



Sistemas Dinâmicos - Solitões

Laboratório de Física Experimental Avançada

Diogo Miguez **90057**, Rita Santos **93414**, Thomas Gaehtgens **86809**

10 e 17 de Março de 2021, 14h às 18h30m

Conteúdo

1	Objetivos	2
2	Introdução	2
3	Relação entre posição do laser e perfil do solitão	3
4	Cálculos preliminares	5
5	Aquisição de dados	6
5.1	Cálculo da altura da água	6
5.2	Estimativa da incerteza do software <i>Cinéris</i>	7
5.3	Cálculo da velocidade dos solitões	8
5.4	Ensaio dentro do regime de validade da teoria KdV	8
5.5	Ensaio fora do regime de validade da teoria KdV	10
5.6	Influência de ϵ_1 , ϵ_2 e U nas grandezas experimentais	11
6	Estudo da forma dos solitões	11
6.1	Ajuste à solução KdV para um solitão	11
6.2	Ajuste à solução KdV para dois solitões	13
6.3	Ajuste à solução KdV em ensaio com três solitões	14
6.4	Comparação de métodos de cálculo da velocidade experimental dos solitões	15
6.5	Estudo da componente linear dos dados adquiridos	16
7	Conclusões	17
8	Anexos	18

1 Objetivos

O objetivo deste trabalho experimental é o estudo dos solitões e das suas características:

1. Verificação experimental da existência de solitões aquando de perturbações numa tina de água para diferentes condições iniciais.
2. Estudo da validade da teoria de Korteweg - de Vries (doravante KdV).
3. Cálculo da velocidade de solitões com vários métodos.
4. Estudo das componentes lineares e não-lineares dos solitões.

2 Introdução

A equação não-linear e dispersiva KdV, que prevê o comportamento dos solitões, é dada por:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3v_0}{2h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{v_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

onde $\eta(x, t)$ é a perturbação, h é a profundidade da água.

Consideram-se algumas aproximações, nomeadamente o caso de ondas infinitesimais, ondas largas e de pouca profundidade e perturbações mais pequenas que o nível da água. O modelo KdV é válido quando:

$$\epsilon_1 = \frac{\eta}{h} \quad , \quad \epsilon_2 = \left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad , \quad U = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \epsilon_1 \ll 1 \quad , \quad \epsilon_2 \ll 1 \quad , \quad U \simeq 1 \quad (1)$$

Segundo a teoria KdV, considera-se $L = 2B$ e $\eta_0 = \frac{A}{2}$, em que L é o comprimento característico, e tem-se que os solitões apresentam uma forma dada por:

$$\eta(t) = \eta_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - vt}{L}\right) \quad , \quad v = v_0 \left(1 + \frac{\eta_0}{2h}\right) \quad , \quad v_0 = \sqrt{gh} \quad , \quad L = \sqrt{\frac{4h^3}{3\eta_0}} \quad (2)$$

A velocidade teórica dos solitões e o seu erro podem ser calculados através de 3:

$$v_{\text{teo}} = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{A}{4h}\right) \quad (3)$$

Usando a fórmula geral de propagação de erros, obtém-se o erro de v_{teo} em 4:

$$\epsilon_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2 \epsilon_i^2}, \quad \sigma_{v_{\text{teo}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \sqrt{\left(1 - \frac{A}{4h}\right)^2 \sigma_h^2 + \left(\frac{\sigma_A}{2}\right)^2} \quad (4)$$

A teoria KdV prevê ainda que se formem N solitões, com N dado por 5:

$$N = 1 + \text{Int} \left(\frac{S}{\pi} \right) \quad , \quad S = \sqrt{\frac{3AB}{h}} \quad (5)$$

Procurou-se também estudar a forma do par de solitões, usando a seguinte expressão [2]:

$$u(x, t) = n (c_1 - c_2) \left(c_1 \cosh^2 (\sqrt{c_2} \xi_2 / 2) + c_2 \sinh^2 (\sqrt{c_1} \xi_1 / 2) \right) / \left((\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}) \cosh ((\sqrt{c_1} \xi_1 + \sqrt{c_2} \xi_2) / 2) + (\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}) \cosh ((\sqrt{c_1} \xi_1 - \sqrt{c_2} \xi_2) / 2) \right)^2 \quad (6)$$

onde $c_1 > c_2 > 0$, $\xi_1 = x_1 - c_1 \times t$ e $\xi_2 = x_2 - c_2$ e c_1 e c_2 representam a velocidade dos solitões 1 e 2 respetivamente.

Os solitões em laboratório propagam-se numa tina como a descrita na figura 3. De forma a estudar os limites da teoria de KdV, foram variados os parâmetros representados, dados por h , A e B .

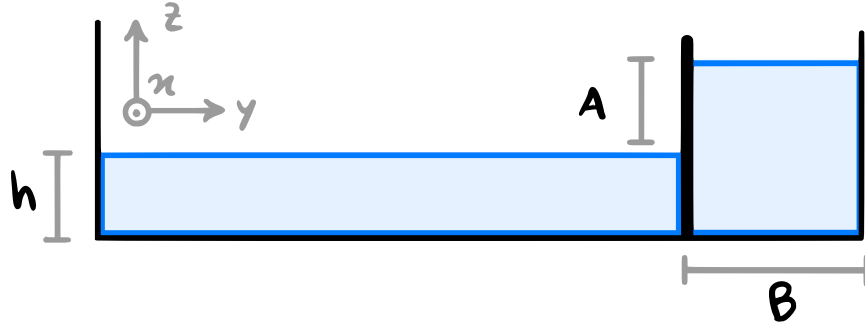


Figura 1: Esquema de montagem

3 Relação entre posição do laser e perfil do solitão

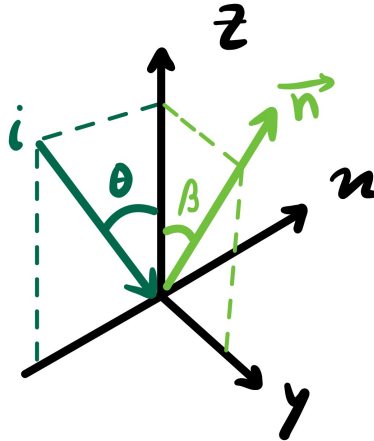


Figura 2: Incidência do laser na superfície da água

Em 2 representa-se o sistema de eixos definido à superfície do solitão, sendo y a direção da propagação do solitão, x a direção transversal à tina, e z a direção vertical, da altura do solitão. O raio incidente \vec{i} tem como direção o vector unitário

$$\vec{n}_i = (\sin\theta, 0, -\cos\theta) \quad (7)$$

e, dado que o plano do solitão poderá ter uma inclinação β , a normal ao perfil do solitão é

$$\vec{n} = (0, \sin\beta, \cos\beta) \quad (8)$$

Em equilíbrio ($\beta = 0$), o perfil do solitão é horizontal e a onda refletida cai sobre a direção $(\sin\theta, 0, \cos\theta)$. No entanto, quando o perfil tem uma inclinação dada por β , tem de se deduzir uma fórmula geral para a direção do raio refletido. Aplica-se uma rotação das coordenadas em torno do eixo dos xx por um ângulo β de forma a que a normal ao solitão aponte sobre o eixo dos zz . Na nova referência, o raio incidente escreve-se

$$\vec{n}_i = \mathbf{R}(\beta) \cdot \vec{n}_i = (\sin(\theta), \cos(\theta)\sin(\beta), -\cos(\theta)\cos(\beta)) \quad (9)$$

e a direção do raio refletido, \vec{n}_r , é dada pela reflexão desta última pelo plano xy , o que se resume a trocar o sinal da 3ª coordenada. Por fim, voltando ao sistema de referência original através de uma rotação por um ângulo $-\beta$ sobre o eixo dos xx , obtêm-se a direção do raio refletido:

$$\vec{n}_r = \mathbf{R}(-\beta) \cdot \vec{n}_r = (\sin(\theta), \cos(\theta)\sin(2\beta), \cos(\theta)\cos(2\beta)) \quad (10)$$

As componentes da distância r que o raio refletido percorre relacionam-se da seguinte forma:

$$r_z = \cot(\theta)\cos(2\beta)r_x \quad , \quad r_y = \cot(\theta)\sin(2\beta)r_x \quad (11)$$

onde r_x , a distância percorrida na direção x , é calculada utilizando valores de um ensaio de referência, esquematizados de seguida:

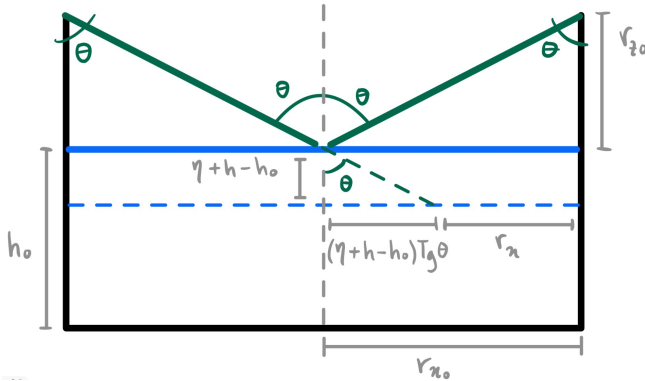


Figura 3: Esquema

Parâmetro	Valor
h_0	$6.0 \pm 0.1 \text{ cm}$
r_{z0}	$2.1 \pm 0.1 \text{ cm}$
r_{x0}	$2.8 \pm 0.2 \text{ cm}$
θ	$0.927 \pm 0.057 \text{ rad}$

Tabela 1: Parâmetros do ensaio

Obtém-se o seguinte, para um qualquer valor de h e em qualquer momento onde o perfil do solitão em relação ao nível da água mede η :

$$r_{x0} = r_{z0} \tan(\theta) \quad , \quad r_x = (r_{z0} + \eta + (h - h_0)) \tan(\theta) \quad (12)$$

Assim, as componentes x_L e y_L medidas no papel milimétrico (com origem no ponto onde o laser incide em equilíbrio - sem solitão) são dadas por:

$$\begin{cases} x_L = r_y = \sin(2\beta)(\eta + r_{z0} + (h - h_0)) \\ y_L = \eta + r_z - r_{z0} - (h - h_0) = \eta(\cos(2\beta) + 1) + (r_{z0} + (h - h_0))(\cos(2\beta) - 1) \end{cases} \quad (13)$$

Finalmente obtêm-se:

$$\begin{cases} \eta = \frac{x_L}{\sin(2\beta)} - r_{z0} - (h - h_0) \\ \beta = \arctan\left(\frac{x_L}{y_L + 2(r_{z0} + (h - h_0))}\right) \end{cases} \quad (14)$$

Durante a implementação computacional, teve-se o cuidado de tratar o caso em que $x_L = 0$, o que resulta em $\beta = 0$ e uma indeterminação para η , que pode ser resolvida substituindo β na fórmula para η , donde resulta:

$$\eta(x_L = 0) = \frac{y_L}{2} \quad (15)$$

A incerteza de η pode ser estimada através de:

$$\delta\eta = \left|\frac{\partial\eta}{\partial x_L}\right|\delta x_L + \left|\frac{\partial\eta}{\partial y_L}\right|\delta y_L + \left|\frac{\partial\eta}{\partial h}\right|\delta h + \left|\frac{\partial\eta}{\partial h_0}\right|\delta h_0 + \left|\frac{\partial\eta}{\partial r_{z0}}\right|\delta r_{z0} \quad (16)$$

4 Cálculos preliminares

As medições dos parâmetros em causa na atividade experimental (h,A,B) foram realizadas recorrendo a uma régua graduada com menor divisão de 0.1 cm. Dado que as medições de (h, A, B) foram realizadas via *zoom*, decidiu-se considerar uma incerteza superior à metade da menor divisão da escala, tendo-se decidido considerar uma incerteza de 0.2 cm.

Por forma a calcular-se futuramente a velocidade dos solitões, mediu-se também a distância entre os dois lasers.

Distância entre os dois lasers (cm)	213.7 ± 0.2
-------------------------------------	-----------------

Tabela 2

Primeiramente, começou-se por calcular os valores teóricos dos parâmetros importantes para a atividade experimental. Recorrendo às expressões 17 e 18, calcula-se os valores apresentados na tabela 3:

A ($\pm 0,2$ cm)	B ($\pm 0,2$ cm)	h ($\pm 0,2$ cm)	Nº Solitões	v_{teo} (cm/s)	ϵ_1	ϵ_2	U
2.0	10.0	8.0	1	94.08 ± 1.18	0.125	0.16	0.781
2.0	20.0	6.0	2	83.07 ± 1.33	0.167	0.023	7.261
2.0	40.0	6.0	3	83.07 ± 1.33	0.167	0.006	27.833
2.0	40.0	6.0	3	83.07 ± 1.33	0.167	0.006	27.833
2.0	40.0	6.0	3	83.07 ± 1.33	0.167	0.006	27.833
6.0	10.0	6.0	1	95.85 ± 1.15	0.500	0.09	5.556
4.0	10.0	5.0	1	84.00 ± 1.32	0.400	0.063	6.349
2.0	10.0	5.0	1	77.00 ± 1.44	0.200	0.063	3.175
1.0	40.0	4.0	3	66.52 ± 1.66	0.125	0.003	41.667
6.0	40.0	4.0	7	86.09 ± 1.25	0.750	0.003	250
6.0	10.0	4.0	2	86.09 ± 1.25	0.750	0.04	18.75
6.0	10.0	4.0	2	86.09 ± 1.25	0.750	0.04	18.75
4.0	10.0	4.0	2	78.26 ± 1.41	0.500	0.04	12.5
4.0	10.0	4.0	2	78.26 ± 1.41	0.500	0.04	12.5
2.0	20.0	4.0	2	70.44 ± 1.58	0.250	0.01	25
6.0	40.0	2.0	20	77.48 ± 1.24	1.500	0.001	1500
6.0	30.0	2.0	15	77.48 ± 1.24	1.500	0.001	1500
6.0	10.0	2.0	5	77.48 ± 1.24	1.500	0.01	150
4.0	40.0	2.0	16	66.41 ± 1.57	1.000	0.001	1000
2.0	40.0	2.0	12	55.34 ± 2.00	0.500	0.001	500

Tabela 3: Tabela com previsões teóricas de cada ensaio

5 Aquisição de dados

5.1 Cálculo da altura da água

Antes da aquisição de dados, começou-se por fazer alguns testes preliminares. Em primeiro lugar, constata-se que ao colocar-se a comporta que faz a divisão entre compartimentos, tendo estes diferentes alturas de água, ocorre vazamento de líquido entre as duas secções. Por estes motivos, tiveram-se em conta alguns cuidados: procurou-se que uma pessoa realizasse a tarefa de encher a tina com água e outra soltasse a comporta para que este processo fosse feito quase instantaneamente e as perdas fossem minimizadas.

Ainda assim, havendo sempre alguma água que vaza antes de se soltar a placa, é natural que esta venha a ser uma fonte de erro futuramente neste trabalho. Para corrigir este fator, poder-se-ia encher ligeiramente mais a comporta para compensar a água que se perde.

Para além disto, foi tido em conta o cuidado de "correção" da eventual inclinação da bancada, tomando-se o valor médio da altura da água na secção da comporta.

Começou-se por constatar que a altura do nível da água, dada por h , não era constante ao longo da tina. Por este motivo, realizaram-se várias medições deste parâmetro por forma a determinar um valor médio para h . As medições individuais foram efetuadas com uma régua graduada com menor divisão de 0.1. No primeiro ensaio, obtiveram-se os valores explanados na tabela 4:

$h (\pm 0.2 \text{ cm})$	média $h (\text{cm})$
3.5	3.7 ± 0.2
3.6	
3.8	
4.0	
3.9	
3.8	
3.8	
3.7	
3.5	

Tabela 4: Ensaio 1 - medição de h

Fixou-se um ponto na tina onde, sendo o seu desvio à média de h uma constante conhecida, se utilizou para determinar h para todos os restantes ensaios.

Considerando-se uma incerteza de h de $\pm 0.2 \text{ cm}$, maior do que o suposto, asseguramos também que o valor real de h , medido ao meio do comprimento da tina, estará dentro desse intervalo, dado que 0.2 é o maior dos desvios à média na tabela 4.

5.2 Estimativa da incerteza do software *Cinéris*

Dada a discretização da posição do laser no papel milimétrico devido ao processamento digital realizado pelo software utilizado, assumiu-se como incerteza o valor de meio intervalo mínimo detetado.

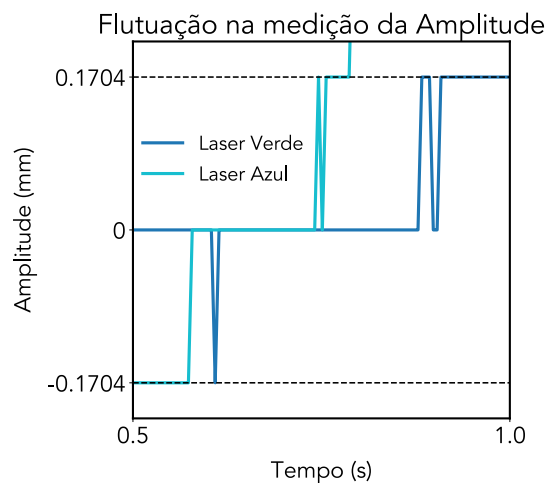


Figura 4: Representação do intervalo mínimo detetado pelo software *Cinéris* no ensaio **h6B20A2**

Obtendo-se assim o valor $\delta y_{laser} = 8.52 \times 10^{-5} m$.

5.3 Cálculo da velocidade dos solitões

Recorreu-se a um sistema de lasers e de aquisição de dados. Tal como se pode ver no esquema da figura 3, usaram-se dois lasers, um verde e um azul. O laser verde incide na água e é refletido, incidindo num ecrã de papel milimétrico. O laser azul foi direccionado para este mesmo ecrã através do uso de espelhos. Este ecrã foi filmado por uma câmara durante a experiência, cuja imagem é usada no software de tratamento de dados. O laser azul, que se encontra a uma distância d do verde e, a partir destes dados, é possível obter um intervalo Δt que decorre entre o instante em que o laser verde começa a mover-se até que o laser azul começa o seu movimento. Este intervalo de tempo é, por isso, o intervalo de tempo que o solitão demora a percorrer a distância entre os dois lasers, d , sendo portanto possível calcular a velocidade do solitão (v_{laser}):

$$v_{laser} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{d}{t_{azul} - t_{verde}} \quad (17)$$

$$\sigma_{v_{laser}} = \frac{\sqrt{\sigma_d^2 + v_{laser}^2 \left(\sigma_{t_{azul}}^2 + \sigma_{t_{verde}}^2 \right)}}{\Delta t} \quad (18)$$

Relativamente à incerteza considerada nos instantes de tempo usados no cálculo do intervalo de tempo Δt , o software usado indicava incertezas $\delta t \approx 0.005$ s. No entanto, devido à dificuldade na identificação do instante em que o laser começa a mexer, considerou-se um δt 20x maior, isto é, considerou-se $\delta t = 0.1$ s, tal como se pode observar nas figuras dos plots.

5.4 Ensaios dentro do regime de validade da teoria KdV

Posto isto, a totalidade dos ensaios encontra-se na secção de **Anexos**, mas procedeu-se apenas ao estudo dos ensaios onde ocorreu a formação de solitões. Recorrendo ao valor de distância entre os lasers tabelado em 2, e através da análise dos dados obtidos nos 4 ensaios em estudo, obtêm-se as velocidades dos solitões, tabeladas em 5:

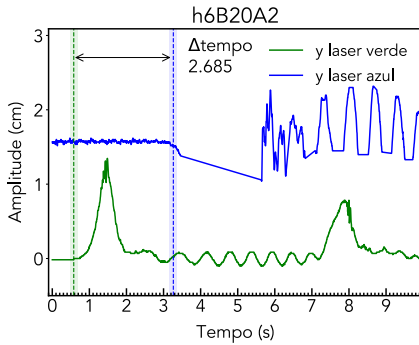


Figura 5: Ensaio h6B20A2

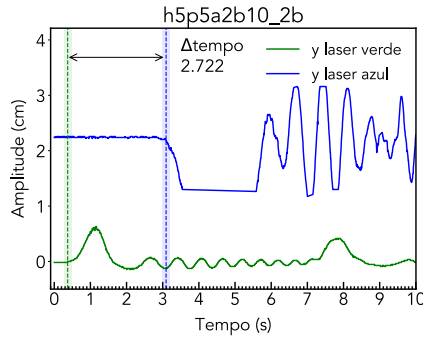


Figura 6: Ensaio h5p5a2b10_2b

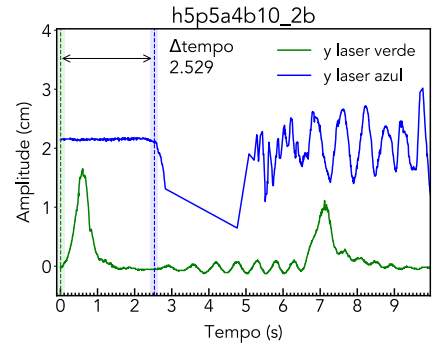


Figura 7: Ensaio h5p5a4b10_2b

Ensaio	$\Delta t (\pm 0.05 \text{ s})$	$v_{laser} (cm/s)$	$\delta_{v_{laser}} (\%)$	$\delta_{v_{laser}} (\sigma)$	ϵ_1	ϵ_2	U
h6B20A2	2.685	79.590 ± 4.193	4.189	0.830	0.167	0.023	7.261
h5p5a2b10_2b	2.722	78.508 ± 4.080	2.075	0.392	0.200	0.063	3.175
h5p5a4b10_2b	2.529	84.500 ± 4.726	7.973	1.320	0.400	0.063	6.349

Tabela 5: Parâmetros dos solitões

Em primeiro lugar, começa-se por referir que nos ensaios desta secção, as condições $\epsilon_1, \epsilon_2 \ll 1$ e U perto da unidade se verificam aproximadamente. Por este motivo, deveremos estar dentro do domínio de validade da teoria KdV.

Nos 3 ensaios observados, observa-se a formação de apenas 1 solitão. De acordo com a tabela 3 da secção de **Cálculos Preliminares**, previu-se que se formariam respetivamente 2, 1 e 1 solitões nos 3 ensaios. A discrepância do valor experimental verificada no 1º ensaio face ao valor previsto pela teoria deve-se ao facto de se ter considerado o número inteiro no cálculo do número de solitões. Apesar disto, o valor do qual se tirou o inteiro encontrava-se muito próximo do valor seguinte, o que nos leva a concluir que erros experimentais possam ter facilmente conduzido a esta discrepância entre a previsão teórica e o nº de solitões observado experimentalmente.

No que toca aos valores de velocidade calculados para os solitões, estes encontram-se regra geral próximos dos valores teóricos apresentados na tabela 3 da secção de **Cálculos Preliminares**. No entanto, de notar que no 1º e 3º ensaios, o desvio percentual e em sigmas são ligeiramente mais proeminentes do que no 2º ensaio. Tal dever-se-á ao facto de o número de Ursell ($U_1 = 7.291$; $U_3 = 6.349$) na verdade já se encontrar longe da unidade e, como tal, estaremos a entrar em regime de não-validade da teoria KdV.

Ainda assim, concluímos que esta secção foi bem sucedida, dado que conseguimos identificar e prever teoricamente e de forma aproximada a velocidade e o número de solitões que se formariam, com baixa incidência de erros experimentais.

5.5 Ensaios fora do regime de validade da teoria KdV

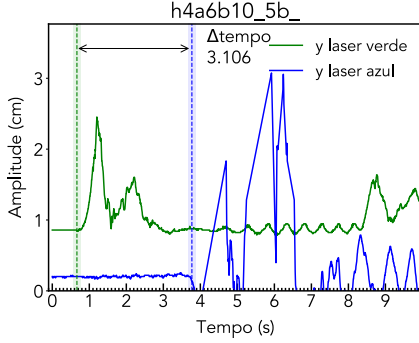


Figura 8: Ensaio h4a6b10_5b_

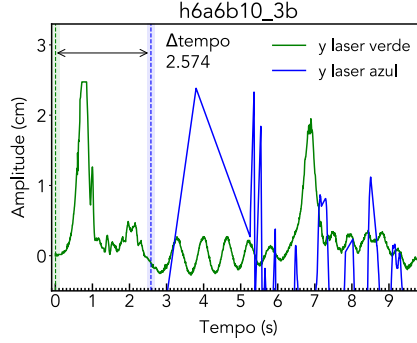


Figura 9: Ensaio h6a6b10_3b

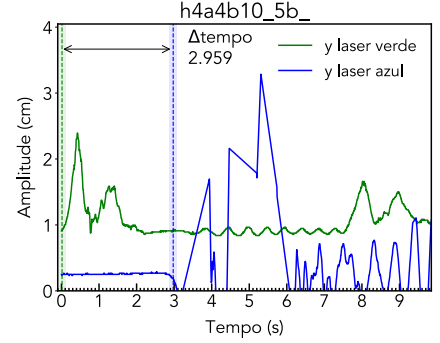


Figura 10: Ensaio h4a4b10_5b_

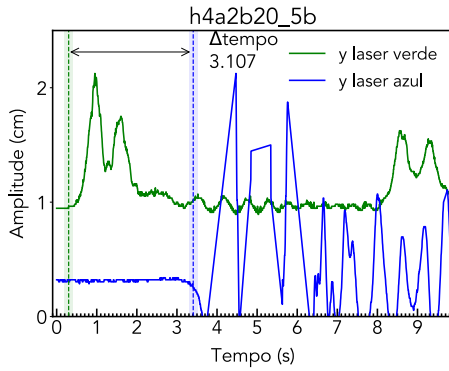


Figura 11: Ensaio h4a2b20_5b

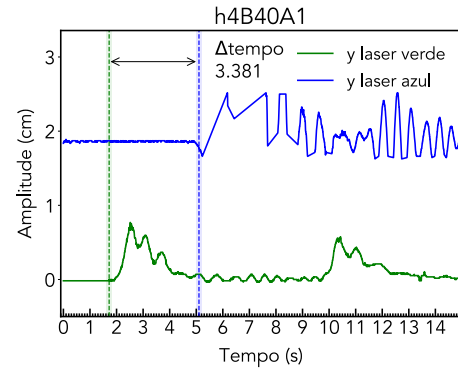


Figura 12: Ensaio h4B40A1

Ensaio	$\Delta t (\pm 0.05 \text{ s})$	$v_{laser} (cm/s)$	$\delta v_{laser} (\%)$	$\delta v_{laser} (\sigma)$	ϵ_1	ϵ_2	U
h4a6b10_5b	3.106	68.802 ± 3.133	20.088	5.518	0.75	0.04	18.75
h6a6b10_3b	2.574	83.023 ± 4.562	13.382	2.812	0.5	0.09	5.556
h4a4b10_5b	2.959	72.220 ± 3.452	7.718	1.75	0.5	0.04	12.5
h4a2b20_5b	3.107	68.780 ± 3.131	2.357	0.53	0.25	0.01	25
h4B40A1	3.381	63.206 ± 2.644	4.982	1.253	0.125	0.003	41.667

Tabela 6: Parâmetros dos solitões

Da análise da tabela 6, comparando com a tabela 5 da secção de **Ensaios dentro do regime de validade da teoria KdV**, é possível observar-se, regra geral, que neste caso estamos na presença de desvios aos valores teóricos mais consideráveis. Isto deve-se ao facto de estarmos fora da região de validade da teoria KdV. Para além disto, as velocidades calculadas são mais concordantes com as calculadas teoricamente quanto menor o valor de ϵ_1 e de ϵ_2 .

Note-se que, tendencialmente os valores de v_{laser} encontram-se abaixo do esperado. Isto poder-se-á dever, por exemplo, a medições da altura da água que não sejam as reais por vazamento de água da secção. Outro factor em jogo poderá ser perturbações no trajeto do laser, que atravessa o acrílico da tina. Pode também estar em causa uma atenuação da onda, sendo que os valores calculados de velocidade são menores que os previstos.

Por último, concluímos que esta secção foi bem sucedida, dado que conseguimos identificar e prever teoricamente e de forma aproximada a velocidade e o número de solitões que se formariam, com baixa incidência de erros experimentais. Os maiores desvios dos valores de velocidade calculadores verificaram-se quando estávamos fora da região de validade da teoria KdV, sendo por isso possível validar a teoria e os métodos usados.

5.6 Influência de ϵ_1 , ϵ_2 e U nas grandezas experimentais

Ensaio	N_{exp}	N_{teo}	$v_{laser}(cm/s)$	$v_{teo}(cm/s)$	$\delta_{v_{laser}}(\sigma)$	ϵ_1	ϵ_2	U
h5p5a2b10.2b	1	1	78.51 ± 4.08	77.00 ± 1.44	0.392	0.200	0.063	3.175
h6a6b10.3b	2	1	83.02 ± 4.56	95.85 ± 1.15	2.812	0.5	0.09	5.556
h5p5a4b10.2b	1	1	84.50 ± 4.73	84.00 ± 1.32	1.320	0.400	0.063	6.349
h6B20A2	1	2	79.59 ± 4.19	83.07 ± 1.33	0.830	0.167	0.023	7.261
h4a4b10.5b	2	2	72.22 ± 3.45	78.26 ± 1.41	1.75	0.5	0.04	12.5
h4a6b10.5b	2	2	68.80 ± 3.13	86.09 ± 1.25	5.518	0.75	0.04	18.75
h4a2b20.5b	2	2	68.78 ± 3.13	70.44 ± 1.58	0.53	0.25	0.01	25
h4B40A1	4	3	63.21 ± 2.64	66.52 ± 1.66	1.253	0.125	0.003	41.667

Tabela 7: Parâmetros dos solitões

Da observação desta tabela consegue-se relacionar um menor valor de ϵ_1 com um menor desvio da velocidade experimental. Dado que ϵ_2 é quase sempre (pelo menos) uma ordem de grandeza mais pequeno do que ϵ_1 não é possível concluir muito acerca da influência deste parâmetro. Em relação ao número de Ursell, embora se ponha a hipótese de que um valor mais próximo da unidade se reflita numa melhor previsão do número de solitões, é difícil de verificar já que não se utilizaram muitos ensaios com U muitíssimo longe da unidade, onde as perturbações não pareceram solitões. Apesar de terem sido realizados ensaios com U muito longe da unidade, com o intuito de realmente testar os limites da teoria, muitos destes não chegaram a formar solitões e por isso não puderam ser considerados nesta análise, como se pode ver na secção de **Anexos**.

6 Estudo da forma dos solitões

6.1 Ajuste à solução KdV para um solitão

Por forma a analisar a validade da teoria KdV, procedeu-se ao ajuste pelo método dos mínimos quadrados à expressão:

$$\eta = a \operatorname{sech}^2(b/L - ct/L) \quad , \quad L = \sqrt{\frac{4h^3}{3a}} \quad (19)$$

Como se sabe da teoria, os solitões são ondas não lineares que durante a propagação mantém a sua forma e velocidade. Por este motivo, dada a não-linearidade, começámos por estudar um ensaio em que se verificasse apenas a ocorrência de 1 solitão, testando a validade da solução descrita pela equação 19, dada pela teoria KdV.

De forma a determinar os erros a considerar para os valores de amplitude, procurou-se qual era a resolução dos dados adquiridos para o ensaio e verificou-se que esta era de 0.01704 cm. Usou-se como incerteza metade deste valor.

Efetuuou-se um ajuste ao primeiro pico e um ao segundo pico, que corresponde à reflexão do solitão quando este atinge o fim da tina. Os ajustes obtidos encontram-se em 15 e os seus parâmetros em 8:

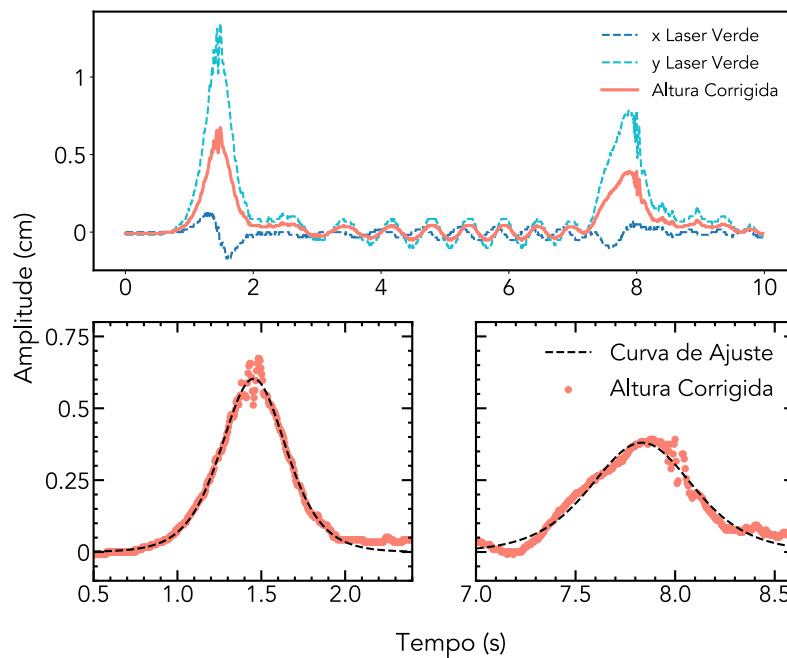


Figura 13: Ensaio h6B20A2

Solitão	η_0 (cm)	x (m)	v (cm · s ⁻¹)	$\chi^2/\text{g.l}$
1 ^o	59.789 ± 0.002	1.223 ± 0.005	84.13 ± 0.33	3.186
2 ^o	42.142 ± 0.003	6.229 ± 0.058	79.52 ± 0.73	9.170

Tabela 8: Parâmetros do ajuste ao ensaio h6B20A2

Começamos por notar a grande sensibilidade a ruído. Apesar disto, é possível corroborar a validade da expressão de ajuste considerada. Note-se no entanto que algumas destas perturbações não se devem a erros na aquisição de dados, mas sim a uma componente linear dos dados adquiridos que será estudada na secção seguinte.

Recorde-se que, segundo a secção de **Introdução**, $\eta_0 = A/2 = 1\text{cm}$, o que se encontra bastante próximo do valor obtido através dos ajustes.

Os ajustes foram bem sucedidos, com χ^2 próximos da unidade, o que nos permite corroborar a validade da solução dada por 19 para solitões únicos. Dado o sucesso do ajuste, pretende-se futuramente, na secção **5.4**, fazer o cálculo da velocidade dos solitões através dos parâmetros obtidos, bem como comparar este valor com o valor de velocidade obtido anteriormente pelo método dos lasers.

6.2 Ajuste à solução KdV para dois solitões

Na secção anterior, considerámos a solução de apenas um solitão à equação KdV. Nesta secção, procuramos testar a validade da solução de 2 solitões [2], dada por 6. O ajuste obtido encontra-se na figura 14 e os seus parâmetros na tabela 9:

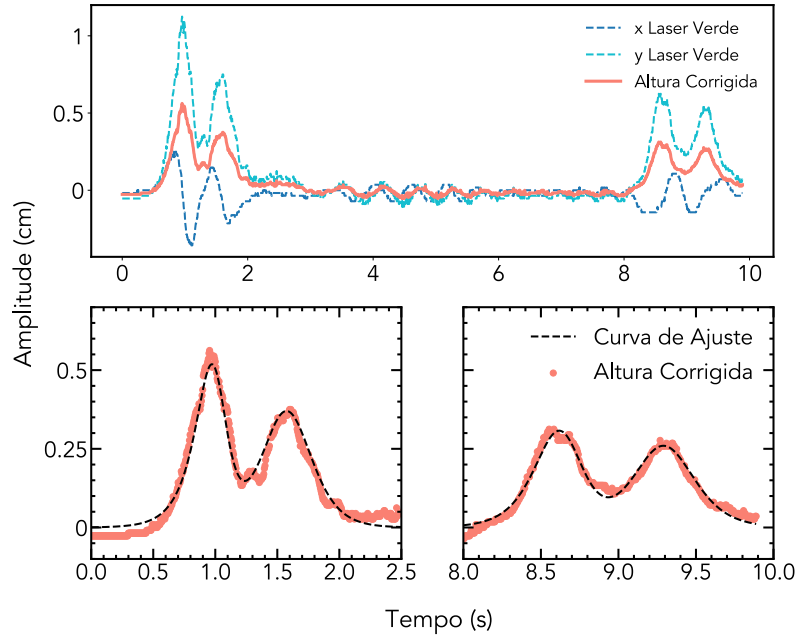


Figura 14: Ensaio h4a2b20_5b

Solitão	x_1 (m)	x_2 (m)	c_1 (m/s)	c_2 (m/s)	n	$\chi^2/\text{g.l}$
1º	7.28 ± 0.04	4.97 ± 0.05	6.52 ± 0.06	3.81 ± 0.03	$0.0039 \pm 2.41\text{e-}05$	2.85
2º	49.78 ± 0.33	34.42 ± 0.28	5.62 ± 0.04	3.83 ± 0.03	$0.0027 \pm 1.62\text{e-}05$	1.26

Tabela 9: Parâmetros do ajuste ao ensaio h4a2b20_5b

O ajuste efetuado apresenta novamente um χ^2 próximo da unidade. Dado o elevado número de parâmetros de ajuste, importa então perceber se os valores obtidos estão perto dos previstos teoricamente, ou se estamos numa situação de overfit.

No que toca aos parâmetros obtidos, observe-se que os valores das velocidades de propagação, dados por c_1 e c_2 , fogem muito aos valores teóricos previstos no início deste trabalho.

Por estes motivos, somos levados a concluir que estamos numa situação overfit, isto é, não é possível retirar qualquer significado dos parâmetros obtidos no ajuste, apesar do bom χ^2 obtido. Assim, não é possível corroborar o modelo testado para 2 solitões.

6.3 Ajuste à solução KdV em ensaio com três solitões

De seguida, procedemos ao ajuste de 3 solitões [3], recorrendo à sobreposição das soluções para um solitão descritas por 19. Note-se que esta combinação linear na obtenção da expressão de ajuste para 3 solitões não é teoricamente correta, dado que os solitões são ondas não-lineares. No entanto, efetuou-se este ajuste para fazer uma análise qualitativa e perceber se seria possível, ainda assim, chegar a um valor de velocidade do solitão mais próximo do teórico, testando assim a pertinência desta "sobreposição" de 3 solitões singulares.

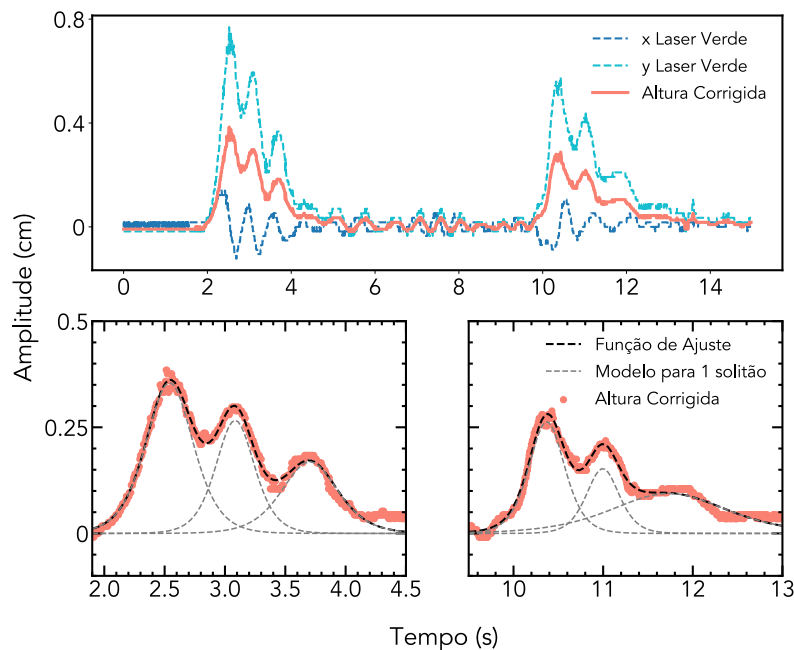


Figura 15: Ensaio h4B40A1

Solitão	η_0 (cm)	x (cm)	v (cm · s ⁻¹)	χ^2
1º Incidente	$0.2 \pm 2e-03$	-492 ± 10.0	132.8 ± 2.6	0.706
2º Incidente	$0.3 \pm 3e-03$	-437.3 ± 10.5	153.6 ± 3.4	
3º Incidente	$0.4 \pm 3e-03$	-274.6 ± 2.8	108.1 ± 1.2	
1º Refletido	$0.1 \pm 1e-03$	-755.2 ± 26.9	64.4 ± 2.2	0.624
2º Refletido	$0.2 \pm 4e-03$	-1955.4 ± 71.4	177.8 ± 6.5	
3º Refletido	$0.3 \pm 2e-03$	-1288.5 ± 15.5	124.2 ± 1.5	

Tabela 10: Parâmetros do ajuste ao ensaio h6B20A2

Pela análise da tabela 10, verifica-se que o χ^2 é menor que 1 em ambos os ajustes. Isto poderá indiciar que se considerou sobrestimou os erros experimentais ou então estamos numa situação de overfit.

De facto, analisando os valores obtidos na tabela 10, constata-se que os valores de velocidade se afastam por um factor multiplicativo de cerca de 1.5 do valor teórico calculado. Assim, dada a grande distância do valor teórico ao experimental, podemos concluir que a curva considerada não descreve a física em estudo.

Note-se que a soma de 3 curvas da solução de 1 solitão independente dada pela *sech* teoricamente não seria correta, dada a não-linearidade das ondas em estudo. Este modelo não é capaz de descrever eficazmente a realidade deste ensaio, estando numa situação de overfit. Não é assim possível corroborá-lo pelos motivos apresentados. Concluindo, a soma da curva descritiva de 3 solitões independentes não é capaz de descrever a física observada em laboratório.

6.4 Comparação de métodos de cálculo da velocidade experimental dos solitões

Pretendemos agora extrair as velocidades e variáveis físicas relevantes dos parâmetros de ajuste obtidos.

Como vimos na secção de **Introdução**, a teoria KdV permite-nos chegar às relações expressas em 20, que nos permitem calcular o valor da velocidade experimental. Isso levar-nos-á a um estudo comparativo do método de cálculo da velocidade experimental do solitão através da medição do intervalo de tempo entre o início do movimento de cada um dos lasers (método usado na secção anterior, na qual se calculou v_{laser}) e o método através do ajuste à expressão de solução que a teoria KdV nos oferece.

$$\eta_0 = a \quad v = Lc \quad L = \sqrt{\frac{4h^3}{3\eta_0}} \quad (20)$$

Não iremos considerar os ajustes a 2 solitões e a 3 solitões dado o insucesso em retirar significado físico dos parâmetros obtidos, como supramencionado. Para os ensaios em que se realizou o ajuste a 1 solitão, calculou-se assim a velocidade através dos parâmetros de *fit* obtidos, comparando esta com os valores obtidos na secção de **Cálculo da velocidade dos solitões** por via do intervalo de tempo entre o início do movimento dos lasers, tal como explanado na tabela 11.

Ensaio	v_{teo} (cm/s)	v_{fit} (cm/s)	$\delta_{v_{fit}}$ (%)	$\delta_{v_{fit}}$ (σ)	η_0 (cm)	x (cm)
h6B20A2	79.590 ± 0.41	83.56 ± 0.41	5.0	9.68	0.6 ± 0.003	-121.5 ± 0.61
h5p5a2b10_2b	78.508 ± 4.080	106.80 ± 1.32	36.0	21.43	0.3 ± 0.004	-119.1 ± 1.50
h5p5a4b10_2b	84.500 ± 4.726	85.74 ± 0.43	1.5	2.88	0.8 ± 0.004	-51.2 ± 0.27

Tabela 11: Comparação das velocidades - solitões dentro da teoria

Não se considerou ensaios fora da teoria KdV dada a impossibilidade, como vimos anteriormente, em retirar significado físico dos parâmetros de ajuste à sua solução. Isto é, os valores de velocidade obtidos nos ajustes fora da teoria não foram considerados nesta análise por não terem significado.

Relativamente aos valores de velocidade dentro da teoria, sendo apresentados em *refdentro* os calculados através dos ajustes e apresentados em 5 os calculados através do método dos lasers, verifica-se que para os dois 1ºs ensaios o método dos lasers apresenta uma velocidade mais próxima do teórico em termos percentuais e de σ . O último ensaio apresentado tem uma velocidade mais próxima do teórico a níveis percentuais com o método do ajuste, mas em σ os dois métodos são semelhantes.

Assim, e notando nos valores de ϵ_1 , ϵ_2 e U , não é possível encontrar uma correlação entre estes valores e o sucesso do cálculo da velocidade. Nos ensaios analisados, a velocidade aparenta não estar correlacionada com estes 3 valores, mas de notar que nos encontramos dentro do regime de validade da teoria KdV. Para além disto, note-se que não é possível concluir qual dos métodos produz resultados mais exatos, apesar de ambos apresentarem desvios ao teórico satisfatórios.

6.5 Estudo da componente linear dos dados adquiridos

Como supramencionado, os solitões são ondas não-lineares que mantêm a sua forma durante a sua propagação. No entanto, como se pode verificar através da observação dos plots dos dados que se encontram na secção de **Anexos**, nem sempre se observa apenas a curva característica dos solitões.

De facto, muitas vezes se verificou a ocorrência de ondas lineares, principalmente depois da ocorrência do 1º solitão. Nesta secção, pretendemos estudar e confirmar a ocorrência da componente linear, bem como procurar possíveis fontes para esta observação. No que toca à origem desta componente oscilatória, esta poderá dever-se a vários erros inerentes ao método experimental: em primeiro lugar, por exemplo, uma libertação não instantânea da comporta poderá estar na génese das ondas lineares; outro factor será um vazamento indesejado de água da comporta e, por último, eventuais perturbações na bancada ou na tina.

Posto isto, procedemos então à realização de um ajuste à curva característica de um ensaio com apenas 1 solitão, dada pela expressão de *sech*, somada à expressão de um cosseno com (a, c, d, e, f) como parâmetros de ajuste.

$$\eta = a \operatorname{sech}^2(b - ct) + d \times \cos(et + f) \quad (21)$$

Escolheu-se realizar o ajuste para $t > 3.5$ s, isto é, depois da ocorrência do 1º solitão, dado que a componente oscilatória só se verifica nos dados depois deste instante. Isto dever-se-á ao facto de a propagação do solitão ser mais rápida que a propagação das ondas lineares, o que está de acordo com a teoria. Um solitão com grande amplitude propaga-se a maior velocidade e o 1º solitão observado tem uma amplitude considerável. Note-se que na cauda do solitão refletido a componente oscilatória é muito mais evidente, ao contrário do caso do 1º solitão.

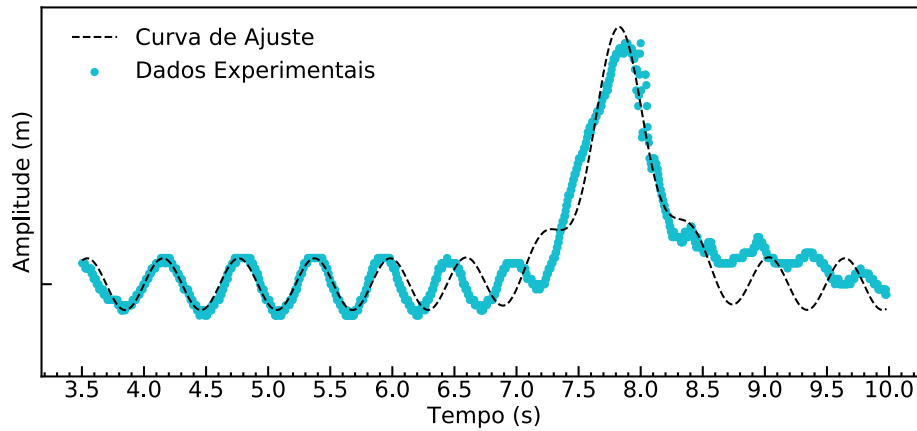


Figura 16: Ensaio h6b20A2 - ajuste componente linear

Da observação da figura, nota-se que a curva se ajusta bem à componente linear antes do pico do solitão. No solitão propriamente dito, o termo do cosseno não é capaz de descrever as oscilações na cauda do pico. Note-se que a frequência da componente oscilatória após o pico difere da frequência antes do mesmo. Assim, a influência das ondas lineares diminui na presença do solitão e estas têm diferentes frequências antes e depois da passagem do mesmo.

7 Conclusões

O objetivo desta atividade experimental foi estudar os limites de validade da teoria KdV, com base na variação dos parâmetros A, B, h . Os solitões são ondas não-lineares com amplitude conservada, à qual a velocidade de propagação é proporcional.

De acordo com a teoria, fizemos uma previsão do número de solitões a observar-se. O número de solitões observados e a sua velocidade (e consequentemente amplitude, pois as duas estão correlacionadas) tendem a aumentar com o aumento de A e B (ou seja, com o volume de água utilizado para formar o solitão), de acordo com o previsto teoricamente.

Medimos experimentalmente a velocidade dos solitões através de 2 métodos distintos: em primeiro lugar através de um sistema de lasers e em segundo através de ajustes aos dados obtidos. Para as velocidades, as incertezas experimentais tendem a não cobrir o valor teórico, independentemente do método usado. Observou-se que os menores desvios das velocidades medidas em relação às previstas teoricamente relacionam-se fortemente com menores valores de ϵ_1 e ϵ_2 , não tendo sido observada uma relação com valores do número de Ursell perto da unidade. Os dois métodos usados revelaram igual sucesso dentro dos ensaios estudados.

No que toca ao estudo da componente linear, foi apenas possível fazer uma análise qualitativa desta. Foi possível verificar que os solitões têm um efeito muito mais proeminente na curva geral e que a componente linear é praticamente desprezável na curva do solitão.

Para futuras realizações desta mesma experiência sugere-se manter a tina perfeitamente na horizontal, usar uma comporta que isole melhor os 2 compartimentos evitando o vazamento de água entre os mesmos e, por último, calcular a velocidade do solitão por outros métodos, nomeadamente através de um cronómetro.

Para um estudo mais conclusivo da influência dos parâmetros ϵ_1 , ϵ_2 e U no valor de velocidade e do número de solitões calculados, sugere-se a repetição dos ensaios fora do regime de validade da teoria KdV, pois não foi possível fazer uma análise de alguns destes.

Ainda assim, é possível afirmar que a experiência foi bem sucedida, tendo sido possível observar e medir valores próximos dos previstos teoricamente, usando e comparando vários métodos.

Referências

- [1] **GitHub**
<https://github.com/AthomsG/LFEA>
- [2] KdV 2-Soliton Solution
http://lie.math.brocku.ca/~sancho/solitons/kdv_solitons.php
- [3] The spectrum of a sum of solitons
https://www.researchgate.net/figure/The-spectrum-of-a-sum-of-solitons-according-to-Zakharov-Shabat-statistics-of-soliton-sea_fig1_5313668

8 Anexos

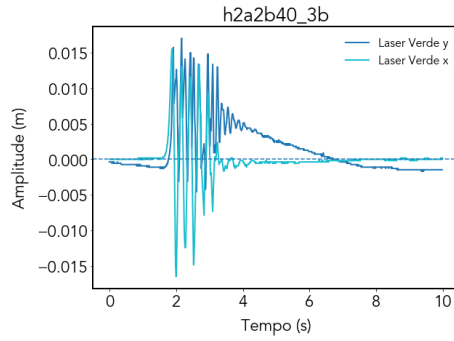


Figura 17: Ensaio h2a2b40_3b

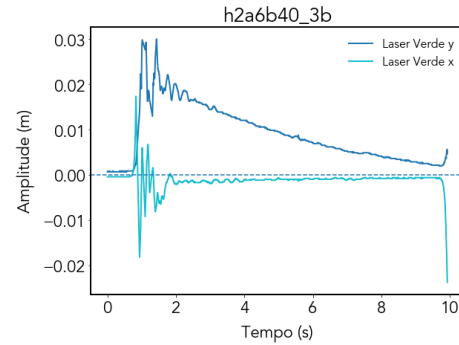


Figura 21: Ensaio h2a6b40_3b

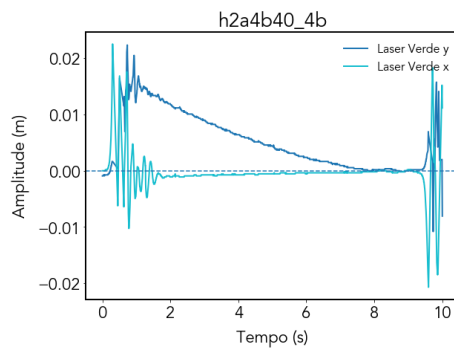


Figura 18: Ensaio h2a4b40_4b

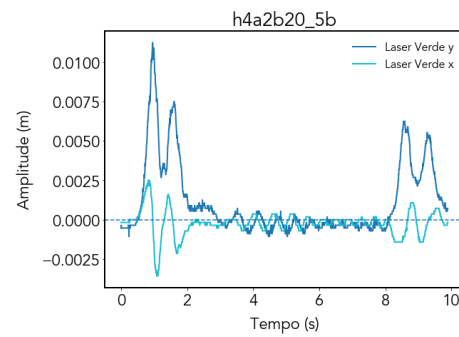


Figura 22: Ensaio h4a2b20_5b

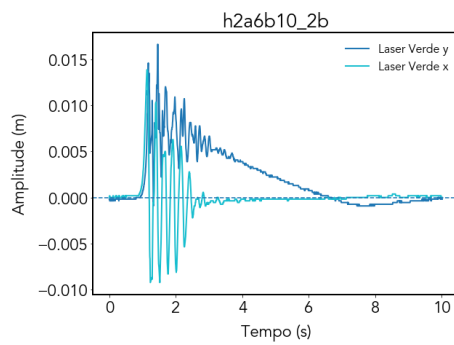


Figura 19: Ensaio h2a6b10_2b

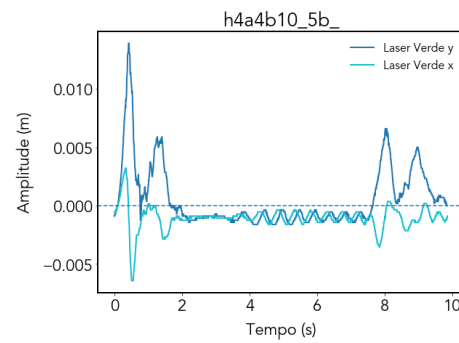


Figura 23: Ensaio h4a4b10_5b_

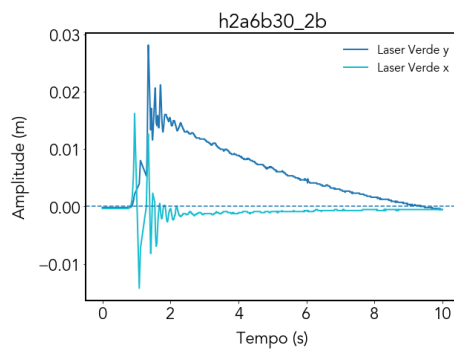


Figura 20: Ensaio h2a6b30_2b

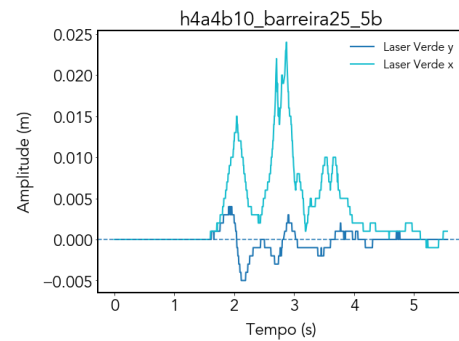


Figura 24: Ensaio h4a4b10_barreira25_5b_

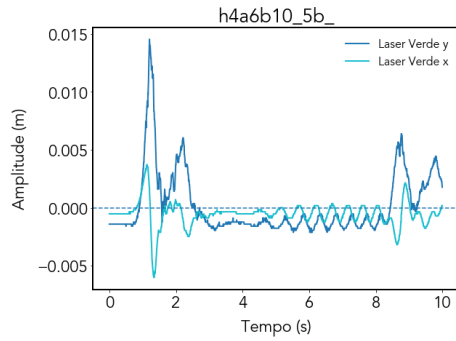


Figura 25: Ensaio h4a6b10_5b_

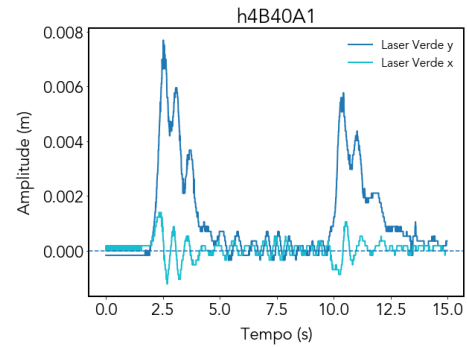


Figura 29: Ensaio h4B40A1

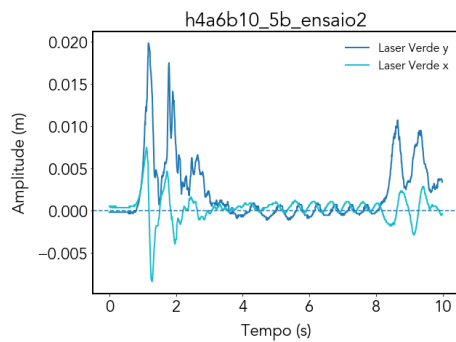


Figura 26: Ensaio h4a6b10_5b_ensaio2

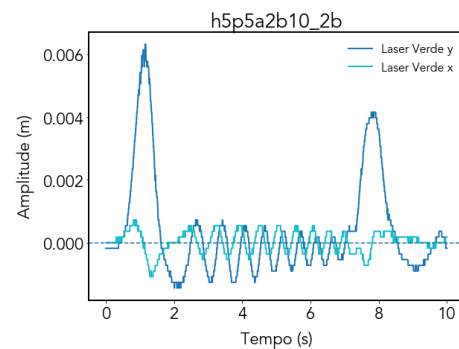


Figura 30: Ensaio h5p5a2b10_2b

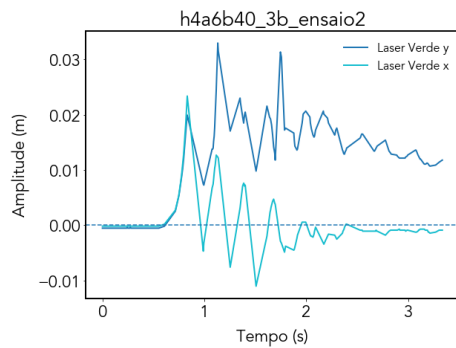


Figura 27: Ensaio h4a6b40_3b_ensaio2

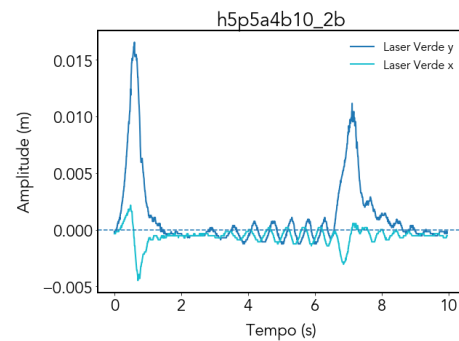


Figura 31: Ensaio h5p5a4b10_2b

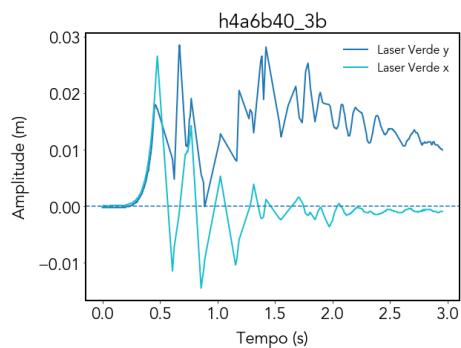


Figura 28: Ensaio h4a6b40_3b

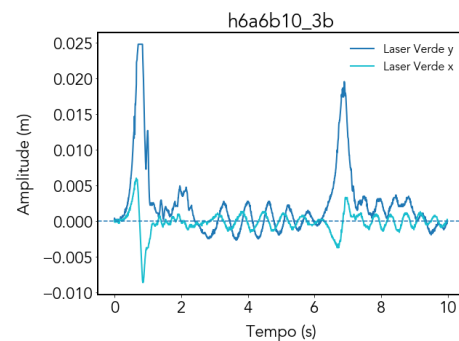


Figura 32: Ensaio h6a6b10_3b

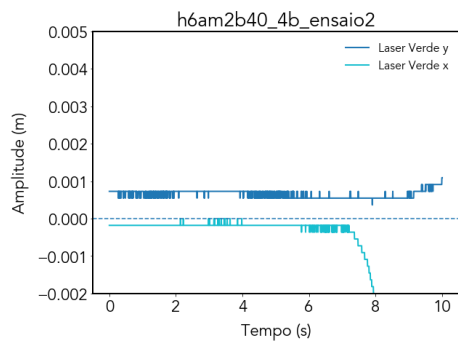


Figura 33: Ensaio h6am2b40_4b_ensaio2

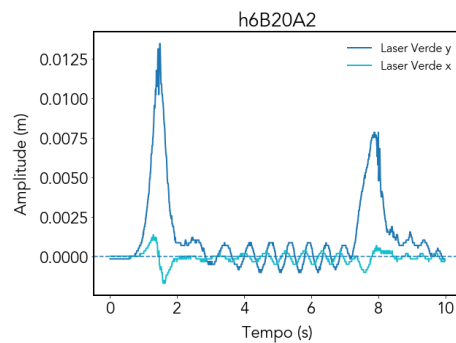


Figura 36: Ensaio h6B20A2

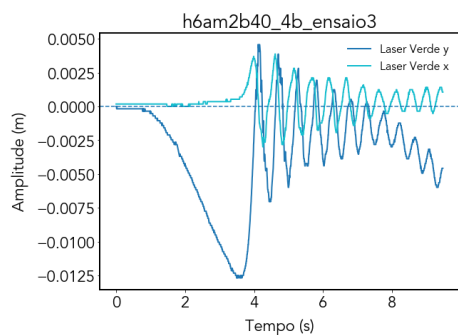


Figura 34: Ensaio h6am2b40_4b_ensaio3

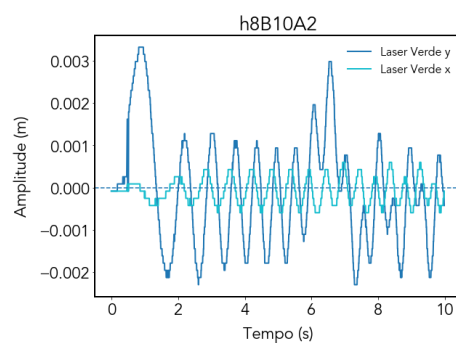


Figura 37: Ensaio h6B10A2

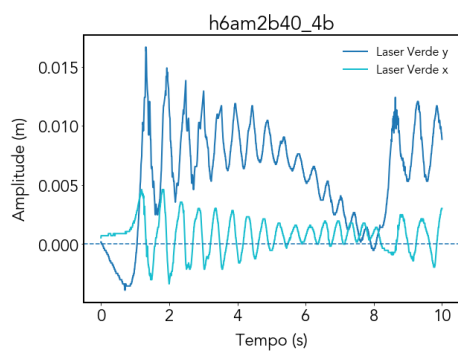


Figura 35: Ensaio h6am2b40_4b