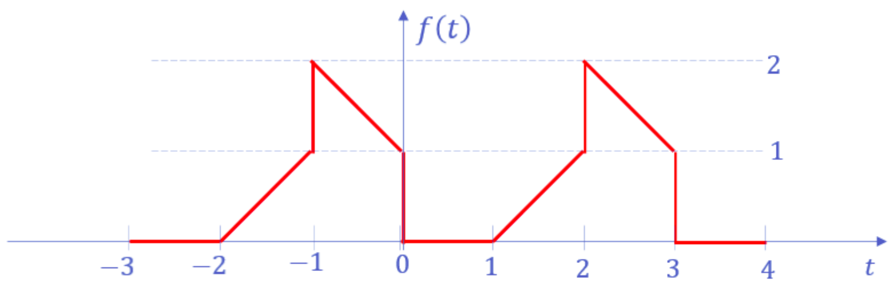
Exercício 1

Athos Damiani (NUSP 6796736)

04-12-2021

Considere a função periódica $f_p(t)$ definida pelo gráfico da figura abaixo.



(a) Determine a expressão da série de Fourier de $f(t)$;

(b) Calcule os termos dessa série até o 3º harmônico;

(c) Calcule a potência média desses 3 harmônicos.

Item (a)

Com período $T_0 = 3$, tem-se $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$ e a expressão da série de Fourier de $f(t)$ fica

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[a_n \cos(2\pi t/3) + b_n \sin(2\pi t/3)\Big]$$

em que a_0, a_n e b_n são: (calculados pelo Wolfram Alpha)

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{3}\left[\int_0^1 0dt + \int_1^2 (t-1)dt + \int_2^3 (4-t)dt\right] = \frac{1}{3}\left[0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right] = \frac{2}{3} && (1)\\
& && (2)\\
a_n &= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 0dt + \int_1^2 (t-1)cos(n2\pi/3)dt + \int_2^3 (4-t)cos(n2\pi/3)dt\right] = && (3)\\
&= \frac{\sin(n\pi/3)}{\pi^2 n^2}\Big[3\sin(5n\pi/3) + 2n\pi\cos(5n\pi/3) - 3\sin(n\pi)\Big] && (4)\\
& && (5)\\
b_n &= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 0dt + \int_1^2 (t-1)sin(n2\pi/3)dt + \int_2^3 (4-t)sin(n2\pi/3)dt\right] = && (6)\\
&= \frac{1}{2\pi^2 n^2}\Big[6\sin(4n\pi/3) + 2n\pi\cos(4n\pi/3) - 3\sin(2n\pi) - 2n\pi\cos(2n\pi) - 3\sin(2n\pi/3)\Big] && (7)
\end{aligned}
$$

Item (b)

```r
#an
a <- function(n) sin(n*pi/3)/(pi^2*n^2) * (3*sin(5*n*pi/3) +
                                            2*n*pi*cos(5*n*pi/3) -
                                            3*sin(n*pi))

#bn
b <- function(n) 1/(2*pi^2*n^2) * (6*sin(4*n*pi/3) +
                                    2*n*pi*cos(4*n*pi/3) -
                                    3*sin(2*n*pi) -
                                    2*n*pi*cos(2*n*pi) -
                                    3 * sin(2*n*pi/3))
```

$$
\begin{aligned}
a_1 &= & 0.04769; \quad b_1 &= & -0.87233\\
a_2 &= & -0.19483; \quad b_2 &= & -0.14002\\
a_3 &= & -2.59878e-17; \quad b_3 &= & 4.13609e-18
\end{aligned}
$$

Item (c)

Segundo o Teorema de Parseval, a potência média dos três primeiros harmônicos é:

$$
\bar{P} = \quad a_0^2 + \sum_1^3 (a_n^2 + b_n^2) = 1.265
$$