O Bongo de Feynmann

Thomas Gaehtgens *ist186809*

Resumo
Pretende-se com este trabalho simular os modos de vibração do bongo onde Feynmann tocava, acompanhado pelo seu amigo, Ralpha Leighton, temas célebres com *orange juice*. Para tal, aproximou-se a membrana do instrumento de percussão a uma membrana circular e simulou-se o sistema em *Python*.

Suposições Físicas

Antes de se deduzir o problema da membrana de raio a, impuseram-se as algumas características ao sistema para facilitar o estudo do mesmo.

A massa da membrana por unidade de área é constante, a tensão por unidade de comprimento devido ao estiramento da membrana é constante em todos os pontos e direções, não mudando durante o movimento e por fim, o deslocamento da membrana é pequeno em relação ao tamanho da membrana.

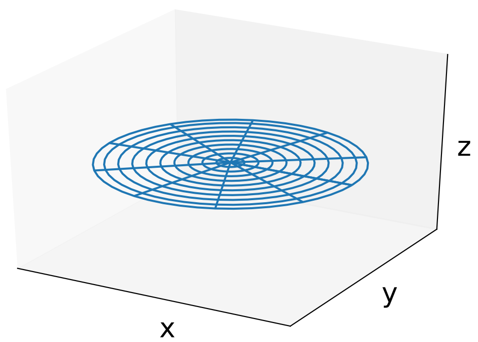

Figura 1. Representação da membrana circular

Equação da Onda Bi-Dimensional

Aferem-se agora as consequências das suposições físicas na força de tensão presente num pedaço da membrana.

Componente Horizontal

As componentes horizontais obtém-se através do produto do módulo da força com o coseno do ângulo de inclinação. Para pequenos deslocamentos pode-se aproximar o coseno a 1, pelo que as forças opostas cancelam-se. A componente horizontal da tensão é, portanto, nula.

Componente Vertical

As componentes verticais da força de tensão para uma pequena secção quadrada da membrana, representada na figura 2, correspondem a:

$$-T\Delta y \sin(\alpha) \qquad\qquad T\Delta y \sin(\beta)$$

Usando a aproximação da tangente, uma vez que os ângulos de inclinação são pequenos, a tensão resultante é dada por:

$$\begin{aligned} T\Delta y(\sin(\beta) - \sin(\alpha)) &\approx T\Delta y(\tan(\beta) - \tan(\alpha)) \\ &= T\Delta y\left(\frac{\partial z(x+\Delta x, y_1)}{\partial x} - \frac{\partial z(x, y_2)}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

onde $y_1,\, y_2 \in\,]y,\, y+\Delta y[$

por simetria, para $T\Delta x$ tem-se:

$$T\Delta x(\sin(\beta) - \sin(\alpha)) \approx T\Delta x\left(\frac{\partial z(x_1, y+\Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial z(x_2, y)}{\partial x}\right)$$

onde $x_1,\, x_2 \in\,]x,\, x+\Delta x[$

Da 2ª lei de Newton e uma vez que os deslocamentos são transversais, vem:

$$\begin{aligned} \rho\Delta A\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= T\Delta x\left(\frac{\partial z(x_1, y+\Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial z(x_2, y)}{\partial x}\right) \\ &+ T\Delta y\left(\frac{\partial z(x+\Delta x, y_1)}{\partial x} - \frac{\partial z(x, y_2)}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

No limite $\Delta x \longrightarrow 0$ e $\Delta y \longrightarrow 0$, resulta a equação de onda a 2 dimensões:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 z \qquad \text{onde } c = \frac{T}{\rho}. \tag{1}$$

Devido à simetria circular do problema é preferível trabalhar em coordenadas polares. Desta forma o laplaciano é dado por:

$$\nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

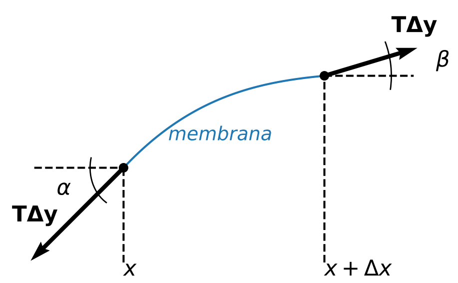

Figura 2. secção de membrana no plano xz

Caso Geral

Pelo método da separação de variáveis, tem-se:

$$z(r,\theta,t) = R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot T(t) \tag{2}$$

Substituindo em 1 resulta:

$$\begin{cases} \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda^2 \\ \\ \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{rR(r)} + \frac{\Theta''(\theta}{r^2\Theta(\theta)} = -\lambda^2 \end{cases}$$

Pelo que a solução de $T(t)$ é dada por uma combinação linear de senos e cossenos:

$$T(t) = A\cos(c\lambda t) + B\sin(c\lambda t)$$

multiplicando por r^2 e separando as variáveis da equação dependente de θ e r, obtem-se:

$$\begin{cases} \lambda^2 r^2 + \frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{rR'(r)}{R(r)} = L \\ \\ -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = L \end{cases}$$

Desta forma, a solução de $\Theta(\theta)$ é dada por:

$$\Theta(\theta) = C\cos(m\theta) + D\sin(m\theta) \qquad \text{L} = m^2 \text{ e } m = 0,\ 1,\ ...$$

A solução de $R(r)$ é uma combinação linear das funções de Bessel J_m e Y_m, assumindo a forma:

$$R(r) = J_m(\lambda_{mn} r) \qquad \text{m} = 0,\ 1,\ ... \text{ e n} = 1,\ 2,\ ...$$

onde $\lambda_{mn} = \alpha_{mn}/a$, sendo que a_{mn} corresponde a raiz n positiva da função J_m.

Substituindo as soluções de $R(r)$, $\Theta(\theta)$ e $T(t)$ na equação 2, obtem-se a solução geral do problema.

Simulação Computacional

A simulação dos modos normais da pele do bongo de Feynmann foi implementada em *Python*, tendo sido utilizado o ambiente *Jupyter Notebook*, que permite uma execução do código rápida.

Utilizaram-se as bibliotecas de cálculo: *numpy* e *scipy*, sendo que a última contém já definidas as funções de Bessel e as suas raizes. A parte gráfica baseou-se na biblioteca *matplotlib*, nomeadamente a extensão que permite a visualização tri-dimensional, que foi utilizada para simular superfície da membrana. Foi também traçado um corte horizontal da membrana, na base da mesma.

Utilizaram-se os seguintes valores arbitrários na solução geral:

$$A = 0s,\ B = 1s,\ C = 1 \text{ e } D = 0.$$
$$a = 1m,\ c = 0.75ms^{-1} \text{ e } t = 0s.$$

Encontram-se à direita os primeiros modos normais obtidos na simulação da membrana, correspondendo da esquerda para a direita a:

$$\begin{aligned} z_{mn} = \{&(0,1),(0,2),(0,3) \\ &(1,1),(1,2),(1,3) \\ &(2,1),(2,2),(2,3)\} \end{aligned}$$

Discussão dos Resultados

O corte horizontal facilita a visualização das componentes radiais e angulares de cada modo de vibração, sendo possível observar as simetrias de θ e r.

Para n, observam-se n 'fatias' da membrana, formando angulos de $\frac{2\pi}{n}$, quando $n > 0$. Para m, observam-se m circunferências contidas dentro da circunferência de raio a.

Referências

[1] https://www.youtube.com/watch?v=HKTSaezB4p8

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Vibrations_of_a_circular_membrane

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function

[4] http://zeta.math.utsa.edu/~gokhman/courses/mat3623/Membrane.pdf

[5] https://matplotlib.org/3.2.2/contents.html

[6] https://numpy.org/doc/

[7] https://docs.scipy.org/doc/

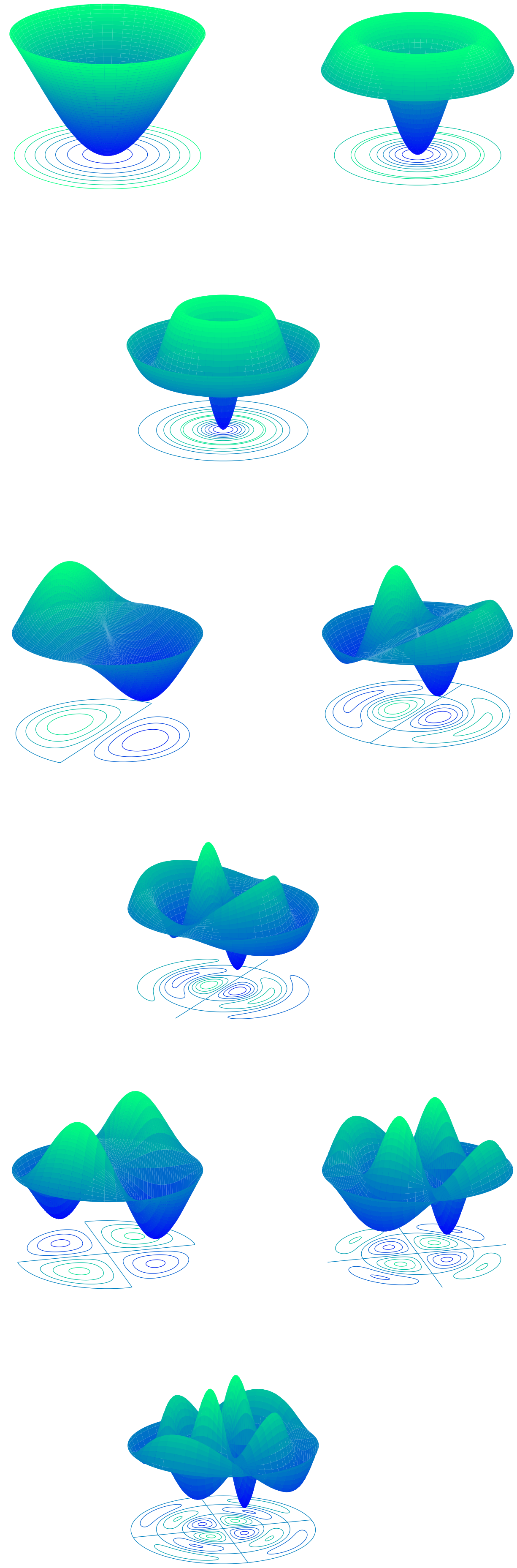

Figura 3. Apresentação gráfica dos resultados