 2.10.2 Ví dụ 2

Tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = -R - 2J, \\ \dot{J} = -5R - 4J, \\ R(0) = 3, \ \ J(0) = 2. \end{cases}$$

**Bước 1 :** Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Trong đó, $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ và $u_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^T$.

**Bước 2 :** Ta tìm được trị riêng $\lambda$ của ma trận $A$ là: $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = -6$.

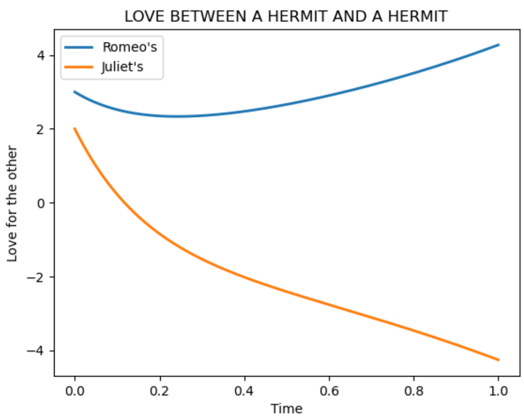
**Bước 3 :** Ta tìm được vector riêng $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ và $V_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}^T$ tương ứng với mỗi trị riêng.

**Bước 4 :** Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, ta tìm được: $u = C_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{-6t} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

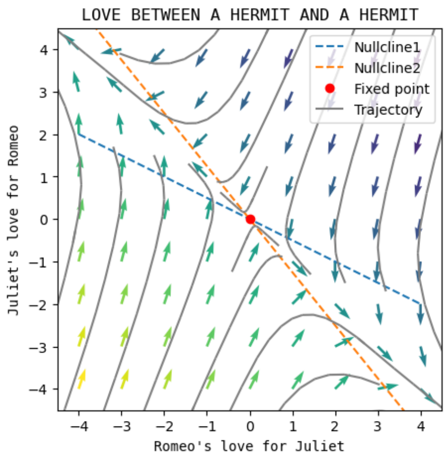
**Bước 5 :** Với $u_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^T$, ta tìm được nghiệm: $u = \frac{11}{7}e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{7}e^{-6t} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} R(t) = \frac{11}{7}e^t + \frac{10}{7}e^{-6t} \\ J(t) = -\frac{11}{7}e^t + \frac{25}{7}e^{-6t} \end{cases}$$



(a) The solutions



(b) The phase portraits

Hình 23: *The love between a hermit and a hermit - 2.10.2*

# 3 Hệ Phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

## 3.1 Lập mô hình toán học

Giả sử rằng tình yêu giữa Romeo và Juliet bị ảnh hưởng bởi các điều kiện ngoại cảnh như gia đình họ và các định kiến xã hội.Khi đó tình yêu giữa hai người có thể được mô tả bởi hệ phương trình vi phân :

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ + f(t), \\ \dot{J} = cR + dJ + g(t), \\ R(0) = R_0, \; J(0) = J_0. \end{cases} \tag{10}$$

với f và g là hai hàm thực phụ thuộc vào t .

## 3.2 Tìm nghiệm của mô hình bằng phương pháp biến thiên hằng số

Đầu tiên ta chuyển hệ phương trình (10) về dạng :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = Au_1 + h(t), \\ u_1(0) = u_0. \end{cases} \tag{11}$$

Trong đó,$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$ , $u_0 = \begin{pmatrix} R_0 & J_0 \end{pmatrix}^T$ và $h = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$

Từ hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất,ta thấy nghiệm của hệ có dạng :

$$u = X(t)C$$

Với $X(t)$ là ma trận độc lập tuyến tính và $C$ là ma trận hằng số. Nên ta sẽ thử nghiệm của hệ không thuần nhất có dạng :

$$u_1 = X(t)C(t)$$

Thay vào phương trình $\dot{u}_1 = Au_1 + h(t)$, ta được:

$$\begin{aligned} & (X(t)C(t))' = AX(t)C(t) + h(t) \\ \iff \quad & X'(t)C(t) + X(t)C'(t) = AX(t)C(t) + h(t) \\ \iff \quad & X(t)C'(t) = h(t) \\ \iff \quad & C'(t) = [X(t)]^{-1}h(t) \\ \iff \quad & C(t) = \int [X(t)]^{-1}h(t)dt \end{aligned}$$

Vì đây là bài toán IVP nên ta sẽ sử dụng tích phân xác định để tìm nghiệm của bài toán :

$$C(t) - C(0) = \int_0^t C'(s)ds = \int_0^t [X(s)]^{-1}h(s)ds$$

$$\iff C(t) = C(0) + \int_0^t [X(s)]^{-1}h(s)ds$$

Thay vào $u_1$ ta được :

$$\begin{aligned} u_1 &= X(t)C(t) \\ &= X(t)[C(0) + \int_0^t [X(s)]^{-1}h(s)ds] \\ &= X(t)[X(0)]^{-1}u_1(0) + X(t)\int_0^t [X(s)]^{-1}h(s)ds \end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất là:

$$u_1(t) = X(t)[X(0)]^{-1}u_1(0) + X(t)\int_0^t [X(s)]^{-1}h(s)ds \tag{12}$$

## 3.3 Các ví dụ

**Ví Dụ 1** Tìm nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dot{R} = -4R + 2J + 3e^{3t}, \\ \dot{J} = -1R + -1J + 4e^{3t}, \\ R(0) = -4, \ J(0) = 4. \end{cases}$$

Đưa pt về dạng (11) ta được: $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ , $u_1(0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \end{pmatrix}^T$ và $h = \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 4e^{3t} \end{pmatrix}$
Đầu tiên ta giải tìm nghiệm thuần nhất, Ma trận A có hai trị riêng $\lambda_1 = -2$ và $\lambda_2 = -3$ từ đó ta giải được nghiệm thuần nhất của hệ:

$$u = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-3t} \\ e^{-2t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = X(t)C$$

Ta có :

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-3t} \\ e^{-2t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \implies [X(t)]^{-1} = \frac{-1}{e^{-5t}} \begin{bmatrix} e^{-3t} & -2e^{-3t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{2t} & 2e^{2t} \\ e^{3t} & -e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\implies \int_0^t [X(s)]^{-1}h(s)ds = \int_0^t \begin{bmatrix} -e^{2s} & 2e^{2s} \\ e^{3s} & -e^{3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3e^{3s} \\ 4e^{3s} \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} 5e^{5s} \\ -e^{6s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{5t} - 1 \\ \dfrac{-e^{6t}}{6} + \dfrac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\implies X(t)\int_0^t [X(s)]^{-1}h(s)ds = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-3t} \\ e^{-2t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{5t} - 1 \\ \dfrac{-e^{6t}}{6} + \dfrac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2e^{3t}}{3} - e^{-2t} + \dfrac{e^{-3t}}{3} \\ \dfrac{5e^{3t}}{6} - e^{-2t} + \dfrac{e^{-3t}}{6} \end{bmatrix}$$

Và:

$$X(t)[X(0)]^{-1}u_1(0) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-3t} \\ e^{-2t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{2.0} & 2e^{2.0} \\ e^{3.0} & -e^{3.0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12e^{-2t} + -16e^{-3t} \\ 12e^{-2t} - 8e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ là :

$$u_1 = \begin{bmatrix} 12e^{-2t} - 16e^{-3t} \\ 12e^{-2t} - 8e^{-3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2e^{3t}}{3} - e^{-2t} + \frac{e^{-3t}}{3} \\ \frac{5e^{3t}}{6} - e^{-2t} + \frac{e^{-3t}}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11e^{-2t} - \frac{47}{3}e^{-3t} + \frac{2}{3}e^{3t} \\ 11e^{-2t} - \frac{47}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} R(t) = 11e^{-2t} - \frac{47}{3}e^{-3t} + \frac{2}{3}e^{3t} \\ J(t) = 11e^{-2t} - \frac{47}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t} \end{cases}$$

**Ví dụ 2** Tìm nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dot{R} = -6R + -8J + t + 1, \\ \dot{J} = 2R + 4J + 3, \\ R(0) = 2, \ J(0) = 2. \end{cases}$$

Đưa pt về dạng (11) ta được: $A = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ , $u_1(0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}^T$ và $h = \begin{pmatrix} t+1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Đầu tiên ta giải tìm nghiệm thuần nhất, Ma trận A có hai trị riêng $\lambda_1 = -4$ và $\lambda_2 = 2$ từ đó ta giải được nghiệm thuần nhất của hệ:

$$u = \begin{bmatrix} 4e^{-4t} & e^{2t} \\ -e^{-4t} & -e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = X(t)C$$

Ta có :

$$X(t) = \begin{bmatrix} 4e^{-4t} & e^{2t} \\ -e^{-4t} & -e^{2t} \end{bmatrix} \implies [X(t)]^{-1} = \frac{-1}{3e^{-2t}} \begin{bmatrix} -e^{2t} & -e^{2t} \\ e^{-4t} & 4e^{-4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{4t} & \frac{1}{3}e^{4t} \\ -\frac{1}{3}e^{-2t} & -\frac{4}{3}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\implies \int_0^t [X(s)]^{-1} h(s) ds = \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{4s} & \frac{1}{3}e^{4s} \\ -\frac{1}{3}e^{-2s} & -\frac{4}{3}e^{-2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 \\ 3 \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{s+4}{3}e^{4s} \\ \frac{-s-13}{3}e^{-2s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(4t+15)e^{4t}}{48} - \frac{5}{16} \\ \frac{(2t+27)e^{-2t}}{12} - \frac{27}{12} \end{bmatrix}$$

$$\implies X(t) \int_0^t [X(s)]^{-1} h(s) ds = \begin{bmatrix} 4e^{-4t} & e^{2t} \\ -e^{-4t} & -e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(4t+15)e^{4t}}{48} - \frac{5}{16} \\ \frac{(2t+27)e^{-2t}}{12} - \frac{27}{12} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{5}{4}e^{-4t} - \frac{27}{12}e^{2t} + \frac{t}{2} + \frac{7}{2} \\ \frac{5}{16}e^{-4t} + \frac{27}{12}e^{2t} + \frac{-t}{4} + \frac{-41}{16} \end{bmatrix}$$

Và:

$$X(t)[X(0)]^{-1}u_1(0) = \begin{bmatrix} 4e^{-4t} & e^{2t} \\ -e^{-4t} & -e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{4.0} & \frac{1}{3}e^{4.0} \\ -\frac{1}{3}e^{-2.0} & -\frac{4}{3}e^{-2.0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3}e^{-4t} - \frac{10}{3}e^{2t} \\ -\frac{4}{3}e^{-4t} + \frac{10}{3}e^{2t} \end{bmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ là :

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{16}{3}e^{-4t} - \frac{10}{3}e^{2t} \\ -\frac{4}{3}e^{-4t} + \frac{10}{3}e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{4}e^{-4t} - \frac{27}{12}e^{2t} + \frac{t}{2} + \frac{7}{2} \\ \frac{5}{16}e^{-4t} + \frac{27}{12}e^{2t} - \frac{t}{4} + \frac{-41}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{49}{12}e^{-4t} - \frac{67}{12}e^{2t} + \frac{t}{2} + \frac{7}{2} \\ -\frac{49}{48}e^{-4t} + \frac{67}{12}e^{2t} - \frac{t}{4} - \frac{41}{16} \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} R(t) = \frac{49}{12}e^{-4t} - \frac{67}{12}e^{2t} + \frac{t}{2} + \frac{7}{2} \\ J(t) = -\frac{49}{48}e^{-4t} + \frac{67}{12}e^{2t} - \frac{t}{4} - \frac{41}{16} \end{cases}$$

**Ví Dụ 3** Tìm nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dot{R} = 4R - 1J + e^{3t}, \\ \dot{J} = 2R + 1J + t, \\ R(0) = 3, \ J(0) = 1. \end{cases}$$

Đưa pt về dạng (11) ta được: $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , $u_1(0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}^T$ và $h = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ t \end{pmatrix}$
Đầu tiên ta giải tìm nghiệm thuần nhất, Ma trận A có hai trị riêng $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$ từ đó ta giải được nghiệm thuần nhất của hệ:

$$u = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = X(t)C$$

Ta có :

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & e^{3t} \end{bmatrix} \implies [X(t)]^{-1} = -\frac{1}{e^{5t}} \begin{bmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ -2e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} & e^{-2t} \\ 2e^{-3t} & -e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\implies \int_0^t [X(s)]^{-1} h(s) ds = \int_0^t \begin{bmatrix} -e^{-2s} & e^{-2s} \\ 2e^{-3s} & -e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3s} \\ s \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} -e^{s} + se^{-2s} \\ 2 - se^{-3s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2t-1}{4} e^{-2t} - e^{t} + \frac{5}{4} \\ \frac{3t+1}{9} e^{-3t} + 2t - \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$\implies X(t) \int_0^t [X(s)]^{-1} h(s) ds = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2t-1}{4} e^{-2t} - e^{t} + \frac{5}{4} \\ \frac{3t+1}{9} e^{-3t} + 2t - \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2t - \frac{10}{9})e^{3t} + \frac{5}{4}e^{2t} - \frac{t}{6} - \frac{5}{36} \\ (2t - \frac{19}{9})e^{3t} + \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{2}{3}t - \frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

Và:

$$X(t)[X(0)]^{-1} u_1(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-2.0} & e^{-2.0} \\ 2e^{-3.0} & -e^{-3.0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{2t} + 5e^{3t} \\ -4e^{2t} + 5e^{3t} \end{bmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ là :

$$u_1 = \begin{bmatrix} -2e^{2t} + 5e^{3t} \\ -4e^{2t} + 5e^{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (2t - \frac{10}{9})e^{3t} + \frac{5}{4}e^{2t} - \frac{t}{6} - \frac{5}{36} \\ (2t - \frac{19}{9})e^{3t} + \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{2}{3}t - \frac{7}{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2t + \frac{35}{9})e^{3t} - \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{t}{6} - \frac{5}{36} \\ (2t + \frac{26}{9})e^{3t} - \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{2}{3}t - \frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} R(t) = (2t + \frac{35}{9})e^{3t} - \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{t}{6} - \frac{5}{36} \\ J(t) = (2t + \frac{26}{9})e^{3t} - \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{2}{3}t - \frac{7}{18} \end{cases}$$

**Ví Dụ 4** Tìm nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R + 3J + 3t, \\ \dot{J} = 4R - 2J + t^2, \\ R(0) = 3, \ J(0) = 1. \end{cases}$$

Đưa pt về dạng (11) ta được: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ , $u_1(0) = \begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix}^T$ và $h = \begin{pmatrix} 3t \\ t^2 \end{pmatrix}$

Đầu tiên ta giải tìm nghiệm thuần nhất, Ma trận A có hai trị riêng $\lambda_1 = -4$ và $\lambda_2 = 4$ từ đó ta giải được nghiệm thuần nhất của hệ:

$$u = \begin{bmatrix} 3e^{4t} & e^{-4t} \\ 2e^{4t} & -2e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = X(t)C$$

Ta có :

$$X(t) = \begin{bmatrix} 3e^{4t} & e^{-4t} \\ 2e^{4t} & -2e^{-4t} \end{bmatrix} \implies [X(t)]^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2e^{-4t} & -e^{-4t} \\ -2e^{4t} & 3e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-4t} & \frac{1}{8}e^{-4t} \\ \frac{1}{4}e^{4t} & -\frac{3}{8}e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$\implies \int_0^t [X(s)]^{-1}h(s)ds = \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-4s} & \frac{1}{8}e^{-4s} \\ \frac{1}{4}e^{4s} & -\frac{3}{8}e^{4s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3s \\ s^2 \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} (\frac{3s}{4} + \frac{s^2}{8})e^{-4s} \\ (\frac{3s}{4} - \frac{3s^2}{8})e^{4s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(-8t^2 - 52t - 13)e^{-4t}}{256} + \frac{13}{256} \\ \frac{(-24t^2 + 60t - 15)e^{4t}}{256} + \frac{15}{256} \end{bmatrix}$$

$$\implies X(t) \int_0^t [X(s)]^{-1}h(s)ds = \begin{bmatrix} 3e^{4t} & e^{-4t} \\ 2e^{4t} & -2e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(-8t^2 - 52t - 13)e^{-4t}}{256} + \frac{13}{256} \\ \frac{(-24t^2 + 60t - 15)e^{4t}}{256} + \frac{15}{256} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{15}{256}e^{-4t} + \frac{39}{256}e^{4t} + \frac{-24t^2 - 48t - 27}{128} \\ -\frac{15}{128}e^{-4t} + \frac{13}{128}e^{4t} + \frac{16t^2 - 112t + 2}{128} \end{bmatrix}$$

Và:

$$X(t)[X(0)]^{-1}u_1(0) = \begin{bmatrix} 3e^{4t} & e^{-4t} \\ 2e^{4t} & -2e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-4.0} & \frac{1}{8}e^{-4.0} \\ \frac{1}{4}e^{4.0} & -\frac{3}{8}e^{4.0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{8}e^{4t} - \frac{17}{8}e^{-4t} \\ -\frac{5}{4}e^{4t} + \frac{17}{4}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ là :

$$u_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{15}{8}e^{4t} - \dfrac{17}{8}e^{-4t} \\ \\ -\dfrac{5}{4}e^{4t} + \dfrac{17}{4}e^{-4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{15}{256}e^{-4t} + \dfrac{39}{256}e^{4t} + \dfrac{-24t^2 - 48t - 27}{128} \\ \\ -\dfrac{15}{128}e^{-4t} + \dfrac{13}{128}e^{4t} + \dfrac{16t^2 - 112t + 2}{128} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{441}{256}e^{4t} - \dfrac{529}{256}e^{-4t} + \dfrac{-24t^2 - 48t - 27}{128} \\ \\ -\dfrac{147}{128}e^{4t} + \dfrac{529}{128}e^{-4t} + \dfrac{16t^2 - 112t + 2}{128} \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} R(t) = -\dfrac{441}{256}e^{4t} - \dfrac{529}{256}e^{-4t} + \dfrac{-24t^2 - 48t - 27}{128} \\ \\ J(t) = -\dfrac{147}{128}e^{4t} + \dfrac{529}{128}e^{-4t} + \dfrac{16t^2 - 112t + 2}{128} \end{cases}$$

**Ví Dụ 5** Tìm nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dot{R} = 5R + 2J + t, \\ \dot{J} = -4R + 1J - t, \\ R(0) = 1, \ J(0) = 1. \end{cases}$$

Đưa pt về dạng (11) ta được: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ , $u_1(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ và $h = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$
Đầu tiên ta giải tìm nghiệm thuần nhất, Ma trận A có hai trị riêng $\lambda_1 = 3 + 2i$ và $\lambda_2 = 3 - 2i$ từ đó ta giải được nghiệm thuần nhất của hệ:

$$u = \begin{bmatrix} \cos 2te^{3t} & \sin 2te^{3t} \\ (-\cos 2t - \sin 2t)e^{3t} & (\cos 2t - \sin 2t)e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = X(t)C$$

Ta có :

$$X(t)=\begin{bmatrix}\cos 2te^{3t} & \sin 2te^{3t}\\ (-\cos 2t-\sin 2t)e^{3t} & (\cos 2t-\sin 2t)e^{3t}\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ [X(t)]^{-1}=\frac{1}{e^{3t}}\begin{bmatrix}(\cos 2t-\sin 2t)e^{3t} & -\sin 2te^{3t}\\ (\cos 2t+\sin 2t)e^{3t} & \cos 2te^{3t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2t-\sin 2t & -\sin 2t\\ \cos 2t+\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ \int_0^t [X(s)]^{-1}h(s)ds=\int_0^t \begin{bmatrix}\cos 2s-\sin 2s & -\sin 2s\\ \cos 2s+\sin 2s & \cos 2s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\ -s\end{bmatrix}=\int_0^t \begin{bmatrix}s\cos 2s\\ s\sin 2s\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{t\sin 2t}{2}+\frac{\cos 2t}{4}-\frac{1}{4}\\ \frac{sin 2t}{4}-\frac{t\cos 2t}{2}\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ X(t)\int_0^t [X(s)]^{-1}h(s)ds=\begin{bmatrix}\cos 2te^{3t} & \sin 2te^{3t}\\ (-\cos 2t-\sin 2t)e^{3t} & (\cos 2t-\sin 2t)e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{t\sin 2t}{2}+\frac{\cos 2t}{4}-\frac{1}{4}\\ \frac{sin 2t}{4}-\frac{t\cos 2t}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{e^{3t}}{4}-\frac{1}{4}\cos 2te^{3t}\\ -\frac{2t+1}{4}e^{3t}+\frac{1}{4}(\cos 2t+\sin 2t)e^{3t}\end{bmatrix}$$

Và:

$$X(t)[X(0)]^{-1}u_1(0)=\begin{bmatrix}\cos 2te^{3t} & \sin 2te^{3t}\\ (-\cos 2t-\sin 2t)e^{3t} & (\cos 2t-\sin 2t)e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(\cos 2t+2\sin 2t)e^{3t}\\ (\cos 2t-3\sin 2t)e^{3t}\end{bmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ là :

$$u_1=\begin{bmatrix}(\cos 2t+2\sin 2t)e^{3t}\\ (\cos 2t-3\sin 2t)e^{3t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{e^{3t}}{4}-\frac{1}{4}\cos 2te^{3t}\\ -\frac{2t+1}{4}e^{3t}+\frac{1}{4}(\cos 2t+\sin 2t)e^{3t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 2t+2\sin 2t)e^{3t}\\ (-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\cos 2t-\frac{11}{4}\sin 2t)e^{3t}\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ \begin{cases}R(t)=(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 2t+2\sin 2t)e^{3t}\\ J(t)=(-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\cos 2t-\frac{11}{4}\sin 2t)e^{3t}\end{cases}$$

## 3.4 Hệ phương trình vi phân cấp 1 dạng tổng quát

Một dạng tổng quát và phức tạp hơn về tình yêu của Romeo và Juliet là:

$$\begin{cases} \dot{R} = f(t, R, J), \\ \dot{J} = g(t, R, J), \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \tag{9}$$

### 3.4.1 Điều kiện tồn tại nghiệm

Ta xét hệ tổng quát:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*Theo Định lý Picard , nếu $f : D \to \mathbb{R}^n$ liên tục trên t và thỏa mản điều kiện Lipschitz :*

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L||x - y|| \tag{10}$$

$\forall x, y \in D = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x - x_0|| \leq r\}, \forall t \in [t_0, t_1]$ *. Thì tồn tại $\delta$ >0 để IVP trên có nghiệm* $[t_0, t_0 + \delta]$*. Trong đó ,f được gọi là liên tục lân cận Lipschitz và L là hằng số Lipschitz.*
Từ định lí ta có bổ đề : *Nếu $f(x)$ và $\frac{\partial f}{\partial x}$ liên tục trên [a,b] × D, với $D \subset \mathbb{R}^n$ thì f sẽ lân cận Lipschitz trong x trên [a,b] × D.*
Định lý Picard chỉ xác nhận được sự tồn tại và duy nhất của nghiệm $\overline{x(t)}$ trên đoạn $[t_0, t_0 + \delta]$ với $\delta$ có thể rất nhỏ nên ta không thể xác nhận sự tồn tại và duy nhất của nghiệm trên 1 đoạn $[t_0, t_1]$ cho trước.Tuy nhiên bằng cách áp dụng liên tục định lí ta có thể mở rộng khoảng tồn tại duy nhất của nghiệm tới $[t_0, T)$ với $\lim_{t\to T} \overline{x(t)} = \infty$.
Để nghiệm của hệ IVP.sys (9) từ nghiệm cục bộ mở rộng thành nghiệm toàn cục ta phải cần tới một điều kiện lớn hơn là định lí tồn tại duy nhất nghiệm toàn cục .
Định lí phát biểu rằng *nếu f liên tục trên t và thỏa mãn điều kiện Lipschitz*:

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L||x - y|| \tag{11}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1]$ *thì hệ tổng quát sẽ có nghiệm duy nhất trên* $[t_0, t_1]$
Từ định lí ta có bổ đề: *Nếu $f(x)$ và $\frac{\partial f}{\partial x}$ liên tục trên [a,b] ×$\mathbb{R}^n$ thì f sẽ liên tục toàn cục Lipschitz khi và chỉ khi $\frac{\partial f}{\partial x}$ có giới hạn đồng nhất trên [a,b]×$\mathbb{R}^n$*
Tuy nhiên điều kiện tồn tại nghiệm toàn cục rất khó để thỏa mãn . Vì vậy ta có thể áp dụng khoảng tồn tại nghiệm tối đa $[t_0, T)$ . nếu T có hạn thì nghiệm $\overline{x(t)}$ của đã rời khỏi tập D.Nếu ta chọn tập W ⊆ D sao cho nghiệm $\overline{x(t)}$ luôn∈ W khi đó T=∞ và hệ luôn có nghiệm $\forall t_0 \geq 0$
* *Cho f(t,x) liên tục trên t và lân cận Lipschitz trên x với mọi $t_0 \geq 0$ và x chứa trong $D \subset \mathbb{R}^n$ . cho W là một tập con của D, $x_0 \in W$, nếu mọi nghiệm của hệ:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*đều nằm trong W thì tồn tại một nghiệm duy nhất cho mọi $t \geq t_0$*
Vậy với các điều kiện trên ta có thể áp dụng cho IVP.sys mà ta đang xét để xác định xem hệ có tồn tại duy nhất nghiệm cục bộ hoặc nghiệm toàn cục.

### 3.4.2 Các ví dụ

**Ví Dụ 1**

$$\begin{cases} \dot{R} = R - J, \\ \dot{J} = J - R, \\ R(0) = R_0, \ J(0) = J_0. \end{cases}$$

Từ hệ ta có:

$$f(t, R, J) = R - J$$
$$g(t, R, J) = J - R$$

Vì f,g liên tục trên t và $\frac{\partial f}{\partial R}$= 1 , $\frac{\partial f}{\partial J}$= -1 ,$\frac{\partial g}{\partial R}$= -1 , $\frac{\partial g}{\partial J}$= 1 là các hằng số nên luôn bị chặn trên R và J nên hệ thỏa điều kiện toàn cục Lipschitz $\Longrightarrow$ tồn tại hệ nghiệm duy nhất trên $\mathbb{R}$

**Ví Dụ 2**

$$\begin{cases} \dot{R} = -R + RJ, \\ \dot{J} = J - RJ, \\ R(0) = R_0, \ J(0) = J_0. \end{cases}$$

Từ hệ ta có:

$$f(t, R, J) = -R + RJ$$
$$g(t, R, J) = J - RJ$$

Vì f,g liên tục trên t và $\frac{\partial f}{\partial R}$= -1+J , $\frac{\partial f}{\partial J}$= R , $\frac{\partial g}{\partial R}$= -J , $\frac{\partial g}{\partial J}$= 1-R liên tục nhưng không bị chặn trên $\mathbb{R}^2$ nên hệ thỏa điều kiện lân cận Lipschitz nhưng không thỏa điều kiện toàn cục Lipschitz $\Longrightarrow$ tồn tại hệ nghiệm lân cận tại 0.

**Ví Dụ 3**

$$\begin{cases} \dot{R} = cos(R) + sin(J), \\ \dot{J} = cos(J) + sin(R), \\ R(0) = R_0, \ J(0) = J_0. \end{cases}$$

Từ hệ ta có:

$$f(t, R, J) = cos(R) + sin(J)$$
$$g(t, R, J) = cos(J) + sin(R)$$

Vì f,g liên tục trên t và $\frac{\partial f}{\partial R}$= -$sin(R)$ , $\frac{\partial f}{\partial J}$= cos(J) , $\frac{\partial g}{\partial R}$= cos(R) , $\frac{\partial g}{\partial J}$= -sin(J) liên tục và bị chặn trên $\mathbb{R}^2$ vì cos và sin là các hàm tuần hoàn nên hệ thỏa điều kiện toàn cục Lipschitz $\Longrightarrow$ tồn tại nghiệm trên $\mathbb{R}$

**Ví Dụ 4**

$$\begin{cases} \dot{R} = R^2, \\ \dot{J} = J^2, \\ R(0) = R_0, \ J(0) = J_0. \end{cases}$$

Từ hệ ta có:

$$f(t,R,J) = R^2$$
$$g(t,R,J) = J^2$$

Vì f,g liên tục trên t và $\frac{\partial f}{\partial R}$= 2R, $\frac{\partial f}{\partial J}$= 0 , $\frac{\partial g}{\partial R}$= 0 , $\frac{\partial g}{\partial J}$= 2J liên tục nhưng không bị chặn trên $\mathbb{R}^2$ nên hệ thỏa điều kiện lân cận Lipschitz nhưng không thỏa điều kiện toàn cục Lipschitz
$\Longrightarrow$ tồn tại hệ nghiệm lân cận tại 0.

**Ví Dụ 5**

$$\begin{cases} \dot{R} = R^{\frac{1}{3}}, \\ \dot{J} = J + R, \\ R(0) = R_0, \ J(0) = J_0. \end{cases}$$

Từ hệ ta có:

$$f(t,R,J) = R^{\frac{1}{3}}$$
$$g(t,R,J) = J + R$$

Vì f,g liên tục trên t và $\frac{\partial f}{\partial J}$= 0 , $\frac{\partial g}{\partial R}$= 0 , $\frac{\partial g}{\partial J}$= 2J liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nhưng $\frac{\partial f}{\partial R}$= $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{R^2}}$ không liên tục tại R=0 nên hệ không lân cận Lipschitz $\Longrightarrow$ không tồn tại duy nhất 1 hệ nghiệm.

# 4 Sử dụng phương pháp Euler để giải các mô hình ODEs

## 4.1 Phương pháp Euler

Phương pháp Euler là một phương pháp số bậc một để giải các phương trình vi phân thường (ODEs) với giá trị ban đầu cho trước. Nó là phương pháp hiện cơ bản nhất cho việc tính tích phân số của các phương trình vi phân thường.

### 4.1.1 Phương pháp hiện (Explicit)

**Dạng tổng quát của phương pháp hiện Euler (Explicit Euler):**

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

Trong đó:

- $y_{n+1}$ : Giá trị tiếp theo.
- $y_n$ : Giá trị ban đầu.
- $h$ : Khoảng cách giữa hai mốc thời gian (bước).
- $t_n$ : thời điểm tại $n$, trong đó $t_n = t_0 + nh$

Phương pháp hiện Euler có thể được giải thích qua khai triển Taylor như sau:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0)h + \frac{1}{2}h^2 y''(t_0) + O(h^3)$$

Sai số cắt cụt cục bộ của phương pháp hiện Euler (Local trucation error - LTE) là sự khác biệt giữa lời giải số sau một bước, $y_1$, và lời giải chính xác tại thời điểm $t_1 = t_0 + h$. Lời giải số được cho bởi:

$$LTE = y(t_0 + h) - y_1$$

với $y(t_0 + h)$ qua khai triển Taylor:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0)h + \frac{1}{2}h^2 y''(t_0) + O(h^3)$$

#### 4.1.2 Phương pháp ngầm (Implicit)

**Dạng tổng quát của phương pháp ngầm Euler (Implicit Euler):**

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$$

hay

$$y_k = y_{k+1} - hf(t_{k+1}, y_{k+1})$$

Trong đó:

- $y_{k+1}$ : Giá trị tiếp theo.
- $y_k$ : Giá trị ban đầu.
- $h$ : Khoảng cách giữa hai mốc thời gian (bước).
- $t_k$ : thời điểm tại $n$, trong đó $t_k = t_0 + kh$

Phương pháp ngầm Euler có thể được giải thích qua khai triển Taylor như sau:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0)h + \frac{1}{2}h^2 y''(t_0) + O(h^3)$$

Sai số cắt cụt cục bộ của phương pháp ngầm Euler (Local truncation eror - LTE) là sự khác biệt giữa lời giải số sau một bước, $y_1$, và lời giải chính xác tại thời điểm $t_1 = t_0 + h$. Lời giải số được cho bởi:

$$LTE = y(t_0 + h) - y_1$$

với $y(t_0 + h)$ qua khai triển Taylor:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0)h + \frac{1}{2}h^2 y''(t_0) + O(h^3)$$

## 4.2 Giải quyết vấn đề

### 4.2.1 Chứng minh $\mathcal{E}(t_1)$ tỉ lệ với $h^2$ theo phương pháp hiện Euler

Xét mô hình toán học IVPs Sys.(13) với phương pháp hiện Euler:

$$\begin{cases} R_1 = R_0 + f(t_0, R_0, J_0)h \\ J_1 = J_0 + g(t_0, R_0, J_0)h \end{cases} \tag{11}$$

và LTE của mô hình trên:

$$\mathcal{E}(t_1) = \sqrt{[R(t_1) - R_1]^2 + [J(t_1) - J_1]^2} \tag{12}$$

Biến đổi $R(t_1)$ theo khai triển Taylor, ta được:

$$\begin{aligned} R(t_1) &= R(t_0 + h) \\ &= R(t_0) + R'(t_0)h + \frac{1}{2}R''(t_0)h^2 \\ &= R(t_0) + f(t_0, R_0, J_0)h + \frac{1}{2}f'(t_0, R_0, J_0)h^2 \end{aligned} \tag{13}$$

tương tự với $J(t_1)$, ta được:

$$J(t_1) = J(t_0) + g(t_0, R_0, J_0)h + \frac{1}{2}g'(t_0, R_0, J_0)h^2 \tag{14}$$

Thay (11), (13), (14) vào (12), ta được:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t_1) &= \sqrt{\left\{\left[R(t_0) + f(t_0, R_0, J_0)h + \frac{1}{2}f'(t_0, R_0, J_0)h^2\right] - [R_0 + f(t_0, R_0, J_0)h]\right\}^2} \\ &\quad \overline{+\left\{\left[J(t_0) + g(t_0, R_0, J_0)h + \frac{1}{2}g'(t_0, R_0, J_0)h^2\right] - [J_0 + g(t_0, R_0, J_0)h]\right\}^2} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}f'(t_0, R_0, J_0)h^2\right]^2 + \left[\frac{1}{2}g'(t_0, R_0, J_0)h^2\right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}f'(t_0, R_0, J_0)h^4 + \frac{1}{4}g'(t_0, R_0, J_0)h^4} \\ &= h^2\sqrt{\frac{1}{4}f'(t_0, R_0, J_0) + \frac{1}{4}g'(t_0, R_0, J_0)} \end{aligned}$$

Ta thấy được $\mathcal{E}(t_1)$ tỉ lệ với $h^2$

### 4.2.2 Chứng minh $\mathcal{E}(t_1)$ tỉ lệ với $h^2$ theo phương pháp ngầm Euler

Tương tự với phương pháp hiện Euler, xét LTE của mô hình trên:

$$\mathcal{E}(t_1) = \sqrt{[R(t_1) - R_1]^2 + [J(t_1) - J_1]^2} \tag{15}$$

Biến đổi $R(t_1)$ theo khai triển Taylor, ta được:

$$\begin{aligned} R(t_1) &= R(t_0 + h) \\ &= R(t_0) + R'(t_0)h + \frac{1}{2}R''(t_0)h^2 \\ &= R(t_0) + f(t_0, R_0, J_0)h + \frac{1}{2}f'(t_0, R_0, J_0)h^2 + O(h^3) \end{aligned} \tag{16}$$

tương tự với $J(t_1)$, ta được:

$$J(t_1) = J(t_0) + g(t_0, R_0, J_0)h + \frac{1}{2}g'(t_0, R_0, J_0)h^2 \tag{17}$$

Thay (15), (17) vào (16), ta được:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t_1) = &\sqrt{\left\{\left[R(t_0) + f(t_0, R_0, J_0)h + \frac{1}{2}f'(t_0, R_0, J_0)h^2\right] - [R_0 + f(t_0, R_0, J_0)h]\right\}^2} \\ &\quad + \left\{\left[J(t_0) + g(t_0, R_0, J_0)h + \frac{1}{2}g'(t_0, R_0, J_0)h^2\right] - [J_0 + g(t_0, R_0, J_0)h]\right\}^2 \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}f'(t_0, R_0, J_0)h^2\right]^2 + \left[\frac{1}{2}g'(t_0, R_0, J_0)h^2\right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}f'(t_0, R_0, J_0)h^4 + \frac{1}{4}g'(t_0, R_0, J_0)h^4} \\ &= h^2\sqrt{\frac{1}{4}f'(t_0, R_0, J_0) + \frac{1}{4}g'(t_0, R_0, J_0)} \end{aligned}$$

Ta thấy được $\mathcal{E}(t_1)$ tỉ lệ với $h^2$.

Tuy rằng phương pháp ngầm Euler có thể đưa ra được các đáp án với độ chính xác cao hơn phương pháp hiện Euler, việc phải giải quyết một hệ phương trình phi tuyến tính khiến độ phức tạp của thuật toán cao hơn, dẫn đến cần nhiều thời gian tính toán hơn và khó thực hiện hơn.

### 4.2.3 Áp dụng phương pháp ngầm Euler vào IVPs Sys.(14)

Ở trên, ta đã nói về việc tính toán IVPs Sys.(14) bằng phương pháp ngầm Euler sẽ cho kết quả chính xác cao hơn phương pháp hiện Euler; ta có thể giải hệ phương trình phi tuyến tính của IVPs Sys.14 bằng phương pháp Newton-Rhapson. Dạng tổng quát của phương pháp Newton-Rhapson:

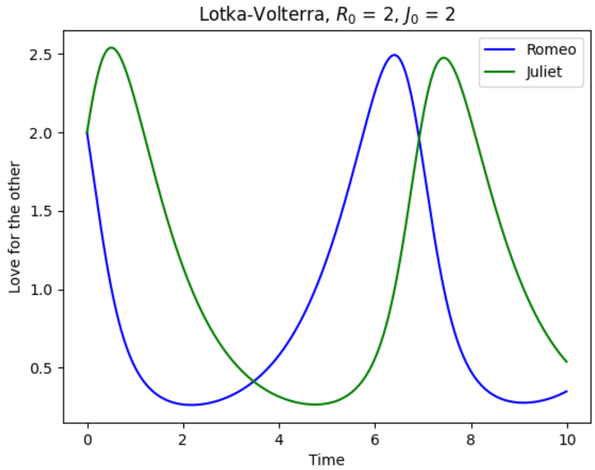
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_{n+1})} \tag{18}$$

Trong đó:

- $x_{n+1}$ : Giá trị tiếp theo.
- $y_n$ : Giá trị ban đầu.
- $f(x_n)$ : Hàm số dựa trên biến $x_n$.

Phương pháp Newton-Rhapson (18) được lặp lại cho đến khi tìm được một giá trị có độ chính xác tương đối được tìm thấy. Ta sẽ xây dựng mô hình Newton-Rhapson qua ngôn ngữ lập trình Python để giải mô hình Lotka-Volterra từ Exercise 3 (Hình 4):

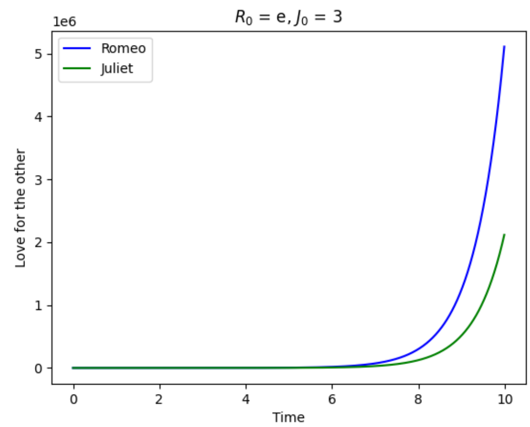
```python
import math
import matplotlib.pyplot as plt #for plotting
import numpy as np
from numpy.linalg import inv

def f(y_old_1, y1, y2, h):
    return (y_old_1 + h * (y1 * (1 - y2)) - y1)
def g(y_old_2, y1, y2, h):
    return (y_old_2 + h * (y2 * (y1 - 1)) - y2)
# Defining the Jacobian Function
def jacobian(y_old_1, y_old_2, y1, y2, h):
    J = np.ones((2,2))
    dy = 1e-6

    J[0,0] = (f(y_old_1, y1 + dy, y2, h) - f(y_old_1, y1, y2, h))/dy
    J[0,1] = (f(y_old_1, y1, y2 + dy, h) - f(y_old_1, y1, y2, h))/dy

    J[1,0] = (g(y_old_2, y1 + dy, y2, h) - g(y_old_2, y1, y2, h))/dy
    J[1,1] = (g(y_old_2, y1, y2 + dy, h) - g(y_old_2, y1, y2, h))/dy
    return J

def newtRhap(y1, y2, y1_guess, y2_guess, h):
  S_old = np.ones((2, 1))
  S_old[0] = y1_guess
  S_old[1] = y2_guess
  F = np.ones((2, 1))
  error = 9e9
  tol = 1e-9
  alpha = 1
  iter = 1

  while error > tol:
    J = jacobian(y1, y2, S_old[0], S_old[1], h)
    F[0] = f(y1,S_old[0], S_old[1], h)
    F[1] = g(y2,S_old[0], S_old[1], h)
    S_new = S_old - alpha * (np.matmul(inv(J), F))
    error = np.max(np.abs(S_new - S_old))
    S_old = S_new
    iter = iter + 1

  return [S_new[0],S_new[1]]

def implicit_euler(inty1, inty2, tspan, dt):
  t = np.arange(0, tspan,dt)
  y1 = np.zeros(len(t))
  y2 = np.zeros(len(t))
  y1[0] = inty1
  y2[0] = inty2

  for i in range(1, len(t)):
    y1[i] , y2[i]  = newtRhap(y1[i-1], y2[i-1], y1[i-1], y2[i-1], dt)

```

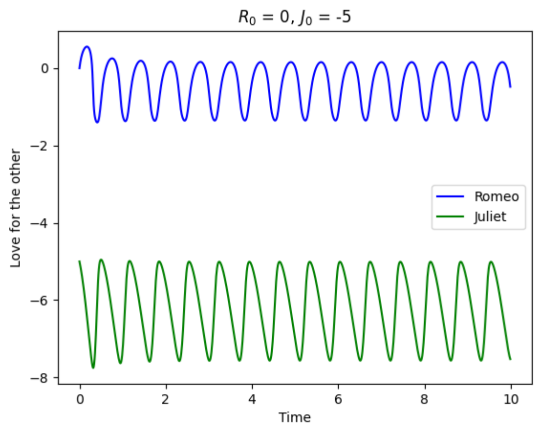



Hình 24: Mô hình Lotka-Volterra qua Newton-Rhapson, với $R_0 = J_0 = 4$

```
    return [t,y1,y2]

t,y1,y2 = implicit_euler(2,2,10,0.01)


plt.plot(t, y1,'b', label = 'Romeo')
plt.plot(t, y2,'g', label = 'Juliet')
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Love for the other')
plt.title('Lotka-Volterra, $R_0$ = 2, $J_0$ = 2')
plt.legend()
plt.show()
```

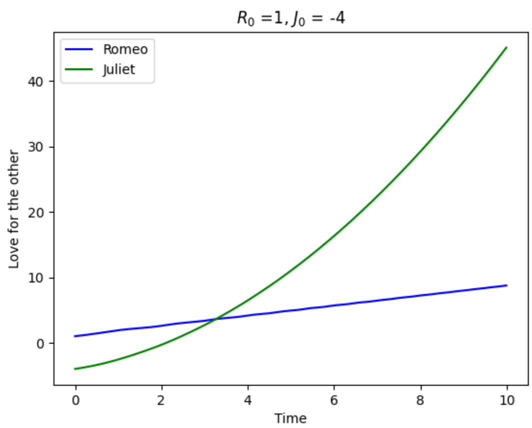
Tương tự, ta có một số ví dụ sau đây (Hình 5):
Từ mô hình trên, ta dễ dàng nhận thấy, với bước h càng nhỏ, độ chính xác càng cao, đồng thời với việc sử dụng 2 vòng lặp để giải bài toán, sai số cắt cụt cục bộ của vấn đề cũng bằng $h^2$.

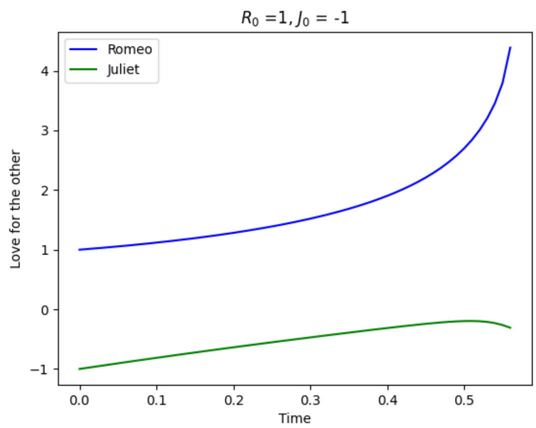



(a)
R'(t) = R(t) + J(t)
J'(t) = R(t) - J(t)
$R_0 = e, J_0 = 3$

(b)
R'(t) = R(t) + 3tan(J(t))
J'(t) = J(t)+J(t)tan(R(t))
$R_0 = 0, J_0 = -5$




(c)
R'(t) = cos(sin(J(t)))
J'(t) = R(t)
$R_0 = 0, J_0 = \pi$

(d)
$R'(t) = e^{R(t)+J(t)}$
$J'(t) = R.(sin(R(t) - J(t)) - J.(cos(R(t) + J(t))$
$R_0 = 1, J_0 = -1$

Hình 25: Một số ví dụ

# 5 Ước lượng các hệ số của mô hình ODEs

### 5.0.1 Mô hình hồi quy tuyến tính

**Mô hình hồi quy tuyến tính:** dùng để xem xét mối quan hệ tuyến tính giữa biến phụ thuộc $Y$ và biến độc lập $X$ có dạng tổng quát như sau:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + ... + \beta_n X_{ni} + u_i$$

Trong đó:

- $\beta_n$ : Hệ số hồi quy của các biến độc lập, trong đó $\beta_0$ là hệ số tự do.
- $u$ : Hạng nhiễu hay sai số ngẫu nhiên.
- $i$ : Kí hiệu cho quan sát thứ $i$ trong tổng thể.

**Độ mạnh của mô hình hồi quy tuyến tính:** được đo lường thông qua hệ số R bình phương ($R^2$). Hệ số này cho biết mức độ phù hợp của mô hình hồi quy tuyến tính với tập dữ liệu. Thông thường ngưỡng của $R^2$ phải trên 50% vì như thế mô hình mới phù hợp.

$$R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS}$$

Trong đó:

- $ESS$ (Residual Sum of Squares): Tổng các độ lệch bình phương của phần dư.
- $TSS$ (Total Sum of Squares): Tổng độ lệch bình phương của toàn bộ các nhân tố nghiên cứu.

### 5.0.2 Phương pháp bình phương nhỏ nhất (OLS)

Xét mô hình hồi quy (5.0.1). Phương pháp OLS sẽ lựa chọn các hệ số hồi quy $\beta$ từ $\beta_0$ đến $\beta_n$ sao cho bình phương sai số $u$ của mô hình ước lượng là nhỏ nhất.

### 5.0.3 Ước lượng các hệ số của mô hình ODEs

Ta sẽ tiến hành ước lượng các hệ số $a$, $b$, $c$, $d$ của hệ phương trình vi phân (3)

**- Xây dựng mô hình hồi quy tuyến tính đa biến** (bằng phương pháp OLS)

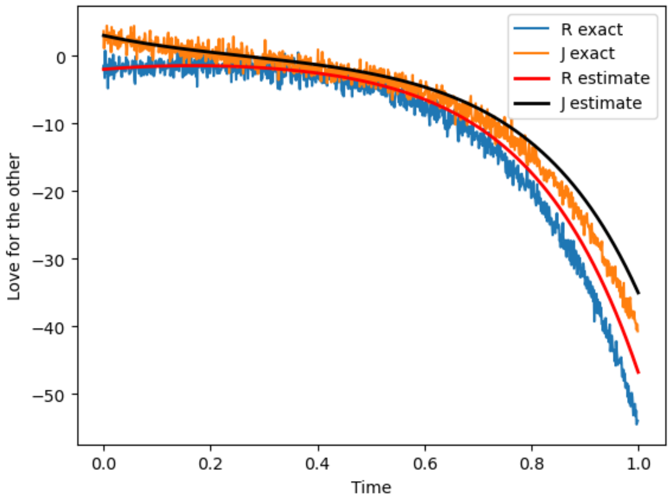
```
import pandas as pd
import array as arr
import numpy as np
import statsmodels.api as sm
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.linear_model import LinearRegression
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures
from sklearn.pipeline import make_pipeline
from scipy.integrate import odeint

# Doc du lieu vao
data_exact = pd.read_excel("exact.xlsx")
del data_exact['Unnamed: 0']

# Xu li du lieu
time = []
for idx in range(0, data_exact.shape[0], 1):
    time.append(idx * 0.001)

## Romeo
x = np.array([time]).T
y = np.array(data_exact['R'])

model_R = make_pipeline(PolynomialFeatures(5), LinearRegression())
```

```
model_R.fit(x, y)
model_R = model_R.predict(x)
plt.plot(x,y,'o')
plt.plot(x, model_R, '-', color = 'black', linewidth = 2)
plt.show()

## Juliet
x = np.array([time]).T
y = np.array(data_exact['J'])

model_J = make_pipeline(PolynomialFeatures(5), LinearRegression())
model_J.fit(x, y)
model_J = model_J.predict(x)
plt.plot(x,y,'o', color = 'darkorange')
plt.plot(x, model_J, '-', color = 'black', linewidth = 2)
plt.show()

## Cap nhat lai du lieu
data_exact['R'] = model_R
data_exact['J'] = model_J

# Tinh dao ham cua R va J theo thoi gian
derivative_R = []
derivative_J = []

for idx in range(0, data_exact.shape[0] - 1, 1):
    derivative_R.append((data_exact['R'].iloc[idx + 1] - data_exact['R'].iloc[idx
    ]) / 0.001)
    derivative_J.append((data_exact['J'].iloc[idx + 1] - data_exact['J'].iloc[idx
    ]) / 0.001)

data_exact = data_exact.drop(labels=[data_exact.shape[0] - 1])

data_exact['R\''] = derivative_R
data_exact['J\''] = derivative_J

# Xay dung mo hinh cho R'
dependent_R = data_exact['R\'']
explanatory_R = data_exact[['R', 'J']]

results_mul = sm.OLS(dependent_R, explanatory_R).fit()

results_mul.summary()

# Xay dung mo hinh cho J'
dependent_J = data_exact['J\'']
explanatory_J = data_exact[['R', 'J']]

results_mul = sm.OLS(dependent_J, explanatory_J).fit()

results_mul.summary()
```

**- Kiểm tra lại mô hình**: bằng cách giải hệ phương trình vi phân vừa tìm được và so sánh với dữ liệu đầu vào.

```
# Giai he phuong trinh vi phan
def model(u, t):
    x = u[0]
    y = u[1]
    dxdt = 2.1743*x + 3.7571*y
    dydt = 5.4217*x - 2.2445*y
```

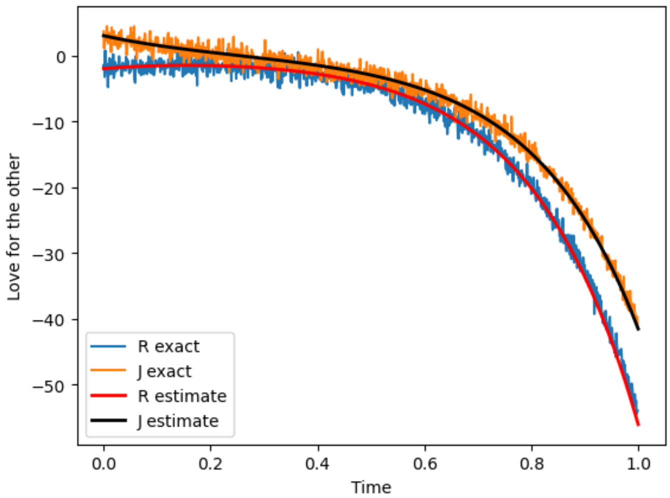
```
    return [dxdt, dydt]

u0 = [-2, 3]
t = np.linspace(0, 1, 10000)

u = odeint(model, u0, t)

x = u[:, 0]
y = u[:, 1]

# Doc lai du lieu dau vao
data_source = pd.read_excel("exact.xlsx")
del data_source['Unnamed: 0']

# Ve do thi nghiem vua tim duoc va so sanh voi du lieu dau vao
plt.plot(time, data_source['R'], '-', label = 'R exact')
plt.plot(time, data_source['J'], '-', label = 'J exact')

plt.plot(t, x, 'r-', linewidth = 2, label = 'R estimate')
plt.plot(t, y, 'k-', linewidth = 2, label = 'J estimate')

plt.xlabel('time')
plt.legend()

plt.show()
```




Hình 26: Đồ thị nghiệm của mô hình vừa tìm được so với dữ liệu ban đầu

```
# Dieu chinh lai cac he so a, b, c, d vua uoc luong duoc cho phu hop
def model(u, t):
    x = u[0]
    y = u[1]
    dxdt = 2.3*x + 3.8*y
    dydt = 5.5*x - 2.3*y
    return [dxdt, dydt]

u0 = [-2, 3]
t = np.linspace(0, 1, 10000)

```

```python
u = odeint(model, u0, t)

x = u[:, 0]
y = u[:, 1]

plt.plot(time, data_source['R'], '-', label = 'R exact')
plt.plot(time, data_source['J'], '-', label = 'J exact')

plt.plot(t, x, 'r-', linewidth = 2, label = 'R estimate')
plt.plot(t, y, 'k-', linewidth = 2, label = 'J estimate')

plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Love for the other')
plt.legend()

plt.show()
```




Hình 27: Đồ thị nghiệm của mô hình sau khi điều chỉnh so với dữ liệu ban đầu

**- Kết luận**: Từ tập dữ liệu ban đầu ta ước lượng được các hệ số của hệ phương trình vi phân (3) như sau:

$$a = 2.3, \quad b = 3.8,$$
$$c = 5.5, \quad d = \text{-}2.3.$$

# References

[MZ98] Michael Zeltkevic. Forward and Backward Euler Methods, 1998.

[CAW16] Christopher A. Wong. Local Truncation Error of Implicit Euler, 2016.

[TS18] Thanuj Singaravelan. Solving a system of ODEs using Implicit Euler method, 2018.

[KBH16] Kenneth B. Howell. Ordinary Differential Equations An Introduction to the Fundamentals, 2016.

[JL08] Joceline Lega. Calculus and Differential Equations II, 2008.

[LNS] Anonymous. Linear Nonhomogeneous Systems of Differential Equations with Constant Coefficients.