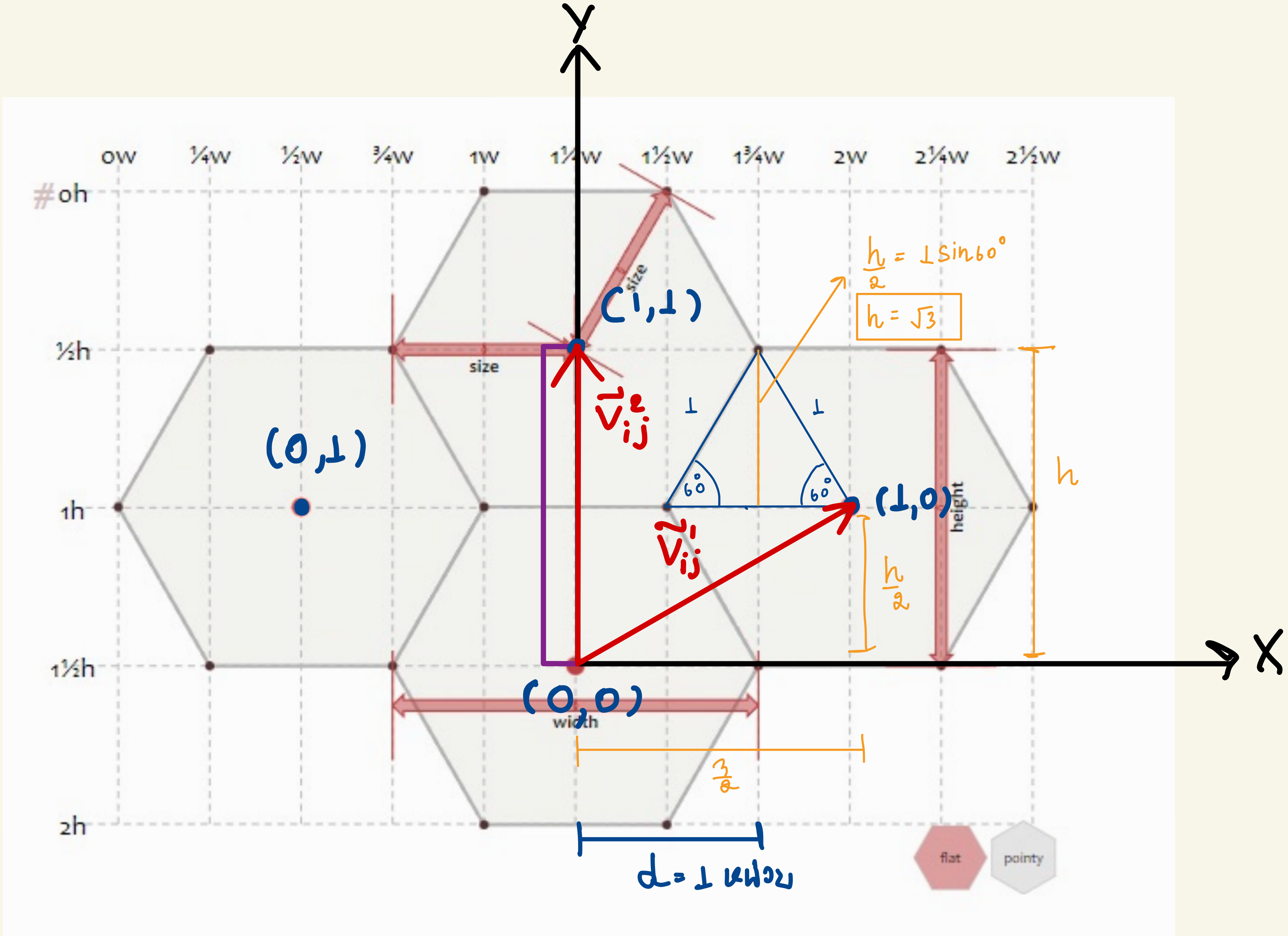
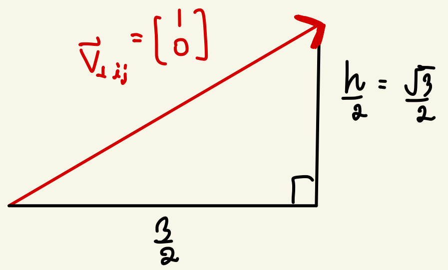


พิจารณา Vector $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ ใน พิกัด Hexagonal, Cartesian จะได้ว่า

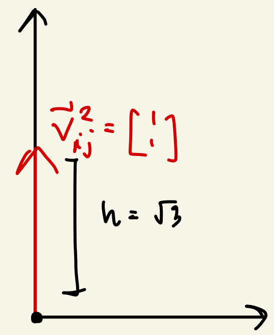


$\vec{V}^1_{ij} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\vec{V}^1_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

แสดงว่า linear tranformation eq ของพิกัด Hexagonal, Cartesian คือ

$$\vec{V}^1_{ij} = M\,\vec{V}^1_{xy}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad -①$$



$\vec{V}^2_{ij} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{V}^2_{xy} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$$\vec{V}^2_{ij} = M\,\vec{V}^2_{xy}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad -②$$

แก้สมการ ① และ ② จะได้

$$1 = \frac{3}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b \quad -③$$

$$0 = \frac{3}{2}c + \frac{\sqrt{3}}{2}d \quad -④$$

$$1 = 0a + \sqrt{3}b \quad -⑤$$

$$1 = 0c + \sqrt{3}d \quad -⑥$$

แก้สมการ ③, ④, ⑤, ⑥ จะได้

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

แสดงว่าเราสามารถแปลงพิกัด Hexagonal เป็น Cartesian ได้โดยใช้สมการ linear transformation

$$\boxed{\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถแปลงพิกัด Cartesian เป็น Hexagonal ได้โดยใช้ Inv linear transformation ของการแปลง Hexagonal เป็น Cartesian

Display decimals

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3^{0.5}} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3^{0.5}} \end{pmatrix}^{(-1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

▼ Details

Find 2×2 matrix inverse according to the formula: $A^{(-1)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(-1)} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}^{(-1)} = \frac{1}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

จะได้

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}}$$

```python
def car2hex(self, posCartesian):
    # posCartesian is a 2x1 vector = [x,y]
    # posHexagonal is a 2x1 vector = [i,j]
    # linear transformation matrix is a 2x2 matrix = [[1/3, 1/np.sqrt(3],[-1/3, 1/np.sqrt(3]]
    linearTrans = np.array([[1/3, 1/np.sqrt(3)]
                            ,[-1/3, 1/np.sqrt(3)]])
    # posHexagonal = linear transformation matrix * posCartesian
    poshexagonal = np.matmul(linearTrans,posCartesian)
    # round to nearest integer and convert to int
    poshexagonal = np.rint(poshexagonal).astype(int)
    return poshexagonal

def hex2car(self, posHexagonal):
    # posHexagonal is a 2x1 vector = [i,j]
    # posCartesian is a 2x1 vector = [x,y]
    # linear transformation matrix is a 2x2 matrix = [[3/2, -3/2],[np.sqrt(3)/2,np.sqrt(3)/2]]
    linearTrans = np.array([[3/2,-3/2],
                            [np.sqrt(3)/2, np.sqrt(3)/2]])
    # posCartesian = linear transformation matrix * posHexagonal
    posCartesian = np.matmul(linearTrans,posHexagonal)
    return posCartesian
```

โดยหลักการทำงานคร่าวๆ ของโปรแกรม คือการหมุน 60° ใน Cartesian และทำการแปลงเป็น Hexagonal

Comman 1

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Comman 2

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Comman 3, 4

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

เมื่อจบ Command และการบันทึกค่า

$$\begin{bmatrix} \text{linear transform} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$
