

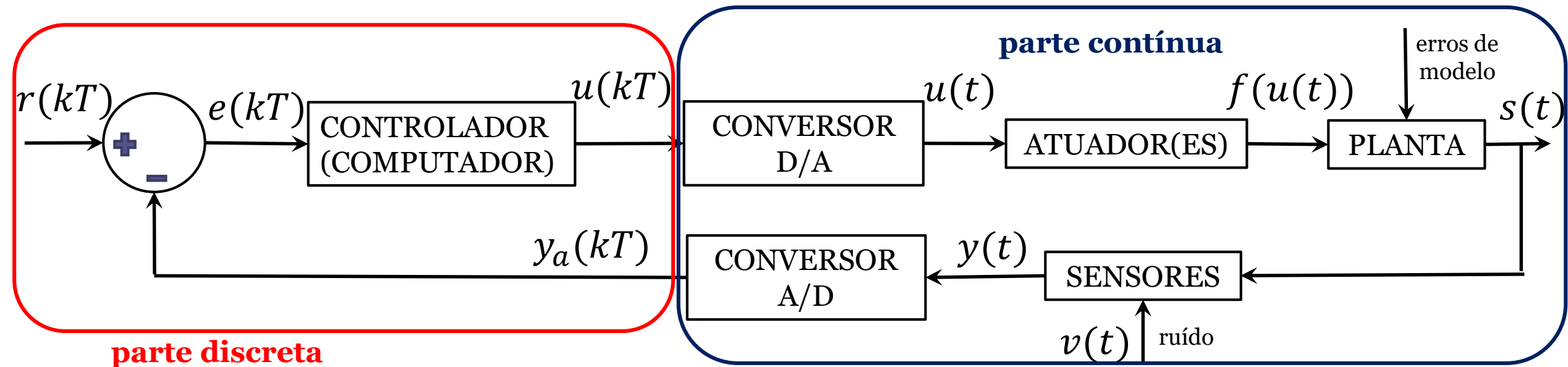
Processamento de Sinais aplicado à Engenharia Mecânica

Transformada Z: aplicações

Flavius P. R. Martins, Prof. Dr.
Flávio C. Trigo, Prof. Dr.

1. Introdução

- As transformadas Z são amplamente utilizadas no projeto de sistemas de controle em malha aberta ou fechada;
- em aplicações típicas de sistemas de engenharia de controle, há dois principais universos que convivem frequentemente: o real, normalmente contínuo, composto pela planta, conversores, sensores e atuadores, e o virtual, normalmente discreto, composto pelos equipamentos responsáveis por processar informações e fornecer os comandos adequados à planta;
- a figura a seguir mostra o diagrama de blocos de um sistema de controle genérico:



2. Sistemas lineares e invariantes no tempo

- definição -- *sistema invariante no tempo*:

um sistema discreto em $x(k)$ é o sinal de entrada e $y(k)$ é o sinal de saída é representado por

$$x(k) \rightarrow y(k).$$

Tal sistema é *invariante no tempo* se o único efeito de um deslocamento temporal no sinal de entrada resultar no mesmo deslocamento temporal no sinal de saída, ou seja,

$$x(k - n_0) \rightarrow y(k - n_0), \quad \forall n_0 \in \mathbb{N}.$$

- definição -- *sistema linear*:

para o mesmo sistema acima, vamos supor que, $x_1(k) \rightarrow y_1(k)$ e que $x_2(k) \rightarrow y_2(k)$, o sistema é *linear* desde que o princípio da superposição

$$a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k) \rightarrow a_1 y_1(k) + a_2 y_2(k),$$

para todas as constantes a_1, a_2 , e para todos os sinais $x_1(k)$, $x_2(k)$ seja válido.

Sistemas que possuem essa característica são denominados lineares e invariantes no tempo, LIT (conforme visto anteriormente).

2. Sistemas LIT (cont.)

- em processamento de sinais, estes são representados por somatórias de senos e cossenos;
- *filtros* LIT são sistemas responsáveis por selecionar as faixas de frequências de interesse e descartar as demais.
- sua nomenclatura está associada à função executada:
 - (a) passagem de banda (ex.: receptor de rádio); rejeição de banda (ex.: equipamento de ECG), passa baixa, passa alta;
 - (b) filtros para a correção de distorções introduzidas em sinais são denominados equalizadores;
 - (c) se projetados para operar em sistemas de controle com o objetivo de acompanhar sua dinâmica e prover as correções necessárias são denominados compensadores.

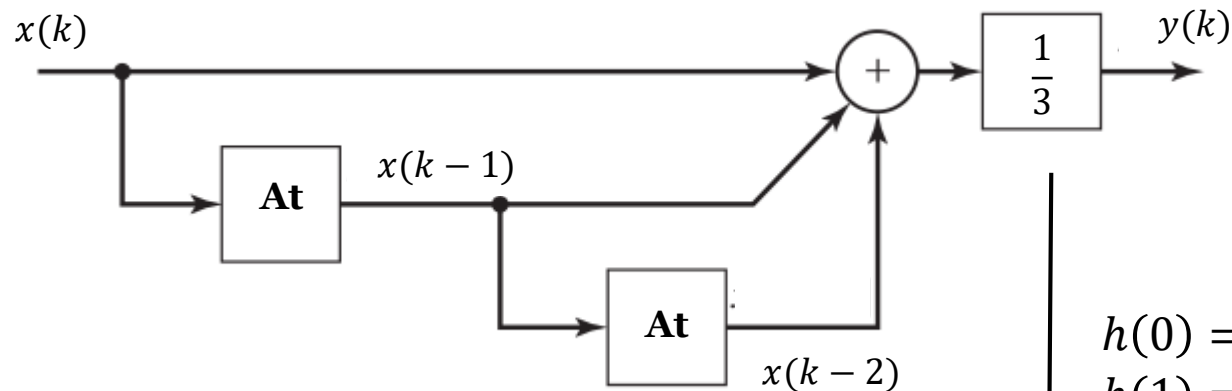
2. Sistemas LIT (cont.)

- quanto à sua natureza, sistemas LIT possuem:
 - (a) *resposta impulsiva finita* (RIF, tradução livre do inglês FIR – finite impulse response), denominados *causais*. Em um sistema causal, a resposta impulsiva contém número finito de elementos não-nulos.
 - (b) *resposta impulsiva infinita* (RII, tradução livre do inglês IIR – infinite impulse response), denominados não-causais; em um sistema *não causal*, a resposta impulsiva possui número ilimitado de termos não-nulos.

Recuperando um exemplo já apresentado de sistema RIF ...

2.1 Sistemas LIT RIF e RII

Exemplo de sistema RIF: o diagrama de blocos da figura mostra a resposta de um sistema a uma entrada $x(k)$. Pede-se: (i) escrever a equação de diferenças correspondente ao diagrama; (ii) obter a função resposta impulsiva $h(k)$ desse sistema.



(ii) para obter $h(k)$, faz-se $x(k) = \delta(k)$:

$$\Rightarrow y(k) = h(k) = \frac{1}{3}(\delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2))$$

Portanto,

$$h(0) = \delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2)/3|_{k=0} = (1 + 0 + 0)/3 = 1/3$$

$$h(1) = \delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2)/3|_{k=1} = (0 + 1 + 0)/3 = 1/3$$

$$h(2) = \delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2)/3|_{k=2} = (0 + 0 + 1)/3 = 1/3$$

$$h(k) = 0, \quad \forall k \neq 0, 1, 2$$

Solução

(i) diretamente, a partir do diagrama,

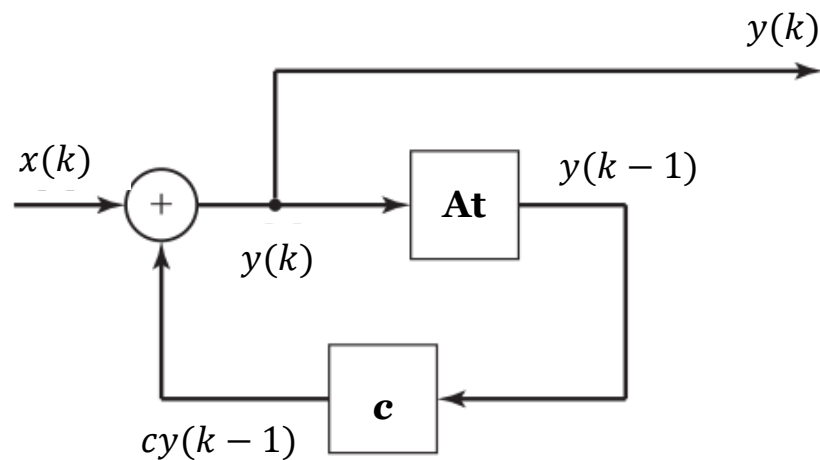
$$y(k) = \frac{1}{3}(x(k) + x(k-1) + x(k-2))$$

Como se pode constatar, sistema é um filtro de média móvel

Esse é um sistema de *resposta impulsiva finita*, pois a saída $h(k)$ (resposta impulsiva) contém *número finito* de elementos *não nulos*.

2.1 Sistemas LIT FRI e RII

Exemplo de sistema RII: o diagrama de blocos da figura mostra a resposta de um sistema causal a uma entrada $x(k)$. Pede-se: (i) escrever a equação de diferenças correspondente ao diagrama; (ii) obter a função resposta impulsiva $h(k)$ desse sistema. *Obs.:* “At” = *atraso* e “c” = *constante*.



Solução

(i) diretamente, a partir do diagrama,

$$y(k) = cy(k-1) + x(k)$$

com $x(k) = 0, \forall k < 0$

(ii) para obter $h(k)$, faz-se $x(k) = \delta(k) = \delta(0) = 1$:
 $\Rightarrow y(k) = h(k) = cy(k-1) + 1$

Portanto,

$$h(0) = cy(-1) + \delta(0) = 0 + 1 = 1$$

$$h(1) = cy(0) + \delta(1) = c + 0 = c$$

$$h(2) = cy(1) + \delta(2) = c^2 + 0 = c^2$$

$$\vdots$$

$$h(k) = cy(k-1) + \delta(k) = c^k + 0 = c^k$$

$$\therefore h(k) = c^k, k \geq 0; \quad 0, k < 0 \quad \text{ou} \quad h(k) = c^k u(k)$$

2. Sistemas LIT (cont.)

- O estudo de sistemas LIT é importante pois:
 - (a) diversos equipamentos e sistemas reais podem ser modelados de maneira adequada como LIT; esse é o caso da maioria dos filtros discretos;
 - (b) as equações decorrentes dessa modelagem podem ser resolvidas tanto no domínio discreto como no domínio contínuo. Com essa finalidade, a partir das transformadas \mathcal{Z} , obtém-se equivalentes discretos que são utilizados no projeto de filtros discretos;
 - (c) tanto a análise quanto o projeto de sistemas LIT estão amplamente documentados na literatura, com especial destaque para os filtros LIT discretos;

3. Equivalentes discretos por integração numérica

- Uma das maneiras de projetar filtros discretos (veremos outras mais adiante) é partindo da discretização de sua função de transferência contínua;
- com isso, converte-se uma equação diferencial em uma equação de diferenças que é resolvida, mediante o mapeamento complexo $s \xrightarrow{z}$;
- para discretização com passo constante de período T , apresentam-se 3 possibilidades de mapeamento do domínio contínuo no discreto;
- para ilustrar o método, será utilizada a função de transferência de um filtro passa-baixa ideal,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a}{s + a}, \text{ com } X(s) \equiv \text{entrada e } Y(s) \equiv \text{saída, } a \in \mathcal{R} \text{ e constante.}$$

Essa função de transferência possui um polo em $s = -a$ e, portanto, é estável.

3. Equivalentes discretos por integração numérica (cont.)

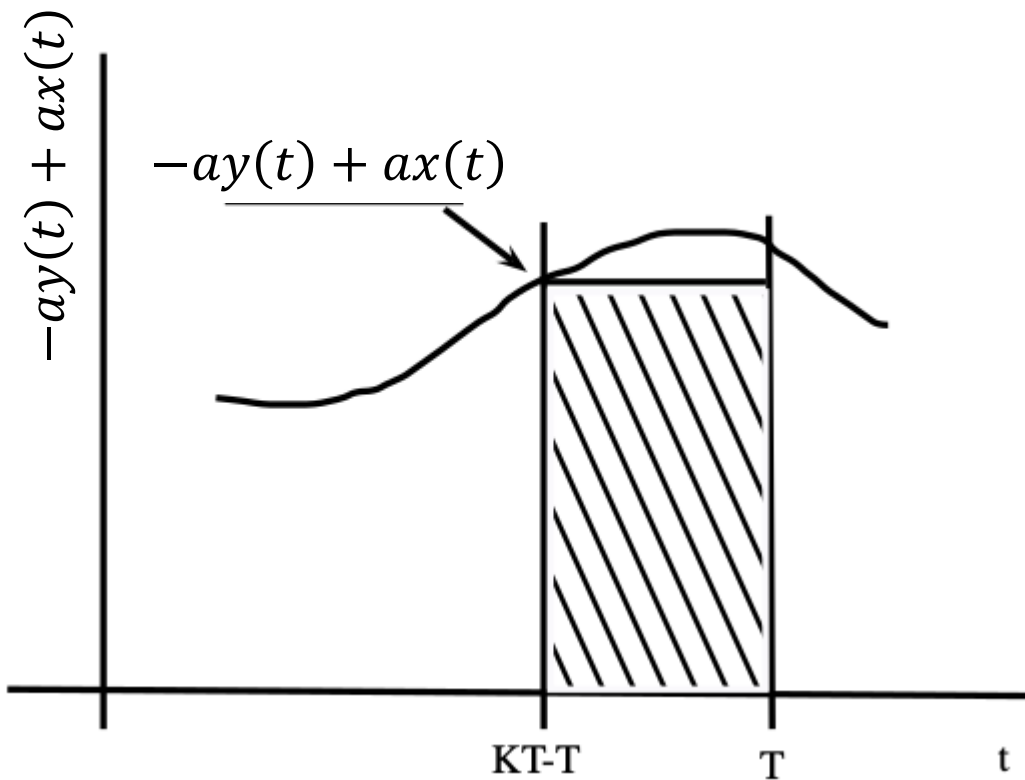
A equação diferencial equivalente a $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a}{s+a}$ é $\dot{y}(t) + ay(t) = ax(t)$. Assim,

$$y(t) = \int_0^t a(x(\tau) - y(\tau))d\tau \Rightarrow y(kT) = \underbrace{\int_0^{kT-T} a(x(\tau) - y(\tau))d\tau}_{y(kT-T)} + \underbrace{\int_{kT-T}^T a(x(\tau) - y(\tau))d\tau}_{\text{área sob a curva } C = -ay(\tau) + ax(\tau) \text{ entre } kT-T \text{ e } T}$$

3.1 Equivalentes discretos por integração numérica: *regra de Euler*

A *regra de Euler* é também conhecida como *integração retangular* ou *regra de avanço* (em tradução livre do inglês *forward rule*).

A representação gráfica dessa aproximação é mostrada ao lado:



3.1 Equivalentes discretos por integração numérica: *regra de Euler*

A aproximação utilizando essa regra fica:

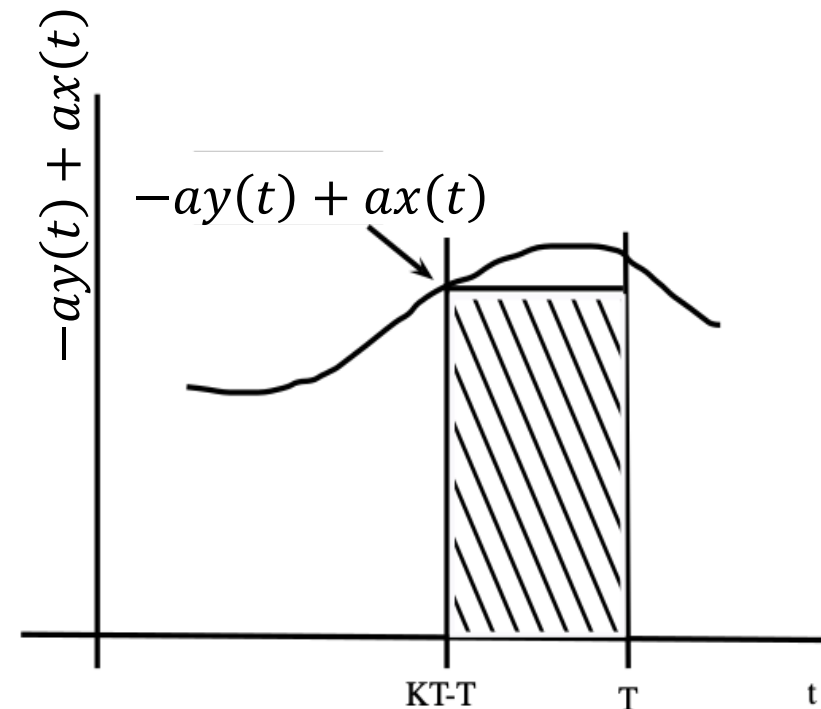
$$y_E(kT) = y_E(kT - T) + T[-ay_E(kT - T) + ax_E(kT - T)]$$

$$y_E(kT) = (1 - aT)y_E(kT - T) + aTx_E(kT - T)$$

Aplicando a transformada Z à função acima obtém-se

$$Z[y_E(kT)] = Z[(1 - aT)y_E(kT - T) + aTx_E(kT - T)]$$

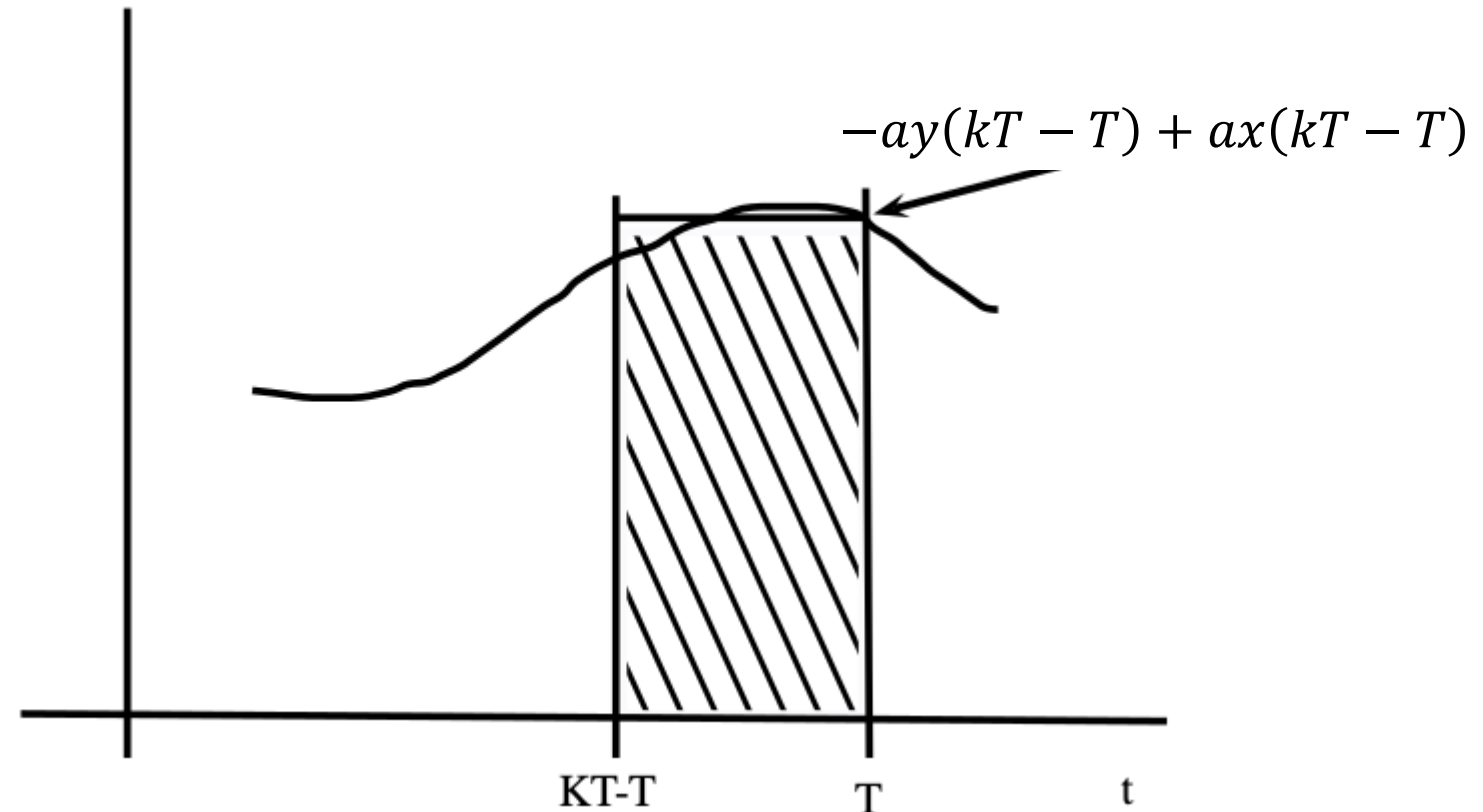
$$H_E(z) = \frac{aTz^{-1}}{1 - (1 - T)z^{-1}} = \frac{a}{z - (1 - T)} = \frac{a}{\frac{z - 1}{T} + a}$$



3.1 Equivalentes discretos por integração numérica: *regra de integração para trás*

A *regra de integração para trás* é uma tradução livre da literatura em inglês (*backward rule*).

A representação gráfica dessa aproximação é mostrada ao lado:



3.1 Equivalentes discretos por integração numérica: *regra de integração para trás*

A integração utilizando essa regra é dada por:

$$y_B(kT) = y_B(kT - T) + T[-ay_B(kT) + ax_B(kT)]$$

$$(1 + aT)y_B(kT) - y_B(kT - T) = aTx_B(kT)$$

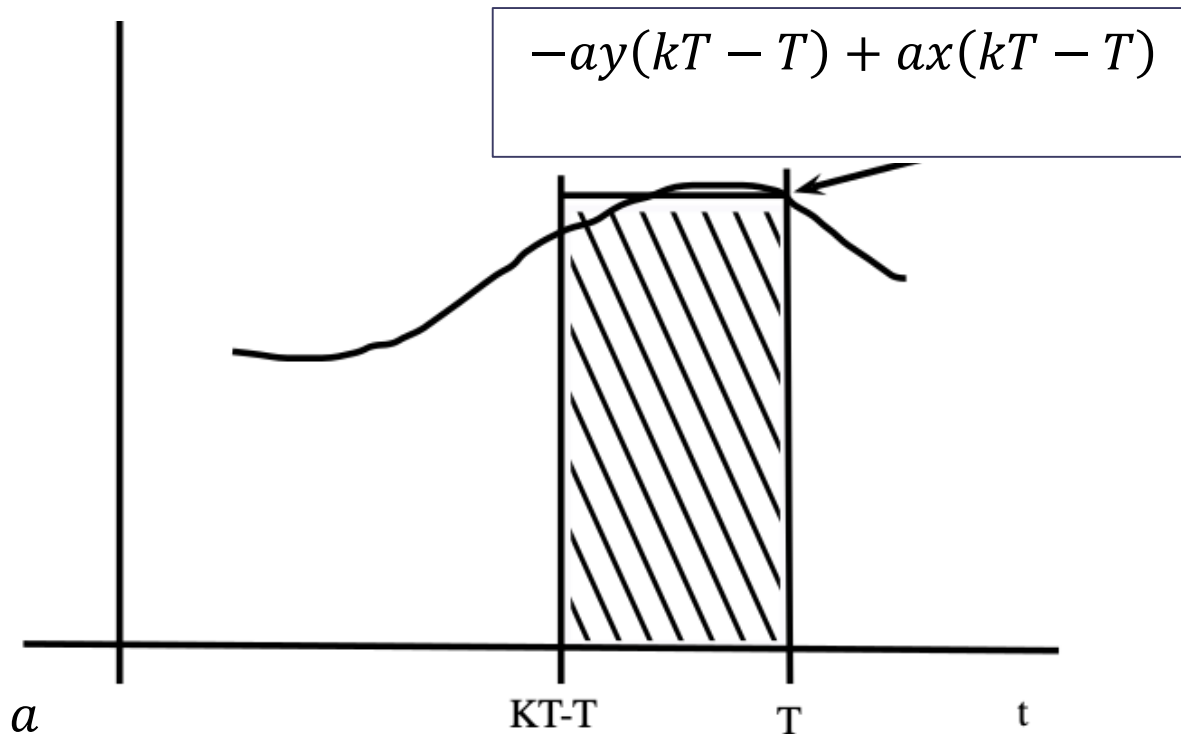
Aplicando a transformada \mathcal{Z} à expressão acima fica:

$$\mathcal{Z}[(1 + aT)y_B(kT) - y_B(kT - T)] = \mathcal{Z}[aTx_B(kT)]$$

$$(1 + aT)Y_B(z) - z^{-1}Y_B(z) = aTX_B(z)$$

$$(1 + aT - z^{-1})Y_B(z) = aTX_B(z)$$

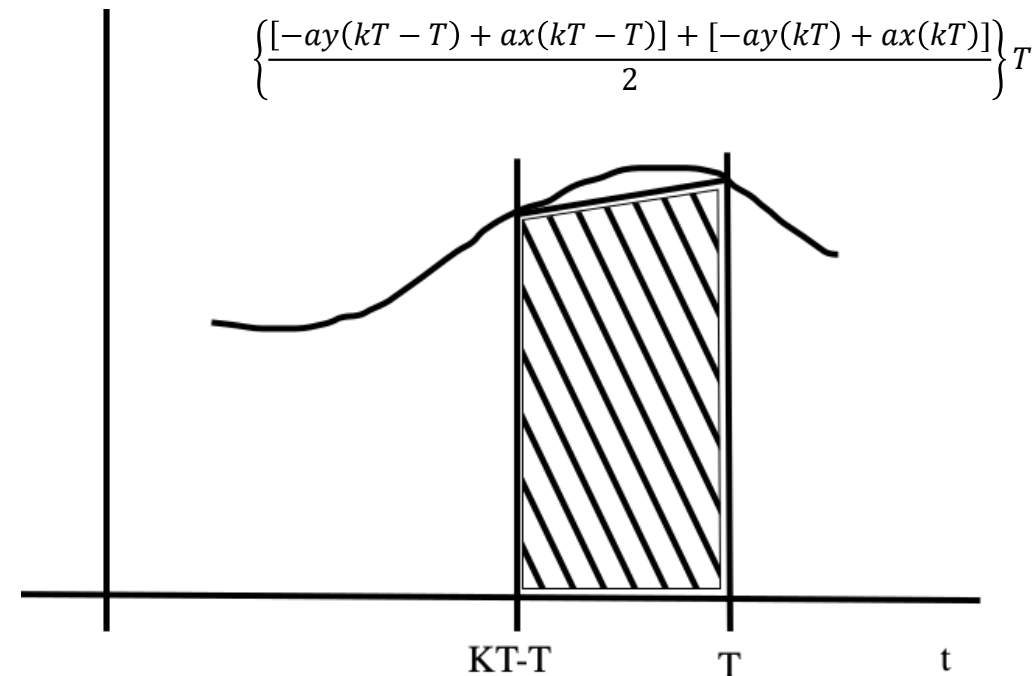
$$\Rightarrow H_B(z) = \frac{Y_B(z)}{X_B(z)} = \frac{aT}{1 + aT - z^{-1}} = \frac{aTz}{z + aTz - 1} = \frac{a}{\frac{z-1}{Tz} + a}$$



3.1 Equivalentes discretos por integração numérica: *regra de integração trapezoidal*

A *regra de integração trapezoidal* é denominada também *transformação bilinear* ou, ainda, *método de Tustin*, em homenagem ao engenheiro britânico Arnold Tustin (1889-1994).

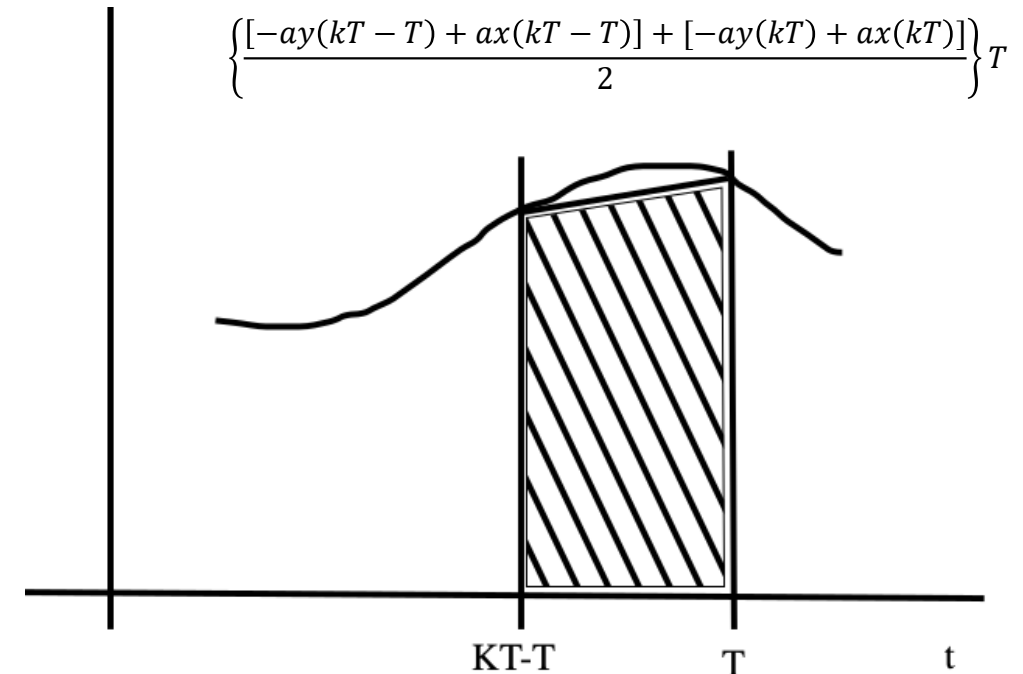
A representação gráfica dessa aproximação é mostrada ao lado:



3.1 Equivalentes discretos por integração numérica: *regra de integração trapezoidal*

A integração utilizando essa regra é dada por:

$$\begin{aligned}
 y_b(kT) &= y_b(kT - T) \\
 &+ \frac{T}{2} [(-ay_b(kT - T) + ax_b(kT - T)) + (-ay_b(kT) + ax_b(kT))] \\
 \Rightarrow y_b(kT) + \frac{aT}{2} y_b(kT) &= y_b(kT - T) - \frac{aT}{2} y_b(kT - T) \\
 &+ \frac{aT}{2} (x_b(kT) + x_b(kT - T)) \Rightarrow \\
 y_b(kT) \left(1 + \frac{aT}{2}\right) &= \left(1 - \frac{aT}{2}\right) y_b(kT - T) + \frac{aT}{2} (x_b(kT) + x_b(kT - T)) \Rightarrow \\
 y_b(kT) &= \frac{\left(1 - \frac{aT}{2}\right)}{\left(1 + \frac{aT}{2}\right)} y_b(kT - T) + \frac{\frac{aT}{2}}{\left(1 + \frac{aT}{2}\right)} (x_b(kT) + x_b(kT - T)) \Rightarrow
 \end{aligned}$$



3.1 Equivalentes discretos por integração numérica: *regra de integração trapezoidal*

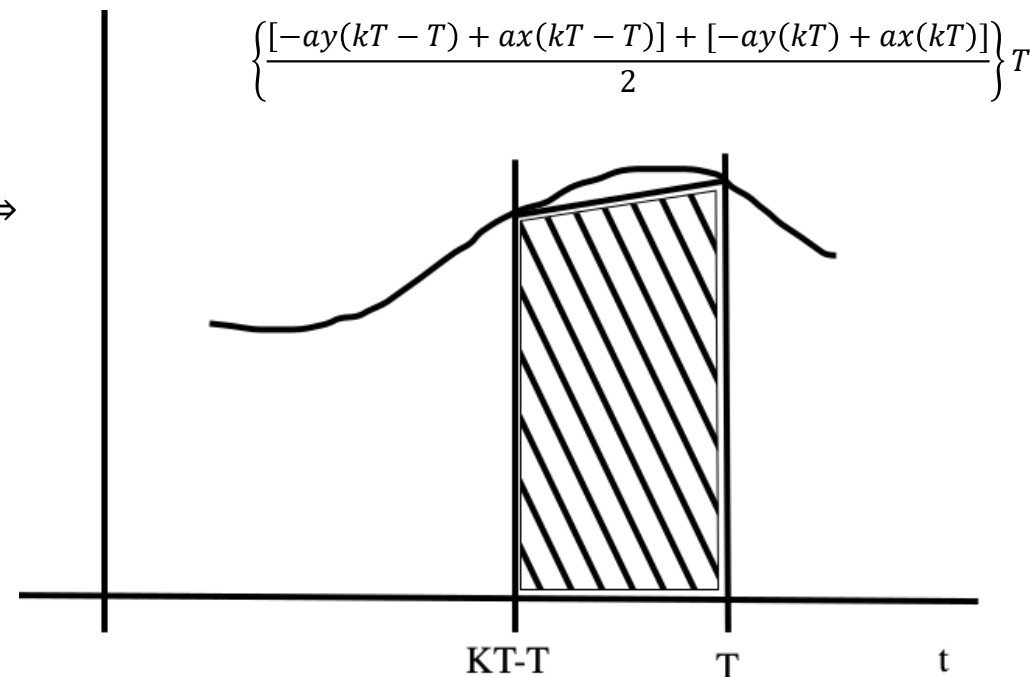
Aplicando a transformada \mathcal{Z} à última expressão tem-se:

$$\mathcal{Z}[y_b(kT)] = \mathcal{Z} \left[\frac{\left(1 - \frac{aT}{2}\right)}{\left(1 + \frac{aT}{2}\right)} y_b(kT - T) + \frac{\frac{aT}{2}}{\left(1 + \frac{aT}{2}\right)} (x_b(kT) + x_b(kT - T)) \right] \Rightarrow$$

$$Y_b(z) = \frac{\left(1 - \frac{aT}{2}\right)}{\left(1 + \frac{aT}{2}\right)} z^{-1} Y_b(z) + \frac{\frac{aT}{2}}{\left(1 + \frac{aT}{2}\right)} (1 + z^{-1}) X_b(z)$$

Após algum trabalho algébrico chega-se a

$$H_b(z) = \frac{Y_b(z)}{X_b(z)} = \frac{a}{\frac{2(z-1)}{T(z+1)} + a}$$



3.1 Equivalentes discretos por integração numérica: *conclusão*

- os três métodos de integração discreta representam a mesma função de transferência no domínio contínuo,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a}{s + a}$$
- pela comparação direta de $H(s)$ com as três expressões discretas aproximadas, percebe-se que, para obtê-las, basta substituir, na transformada de Laplace,

$$s \rightarrow \frac{z - 1}{T} \quad \text{regra de Euler (avanço)}$$

$$s \rightarrow \frac{z - 1}{Tz} \quad \text{regra para trás (retrocesso)}$$

$$s \rightarrow \frac{2(z - 1)}{T(z + 1)} \quad \text{transformação bilinear, regra trapezoidal ou de Tustin}$$

3.2 Efeito das aproximações no mapeamento do plano s no plano z

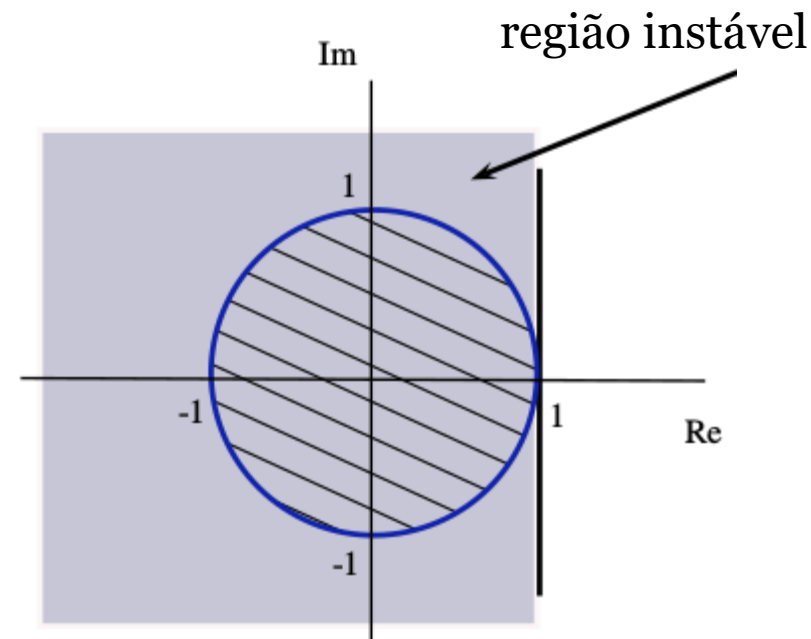
- a relação entre os planos s e z é dada por $z = e^{Ts}$, com T representando o período de amostragem. Como $s = \sigma + j\omega \Rightarrow z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} \cdot e^{Tj\omega}$;
- a região estável no plano s corresponde ao semiplano esquerdo;
- para que a transformação do domínio contínuo para o discreto também seja estável é necessário que $|z| = |e^{T\sigma}| |e^{jT(\omega + 2k\pi)}| \leq 1$;
- porém, como $|e^{jT(\omega + 2k\pi)}| = 1$, para que $|z| \leq 1$ basta que $|e^{T\sigma}| < 1$ e, assim, se $\sigma < 0$, toda a região estável do plano contínuo é mapeada para o interior de um círculo de raio unitário com centro em $z = 0$ no plano discreto;
- o eixo $j\omega$ separa as regiões estável e instável no plano contínuo;
- portanto, é importante verificar como as infinitas frequências $-\infty < j\omega < \infty$ do domínio contínuo são mapeadas para a circunferência de dimensão 2π radianos no plano z face às aproximações efetuadas (obs: este tópico foi apresentado um pouco acima)

3.2 Efeito das aproximações no mapeamento do plano s no plano z

Para cumprir essa tarefa, deve-se resolver as três equações de aproximação para z e, na sequência, efetuar a substituição $s = j\omega$. Para a regra de Euler tem-se:

$$z_E = Ts_E + 1 \Rightarrow z_E \Big|_{s=j\omega} = jT\omega + 1$$

A expressão acima indica que a aproximação da integral pelo método de Euler resulta no deslocamento do eixo imaginário em uma unidade para a direita, tornando possível que, dependendo do valor de T , funções de transferência estáveis no plano s possam ser mapeadas para locais instáveis no plano z (círculo de raio unitário com centro na origem, área hachurada na figura ao lado).



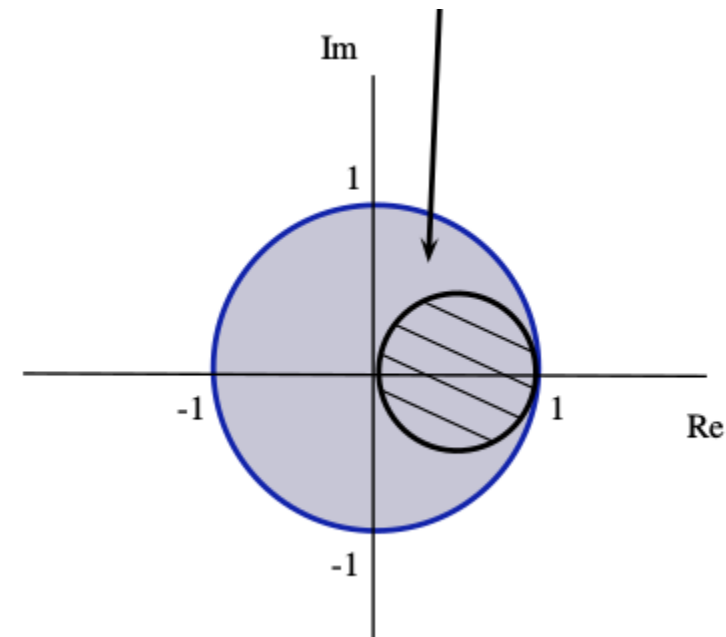
3.2 Efeito das aproximações no mapeamento do plano s no plano z

Para a regra de retrocesso, faz-se:

$$z_B = \frac{1}{1 - TS_B} \Rightarrow z_B \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 - jT\omega} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{1 - jT\omega} - \frac{1}{2} \right)$$

$$z_B = \frac{1}{2} + \left(\frac{2 - (1 - jT\omega)}{2(1 - jT\omega)} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1 + jT\omega}{2(1 - jT\omega)}$$

$$z_B - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{(1 + jT\omega)}{(1 - jT\omega)} \Rightarrow \left| z_B - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1 + jT\omega}{1 - jT\omega} \right| = \frac{1}{2}$$



A manipulação algébrica mostra que essa aproximação mapeia todo o plano s para a região um círculo de centro em $(1/2; 0)$ e raio $1/2$ no interior da região estável do plano z , conforme mostra a figura.

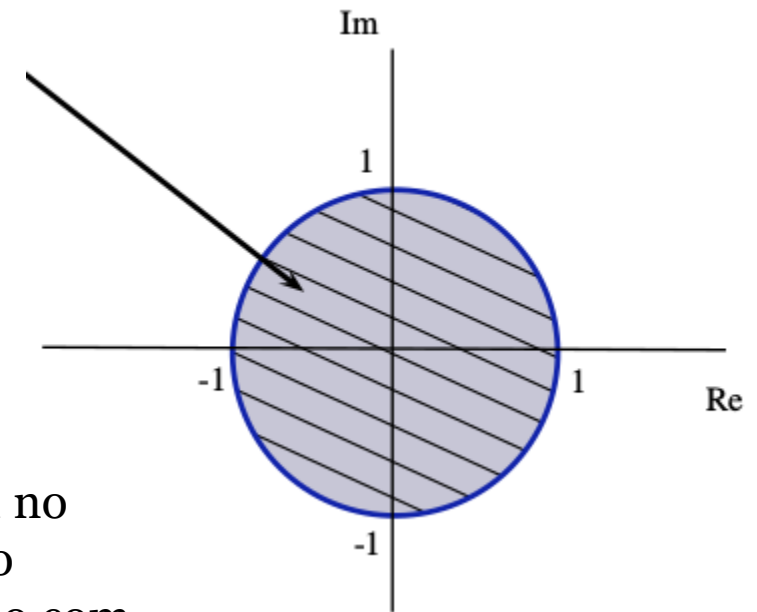
3.2 Efeito das aproximações no mapeamento do plano s no plano z

Finalmente, para a transformação bilinear ou regra de Tustin, a imagem de $s_b = j\omega$ em z é:

$$z_b = \frac{1 + \frac{Ts_b}{2}}{1 - \frac{Ts_b}{2}} = \frac{1 + \frac{jT\omega}{2}}{1 - \frac{jT\omega}{2}}$$

$$\Rightarrow |z_b| = \left| \frac{1 + \frac{jT\omega}{2}}{1 - \frac{jT\omega}{2}} \right| = 1$$

Nesse caso, conforme mostrado na figura, toda a região estável no domínio do tempo contínuo é mapeada para a região estável no domínio discreto, qual seja, o interior do círculo de raio unitário com centro na origem.



4. Filtros discretos

Qual a diferença entre “discreto” e “digital”?

A diferença entre filtros discretos e digitais está na *quantização*, o que afeta diretamente a codificação computacional.

Para um filtro discreto, assume-se que tanto a entrada quanto os coeficientes do polinômio que caracteriza o filtro sejam representados em *precisão infinita*. Isso significa que poderia haver um número infinito de níveis de quantização.

Nos filtros digitais, por outro lado, tanto a entrada quanto os coeficientes do polinômio característico do filtro são codificados de forma binária. Consequentemente, a quantização afeta o desempenho de um filtro digital, mas não o de um filtro discreto.

4. Filtros discretos

Qual a diferença entre “discreto” e “digital”?

- filtros são casos particulares de sistemas LIT;
- *filtros ideais são não causais*, isto é, a resposta impulsiva (saída) ocorre antes da entrada (o impulso); o enfoque aqui é referente a filtros causais;
- a partir de especificações de desempenho em frequência ou resposta impulsiva, projetar filtros discretos significa obter os parâmetros de uma função de transferência discreta ou equação de diferenças que corresponda às especificações e respectivas faixas de tolerância;
- filtros discretos pertencem a duas categorias: (i) resposta impulsiva infinita (RII) ou (ii) resposta impulsiva finita (RIF);
- o projeto de filtros discretos envolve 3 etapas: especificação das características do sistema resultante, seleção de um sistema discreto causal que aproxime as especificações e a efetiva implementação do filtro, seja via hardware, seja via software;

4. Filtros discretos

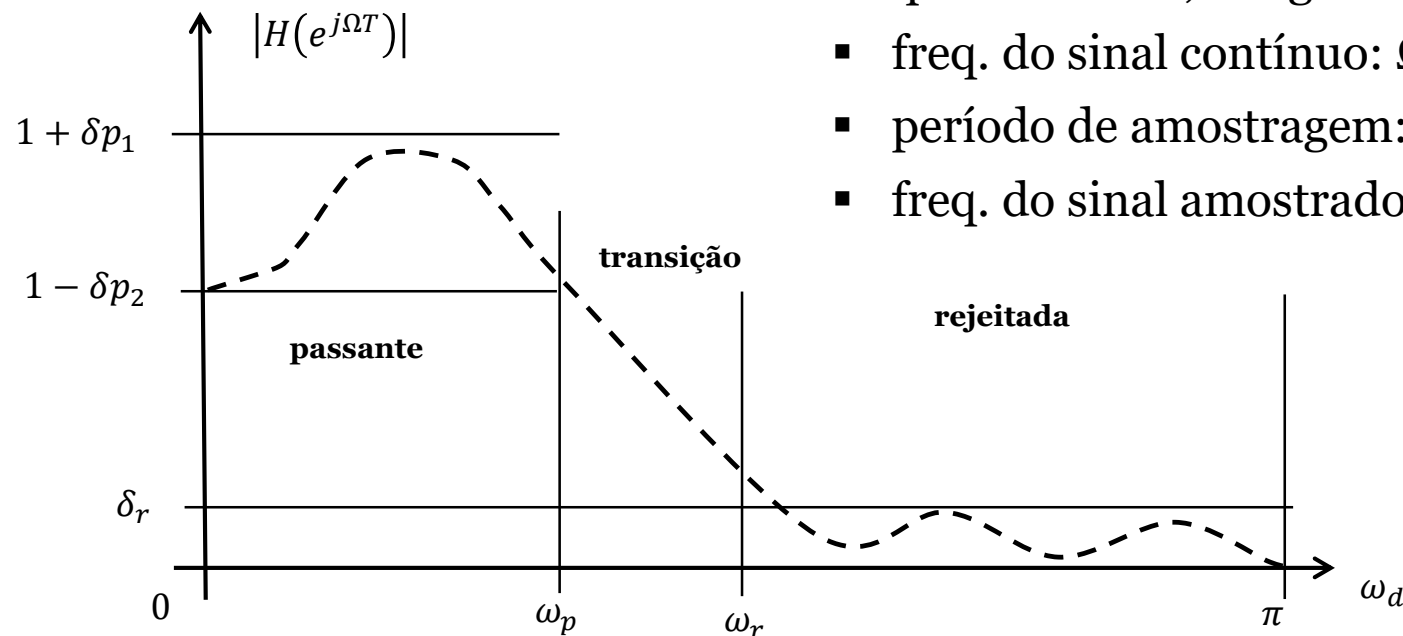
- o projeto de filtros discretos do tipo RII é normalmente efetuado no domínio contínuo, por técnicas bem consolidadas e, posteriormente, mapeado para o domínio discreto através de métodos como invariância ao impulso e transformação bilinear;
- no caso de filtros discretos do tipo RIF, o projeto é feito diretamente no domínio discreto, uma vez que as técnicas utilizadas para o projeto desses filtros no domínio contínuo não são adaptáveis ao projeto de filtros discretos;
- assim, o projeto de filtros discretos resume-se a: dadas as especificações, procura-se por um polinômio (RIF) ou por uma razão entre polinômios (RII) em z que aproxime as especificações;
- o filtro projetado deve ser fisicamente realizável, portanto causal, estável e cujos coeficientes do polinômio em z devem ser reais.

4.1 Especificações para filtros passa-baixa discretos

- os filtros passa-baixa são utilizados como protótipo para outros tipos de filtro, como será visto mais adiante;
- as especificações consideram faixas de tolerância na aproximação de um filtro passa-baixa com ganho unitário na banda passante e ganho zero na banda rejeitada como condições ideais.

Daqui em diante, a seguinte notação será adotada:

- freq. do sinal contínuo: Ω
- período de amostragem: T
- freq. do sinal amostrado: $\omega = \Omega T$



4.2 Projeto de filtros RII discretos a partir de filtros contínuos

As premissas básicas para o projeto de filtros RII discretos a partir de filtros contínuos são:

- o eixo imaginário de frequências contínuas (plano s) deve ser mapeado para o círculo unitário no domínio discreto (plano z);
- filtros contínuos estáveis devem permanecer estáveis quando mapeados para o domínio discreto.

Ha duas maneiras principais utilizadas em projetos de filtros RII discretos a partir de filtros contínuos:

- ❑ invariância impulsiva;
- ❑ transformação bilinear.

4.2.1 Projeto de filtros RII discretos a partir de filtros contínuos: invariância impulsiva

Nesse método, a resposta impulsiva do filtro discreto é construída proporcionalmente a partir de amostras equiespaçadas da resposta impulsiva de um filtro no domínio contínuo, ou seja,

$$h_d(k) = T h_c(kT), \text{ com } T \text{ período de amostragem}$$

- Essa abordagem apresenta como ponto positivo o fato de que a relação entre as respostas em frequência dos filtros contínuo e discreto é linear, em que o fator de escala é dado por

$$\omega = \Omega T,$$

- o ponto negativo é a exigência de que o sinal contínuo possua banda limitada e, como nenhum filtro contínuo realizável apresenta essa característica, a resposta impulsiva discreta irá conter frequências sobrepostas, caracterizando o *falseamento* (*aliasing*);
- caso a resposta do filtro contínuo apresente amplitudes próximas de zero para altas frequências, o efeito de falseamento pode ser desprezado e o método da invariância produz bons resultados.

4.2 Projeto de filtros RII discretos a partir de filtros contínuos: transformação bilinear

Essa abordagem baseia-se na transformação algébrica que mapeia todo o eixo imaginário contínuo, $j\Omega$, $-\infty \leq \Omega \leq \infty$, do plano s para uma volta do círculo unitário no plano z , com $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

- como há distorção na passagem de todo o eixo imaginário do plano contínuo para apenas uma volta no círculo unitário no plano discreto, a **transformação** é evidentemente **não linear**. O nome *bilinear* refere-se à linearidade dos polinômios em z no numerador e no denominador.

A transformação bilinear é dada pela expressão

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \Rightarrow H(z) = H_c(s) = H_c \left(\frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \right),$$

com $H(z)$ e H_c denotando as funções de transferência discreta e contínua, respectivamente.

4.2 Projeto de filtros RII discretos a partir de filtros contínuos: transformação bilinear

Resolvendo $s = \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$ para z obtém-se,

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s},$$

ou seja, uma razão entre dois polinômios lineares, daí derivando seu nome.

Para obter as propriedades algébricas da transformação bilinear, efetua-se a seguinte substituição:

$$s = \sigma + j\Omega \quad \rightarrow \quad z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}$$

4.2 Projeto de filtros RII discretos a partir de filtros contínuos: transformação bilinear

Prosseguindo,

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}(\sigma + j\Omega)}{1 - \frac{T}{2}(\sigma + j\Omega)} \Rightarrow z = \frac{1 + \sigma \frac{T}{2} + \frac{j\Omega T}{2}}{1 - \sigma \frac{T}{2} - \frac{j\Omega T}{2}}$$

Como

$$z = |z|e^{j\Omega},$$

Pode-se concluir que:

- se $\sigma < 0$, $|z| < 1 \quad \forall \Omega$
- se $\sigma > 0$, $|z| > 1 \quad \forall \Omega$

Portanto, se um polo de $H_c(s)$ estiver no semi-plano esquerdo em s , sua imagem no plano z estará no interior do círculo unitário, ou seja, filtros causais estáveis no domínio contínuo serão também estáveis no domínio discreto.

4.2 Projeto de filtros RII discretos a partir de filtros contínuos: transformação bilinear

Para o estudo do efeito de distorção na transformação de frequências contínuas para discretas, façamos a substituição $s = j\omega$ na equação da transformação bilinear:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}(j\omega)}{1 - \frac{T}{2}(j\omega)} \Rightarrow |z| = 1 = e^{j\omega}. \text{ Portanto, } e^{j\omega} = \frac{1 + \frac{T}{2}(j\omega)}{1 - \frac{T}{2}(j\omega)}$$

A relação entre ω e Ω é encontrada a partir da equação $s = \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$ para $z = e^{j\omega}$:

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \right) = \frac{2}{T} \left[\frac{e^{-\frac{j\omega}{2}} \left(e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{-\frac{j\omega}{2}} \right)}{e^{-\frac{j\omega}{2}} \left(e^{\frac{j\omega}{2}} + e^{-\frac{j\omega}{2}} \right)} \right] = \frac{2j \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{2} \right)}{T \cos \left(\frac{\omega}{2} \right)} = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right)$$

4.2 Projeto de filtros RII discretos a partir de filtros contínuos: transformação bilinear

Continuando, como $s = \sigma + j\Omega$, igualam-se as partes real e imaginária:

$$\sigma + j\Omega = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right)$$

Conclui-se imediatamente que $\sigma = 0$ e

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right) \Rightarrow \frac{\Omega T}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right) \Rightarrow \omega = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\Omega T}{2} \right)$$

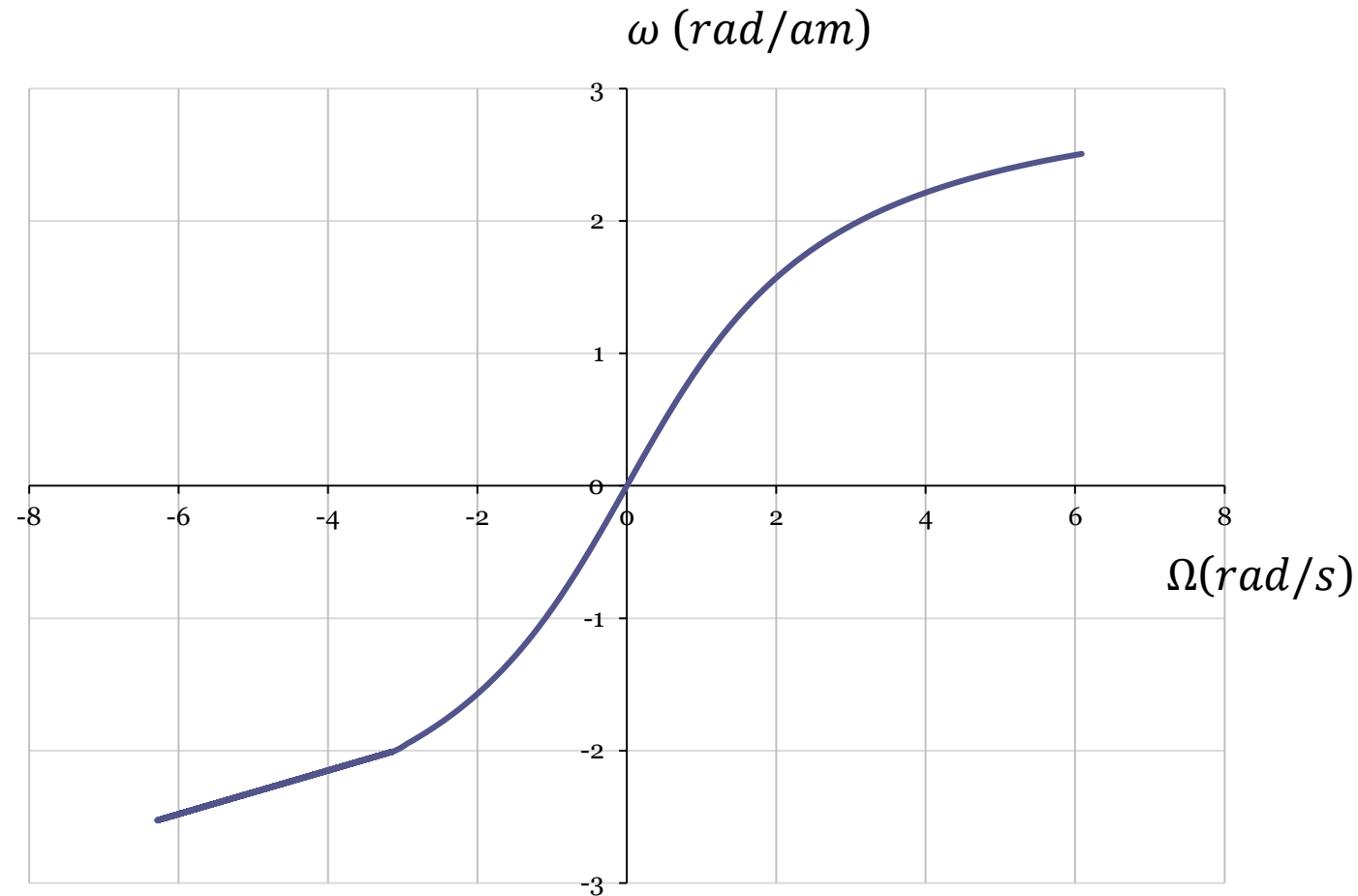
Observa-se que, para Ω “pequeno”, $\operatorname{tg} \left(\frac{\Omega T}{2} \right) \approx \frac{\Omega T}{2}$ e

$$\omega \approx 2 \frac{\Omega T}{2} \Rightarrow \omega \approx \Omega T$$

Portanto, para baixas frequências ou taxas de amostragem elevadas (lembrar que $f_a = 1/T$), a relação entre as frequências discreta e contínua é linear e a distorção devido à discretização pode ser considerada desprezível.

4.2 Projeto de filtros RII discretos a partir de filtros contínuos: transformação bilinear

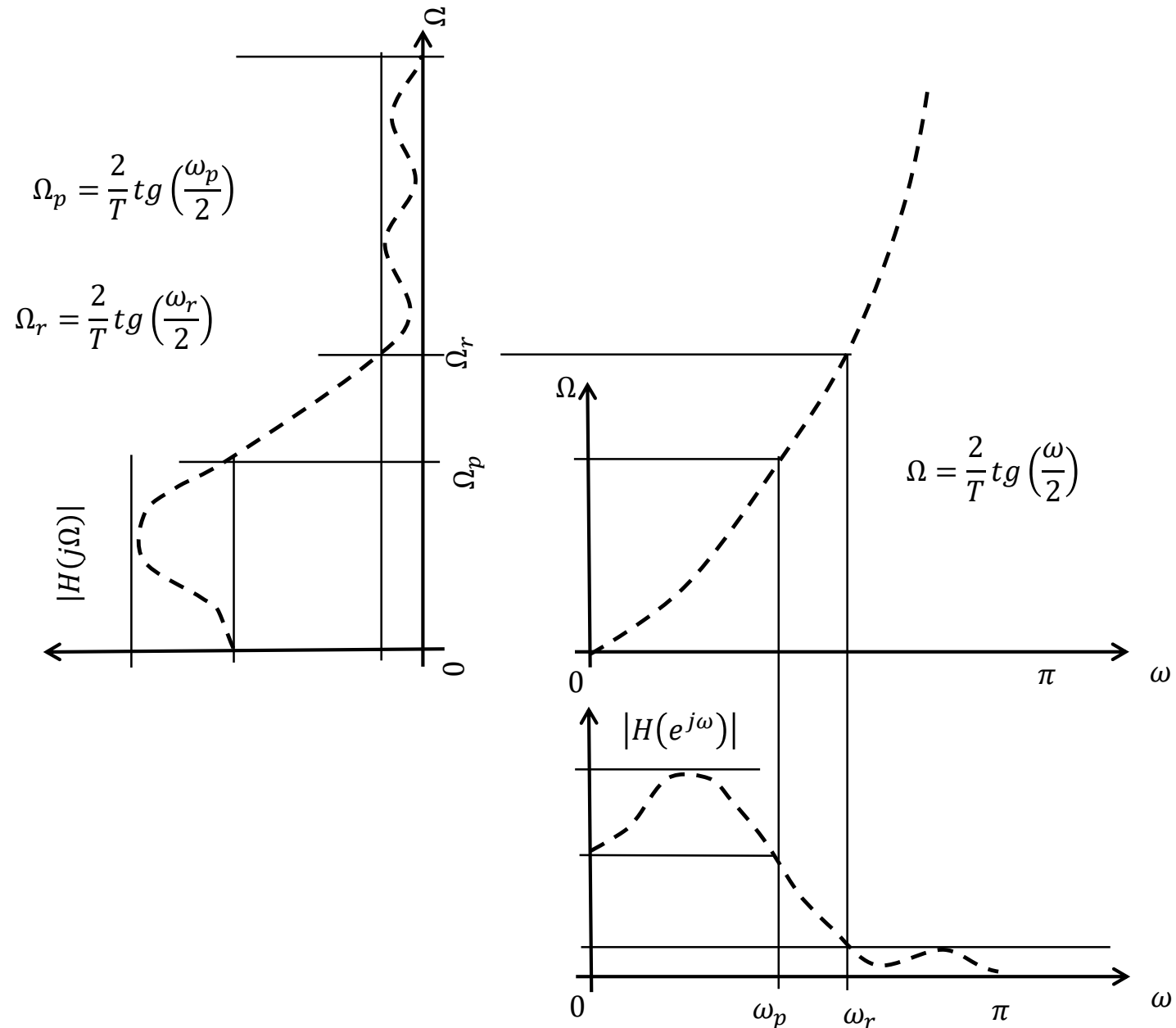
Um exemplo da distorção introduzida por essa transformação com $T = 1 \text{ s/am}$ é mostrado no gráfico a seguir:



4.2 (cont.)

Na figura ao lado observa-se a distorção causada pela transformação bilinear quando um filtro projetado no domínio contínuo é discretizado.

No entanto, se as frequências críticas no domínio contínuo forem previamente distorcidas através da eq. $\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right)$, quando o filtro no domínio contínuo for discretizado por meio da eq. $H(z) = H_c \left(\frac{2}{T_d} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right)$, o filtro discreto irá atender às especificações.



5. Projeto de filtros RII discretos

Para lembrar (filtros contínuos, aulas do Prof. Flavius): filtro Butterworth

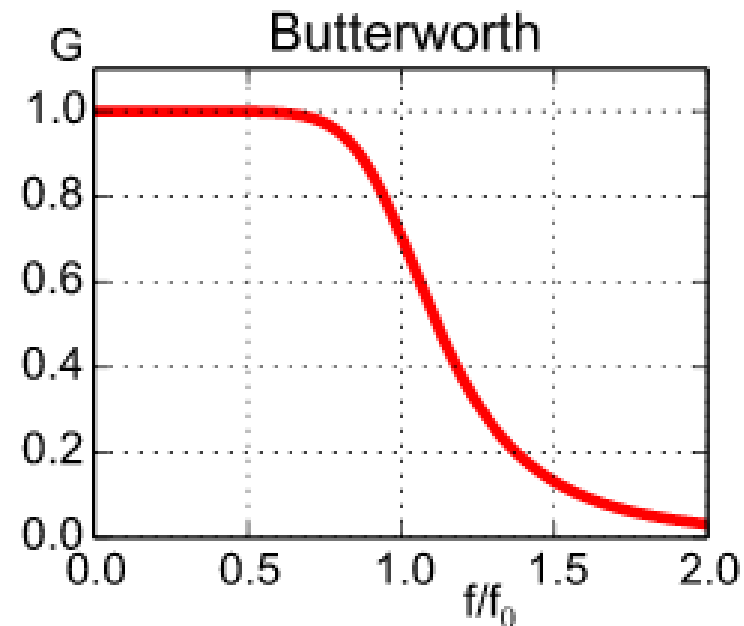
A magnitude de sua resposta em frequência (ganho do filtro) é dada por:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}}}$$

onde n é a ordem do filtro e Ω_p a frequência de canto (banda passante).

As principais características desse filtro, são:

- Zona de transição relativamente longa
- Não apresenta ondulações na banda passante
- Distorção de fase moderada
- Quando $n \rightarrow \infty$, $|H(j\Omega)| \rightarrow \text{Rect}\left(\frac{\Omega_c}{2}\right)$
- Atenuação: 20dB/década
- Pode ser implementado analógica ou digitalmente



5. Projeto de filtros RII discretos

Para lembrar (filtros contínuos, aulas do Prof. Flavius): filtro Chebyshev tipo 1

O ganho desse filtro é dado por

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left\{ T_N \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right) \right\}^2}}$$

onde $|\varepsilon| < 1$ e $T_n(x)$ é um polinômio de Chebyshev de n-ésima ordem

Para $0 \leq \omega \leq \omega_c$ tem-se:

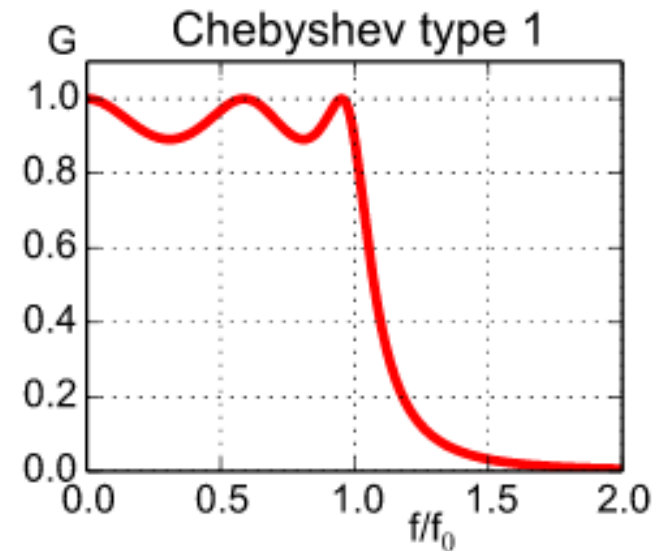
$$T_N \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right) = \cos \left[N \cdot \cos^{-1} \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right) \right]$$

Para $\Omega > \Omega_c$ tem-se:

$$T_N \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right) = \frac{\left\{ \frac{\Omega}{\Omega_c} \sqrt{\left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2 - 1} \right\}^n + \left\{ \frac{\Omega}{\Omega_c} \sqrt{\left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2 - 1} \right\}^{-n}}{2}$$

Características:

- Ondulação na banda de passagem
- Zona de transição mais estreita se comparado com o filtro Butterworth



5. Projeto de filtros RII discretos

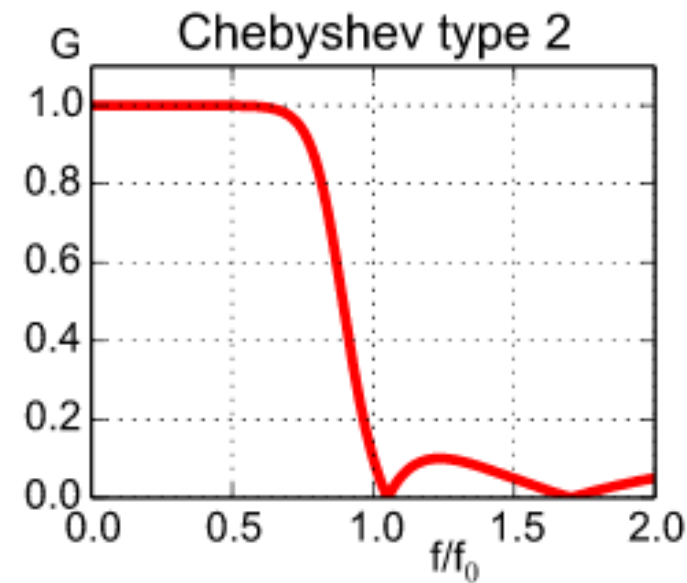
Para lembrar (filtros contínuos, aulas do Prof. Flavius): filtro Chebyshev tipo 2

O ganho desse filtro é dado por:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2 \left\{ T_n \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right) \right\}^2}}}$$

Características

- Ondulação na banda de rejeição
- Distorção de fase mais acentuada que o tipo 1



5. Projeto de filtros RII discretos

Para lembrar (filtros contínuos, aulas do Prof. Flavius): filtro elíptico

O ganho desse filtro é dado por:

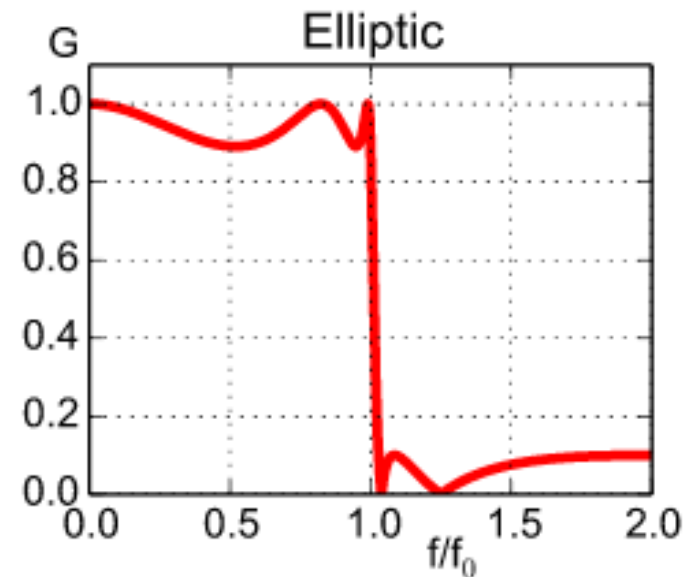
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 R_n^2\left(\xi, \frac{\omega}{\omega_c}\right)}}$$

onde R_n é uma função elíptica racional, ω_c é a frequência de canto, ϵ é o fator de ondulação e ξ é o fator de seletividade.

Características:

- fator de ondulação idêntico nas bandas passante e rejeitada;
- o fator de ondulação especifica a ondulação na banda passante;
- combinados, os fatores de ondulação e de seletividade especificam a banda rejeitada.

- o ganho na banda passante varia entre 1 e $\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$
- quando $\xi \rightarrow \infty$, o filtro elíptico tende ao filtro de Chebyshev de 1ª. ordem com fator de ondulação ϵ
- outros limites nos parâmetros levam o filtro elíptico a tender para os filtros de Chebyshev e Butterworth.



6. Projeto de filtros RII discretos por meio da transformação bilinear

Premissa básica para o projeto de filtros discretos a partir de filtros contínuos:

os filtros discretos devem manter as mesmas características de resposta em frequência que os seus homólogos contínuos.

6. Projeto de filtros RII discretos por meio da transformação bilinear

Para compensar a relação não-linear (distorção) entre as frequências após a aplicação da transformação bilinear para o projeto de um filtro discreto, deve-se efetuar as seguintes etapas:

1. utilizando a eq. $\omega = 2 \arctg\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$, as frequências discretas de banda passante, ω_p e de banda rejeitada ω_r são transformadas em seus pares analógicos Ω_p e Ω_r . Ressalta-se que as amplitudes especificadas em ambas as bandas permanece inalterada. Somente as frequências são transformadas;
2. utilizando as frequências analógicas obtidas na etapa 1 e as amplitudes discretas especificadas, projeta-se um filtro analógico que satisfaça a essas especificações;
3. em seguida aplica-se a transformação bilinear ao filtro analógico projetado na etapa 2 para obter o filtro discreto conforme especificado.

6.1 Projeto de filtros Butterworth RII passa-baixas discretos por meio da transformação bilinear

Vamos supor que as especificações do filtro discreto sejam as seguintes:

- ganho entre 0 e -1 dB na banda passante, de 0 a $0,2\pi$;
- atenuação de pelo menos -15 dB na banda rejeitada, de $0,3\pi$ a π

Essas especificações correspondem a

$$0,89125 \leq |H_d(e^{j\omega})| \leq 1 \text{ para } 0 \leq \omega \leq 0,2\pi$$

$$|H_d(e^{j\omega})| \leq 0,17783 \text{ para } 0,3\pi \leq \omega \leq \pi$$

Para que a resposta em frequência $|H(j\Omega)|$ no domínio contínuo não seja distorcida, vamos pré-distorcer as frequências de interesse:

$$0,89125 \leq |H(j\Omega)| \leq 1 \text{ para } 0 \leq \Omega \leq \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{0,2\pi}{2}\right)$$

$$|H(j\Omega)| \leq 0,17783 \text{ para } \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{0,3\pi}{2}\right) \leq \Omega < \infty$$

Supondo o período de amostragem $T = \frac{1s}{\text{amostra}}$, e levando em conta que o filtro Butterworth possui resposta monotônica, é possível escrever

$$|H(j2 \operatorname{tg}(0,1\pi))| \geq 0,89125 \quad (1)$$

$$|H(j2 \operatorname{tg}(0,3\pi))| \leq 0,17783 \quad (2)$$

6.1 Projeto de filtros Butterworth RII passa-baixas discretos por meio da transformação bilinear

A amplitude da resposta em frequência para o filtro Butterworth com freq. de corte Ω_c (ganho -3 dB) é;

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \quad (3)$$

As eqs. (1-3) devem agora ser resolvidas para Ω_c e N :

$$1 + \left(\frac{2 \operatorname{tg}(0,1 \pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0,89}\right)^2 \quad (4)$$

$$1 + \left(\frac{2 \operatorname{tg}(0,15\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0,178}\right)^2 \quad (5)$$

$$0,937 > 0,89$$

$$0,17758 \approx 0,178$$

Portanto,
especificações
atendidas

$$N = \frac{\log \left[\frac{\left(\left(\frac{1}{0,178} \right)^2 - 1 \right)}{\left(\left(\frac{1}{0,189} \right)^2 - 1 \right)} \right]}{2 \log \left(\frac{\operatorname{tg}(0,15\pi)}{\operatorname{tg}(0,1\pi)} \right)} \approx 5,305$$

Como N deve ser um número inteiro, seleciona-se $N = 6$ que, substituído na eq. (2) fornece como resultado $\Omega_c \approx 0,766$.

O próximo passo é verificar se os valores das duas frequências críticas irão atender às especificações do filtro discreto, equações, (1) e (2). Para isso, substitui-se os valores de N e Ω_c nas eqs. (4) e (5)

6.1 Projeto de filtros Butterworth RII passa-baixas discretos por meio da transformação bilinear

Os polos da função de transferência do filtro no domínio contínuo com a frequência de corte Ω_c e a ordem do filtro N são obtidos igualando-se o denominador de

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

a zero:

$$1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{12} = 0 \Rightarrow \Omega^{12} = -1\Omega_c^{12} \Rightarrow \Omega^{12} + \Omega_c^{12} = 0$$

$$\Omega^{12} + 0,766^{12} = 0 \Rightarrow \Omega^{12} + 0,0408 = 0$$

$$-0,74 \pm j0,2$$

$$-0,54 \pm j0,54$$

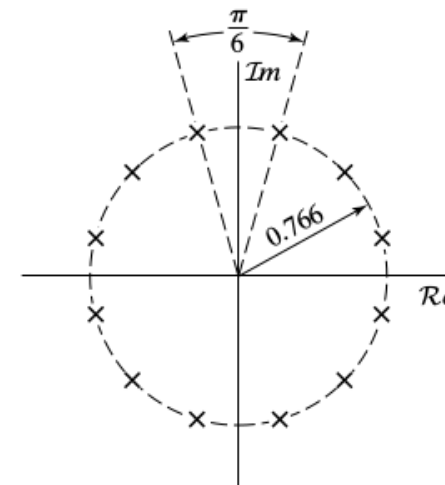
$$-0,2 \pm j0,74$$

$$\Rightarrow \Omega = \begin{matrix} 0,2 \pm j0,74 \\ 0,54 \pm j0,54 \\ 0,74 \pm j0,2 \end{matrix}$$

$$0,54 \pm j0,54$$

$$0,74 \pm j0,2$$

Nota-se que todos os polos estão distribuídos igualmente ao redor da circunferência de raio 0,766, que é o seu módulo.



A função de transferência contínua obtida utilizando os polos do semiplano esquerdo do plano complexo é dada por:

$$H(s) = \frac{0,202}{(s^2 + 0,4s + 0,59)(s^2 + 1,08s + 0,59)(s^2 + 1,49s + 0,59)}$$

6.1 Projeto de filtros Butterworth RII passa-baixas discretos por meio da transformação bilinear

Utiliza-se agora a transformação bilinear para converter a função de transferência contínua para o domínio discreto, Com $T = 1s/\text{amostra}$,

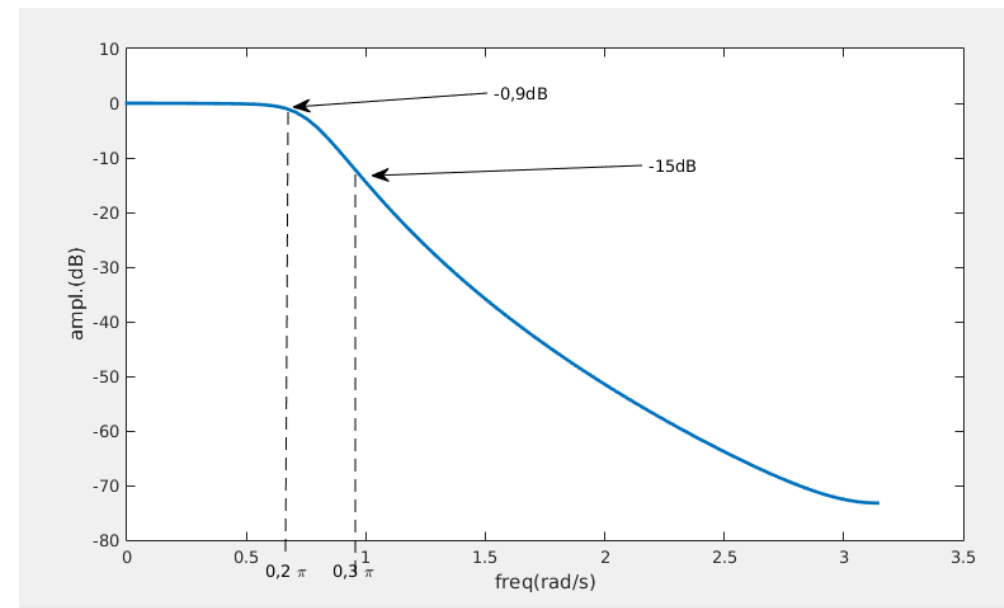
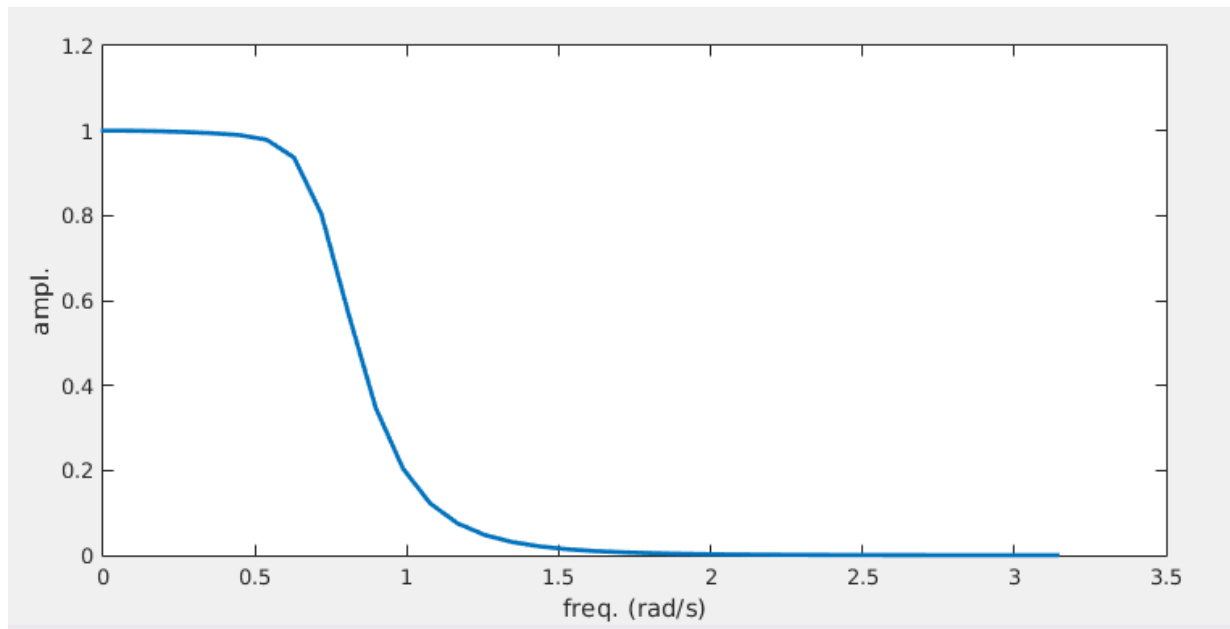
$$H(z) = \frac{7,74 \cdot 10^{-4} (1 + z^{-1})^6}{(1 - 1,27z^{-1} + 0,71z^{-2})(1 - 1,01z^{-1} + 0,36z^{-2})(1 - 0,90z^{-1} + 0,22z^{-2})},$$

ou

$$H(z) = \frac{1,8 \cdot 10^{-4} z^5 + 6,7 \cdot 10^{-3} z^4 + 2,3 \cdot 10^{-2} z^3 + 1,48 \cdot 10^{-2} z^2 + 1,86 \cdot 10^{-3} z + 2,19 \cdot 10^{-5}}{z^6 - 3,14z^5 + 4,51z^4 - 3,65z^3 + 1,73z^2 - 0,46z + 5,16 \cdot 10^{-2}}$$

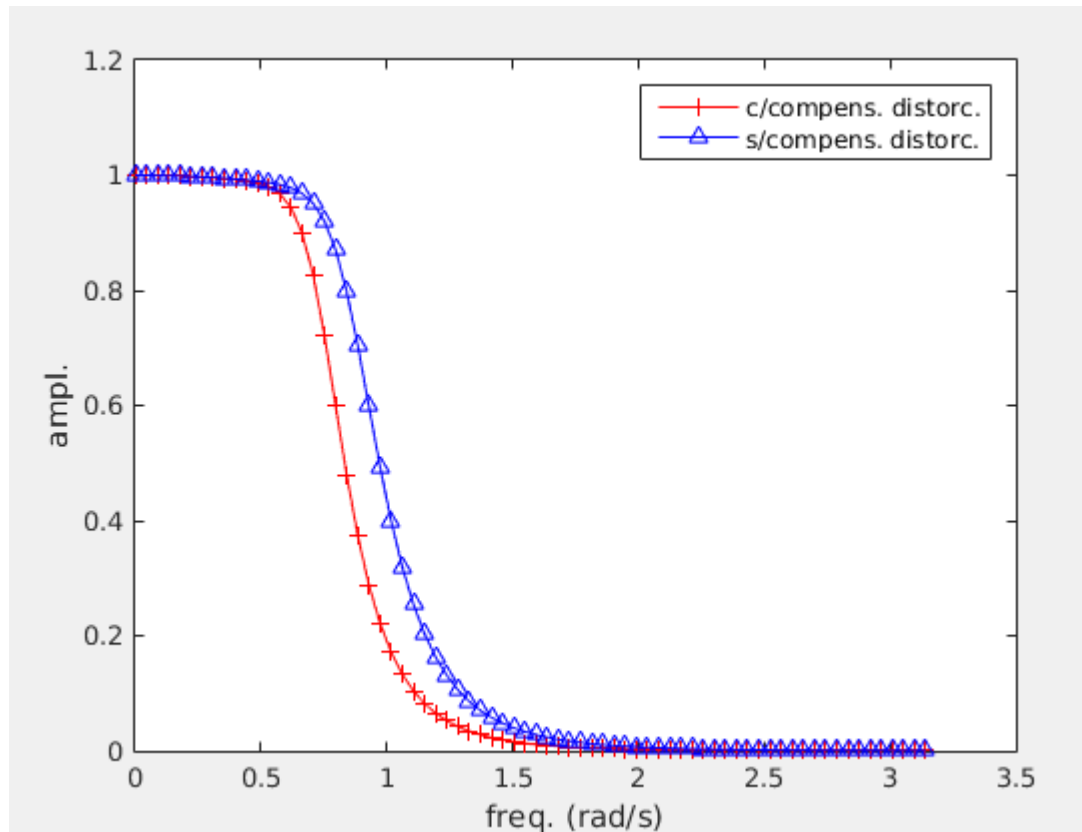
6.1 Projeto de filtros Butterworth RII passa-baixas discretos por meio da transformação bilinear

A resposta em frequência é mostrada nos gráficos abaixo:



6.1 Projeto de filtros Butterworth RII passa-baixas discretos por meio da transformação bilinear

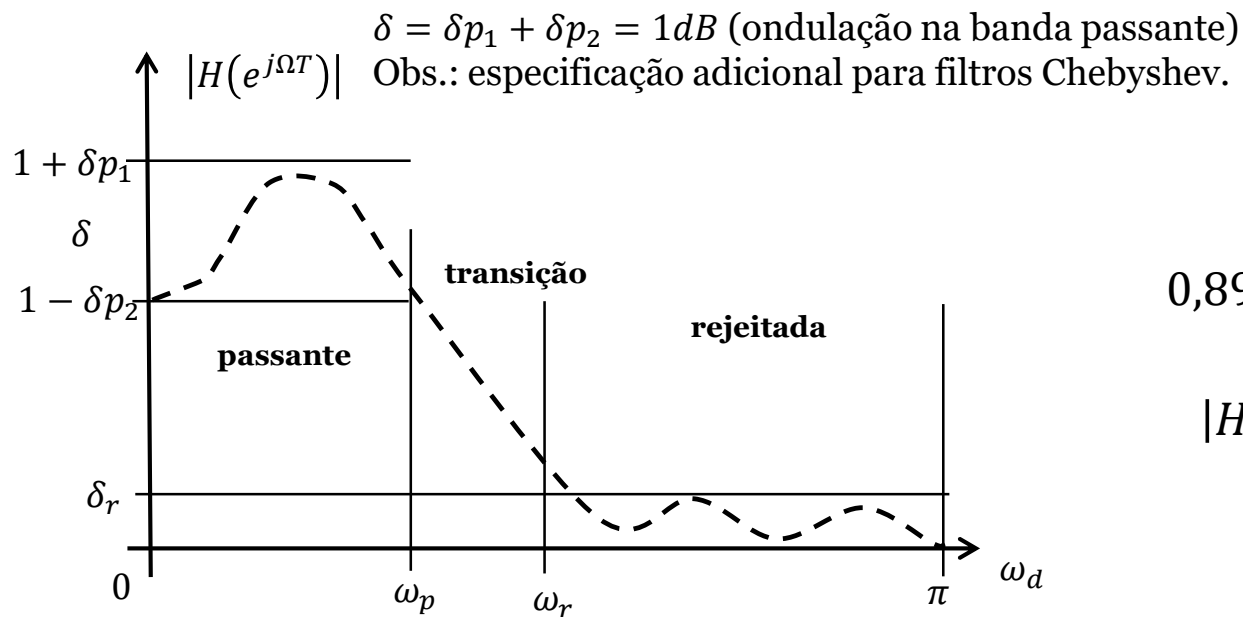
Aqui uma comparação das respostas do filtro com e sem compensação de distorção



$$N = 5,305 \rightarrow 6$$
$$\Omega_c = 0,766$$

$$N = 5,886 \rightarrow 6$$
$$\Omega_c = 0,894$$

6.2 Projeto de filtros passa-baixas RII discretos Chebyshev tipos 1/2 e elípticos por meio da transformação bilinear



Vamos mostrar a dificuldade projetando um filtro passa-baixas de Chebyshev tipo 1 para as mesmas especificações do filtro Butterworth anteriormente projetado.

$$0,89125 \leq |H(j\Omega)| \leq 1 \text{ para } 0 \leq \Omega \leq \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{0,2\pi}{2}\right)$$

$$|H(j\Omega)| \leq 0,17783 \text{ para } \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{0,3\pi}{2}\right) \leq \Omega < \infty$$

$$|H(j2 \operatorname{tg}(0,1\pi))| = 0,89125 = \Omega p \quad (1)$$

$$|H(j2 \operatorname{tg}(0,3 \pi))| = 0,17783 = \Omega_r \quad (2)$$

Cálculo da ordem do filtro (ordem do polinômio de Chebyshev:

(a) fator de ondulação ϵ a partir da especificação de δ :

$$10 \log_{10}(1 + \epsilon^2) = \delta = 1dB \Rightarrow (1 + \epsilon^2) = 1,122 \Rightarrow \epsilon = 0,5088$$

6.2 Projeto de filtros passa-baixas RII discretos Chebyshev tipos 1/2 e elípticos por meio da transformação bilinear

(b) calcula-se o parâmetro A , que é função de um fator de atenuação da banda rejeitada, Ω_r/Ω_p . Como é especificado ganho máximo de $-15dB$ nessa banda, da expressão

$$20 \log_{10} \left(\frac{1}{A} \right) = -15 \Rightarrow A = 5,6234$$

(c) em $\Omega = \Omega_r$, utiliza-se o parâmetro A para obter N :

$$A = \sqrt{1 + \epsilon^2 T_N^2 \left(\frac{\Omega_r}{\Omega_p} \right)} \Rightarrow T_N \left(\frac{\Omega_r}{\Omega_p} \right) = \cosh \left(N \cosh^{-1} \left(\frac{\Omega_r}{\Omega_p} \right) \right) = \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\epsilon^2}}$$

Finalmente, N é o menor número inteiro positivo para o qual

$$N \geq \frac{\cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{A^2 - 1}{\epsilon^2}} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{\Omega_r}{\Omega_p} \right)} = 3,198 \rightarrow N = 4$$

6.2 Projeto de filtros passa-baixas RII discretos Chebyshev tipos 1/2 e elípticos por meio da transformação bilinear

(d) calculam-se os polos do semi-plano esquerdo de $|H_{c1}|^2$ ($H_{c1} \equiv$ função de transferência do filtro Chebyshev de 1a. ordem) a partir das expressões

$$\sigma_k = -\sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2N} \right] \sinh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right] \quad \text{parte real}$$

$$\Omega_k = \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2N} \right] \cosh \left[\frac{1}{N} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right], \quad \text{parte imaginária} \quad \text{para } 1 \leq k \leq 2N$$

São de interesse apenas os polos do semi-plano esquerdo. Portanto, as expressões acima serão calculadas para $1 \leq k \leq N$:

6.2 Projeto de filtros passa-baixas RII discretos Chebyshev tipos 1/2 e elípticos por meio da transformação bilinear

(d) continuação

$$\sigma_1 = -\operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{8} \right] \sinh \left[\frac{1}{4} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{0,51} \right) \right] = -0,1395$$

$$\Omega_k = \cos \left[\frac{\pi}{8} \right] \cosh \left[\frac{1}{4} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{0,51} \right) \right] = 0,9834$$

Procedendo sucessivamente até $k=4$,
os polos obtidos são:

$$\begin{aligned} s_1 &= -0,1395 + j0,9834 \\ s_2 &= -0,1395 - j0,9834 \\ s_3 &= -0,3369 + j0,4073 \\ s_4 &= -0,3369 - j0,4073 \end{aligned}$$

(e) polinômios de Chebyshev para $\Omega_p = 0,9834$ e para $\Omega_r = 0,4073$:

$$T_4 \left(\frac{\Omega = 2 \operatorname{tg} 0,1\pi = 0,89}{\Omega_p = 0,98} \right) = \cos \left[N \cos^{-1} \left(\frac{0,89}{0,98} \right) \right] = -0,1736$$

$$|H(j0,98)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left\{ T_4 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p} \right) \right\}^2}} = 0,99 \Rightarrow 0,89 < 0,99 < 1 \quad \checkmark$$

$$T_4 \left(\frac{\Omega = 0,17}{\Omega_r = 0,41} \right) = \frac{\left\{ \frac{0,17}{0,41} \sqrt{\left(\frac{0,17}{0,41} \right)^2 - 1} \right\}^4 + \left\{ \frac{0,17}{0,41} \sqrt{\left(\frac{0,17}{0,41} \right)^2 - 1} \right\}^{-4}}{2}$$

$$|H(j0,41)| = 0,0079 < 0,1778 \quad \checkmark$$

6.2 Projeto de filtros passa-baixas RII discretos Chebyshev tipos 1/2 e elípticos por meio da transformação bilinear

(f) monta-se a função de transferência contínua:

$$H_C(s) = \frac{(-s_1)(-s_2)(-s_3)(-s_4)}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}$$

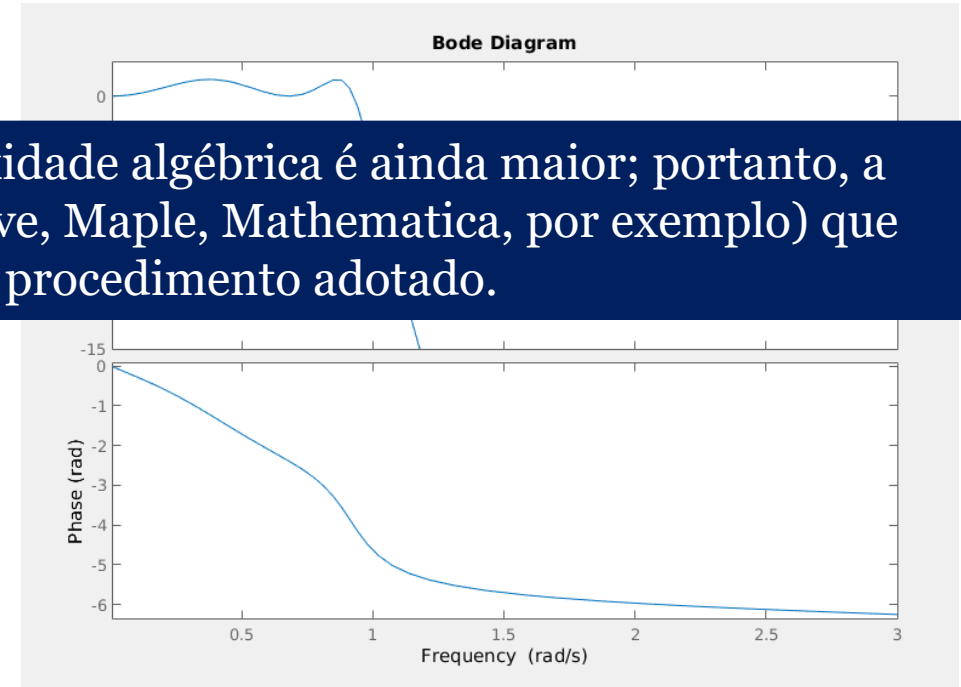
$$H_C(s) = \frac{0,2756}{s^4 + 0,95s^3 + 1,46s^2 + 0,74s + 0,28}$$

Para os filtros de Chebyshev de 2a. ordem e elípticos, a complexidade algébrica é ainda maior; portanto, a utilização de ferramentas computacionais (Scilab, Matlab, Octave, Maple, Mathematica, por exemplo) que possuem as funções adequadas para o projeto é normalmente o procedimento adotado.

$$H_c(z) = \frac{10^{-3}(8,83z^4 + 35,3z^3 + 53,0z^2 + 35,3z + 8,83)}{z^4 - 2,41z^3 + 2,76z^2 - 1,62z + 0,42}$$

(h) converte-se a função de transferência discreta em uma equação de diferenças aplicando a transformada Z inversa;

(i) aplica-se o filtro ao sinal desejado.



6.3 Projeto de outros filtros de frequência seletiva: passa-alta, passa-banda e rejeita-banda

- O projeto destes filtros é efetuado a partir de transformações aplicadas a um protótipo de filtro passa-baixa discreto;
 - tais transformações são bastante semelhantes à bilinear utilizada para o projeto de filtros passa-baixa discretos a partir de seus análogos contínuos;
 - o procedimento é explicado a seguir.
-
- Vamos supor que $H_{pb}(Z)$ seja um filtro passa-baixa na forma de uma função racional de um sistema causal estável no domínio atual Z ;
 - queremos mapear essa função para um domínio z como um filtro passa-baixa, passa-alta, passa-banda ou rejeita-banda;
 - a transformação entre os dois domínios discretos é assim definida:

$$Z^{-1} = H_{pb}(Z) \Big|_{Z^{-1}} = G(z^{-1})$$

6.3 Projeto de outros filtros de frequência seletiva: passa-alta, passa-banda e rejeita-banda

Sejam

$$Z = e^{j\theta} \text{ e } z = e^{j\omega}$$

Para que o círculo unitário em Z seja mapeado para o círculo unitário em z , é necessário que

$$e^{-j\theta} = |G(e^{-j\omega})| e^{j\angle G(e^{-j\omega})} \Rightarrow -j\theta = j\angle G(e^{-j\omega})$$

Como

$$|G(e^{-j\omega})| = 1, \text{ então } -\theta = \angle G(e^{-j\omega}).$$

Prova-se que (Constantinides, 1970) do tipo

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}, \quad \alpha_k < 1 \quad (6.3.1)$$

apresentam estas características.

6.3 Projeto de outros filtros de frequência seletiva: passa-alta, passa-banda e rejeita-banda

Através da escolha de valores apropriados para os parâmetros N e α_k , várias transformações podem ser obtidas. A mais simples delas é a que mapeia um filtro passa-baixas em outro filtro da mesma natureza, porém com características de frequência distintas. Para este caso,

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (6.3.2)$$

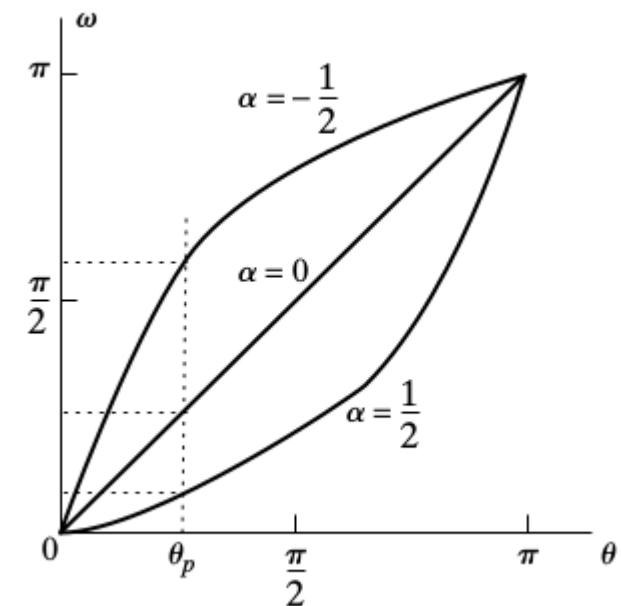
Substituindo-se $Z = e^{j\theta}$ e $z = e^{j\omega}$ em 6.3.1 obtém-se

$$e^{-j\theta} = \frac{e^{-j\omega} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \Rightarrow \omega = \arctg \left[\frac{(1 - \alpha^2) \sin \theta}{(2\alpha + (1 + \alpha^2) \cos \theta)} \right] \quad (6.3.3)$$

Por outro lado, resolvendo para α em termos de ω_p e θ_p obtém-se

$$\alpha = \frac{\sin \left[\frac{(\theta_p - \omega_p)}{2} \right]}{\sin \left[\frac{(\theta_p + \omega_p)}{2} \right]}$$

Percebe-se que a transformação provoca alguma distorção na frequência, conforme mostrado na figura a seguir, obtida com a variação do parâmetro α em 6.3.3



6.3 Projeto de outros filtros de frequência seletiva

tipo de filtro	transformação	equações de suporte ao projeto
passa-baixa	$Z^{-1} = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)} \quad \omega_p = \text{nova freq. corte}$
passa-alta	$Z^{-1} = -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)} \quad \omega_p = \text{nova freq. corte}$
passa-banda	$Z^{-1} = -\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{p_2} + \omega_{p_1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p_2} - \omega_{p_1}}{2}\right)} \quad k = \cotg\left(\frac{\omega_{p_2} + \omega_{p_1}}{2}\right) \tg\left(\frac{\theta_p}{2}\right)$ $\omega_{p_1} = \text{nova freq. inferior corte}$ $\omega_{p_2} = \text{nova freq. superior corte}$
rejeita-banda	$Z^{-1} = -\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k}z^{-1} + \frac{1-k}{k+1}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k}z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{p_2} + \omega_{p_1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p_2} - \omega_{p_1}}{2}\right)} \quad k = \tg\left(\frac{\omega_{p_2} - \omega_{p_1}}{2}\right) \tg\left(\frac{\theta_p}{2}\right)$ $\omega_{p_1} = \text{nova freq. inferior corte}$ $\omega_{p_2} = \text{nova freq. superior corte}$

6.3 Projeto de outros filtros de frequência seletiva: passa-alta, passa-banda e rejeita-banda

Como utilizar a tabela:

por exemplo, dado um filtro passa-baixa $H_{pb}(Z)$ com frequência de corte θ_p , desejando-se transformá-lo em um outro filtro, $H(z)$, utiliza-se a equação 6.3.4 para obter α e, em seguida, calcular

$$H(z) = H_{pb}(Z) \Big|_{Z^{-1} = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}}$$

Exemplo: é dada a função de transferência de um filtro passa-baixa Chebyshev tipo 1 de 4a. ordem,

$$H(Z) = \frac{18,36 \cdot 10^{-4} (1 + Z^{-1})^4}{(1 - 1,448Z^{-1} + 0,6493Z^{-2})(1 - 1,4996Z^{-1} + 0,8482Z^{-2})}$$

especificado para

$$0,89125 \leq |H_{pb}(e^{j\theta})| \leq 1 \text{ para } 0 \leq \theta \leq 0,2\pi$$

$$|H_{pb}(e^{j\theta})| \leq 0,17783 \text{ para } 0,3\pi \leq \theta \leq \pi$$

Deseja-se convertê-lo para um filtro Chebyshev passa-alta de 4a. ordem com freq. de corte $\omega_p = 0,6\pi$.

Solução: da tabela,

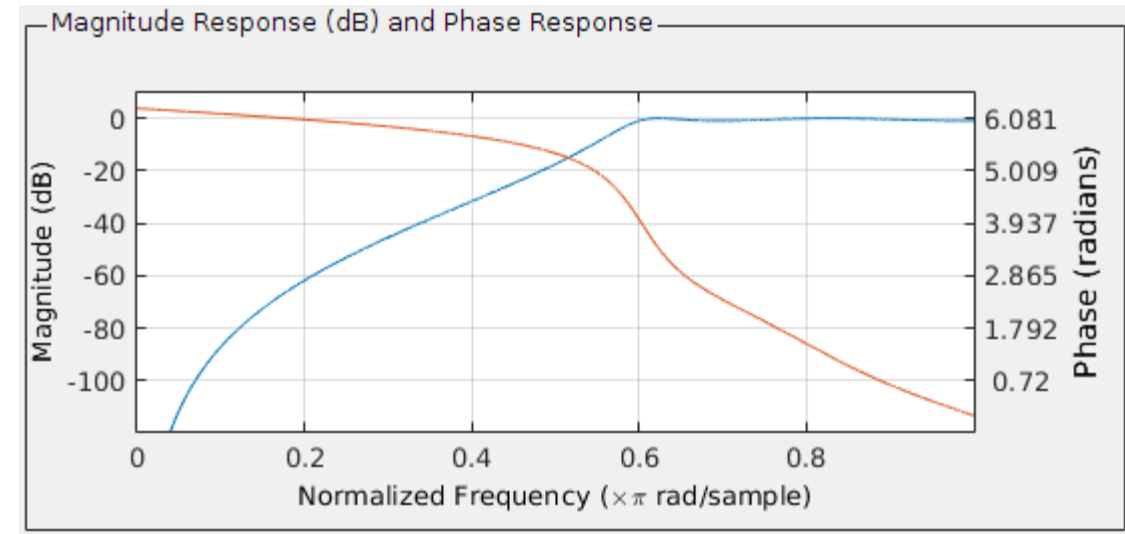
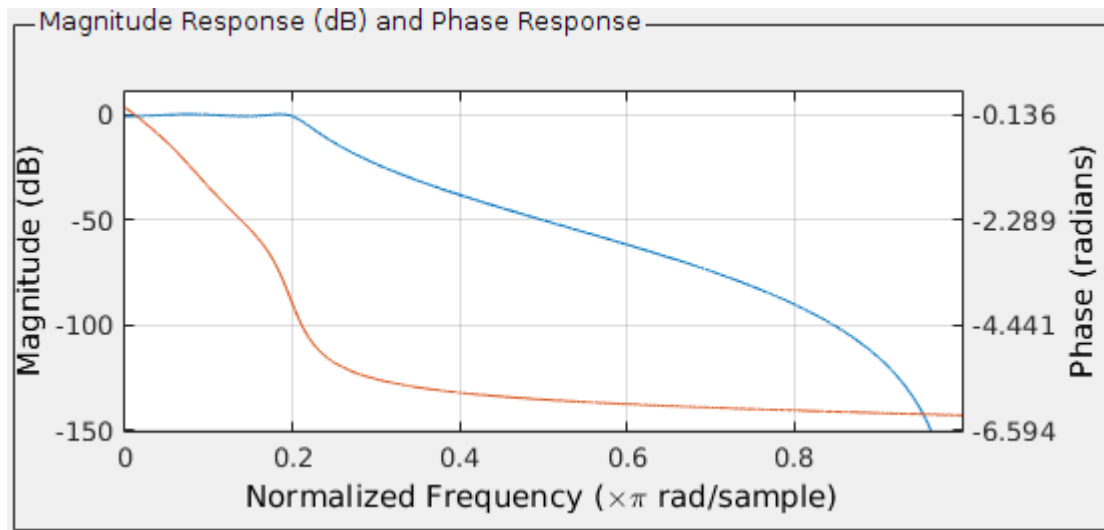
$$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{0,2\pi + 0,6\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{0,2\pi - 0,6\pi}{2}\right)} = -0,38197.$$

Novamente, da tabela 1,

$$\begin{aligned} H(z) &= H_{pb}(Z) \Big|_{Z^{-1} = \frac{z^{-1} - 0,38197}{1 - 0,38197z^{-1}}} = \\ &= \frac{24,26 \cdot 10^{-2} (1 - z^{-1})^4}{(1 + 1,0416z^{-1} + 0,4019z^{-2})(1 + 0,566z^{-1} + 0,7657z^{-2})} \end{aligned}$$

6.3 Projeto de outros filtros de frequência seletiva: passa-alta, passa-banda e rejeita-banda

Comparação entre as respostas dos 2 filtros



6.4 Projeto filtros de resposta finita ao impulso (RFI)

- Contrariamente ao que ocorre com os filtros de RII, os filtros RFI são especificados diretamente no domínio discreto;
- isso ocorre pois não existe um conjunto extenso de bibliotecas de filtros RFI no domínio contínuo para que uma das transformações estudadas seja utilizada para convertê-los para o domínio discreto;
- em termos gerais, as vantagens dos filtros RFI são
 - estabilidade, pois todos os polos estão na origem do plano complexo;
 - possibilidade de manter a fase linear;
 - implementação eficiente, por aproximação direta às especificações em termos de resposta impulsiva ou em frequência do sistema discreto.
- sua desvantagem é, para as mesmas especificações, apresentar ordens maiores, requerendo maior capacidade de armazenamento e processamento.

O método mais simples para o projeto de filtros RFI é o *janelamento*. Inicia-se com a especificação de uma resposta em frequência do tipo

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_d(k) e^{-j\omega k}, \quad (6.4.1)$$

onde $h_d(k)$ é a sequência de resposta impulsiva. Por outro lado, $h_d(k)$, pode ser obtida a partir de $H_d(e^{j\omega})$ por

$$h_d(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega. \quad (6.4.2)$$

6.4 Projeto filtros de resposta finita ao impulso (RFI)

- Claramente, a eq. 6.4.1 não representa um filtro RFI, pois é não-causal e de dimensão infinita;
- para que o filtro representativo de $H_d(e^{j\omega})$ seja causal e finito, é necessário truncar a resposta impulsiva $h_d(k)$ por janelamento e, depois, atrasar o sinal truncado até obter a causalidade.

Na prática, isso equivale a definir $h_d(k)$ como um novo sistema com resposta

$$h(k) = h_d(k) \cdot w(k) = \begin{cases} h_d(k), & 0 \leq k \leq M \\ 0 & \text{nos demais pontos} \end{cases}$$

$$\text{com } w(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq M \\ 0 & \text{nos demais pontos} \end{cases}$$

$w(k)$ é uma **janela retangular** que causa o truncamento de $h_d(k)$. A resposta impulsiva de $h(k)$ possui transformada de Fourier dada pela convolução periódica entre a resposta em frequência desejada $H_d(e^{j\omega})$ e a transformada de Fourier da janela.

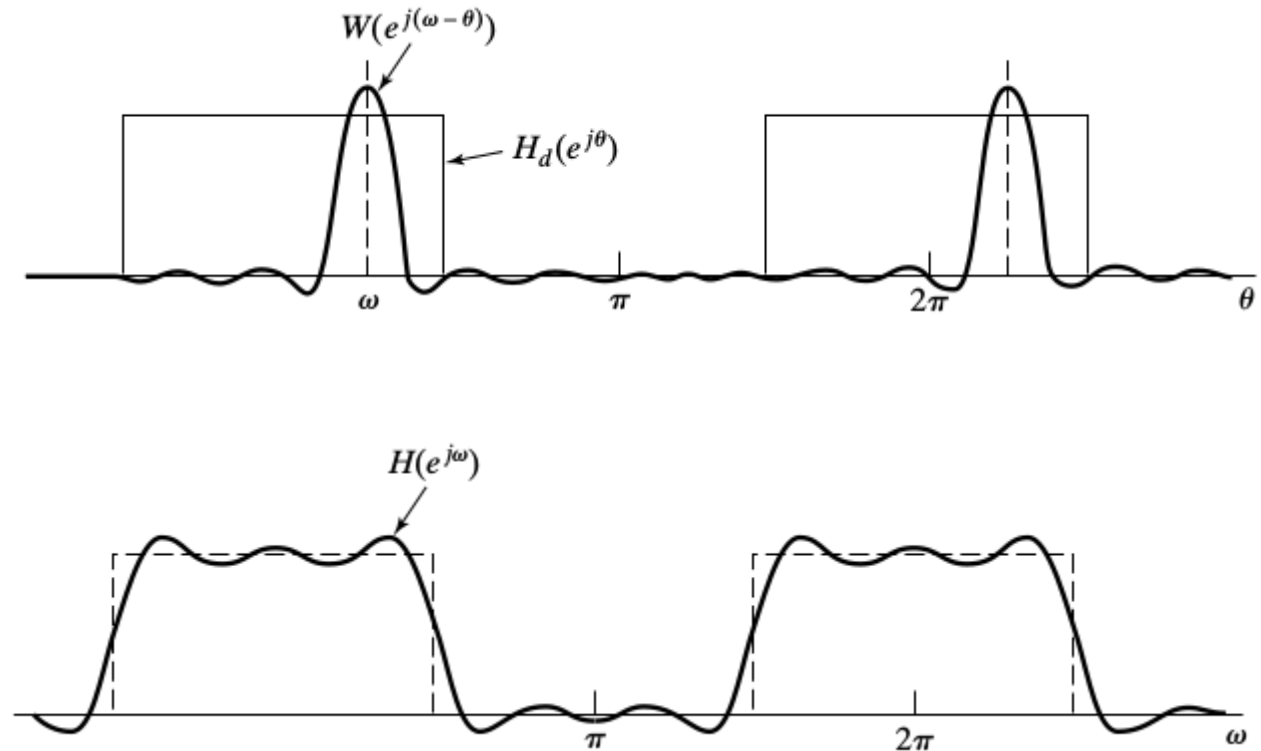
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (6.4.3)$$

Obs: utilizou-se o teorema da modulação ou janelamento

A operação de convolução descrita pela eq. 6.4.3 pode ser melhor entendida por meio do diagrama a seguir:

6.4 Projeto filtros de resposta finita ao impulso (RFI)

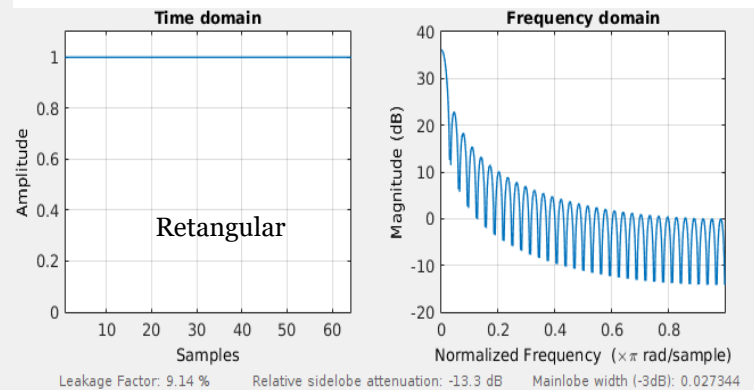
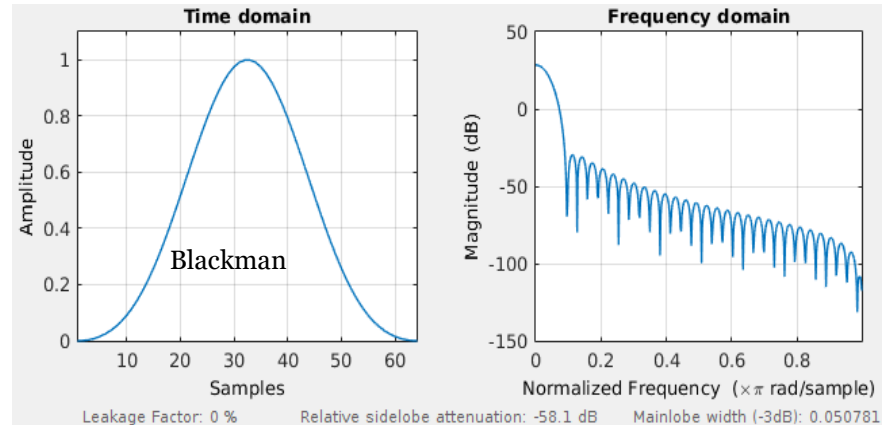
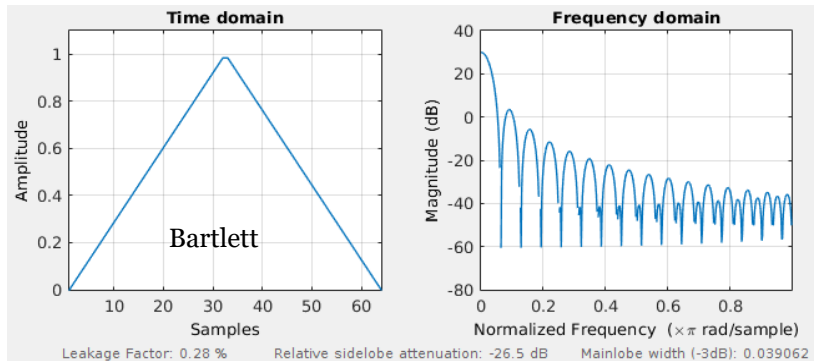
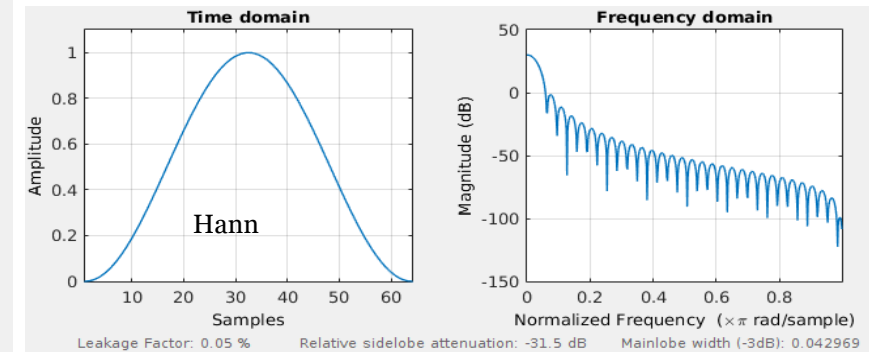
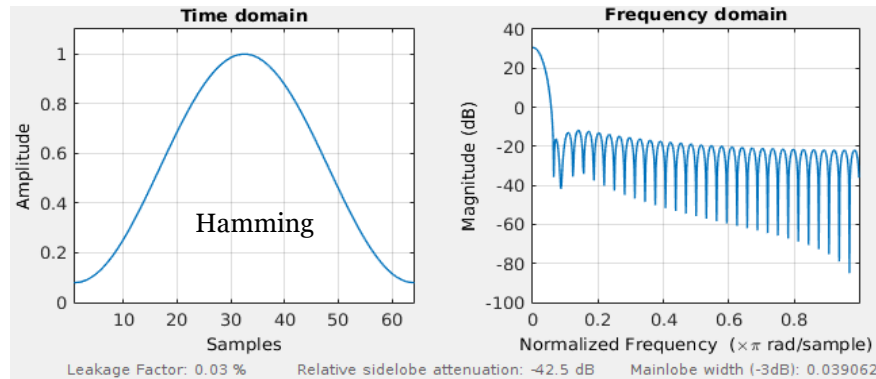
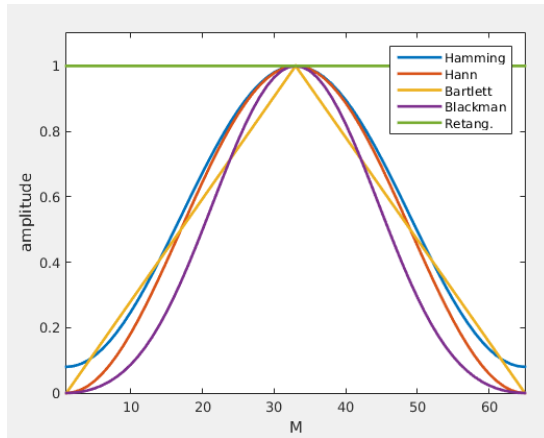
- Se $w(k) = 1, \forall k$, não há truncamento, $W(e^{j\omega})$ é um trem de impulsos de período 2π e $H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega})$;
- infe-re-se que, se $w(k)$ for escolhido de forma que $W(e^{j\omega})$ esteja concentrado em uma faixa estreita de frequências em torno de $\omega = 0$, ou seja, muito semelhante a um impulso ideal, $H(e^{j\omega}) \approx H_d(e^{j\omega})$;
- no entanto, para maximizar a eficiência computacional, o ideal seria que $w(k)$ fosse estreita, o que é conflitante com a condição ideal para $W(e^{j\omega})$;
- a transformada de Fourier para a janela retangular é



$$W(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^M e^{-j\omega k} = \frac{1 - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega M/2} \frac{\text{sen} \frac{\omega(M+1)}{2}}{\text{sen} \left(\frac{\omega}{2} \right)} \quad (6.4.4)$$

6.4 Projeto filtros de resposta finita ao impulso (RFI)

Algumas janelas normalmente utilizadas



6.4 Projeto filtros de resposta finita ao impulso (RFI)

Procedimento geral para o projeto de filtros RFI por janelamento

- Quando a resposta impulsiva desejada for

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases},$$

com fase linear dada por $\theta(\omega) = -\omega M/2$,

a resposta impulsiva será

$$h(k) = \frac{\sin\left[\omega_c\left(k - \frac{M}{2}\right)\right]}{\omega_c\left(\pi - \frac{M}{2}\right)}, \text{ para } k \neq \frac{M}{2}, \text{ e}$$

$$h(k) = \omega_c/\pi \quad \text{para } k = M/2 \text{ com } M \text{ par}$$

- utilizando uma janela $w(k)$ de dimensão M e centrada em $M/2$, a resposta impulsiva após janelamento será

$$h(k) = h_d(k)w(k) \quad (6.4.5);$$

- e a função de transferência impulsiva do filtro discreto projetado com essas especificações será

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)z^{-k} \quad (6.4.6)$$

- caso M seja um número ímpar, utilizar $M-1$ nas equações anteriores

Exemplo: projete um filtro RFI passa-baixa para filtrar sinais analógicos, com $M = 21$ e as seguintes especificações:

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & -\pi/4 \leq \omega \leq \pi/4 \\ 0, & -\pi < \omega \leq \pi \end{cases},$$

Utilize uma janela retangular.

6.4 Projeto filtros de resposta finita ao impulso (RFI)

Solução: de acordo com a eq. 6.4.2,

$$h_d(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1(e^{j\omega}) d\omega = \begin{cases} \frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k\pi}, & k \neq 0 \\ \frac{\pi/4}{\pi} = 0,25, & k = 0 \end{cases},$$

Utilizando uma janela retangular, dada a simetria da janela em torno do seu ponto central, o atraso N introduzido pelo filtro, como M é ímpar, será

$$M - 1 = 2N \Rightarrow N = 10$$

Assim,

$$H(z) = H_w(z)z^{-10} = \sum_{k=0}^{20} h_d(k-10)z^{-k} = 0,25z^{-10} + \sum_{k=1, k \neq 10}^{20} \frac{\text{sen}\left[\frac{\pi(k-10)}{4}\right]}{\pi(k-10)} z^{-k}$$

6.5 Exercícios

1. Um filtro RII passa-baixa discreto ideal deve ser obtido a partir de um filtro Butterworth passa-baixa contínuo ideal através da transformação bilinear com $T = 0,4$ ms. Sabe-se que a frequência de corte (-3 dB) da banda passante do filtro contínuo é $\Omega_p = 2\pi(2000)\text{rad/s}$ e que frequência de corte da banda rejeitada é $\Omega_r = 3\pi(2000)\text{rad/s}$.
 - (a) Qual é a frequência de corte ω_c do filtro discreto resultante?
 - (b) apresente os diagramas de Bode para a resposta impulsiva do filtro discreto;
 - (c) converta o filtro passa-baixa em um filtro Butterworth passa-alta discreto com as mesmas frequências de corte do filtro contínuo;
 - (d) apresente os diagramas de Bode para a resposta impulsiva do filtro projetado no item (c).

2. A função de transferência de um filtro discreto é dada por

$$H(z) = \frac{2}{1 - e^{-0,2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-0,4}z^{-1}}$$

Supondo que essa função foi obtida por meio da transformação bilinear com $T_a = 2s$, obtenha a função contínua $H_c(s)$ que serviu de base para a obtenção da função discreta.

3. Deseja-se projetar um filtro RFI passa-baixa que satisfaça às especificações,

$$\begin{aligned} 0,95 < H(e^{j\omega}) < 1,05, & \quad \text{para } 0 \leq |\omega| \leq 0,25\pi \\ -0,1 < H(e^{j\omega}) < 0,1, & \quad \text{para } 0,35 \leq |\omega| \leq \pi \end{aligned}$$

pela aplicação de uma janela $w(n)$ à resposta impulsiva $h_d(n)$ de um filtro passa-baixa discreto ideal cuja frequência de corte é $\omega_p = 0,3\pi$. Selecione, dentre as expostas, a (ou as) janelas que permitam atender às especificações.