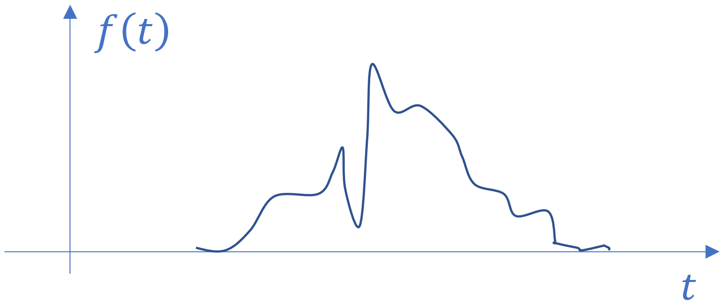
Processamento de Sinais aplicado à Engenharia Mecânica

Flavius P. R. Martins, Prof. Dr.
Flávio C. Trigo, Prof. Dr.

Funções não periódicas

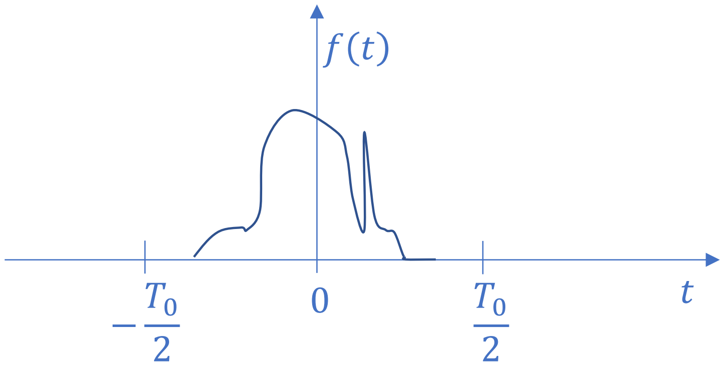
Em geral, os sinais de interesse são representados por funções limitadas a um intervalo finito de tempo; logo, não periódicas.
A figura abaixo ilustra um sinal dessa natureza.



Para analisar essa categoria de sinais, utilizaremos a integral de Fourier, assunto que será estudado a seguir.

Funções não periódicas

Consideremos a função não-periódica $f(t)$ definida em um intervalo de tempo contido em $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$, conforme ilustrado na figura abaixo.

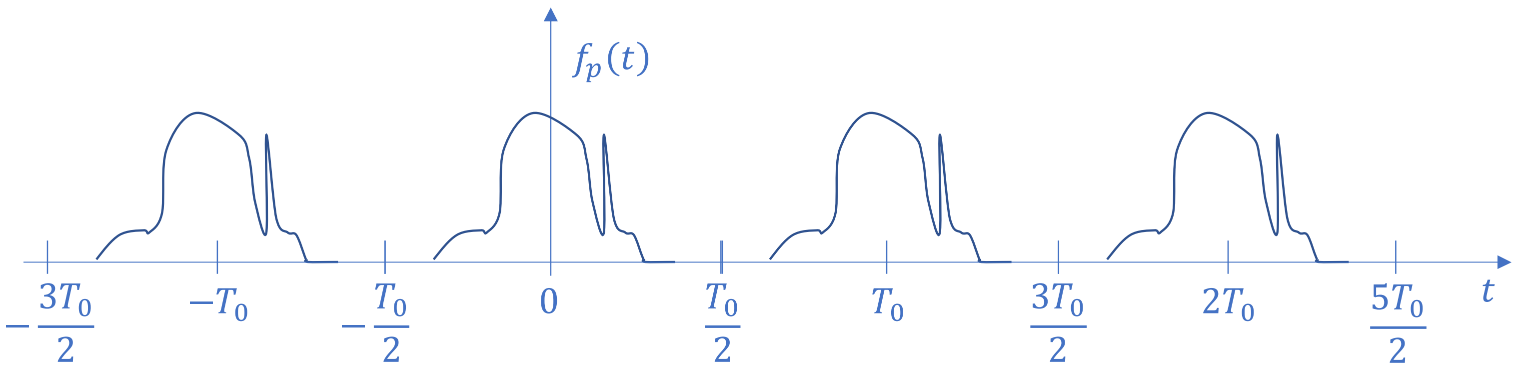


A partir de $f(t)$, construiremos a seguinte função periódica:

$$\begin{cases} f_p(t) = f(t) & \text{para } -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ f_p(t + T_0) = f_p(t) & \text{para os demais casos} \end{cases}$$

Funções não periódicas

O gráfico da função periódica $f_p(t)$, assim construída, é apresentado a seguir:



Agora podemos analisar $f_p(t)$ utilizando a série de Fourier.

Os coeficientes de Fourier são dados por:

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{t=-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_p(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

Funções não periódicas

Como a integração se dá no intervalo $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$, pode-se escrever:

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{t=-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

Observemos que não há nenhum prejuízo em denominarmos $F(n)$ de $F(n\omega_0)$, ou seja:

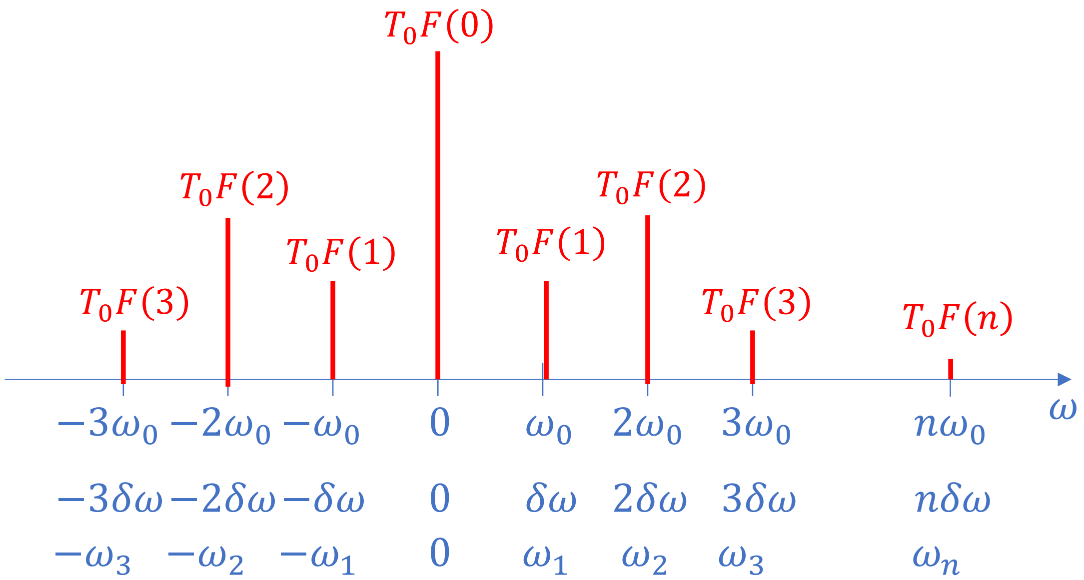
$$F(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{t=-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

Assim, resulta:

$$T_0 F(n\omega_0) = \int_{t=-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

Funções não periódicas

Na figura abaixo, esboça-se, esquematicamente, o gráfico de $T_0F(n\omega_0)$, com $-\infty < n\omega_0 < \infty$ (admite-se, no gráfico, que $f(t)$ seja real).



Como $\omega_0 = 2\pi/T_0$, à medida que $T_0 \to \infty$ a distribuição de linhas espectrais torna-se infinitamente densa, os pontos do topo do espectro de linhas geram uma curva contínua e os valores de $n\omega_0$ preenchem todos os pontos da reta real ω.

Funções não periódicas

Para facilitar o desenvolvimento que segue adotaremos a notação
$T_0 F(n\omega_0) \mathrel{\widehat{=}} F(\omega_n)$,
possibilitando-nos escrever

$$F(\omega) = \lim_{T_0 \to \infty} F(\omega_n) = \lim_{T_0 \to \infty} \int_{t=-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Dessa forma, chega-se à **equação de análise**, denominada **Transformada de Fourier**:

$$F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Para obter a **equação de síntese**, supomos, novamente, T_0 finito:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{in\omega_0 t}$$

válida para $-\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$

Funções não periódicas

Notando que

$F(n\omega_0) = \frac{F(\omega_n)}{T_0}$,

escrevemos:

$$f(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{i\omega_n t} = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{i\omega_n t}$$

Fazendo a designação $\omega_0 \triangleq \delta\omega$, resulta:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{i\omega_n t}\, \delta\omega$$

Notemos que, à medida que $T_0 \to \infty$, $\delta\omega \to d\omega$, $\omega_n \to \omega$ e a somatória se converte em uma integral, chegando-se, assim, à **equação de síntese**, chamada de **Transformada de Fourier Inversa**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Transformada de Fourier

A discussão anterior permitiu identificar o seguinte par de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$ Equação de síntese: $f(t)$ = Transformada Inversa de Fourier

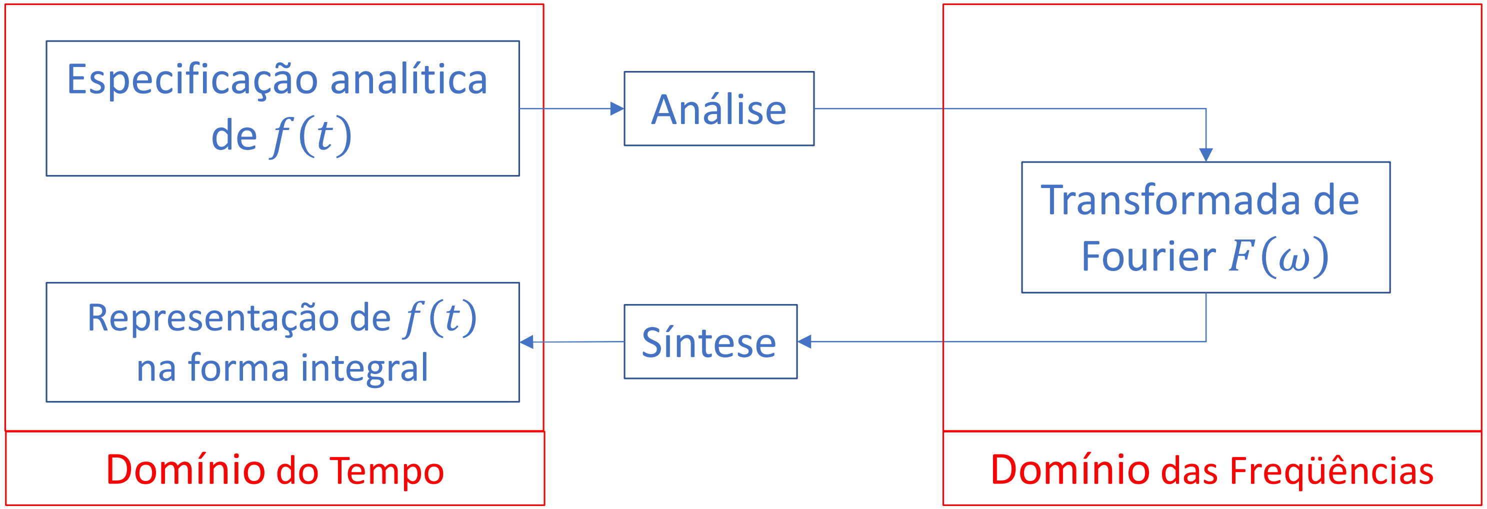
$$F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$ Equação de análise: $F(\omega)$= Transformada de Fourier

A transformada de Fourier, assim como sua inversa, têm o seguinte escopo de aplicação:

- Pulsos de duração finita
- Sinais de duração infinita
- Sinais periódicos (duração infinita)

Transformada de Fourier

O par de Fourier dá ensejo ao seguinte esquema de cálculo:



É importante salientar que a equação de síntese, ou seja,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega}\, d\omega$$

representa uma combinação linear de exponenciais complexas.
Conclui-se, então, que: **"todo sinal, periódico ou não, pode ser expresso como uma soma ponderada de exponenciais complexas"**.

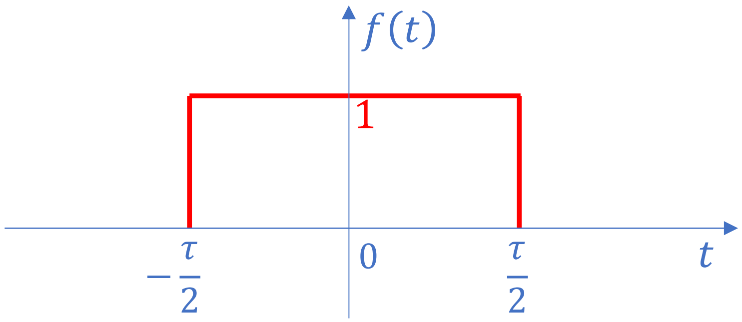
Transformada de Fourier

Exemplo de aplicação: Pulso retangular

Seja a função

$$\text{Rect}(t/\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < \tau/2 \\ 0 & \text{se } |t| > \tau/2 \end{cases}$$

ilustrada na figura ao lado.



A transformada de Fourier de $f(t)$, é:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t}dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} [\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)]dt =$$

$$= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos(\omega t)\, dt - i \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \sin(\omega t)\, dt = \left.\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega} = \tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} = \tau \cdot \text{sc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

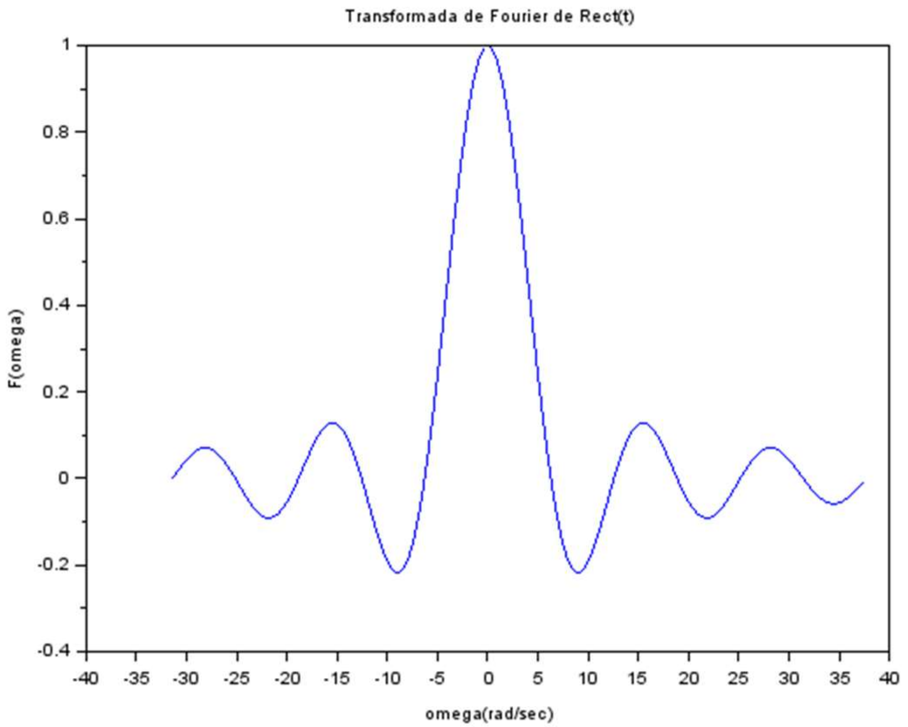
0 : função ímpar

Transformada de Fourier

Assim, identificamos o seguinte par de Fourier:

$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \cdot \mathrm{sc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Na figura ao lado apresenta-se o gráfico da transformada de Fourier da assim chamada **função porta retangular**, para o caso em que $\tau = 1$.



Observemos que a equação de síntese fornece:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \tau \cdot \mathrm{sc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{i\omega t}\, d\omega$$

FM4

Transformada de Fourier

Formas da transformada

- Forma cartesiana: $F(\omega) = A(\omega) + iB(\omega)$, onde $A(\omega)$ é a parte real e $B(\omega)$ é a parte imaginária da transformada.
- Forma polar: $F(\omega) = |F(\omega)|e^{i\theta(\omega)}$, onde $|F(\omega)| = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2}$ e $\theta(\omega) = \tan^{-1}\frac{B(\omega)}{A(\omega)}$
- Espectro de magnitude: $|F(\omega)|$
- Espectro de fase: $\theta(\omega)$

É importante destacar que os espectros de magnitude e de fase da transformada de Fourier são **funções contínuas** de ω.

Slide 13

FM4 Flavius Martins; 18/01/2021

Transformada de Fourier

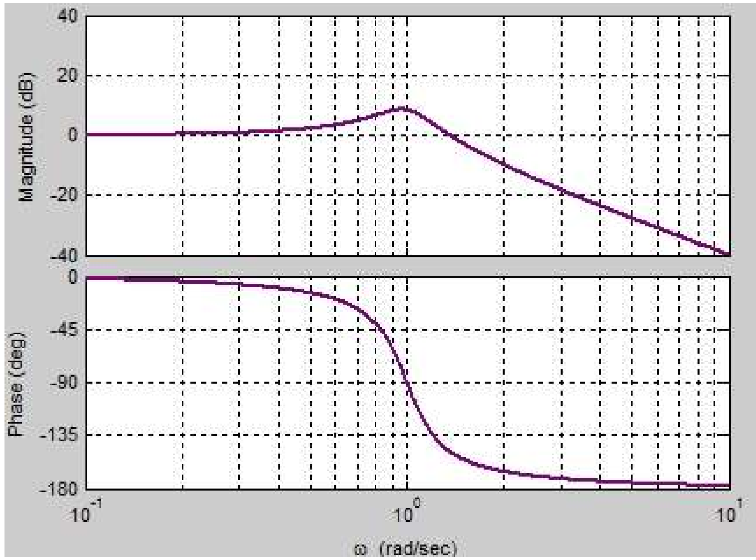
Diagramas de Bode

São representações gráficas da transformada de Fourier de um sinal muito convenientes para a análise e projeto de sistemas eletromecânicos e de controle.

Esses diagramas apresentam as seguintes características:

- A freqüência e a magnitude são representadas em uma escala logarítmica;
- A fase é representada em uma escala linear;
- A magnitude é medida em decibéis, ou seja, se $|X|$ é a magnitude do sinal, então o valor representado no eixo das magnitudes é $20\log_{10}|X|$.

Na figura ao lado apresenta-se um exemplo de diagrama de Bode.



Transformada de Fourier

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

- Se $f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \Rightarrow F^*(\omega) = F(-\omega), \forall\omega \Leftrightarrow f(t) \in \mathbb{R}$ (simetria conjugada)

- Se $f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow A(\omega), |F(\omega)|$ são funções pares e $B(\omega), \theta(\omega)$ são funções ímpares.

- Se $f(t) \in \mathbb{R}$ e $f^P(t)$ e $f^I(t)$ são suas partes par e ímpar, respectivamente, então:
  $f^P(t) \Leftrightarrow A(\omega)$ e $f^I(t) \Leftrightarrow iB(\omega)$

- Se $f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \{F(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(t) \text{ é par}\}$

- Se $f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \{F(t) \text{ é imaginário puro} \Leftrightarrow f(t) \text{ é ímpar}\}$

Transformada de Fourier

Exemplo de aplicação

Determine os espectros de magnitude e de fase da função $f(t) = \mathrm{Rect}(t/\tau)$

<u>Resolução</u>

Sabemos que $F(\omega) = \tau \cdot \mathrm{sc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

Portanto, o espectro de magnitude será $|F(\omega)| = \tau\left|\mathrm{sc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right|$

Sabemos também que $f(t)$ é par. Logo, $F(\omega)$ é real, de modo que

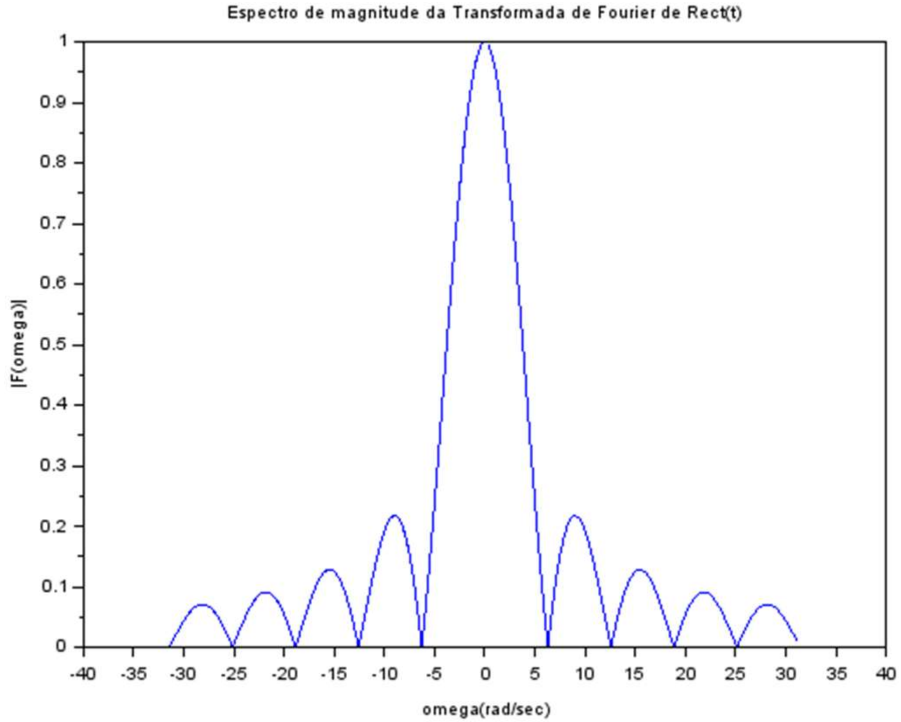
$\theta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } F(\omega) > 0 \\ \pm\pi & \text{se } F(\omega) < 0 \end{cases}$ resulte uma função ímpar

Os gráficos dos espectros de magnitude e fase são apresentados a seguir:

FM4

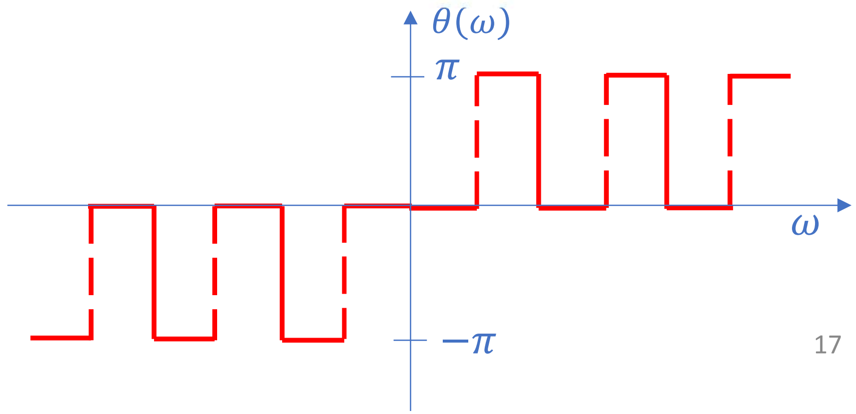
Transformada de Fourier

Espectro de Magnitude



Observe que o espectro de fase de $f(t)$ é uma função ímpar, pois $f(t)$ é real.

Espectro de Fase



Slide 17

FM4 Flavius Martins; 18/01/2021

Transformada de Fourier

Propriedade do Deslocamento no tempo

Considere o par de Fourier $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$

Então, para $\tau \in \mathbb{R}$, existe o seguinte par de Fourier:$f(t-\tau) \Leftrightarrow e^{-i\omega\tau}F(\omega)$

<u>Demonstração</u>

A transformada de Fourier de $f(t-\tau)$, é:

$$\mathcal{F}[f(t-\tau)] = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau+\tau)} dt$$

$$\mathcal{F}[f(t-\tau)] = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} e^{-i\omega\tau} dt = e^{-i\omega\tau} \int_{t-\tau=-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} d(t-\tau)$$

Designando $x \triangleq t-\tau$, resulta:

$$\mathcal{F}[f(t-\tau)] = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\, e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega\tau} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = e^{-i\omega\tau} F(\omega)$$

Conclusão: Se o sinal atrasa no tempo, sua transformada de Fourier sofre uma mudança de fase, mas sua magnitude se preserva.

Propriedade da Dualidade

Dualidade da Transformada de Fourier

A simetria de forma entre as equações de síntese e de análise da Transformada de Fourier, ou seja,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

conduz a uma importante propriedade da Transformada de Fourier chamada **dualidade**.

O exemplo a seguir esclarece essa propriedade.

Porta retangular versus sinc

Sabemos que a transformada de Fourier da porta retangular

$$\mathrm{Rect}(t/\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < \tau/2 \\ 0 & \text{se } |t| > \tau/2 \end{cases}$$

é a função sinc não normalizada, multiplicada por τ, ou seja:

$$F(\omega) = \tau \cdot \mathrm{sc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Propriedade da Dualidade

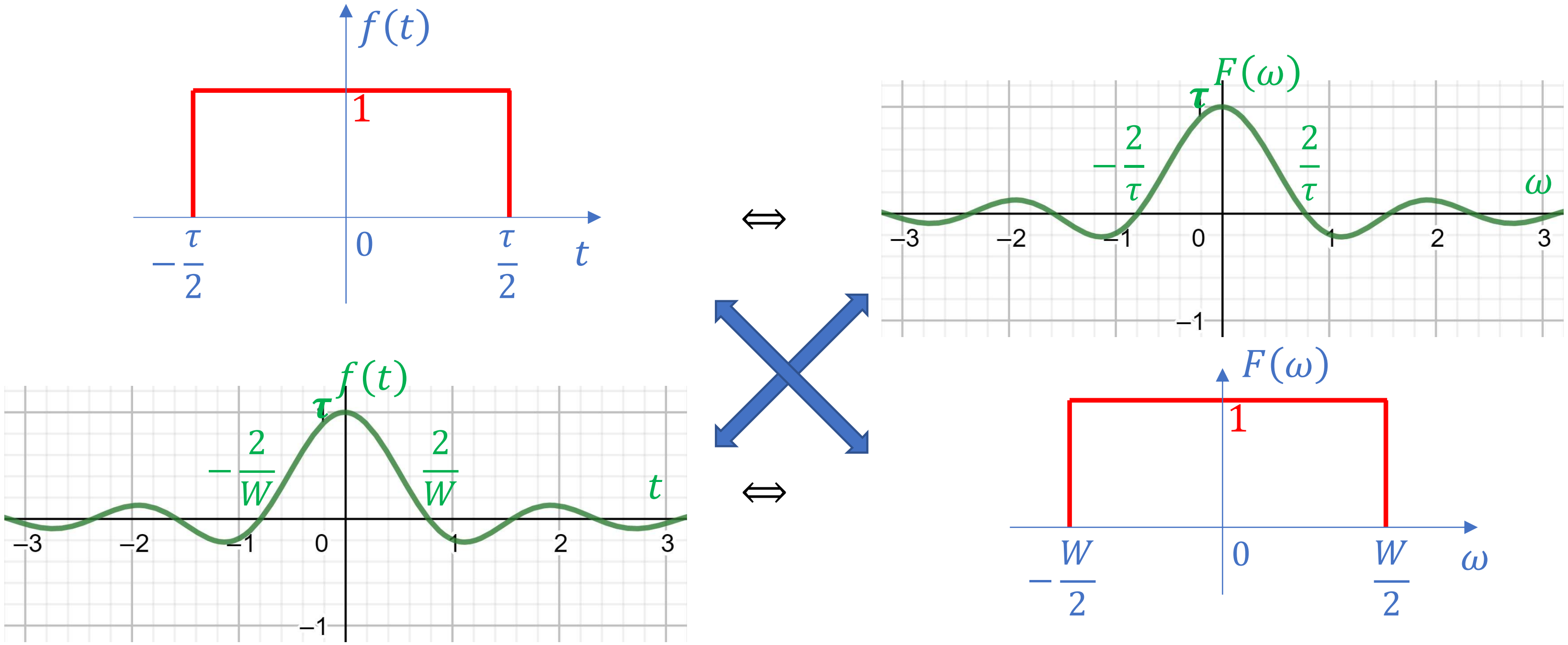
Por outro lado, a transformada de Fourier do sinal sinc não normalizado, ou seja,

$$f(t) = \tau \cdot \mathrm{sc}\left(\frac{Wt}{2}\right)$$

é a função porta retangular

$$\mathrm{Rect}(\omega/W) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\omega| < W/2 \\ 0 & \text{se } |\omega| > W/2 \end{cases}$$

A figura abaixo ilustra a dualidade dessas operações;



Propriedade da Dualidade

Caso geral de dualidade

Consideremos duas funções $f(u)$ e $g(v)$ relacionadas por

$$f(u) = \int_{v=-\infty}^{\infty} g(v)e^{-iuv}dv$$

Comparando-se a expressão acima com as equações de síntese e de análise e admitindo-se que $u = \omega$ e $v = t$, concluímos que:

$$f(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$$

Por outro lado, adotando-se $u = t$ e $v = \omega$, concluímos que

$$g(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{f(t)\}$$

Em outras palavras: se a transformada de Fourier de $g(t)$ é $f(\omega)$, ou seja:

$$g(t) \Leftrightarrow f(\omega)$$

a propriedade da dualidade nos permite concluir que a transformada de Fourier de $f(t)$ é $2\pi g(-\omega)$, ou seja,

$$f(t) \Leftrightarrow 2\pi g(-\omega)$$

Multiplicação na escala de tempo

Se $X(\omega)$ é a transformada de Fourier de $x(t)$, ou seja:

$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

então

$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

é um par de Fourier

<u>Demonstração</u>:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(at)e^{-i\omega}\ dt$$

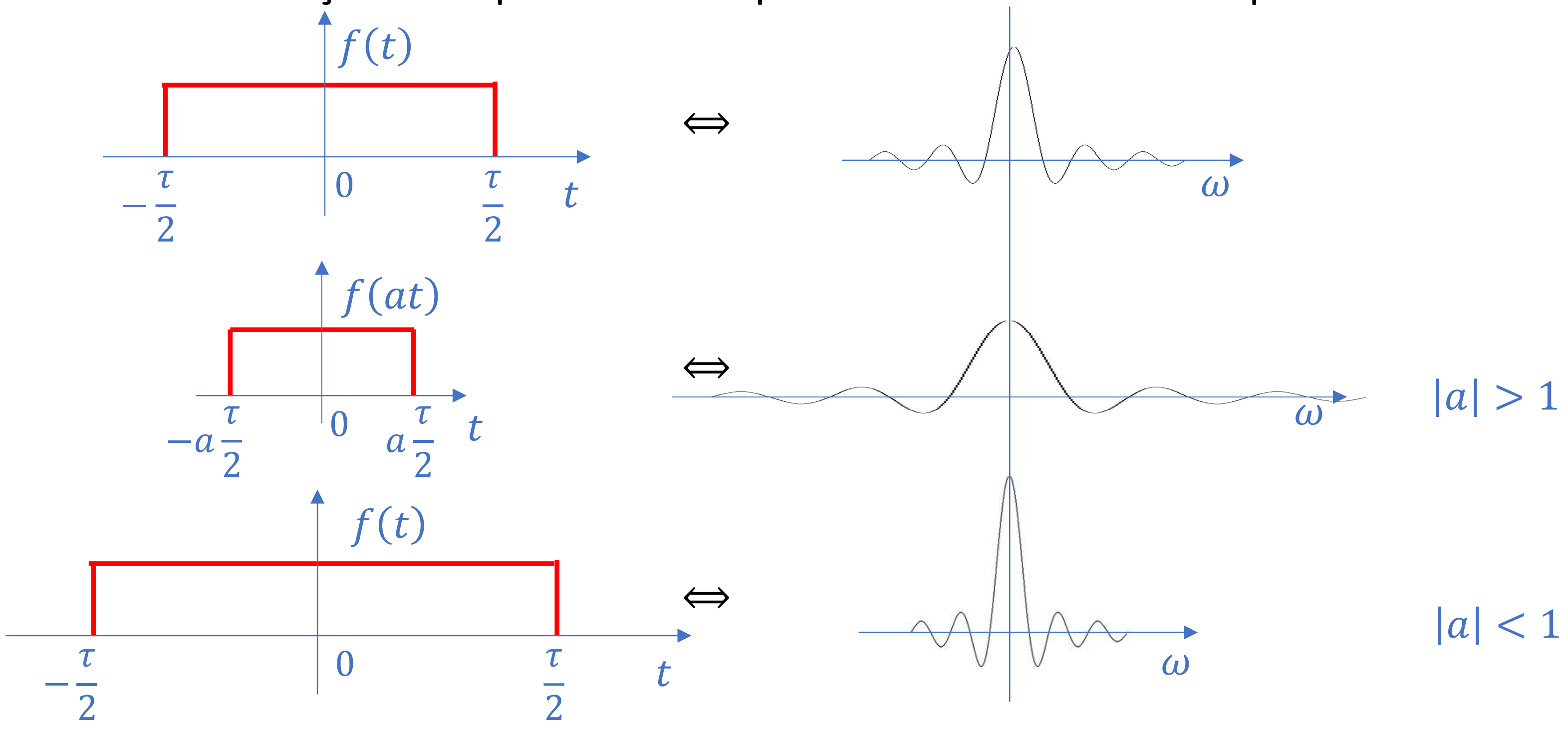
Adotando-se $\tau = at$, resulta:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-i\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau} d\tau \ \text{ se } \ a > 0 \\ -\dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-i\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau}\, d\tau \ \text{ se } \ a < 0 \end{cases}$$

Multiplicação da escala de tempo

Exemplo: Disco tocado a velocidade distinta da utilizada na gravação

- Velocidade de reprodução > velocidade de gravação: $a > 1$
  Efeito: Expansão do espectro de freqüências $\Longrightarrow$ ouvem-se freqüências mais altas
- Velocidade de reprodução < velocidade de gravação: $a < 1$
  Efeito: Redução do espectro de freqüências $\Longrightarrow$ ouvem-se freqüências mais baixas



Teorema de Parseval

Seja $p(t) = \frac{|u(t)|^2}{R}$ a potência conduzida por um condutor de resistência R, sujeito à tensão $U(t)$. Supondo $R = 1 \text{ ohm}$, a energia dissipada é:

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} p(t)dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 \, dt$$

É importante destacar que:

- Todo sinal fisicamente realizável tem energia finita.
- Se um sinal transporta uma quantidade finita de energia, diz-se que esse sinal é um **sinal de energia**.
- Todo sinal de energia satisfaz a $\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty$

Teorema de Parseval: Se $f(t)$ é um sinal de energia, então:

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega$$

FM4

Teorema de Parseval

Demonstração:

Sendo $f(t)$ e $g(t)$ dois sinais de energia, resulta que:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\cdot g^*(t)dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} G^*(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} G^*(\omega)\left[\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} G^*(\omega)F(\omega)d\omega$$

Impondo $g(t) = f(t)$, resulta:

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Cabe destacar que:

- $\Delta E = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}|F(\omega)|^2 d\omega$ é a energia armazenada na banda $[\omega_1, \omega_2]$ do sinal .
- $E(\omega) = \frac{1}{2\pi}|F(\omega)|^2$ representa o espectro de energia do sinal.

Slide 25

FM4 Flavius Martins; 18/01/2021

FM4

Existência da Integral de Fourier

Introdução

As condições **necessárias e suficientes** que asseguram a existência da transformada de Fourier $F(\omega)$ de um sinal $f(t)$ são um problema em aberto.

No entanto, são conhecidos alguns conjuntos de condições **suficientes** para a existência do par de Fourier $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$, condições essas que abrangem todos os sinais fisicamente realizáveis.

Critério de integrabilidade quadrática

Se $f(t)$ é um sinal de potência, ou seja: $\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 < 0$, então:

- Existe $F(\omega)$ tal que $F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$
- O erro $e(t) = \phi(t) - f(t)$, com $\phi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ tem energia nula, ou seja, $\int_{t=-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 = 0$.

É importante destacar que todo sinal fisicamente realizável satisfaz ao critério de integrabilidade quadrática.

Slide 26

FM4 Flavius Martins; 18/01/2021

FM4

Existência da Integral de Fourier

Critério de Dirichlet-Jordan

Um sinal $f(t)$ satisfaz às condições de Dirichlet-Jordan se:

- $f(t)$ é limitado
- $f(t)$ possui um número finito de descontinuidades e um número finito de máximos e mínimos em um intervalo de tempo finito.
- $f(t)$ é absolutamente integrável, ou seja: $\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

Observação: Sinais que satisfazem às condições de Dirichlet-Jordan são quadraticamente integráveis, necessariamente.

Convergência e limites assintóticos para $\boldsymbol{F(\omega)}$

- $\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ converge para $f(t)$, $\forall t$, se $f(t)$ é contínua;
- $\phi(t)$ converge para $\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$ se $f(t)$ é descontínua nesse ponto.
- Se $f(t)$ é contínua, se suas m primeiras derivadas são contínuas, mas a de ordem $m + 1$ é descontínua, então $|F(\omega)| < \frac{K}{|\omega|^{m+2}}$, para $\omega \to \infty$ e $K > 0$.

Slide 27

FM4 Flavius Martins; 18/01/2021

FM4

Sinais especiais

Existem importantes funções que possuem transformadas de Fourier embora **violem** os critérios de suficiência.
Destacam-se as seguintes:

- Delta de Dirac
- Função degrau
- Função sinal (sgn)
- Exponencial complexa eterna
- Constante DC eterna
- Funções periódicas que tenham séries de Fourier

Para examinar essas funções, é necessário aplicar a **Teoria das Distribuições**.
Exporemos essa teoria utilizando o <u>método indutivo</u>.

Slide 28

FM4 Flavius Martins; 18/01/2021

FM4

Sinais especiais

Área delimitada pela função $\mathbf{sc}(x)$

Considere-se a função $\mathrm{Rect}(t/\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < \tau/2 \\ 0 & \text{se } |t| > \tau/2 \end{cases}$

Sabemos que sua transformada de Fourier é $F(\omega) = \tau \frac{\sin(\omega\tau/\ \ )}{\omega\tau/2} = \tau \cdot \mathrm{sc}(\omega\tau/2)$

Em demonstrações futuras, necessitaremos conhecer a área delimitada por $\mathrm{sc}(\omega\tau/2)$.

Da equação de síntese da transformada de Fourier, tem-se:

$$\mathrm{Rect}(t/\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \tau \cdot \mathrm{sc}(\omega\,\tau/2) e^{i\omega t} d\omega$$

Para $t = 0$, resulta:

$$\mathrm{Rect}(0) = 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \mathrm{sc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \mathrm{sc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) d\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \mathrm{sc}(x) dx$$

Logo, tem-se: $\int_{\omega=-\infty}^{\infty} \mathrm{sc}(x) dx = \pi$

Slide 29

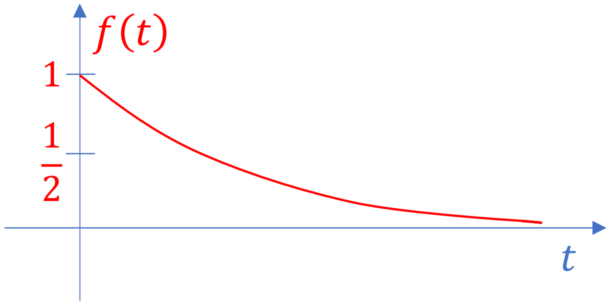
FM4 Flavius Martins; 18/01/2021

Sinais especiais

Exponencial descendente simples

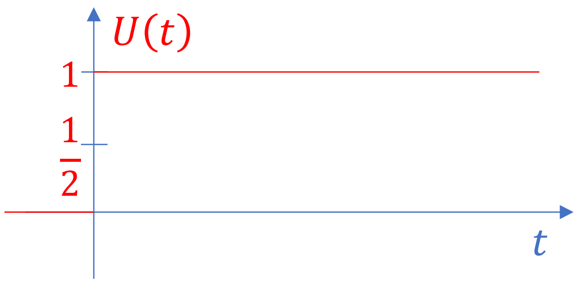
Considere-se o sinal $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/2 & t = 0, \\ e^{-\beta t} & t > 0 \end{cases}$ com $\beta > 0$

ilustrado na figura ao lado.



Esse sinal pode ser descrito como $f(t) = e^{-\beta t} \cdot U(t)$

onde $U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$ é ilustrada ao lado



Notemos que $f(t)$ é um sinal de energia, pois:

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\beta t} U(t)\right]^2 dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-2\beta t} dt = \left. \frac{e^{-2\beta}}{-2\beta} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{2\beta} < \infty$$

Logo, possui uma transformada de Fourier, dada por:

$$F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\beta t} e^{-i\omega t} dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\beta + i\omega)t} dt = \left. \frac{e^{-\beta t} e^{-i\omega t}}{-(\beta + i\omega)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\beta + i\omega}$$

Sinais especiais

Exponencial descendente simples (cont)

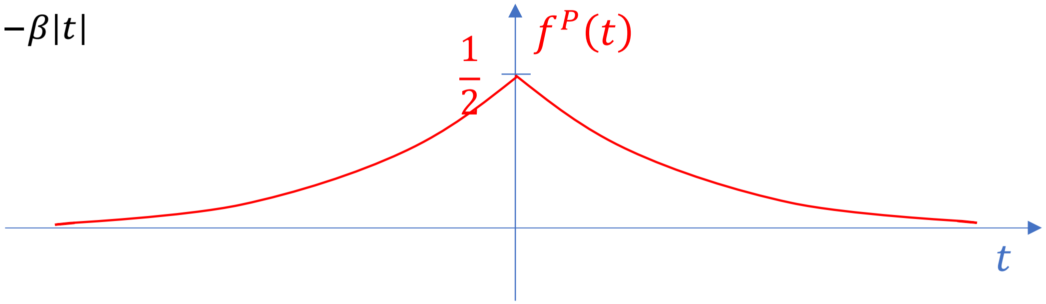
Chega-se, assim, ao par de Fourier: $e^{-\beta t}U(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\beta+i\omega}$,

ou, equivalentemente, $e^{-\beta t}U(t) \Leftrightarrow \frac{\beta}{\beta^2+\omega^2} - i\,\frac{\omega}{\beta^2+\omega^2}$

Notemos que o sinal $e^{-\beta t}U(t)$ não é nem par nem ímpar. No entanto, podemos determinar suas componentes par e ímpar.

A componente par, cujo gráfico é mostrado abaixo, obtém-se a partir de:

$$f^P(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-\beta t}U(t) + e^{\beta t}U(-t)\right] = \frac{1}{2}e^{-\beta|t|}$$



Analisando-se a transformada de Fourier de da componente par de $e^{-\beta}\ U(t)$, vê-se que

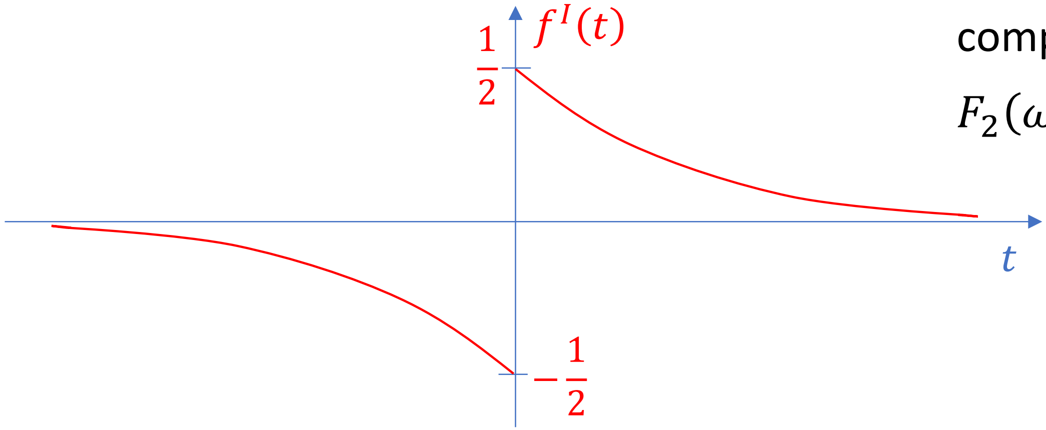
$$F_1(\omega) = \mathcal{F}\left(f^P(\omega)\right) = A(\omega) = \frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}$$

Sinais especiais

Exponencial descendente simples (cont)

A componente ímpar, cujo gráfico é mostrado abaixo, obtém-se a partir de:

$$f^I(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-\beta t}U(t) - e^{\beta t}U(-t)\right]$$

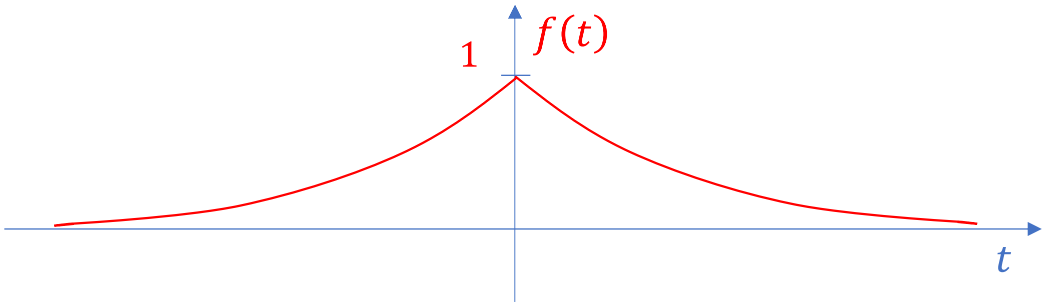


Analisando-se a transformada de Fourier da componente ímpar de $e^{-\beta t}U(t)$, vê-se que

$$F_2(\omega) = \mathcal{F}\left(f^I(\omega)\right) = iB(\omega) = -i\frac{\omega}{\beta^2 + \omega^2}$$

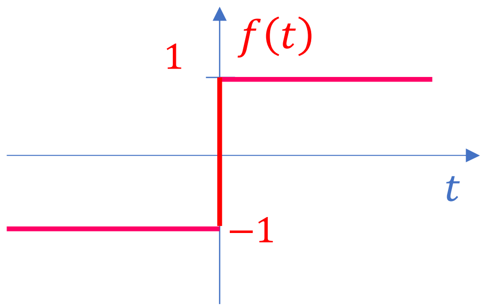
É também evidente que, no caso de uma exponencial descendente dupla (figura ao lado), o par de Fourier, é:

$$f(t) = e^{-\beta|t|} \Leftrightarrow F(\omega) = \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}$$



Sinais especiais

Função sinal



Consideremos a função $f(t) = \mathrm{Sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$

Não é difícil constatar que $f(t)$ não é um sinal de energia, pois:

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} |\mathrm{Sgn}(t)|^2 dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} dt = \infty$$

$f(t)$ não atende ao critério de integrabilidade quadrática; logo, não se pode garantir que possua uma transformada de Fourier. Tentemos, mesmo assim, aplicar a equação de análise a $f(t)$:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sgn}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{t=-\infty}^{0} (-1) e^{-i\omega t} dt + \int_{t=0}^{\infty} 1 e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{-e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{-\infty}^{0} + \left. \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{i\omega} - \frac{e^{\infty}}{i\omega} - \frac{e^{\infty}}{i\omega} + \frac{1}{i\omega} = ???\ (\text{indefinida})$$

Chega-se a um impasse: Considerada como uma função tradicional, $\mathrm{Sgn}(t)$ não possui transformada de Fourier.

No entanto, a **porta retangular,** que é muito parecida com esse sinal, possui transformada de Fourier !

Funções generalizadas

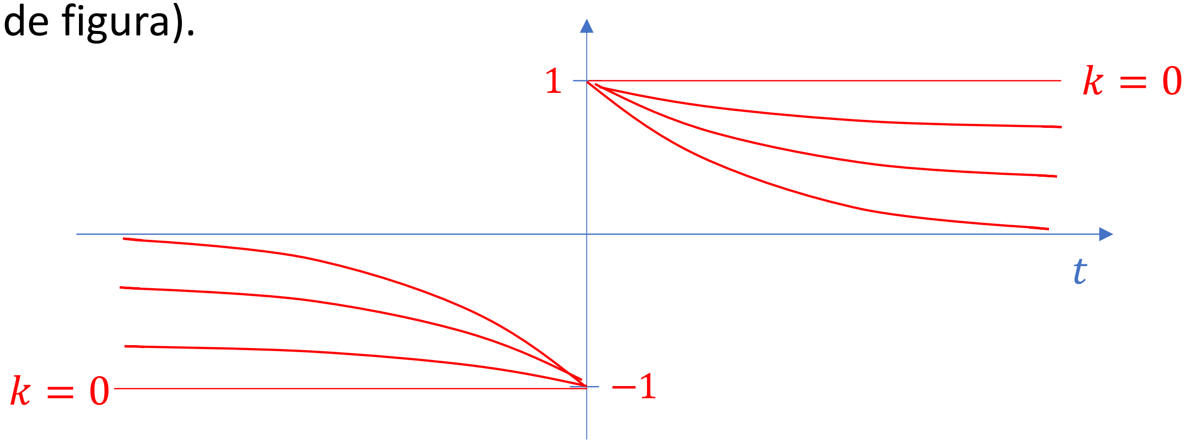
Função sinal

Para superar o impasse apontado, consideraremos a função $f(t) = \mathrm{Sgn}(t)$ como uma <u>função generalizada</u>, ou seja, como o limite de uma seqüência de **sinais de energia** quando um certo parâmetro que caracteriza esses sinais tende a um valor bem definido.

Assim, redefiniremos $\mathrm{Sgn}(t)$ como:

$$\mathrm{Sgn}(t) = \begin{cases} e^{-kt} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -e^{kt} & t < 0 \end{cases}$$

Com isso, $\mathrm{Sgn}(t)$ fica definida por uma seqüência $f_k(t)$ de funções dependentes do parâmetro k (vide figura).



Funções generalizadas

Função sinal

Notemos que $f_k(t)$ é uma seqüência ímpar de funções e que $f_k(t) \to \mathrm{Sgn}(t)$ quando $k \to 0$.
A transformada de Fourier de $f_k(t)$ (exponencial decrescente simples) é:

$$F_k(\omega) = -i\,\frac{2\omega}{k^2 + \omega^2}$$

Dessa forma, passando-se ao limite para $k \to 0$, resulta:

$$\mathcal{F}[\mathrm{Sgn}(t)] = \lim_{k\to 0} F_k(\omega) = \lim_{k\to 0} -i\,\frac{2\omega}{k^2+\omega^2} = \frac{2}{i\omega}$$

Chega-se, assim, ao seguinte par de Fourier:

$$\mathrm{Sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{i\omega}$$

Funções generalizadas

Função delta de Dirac

Seja $f(t) = \delta(t)$ definida como:

$$\begin{cases} \delta(0) = 0, \forall t \neq 0 \\ \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \end{cases}$$

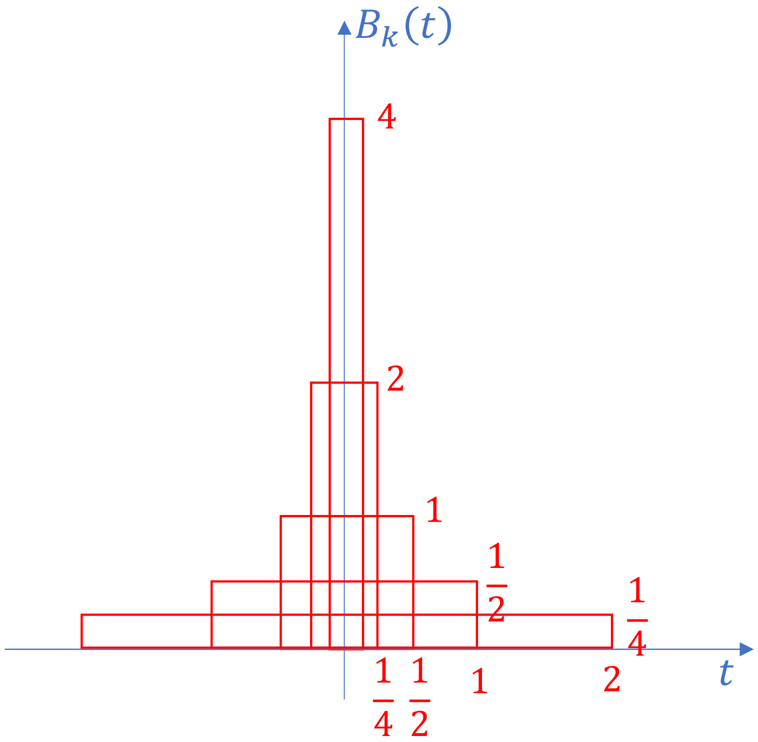
A partir dessa definição, torna-se impossível aplicar a equação de síntese a $\delta(t)$:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \{???\}\, e^{-i\omega t} dt$$

Por esse motivo, redefiniremos $\delta(t)$ a partir de uma função generalizada, da forma:

$$B_k(t) = \frac{1}{k}\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{k}\right)$$

Na figura ao lado apresenta-se essa seqüência de funções.



Funções generalizadas

Função delta de Dirac (cont)

Dessa forma, pode-se expressar $\delta(t)$ como: $\delta(t) = \lim_{k \to 0} B_k(t)$

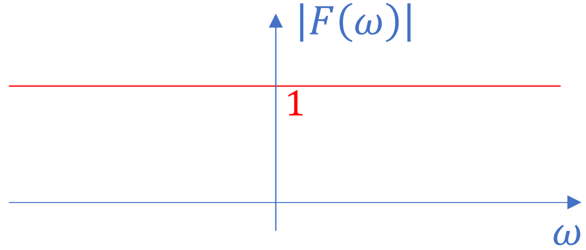
Além disso, assim como $\delta(t)$, $B_k(t)$ também satisfaz à propriedade $\int_{t=-\infty}^{\infty} B_k(t) = 1, \forall k$

0 par de Fourier para a função $\text{Rect}(t/k)$ de **amplitude 1** é

$$\text{Rect}\left(\frac{t}{k}\right) \Leftrightarrow k \cdot \text{sc}\left(\frac{\omega k}{2}\right)$$

Logo, para a seqüência de funções $B_k(t)$ de amplitude $1/k$ devemos ter:

$$B_k(t) \Leftrightarrow \frac{1}{k} k \cdot \text{sc}\left(\frac{\omega k}{2}\right) = \frac{\sin(\omega k/2)}{\omega k/2}$$



Quando $k \to 0$, tem-se:

$$F(\omega) = \lim_{k \to 0} \frac{\sin(\omega k/2)}{\omega k/2} = 1$$

E assim, chega-se ao seguinte par de Fourier: $\delta(t) \Leftrightarrow 1$

Calculando-se a energia do sinal $\delta(t)$, ou seja,$E = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} d\omega \to \infty$

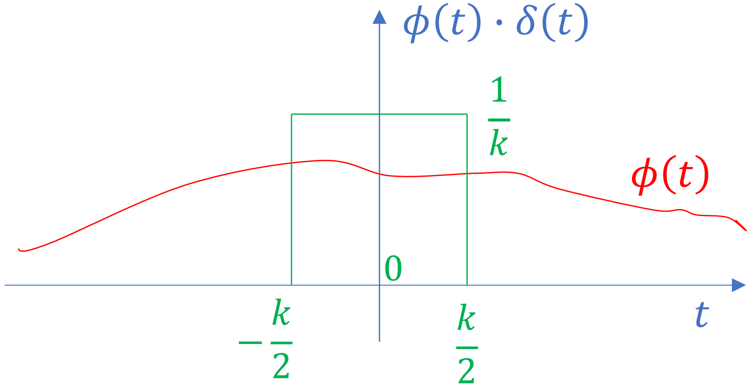
conclui-se que $\delta(t)$ não é um sinal de energia.

Funções generalizadas

Propriedade de seleção

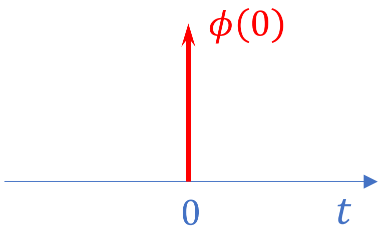
Multipliquemos a função contínua $\phi(t)$ pela seqüência $B_k(t)$ e passemos ao limite para $k \to 0$:

$$\phi(t) \cdot \delta(t) = \phi(t) \cdot \lim_{k\to 0} B_k(t) = \lim_{k\to 0} \phi(t) \cdot B_k(t) = \lim_{k\to 0} \phi(t) \cdot \frac{1}{k}\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{k}\right) = \phi(0) \cdot \delta(t)$$



Integrando-se a equação acima, tem-se:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \phi(t) \cdot \delta(t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} \phi(0) \cdot \delta(t) dt = \phi(0) \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = \phi(0)$$



Conclui-se que $\phi(0) \cdot \delta(t)$ é, na verdade, um impulso com área $\phi(0)$

Funções generalizadas

Propriedade de seleção (cont)

A propriedade de seleção dá ensejo a um método de seleção de uma amostra da função $\phi(t)$ no instante $t = 0$, produzindo, como resultado, o impulso $\phi(0) \cdot \delta(t)$.
Utilizando essa propriedade, fica fácil calcular a transformada de Fourier de $\delta(t)$:

$$\phi(t) \cdot \delta(t) = \phi(0) \cdot \delta(0) \Rightarrow e^{-i\omega t}\delta(t) = e^{0}\delta(0)$$

$$\Rightarrow F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(0)dt = 1$$

Portanto, conforme já visto anteriormente, chega-se ao seguinte par de Fourier:

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

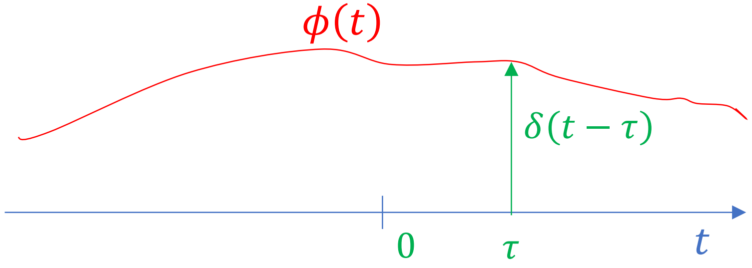
Funções generalizadas

Propriedade de seleção (cont)

Se a função $\delta(t)$ for atrasada no tempo, tem-se $\delta(t-\tau)$ e o valor selecionado na função $\phi(t)$ será:

$$\phi(t)\cdot\delta(t-\tau)=\phi(\tau)\cdot\delta(t-\tau)$$

O gráfico ao lado ilustra esse processo de seleção:



O impulso unitário pode ser utilizado tanto para amostrar sinais no domínio do tempo quanto suas transformadas de Fourier no domínio das freqüências:

$$G(\omega)\cdot\delta(\omega-\alpha)=G(\alpha)\cdot\delta(\omega-\alpha)$$

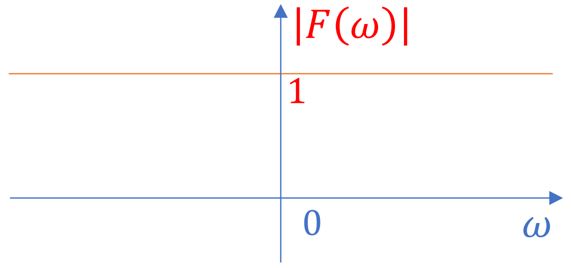
Adotando-se $\phi(t)=e^{-i\omega t}$, obtém-se:

$$e^{-i\omega t}\delta(t-\tau)=e^{-i\omega\tau}\delta(t-\tau)\Rightarrow\int_{t=-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)e^{-i\omega t}dt=e^{-i\omega\tau}\int_{t=-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)dt=e^{-i\omega\tau}$$

Funções generalizadas

Sinal $\boldsymbol{\delta(t-\tau)}$

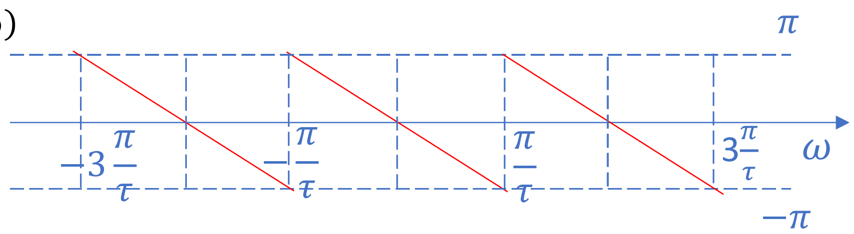
Conclui-se, assim, que a transformada de Fourier do impulso $\delta(t-\tau)$ é a exponencial complexa $e^{-i\omega\tau}$, ou seja:



$\delta(t-\tau) \Leftrightarrow e^{-i\omega\tau}$ (Importante resultado)

Expressemos $e^{-i\omega\tau}$ na forma polar, ou seja:

$$e^{-i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau) = F(\omega) = |F(\omega)|e^{i\theta(\omega)}$$



Assim, concluímos que:

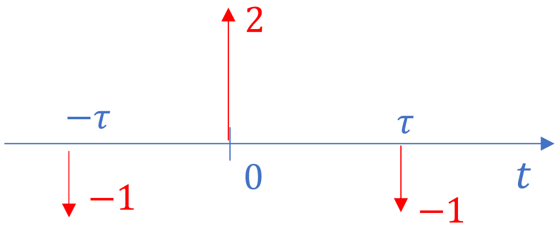
$$|F(\omega)| = [\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)]^{\frac{1}{2}} = 1$$
$$F(\omega) = 1e^{i\theta(\omega)} = e^{-i\omega\tau} \Rightarrow \theta(\omega) = -\omega\tau$$

Os espectros de magnitude e de fase são ilustrados ao lado:

Funções generalizadas

Exemplo de aplicação

Considere o sinal da figura ao lado, descrito por:



$$f(t) = -\delta(t+\tau) + 2\delta(t) - \delta(t-\tau)$$

A transformada de Fourier desse sinal é:

Propriedade de Seleção

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} [-\delta(t+\tau) + 2\delta(t) - \delta(t-\tau)]e^{-i\omega t}dt = -e^{i\omega\tau} + 2 - e^{-i\omega\tau} = 2 - 2\,\frac{e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}}{2}$$

$$= 2[1 - \cos(\omega\tau)] = 4\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

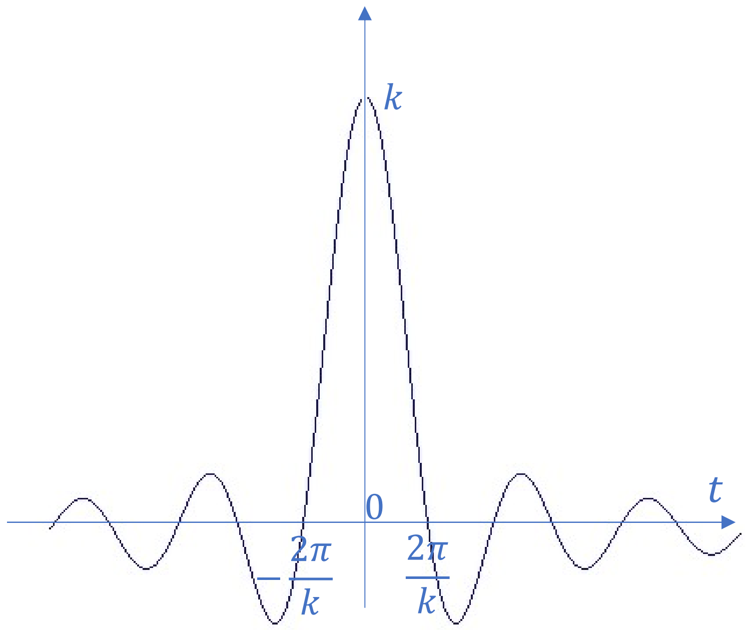
Note-se que $\mathcal{F}\{f(t)\}$ é uma função par, conforme o esperado.

Funções generalizadas

Síntese da função impulsiva
Mostraremos que a função delta de Dirac é sintetizada por uma soma de **infinitas exponenciais complexas**.

Consideremos a integral, $\int_{\omega=-k/2}^{k/2} e^{i\omega t} d\omega$, ou seja:

$$\int_{\omega=-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{i\omega}}{it}\Bigg|_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} = \frac{e^{i\frac{kt}{2}} - e^{-i\frac{kt}{2}}}{it} = k\,\frac{e^{i\frac{kt}{2}} - e^{-i\frac{kt}{2}}}{2i\left(\frac{kt}{2}\right)}$$
$$= k \cdot \mathrm{sc}\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$



O gráfico de $k \cdot \mathrm{sc}\left(\frac{\omega t}{2}\right)$ é ilustrado na figura ao lado.

Sabemos que a área delimitada por $\mathrm{sc}(x)$ é π. Logo, tem-se:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} k \cdot \mathrm{sc}\left(\frac{kt}{2}\right) dt = 2\int_{t=-\infty}^{\infty} \mathrm{sc}\left(\frac{kt}{2}\right) d\left(\frac{kt}{2}\right) = 2\int_{t=-\infty}^{\infty} \mathrm{sc}(x) dx = 2\pi$$

Vê-se que essa integral não depende do parâmetro k !

Funções generalizadas

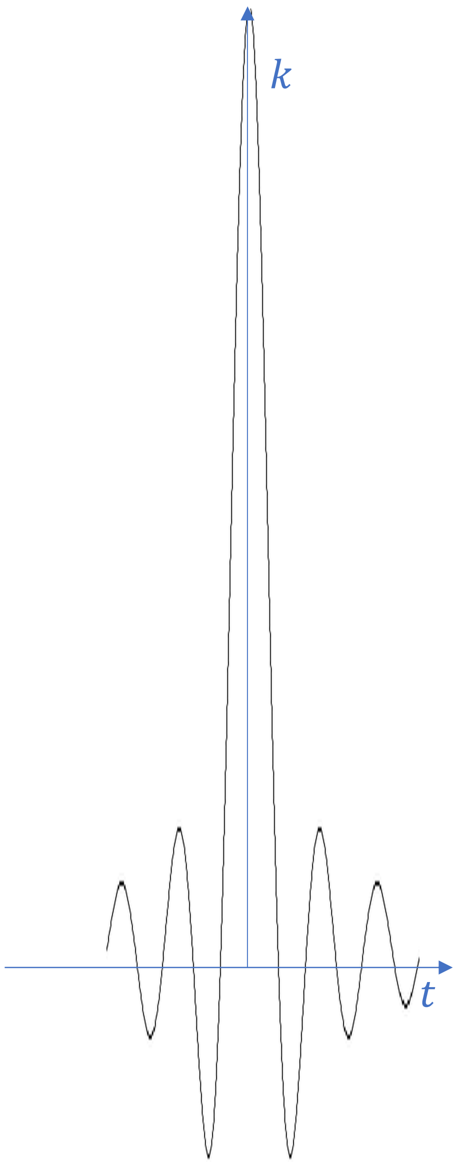
Síntese da função impulsiva

Portanto, quando $k \to \infty$, essa área se mantém invariante e igual a 2π, ao mesmo tempo em que a função $k \cdot \mathrm{sc}\left(\frac{kt}{2}\right)$ se aproxima, cada vez mais, da função $\delta(t)$, conforme ilustrado na figura ao lado.

Conclui-se, assim, que $k \cdot \mathrm{sc}\left(\frac{kt}{2}\right)$ é outra possível seqüência $f_k(t)$ para a função generalizada $2\pi\delta(t)$, ou seja:

$$\lim_{k\to\infty} f_k(t) = \lim_{k\to\infty} k \cdot \mathrm{sc}\left(\frac{kt}{2}\right) = \lim_{k\to\infty} \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$$

‘soma’ de infinitas exponenciais complexas



Funções generalizadas

Síntese da função impulsiva

Portanto, a síntese de um sinal $\delta(t)$ é o resultado da **soma de todas as infinitas exponenciais complexas** $e^{i\omega t}$, com $\omega \in \mathbb{R}$

A afirmação anterior também pode ser facilmente demonstrada, conforme segue:

Sabemos que $\delta(t) \Leftrightarrow 1$

Usando a equação de síntese, obtém-se:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{k\to\infty} \int_{\omega=-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} e^{i\omega t} d\omega$$ ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\omega=-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$$

Funções generalizadas

Constante eterna

Consideremos o sinal $f(t) = C, \forall t \in \mathbb{R}$

Notemos, de imediato, que $f(t)$ não é um sinal de energia, pois,

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 = \int_{t=-\infty}^{\infty} C^2 dt = \infty$$

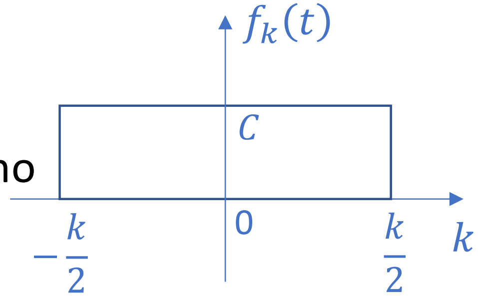
A tentativa de obter a transformada de Fourier pela via direta é infrutífera, pois:

$$F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} Ce^{-i\omega t} dt = \frac{C}{-i\omega} e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} = ???$$

Por esse motivo, utilizaremos a seqüência de funções

$f_k(t) = \mathrm{C} \cdot \mathrm{Rect}\left(\frac{t}{k}\right)$, ilustrada na figura ao lado, para redefinir $f(t)$ como

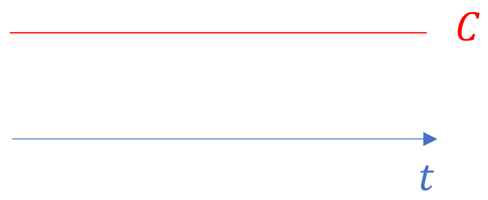
$$f(t) = \lim_{k \to \infty} f_k(t) = \lim_{k \to \infty} C \cdot \mathrm{Rect}\left(\frac{t}{k}\right)$$



Funções generalizadas

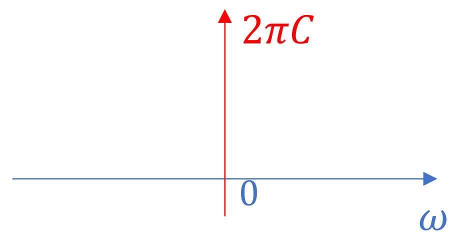
Constante eterna (cont)

Portanto, a respectiva seqüência de transformadas, é:



$$F_k(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} C \cdot \mathrm{Rect}\left(\frac{t}{k}\right) e^{-i\omega t} dt = C \int_{t=-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} e^{-i\omega t} dt$$

Assim, chega-se a



$$F(\omega) = \lim_{k\to\infty} F_k(\omega) = \lim_{k\to\infty} C \int_{t=-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} e^{-i\omega t} dt = C \cdot 2\pi\delta(t)$$

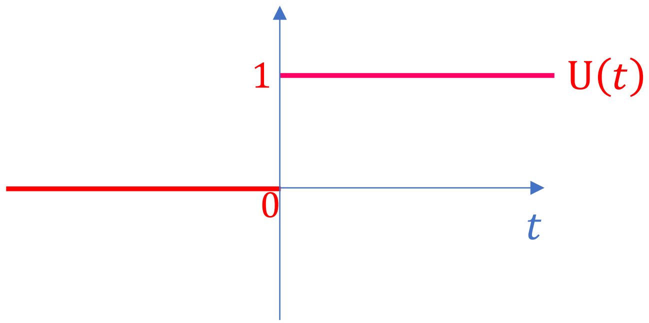
e emerge o seguinte par de Fourier:

$$C \Leftrightarrow 2\pi C\delta(t)$$

Os gráficos ao lado ilustram esse par. Note que a energia infinita do sinal $f(t) = C$ está concentrada na freqüência $\omega = 0$.

Funções generalizadas

Degrau unitário



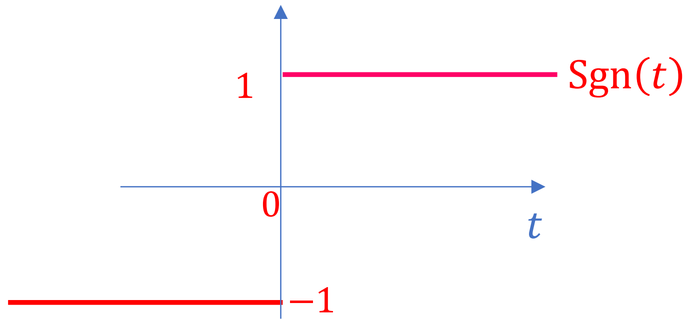
Seja o sinal

$$f(t) = U(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } t < 0 \\ 1 \text{ se } t > 0 \end{cases}$$

Por se tratar de um sinal com energia infinita, o método direto de obtenção de sua transformada de Fourier é infrutífero. Por esse motivo, trataremos tal sinal como uma função generalizada.

Partindo da função

$$\mathrm{Sgn}(t) = \begin{cases} -1 \text{ se } t < 0 \\ 0 \quad \text{ se } t = 0 \\ 1 \quad \text{ se } t > 0 \end{cases}$$



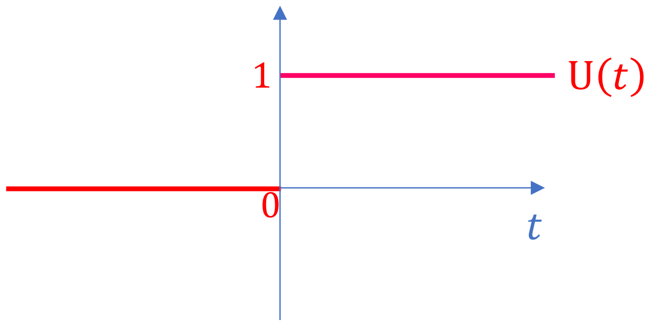
Notamos que

$$U(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Sgn}(t) + \frac{1}{2}$$

Conhecidos os pares de Fourier $\mathrm{Sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{i\omega}$ e $C \Leftrightarrow 2\pi C\delta(\omega)$

chega-se a $U(t) \Leftrightarrow \frac{2}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$

Funções generalizadas



Exemplo de aplicação

A função $\text{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ pode ser construída a partir da subtração de duas funções degrau – uma adiantada, outra atrasada, ou seja:

$$\text{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = U\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - U\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

Conhecemos o par: $\text{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \cdot \text{sc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

Por outro lado, tem-se: Propriedade do deslocamento no tempo

$$U\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - U\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - \left[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]e^{-i\omega\frac{\tau}{2}} =$$

$$= \frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}\right) + \pi\delta(\omega)\left(e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}\right) = \frac{e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}}{2i\,\frac{\omega\tau}{2}}\tau + \pi\delta(\omega)\left(e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}\right)\tau \cdot \text{sc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Note que, usando a propriedade de seleção, tem-se:

$$\pi\delta(\omega)\left(e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}\right) = \pi\delta(\omega)\left(e^{i0\frac{\tau}{2}} - e^{-i0\frac{\tau}{2}}\right) = 0$$

Chega-se, portanto, ao par $\text{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \cdot \text{sc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, conforme o esperado.

Funções generalizadas

Exponencial complexa eterna

O sinal $f(t) = e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)$ não é um sinal de energia, pois

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \left|e^{i\omega_0 t}\right|^2 dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} dt = \infty$$

Portanto, para determinar a sua transformada de Fourier precisaremos abordá-lo sob o ponto de vista das funções generalizadas. Para tanto, multiplicaremos $f(t)$ por uma porta retangular, obtendo a seqüência de funções

$$f_k(t) = e^{i\omega_0 t}\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{k}\right)$$

A transformada de Fourier de $f_k(t)$ é

$$F_k(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t}\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{k}\right)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} e^{-(\omega-\omega_0)t}dt$$

Logo, tem-se:

$$f(t) = \lim_{k\to\infty} f_k(t) = \lim_{k\to\infty} e^{i\omega_0 t}\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{k}\right)$$

Funções generalizadas

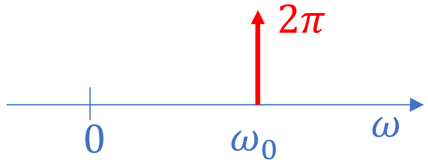
Exponencial complexa eterna (cont)

Sua transformada de Fourier é

Lembremos que $\delta(t)$ é uma função par

$$F(\omega)=\lim_{k\to\infty}F_k(\omega)=\lim_{k\to\infty}\int_{t=-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}}e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt=2\pi\delta[-(\omega-\omega_0)]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

Chega-se, assim, ao par de Fourier:



$$e^{i\omega_0 t}\Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

É importante observar a dualidade entre os domínios do tempo e da freqüência.
O atraso temporal da função $\delta(t)$ conduz ao par de Fourier

$$\delta(t-\tau)\Leftrightarrow e^{-i}$$

Já a exponencial complexa no domínio do tempo está associada a um atraso da função $\delta(\omega)$ no domínio das freqüências, ou seja:

$$e^{i\omega_0 t}\Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

Funções generalizadas

Funções seno e cosseno eternas

Consideremos as funções $f_1(t) = \cos(\omega_0 t)$ e $f_2(t) = \sin(\omega_0 t)$.

Ambas essas funções não são sinais de energia, pois

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} [\cos(\omega_0 t)]^2 dt = \infty$$

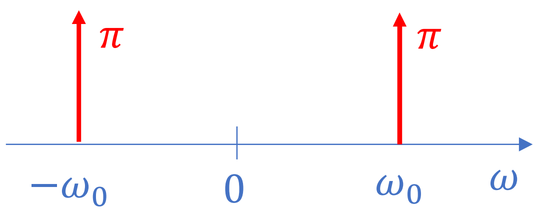
o que impossibilita obter suas transformadas de Fourier a partir da equação de análise. No entanto, descrevendo-as em termos de exponenciais complexas, ou seja,

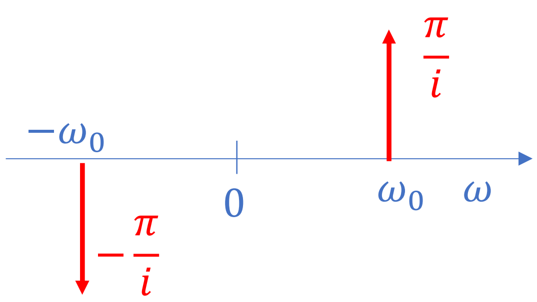
$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)$ e $\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)$

identificamos, imediatamente, os pares de Fourier

$\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$ e $\sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow \frac{\pi}{i}[\delta(\omega - \omega_0) - (\omega + \omega_0)]$

Os gráficos dessas transformadas são apresentados a seguir.





Funções generalizadas

Funções periódicas

Essas funções são eternas; logo, têm energia infinita.
Seja $f(t) = f_p(t)$ uma função periódica com período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$
Essa função pode ser representada por uma série de Fourier, ou seja:

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_p(n) e^{in\;\;{}_0 t}$$

Podemos interpretar $f_p(t)$ como uma função generalizada – soma de exponenciais complexas multiplicadas por coeficientes. Com isso, chega-se ao seguinte par de Fourier:

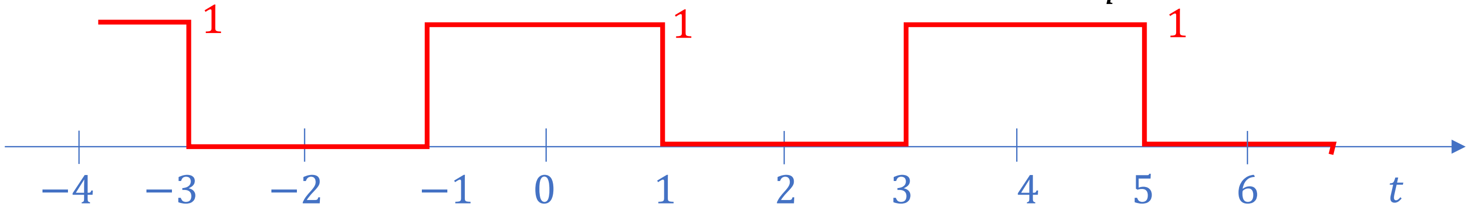
$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n} F_p(n) e^{in\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_p(n)\delta(\omega - n\omega_0)$$

Vê-se que a transformada de Fourier de uma função periódica é um **trem de impulsos** no domínio das freqüências, separados por intervalos ω_0 e afetados por pesos $2\pi F_p(n)$, em que $F_p(n) \in \mathbb{C}$.
A energia de $f_p(t)$ está concentrada nos harmônicos da série de Fourier correspondente.

Funções generalizadas

Exemplo de aplicação

Determine a transformada de Fourier do sinal periódico $f_p(t)$ ilustrado abaixo:



Lembrando que os coeficientes de Fourier de $f_p(t)$ são dados por $F_p(t) = \frac{1}{2}\text{sc}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, tem-se:

$$F(0) = \frac{1}{2} \quad F(\pm 1) = \frac{1}{\pi} \quad F(\pm 2) = 0 \quad F(\pm 3) = -\frac{1}{3\pi} \quad F(\pm 4) = 0 \quad F(\pm 5) = \frac{1}{5\pi}$$

A equação de síntese da série de Fourier nos fornece:

$$f_p(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{in\omega_0 t}$$

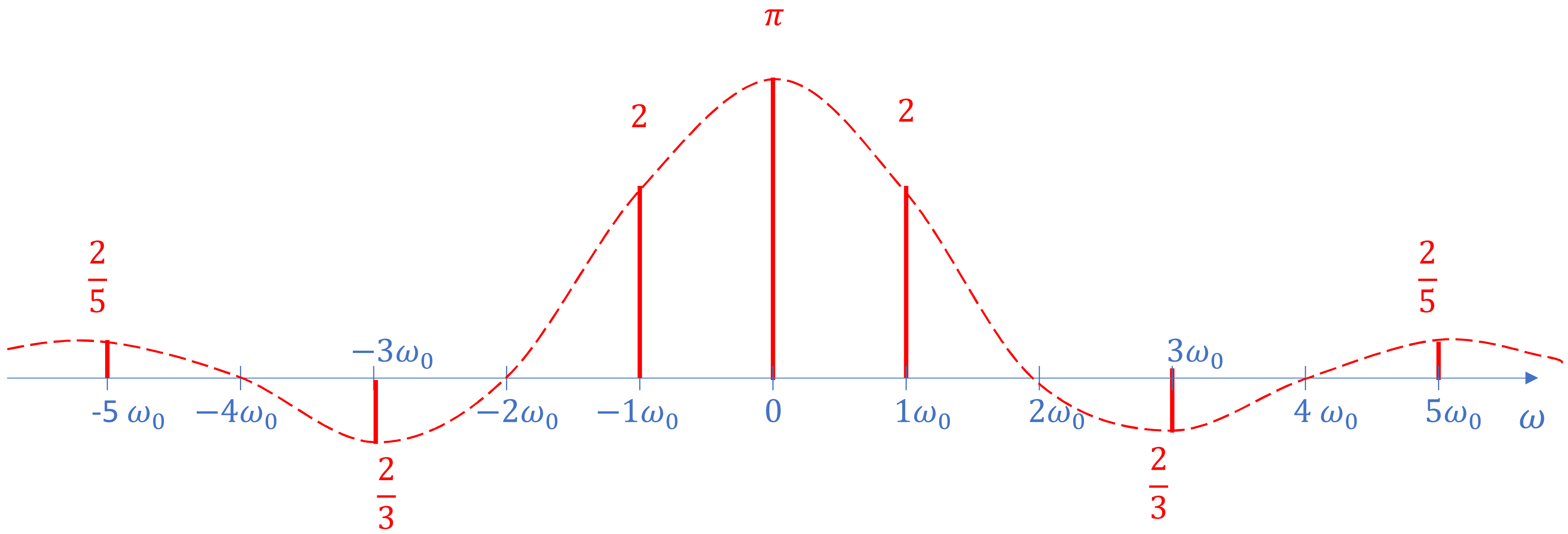
Assim, resulta que

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\text{sc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

Funções generalizadas

Funções periódicas (cont)

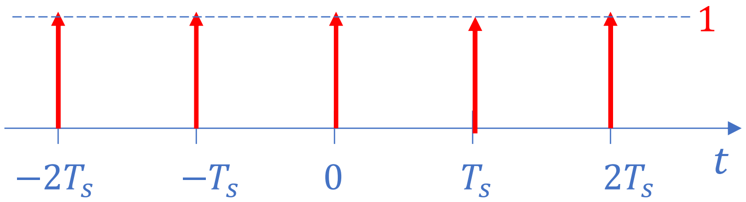
Na figura abaixo apresenta-se a transformada de Fourier da onda quadrada periódica.



Funções generalizadas

Trem impulsivo periódico ou pente de Dirac

Seja o sinal $f(t) = \delta_T(t)$, definido por uma sucessão de infinitos impulsos unitários espaçados entre si de T_s segundos, conforme ilustrado na figura.



Esse é um sinal periódico com energia infinita, o que impossibilita o uso da equação de análise para obtenção de sua transformada de Fourier. Por esse motivo, expressaremos $\delta_T(t)$ como:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

Os termos da série de Fourier do sinal periódico $f_p(t) = \delta_T(t)$ são dados por:

$$F_p(n) = \frac{1}{T_0} \int_{t=-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta_T(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta_T(t) e^{-in\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t) e^{-in\omega_s t} dt$$

com $\omega_s = 2\pi/T_s$

Funções generalizadas

Trem impulsivo periódico ou pente de Dirac (cont)

Aplicando-se a propriedade de seleção da função $\delta(t)$, tem-se:

$$F_p(n) = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} e^{-in\omega_s \cdot 0} \delta(t) dt = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t) dt = \frac{1}{T_s}$$

A partir desses coeficientes de Fourier, sintetizamos o pente de Dirac, como:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_p(n) e^{in\omega_0 t} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_s t}$$

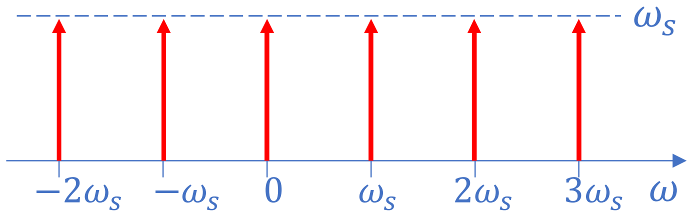
Em seguida, determinamos a transformada de Fourier de $\delta_T(t)$:

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_p(n) \delta(\omega - n\omega_s) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) = \omega_s \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) = \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega)$$

Vemos, portanto, que a transformada de Fourier de um pente de Dirac com freqüência T_s no domínio do tempo, é um pente de Dirac de freqüência ω_s no domínio das freqüências.

Chega-se, assim, ao par de Fourier:

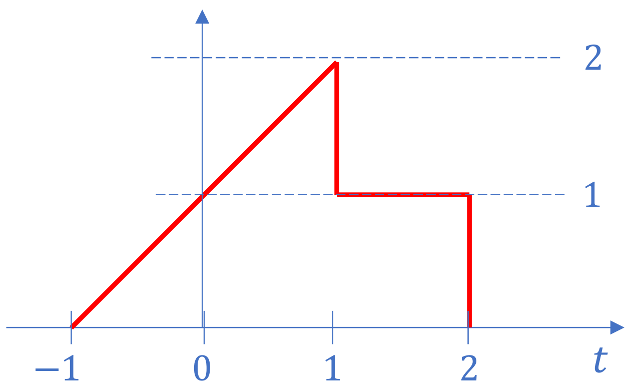
$\delta_{T_s}(t) \Leftrightarrow \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega)$



EXERCÍCIO

EXERCÍCIO 2

Considere o pulso $f(t)$ ilustrado na figura abaixo:



(a) Determine a transformada de Fourier de $f(t)$ nas formas cartesiana e polar e na forma de diagramas de Bode;

(b) Determine o espectro de energia de $f(t)$;

(c) Calcule a energia de $f(t)$.