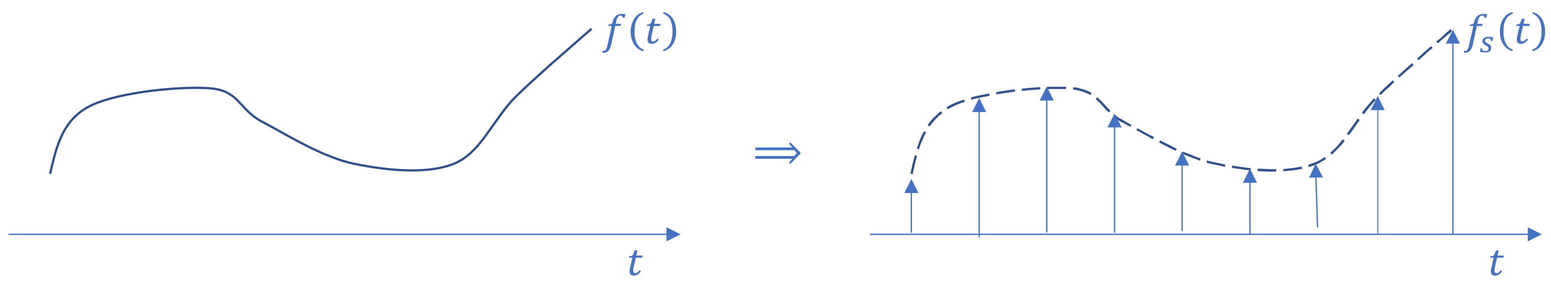
Processamento de Sinais aplicado à Engenharia Mecânica

Flavius P. R. Martins, Prof. Dr.
Flávio C. Trigo, Prof. Dr.

Amostragem

A amostragem é um processo de avaliação de uma função contínua em pontos discretos. Em geral, o intervalo de amostragem é constante.



No processo de amostragem há duas questões essenciais a serem respondidas:

1ª) qual deve ser a freqüência mínima de amostragem ?

2ª) é possível reconstruir o sinal original a partir do sinal discretizado ?

Amostragem

Amostragem impulsiva

Adotaremos a função generalizada $\delta(t)$ para realizar a discretização do sinal contínuo.
É importante destacar que, na prática, isso não é possível, pois $\delta(t)$ contém energia infinita.
Supondo que a taxa de amostragem seja constante, consideremos, então, o pente de Dirac

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

onde T_s é o intervalo de amostragem.
A amostragem do sinal $x(t)$ se faz através da multiplicação por $\delta_T(t)$, ou seja:

$$x_s(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

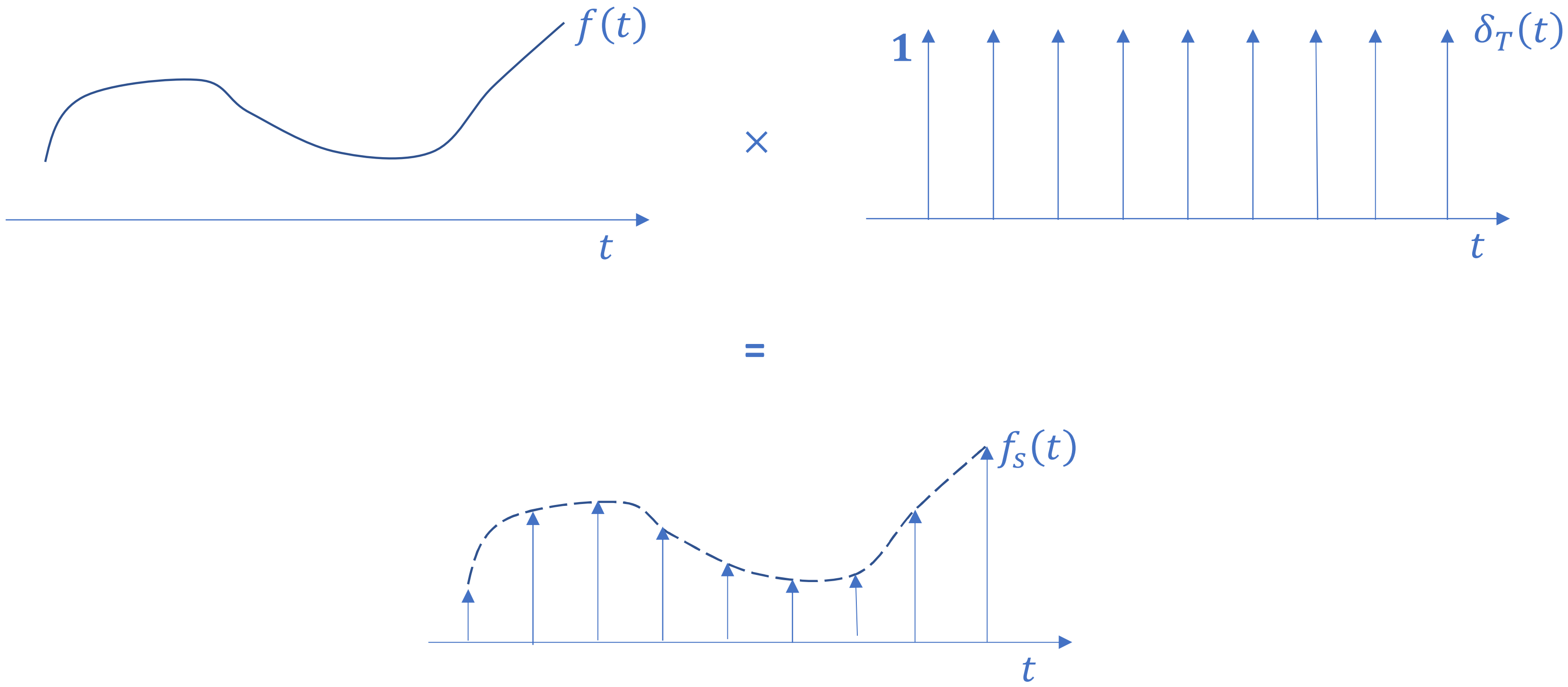
Aplicando-se **a propriedade seletiva** da função $\delta(t)$, resulta:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

Amostragem

Amostragem impulsiva (cont)

A figura abaixo ilustra o processo de **amostragem** ou **digitalização**:



Amostragem

Transformada de Fourier do sinal amostrado

Sabemos que a transformada de Fourier do pente de Dirac $\delta_T(t)$ é o pente de Dirac:

$$\delta_\Omega(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

onde $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ é a freqüência de amostragem.

Assim, a transformada de Fourier do produto $x(t) \cdot \delta_T(t)$ é a convolução de $X(\omega)$ por $\delta_\Omega(\omega)$, ou seja:

$$x(t) \cdot \delta_T(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \delta_\Omega(\omega) = X_s(\omega)$$ Transformada de Fourier do sinal digital

Aplicando-se a definição da operação de convolução, tem-se:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=-\infty}^{\infty} X(\theta) \left[\omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s - \theta) \right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\theta=-\infty}^{\infty} X(\theta)\delta(\omega - n\omega_s - \theta) d\theta$$

Amostragem

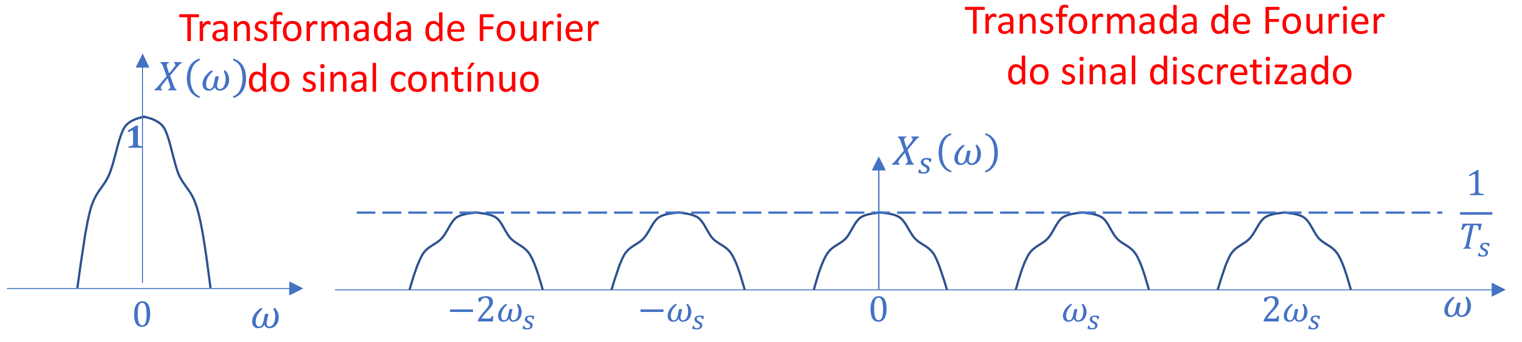
Transformada de Fourier do sinal amostrado (cont)

Aplicando-se, finalmente, a propriedade seletiva da função $\delta(t)$, resulta:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\theta=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)\delta(\omega - n\omega_s - \theta)d\theta = \frac{1}{T_s}\sum_{\theta=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

Este termo não depende de θ

Assim, concluímos que a transformada de Fourier de um sinal digitalizado é um conjunto de infinitas réplicas da transformada de Fourier de $x(t)$, equiespaçadas por um intervalo de freqüências ω_s e multiplicadas por um fator de escala $1/T_s$.
A figura abaixo ilustra esse fato:



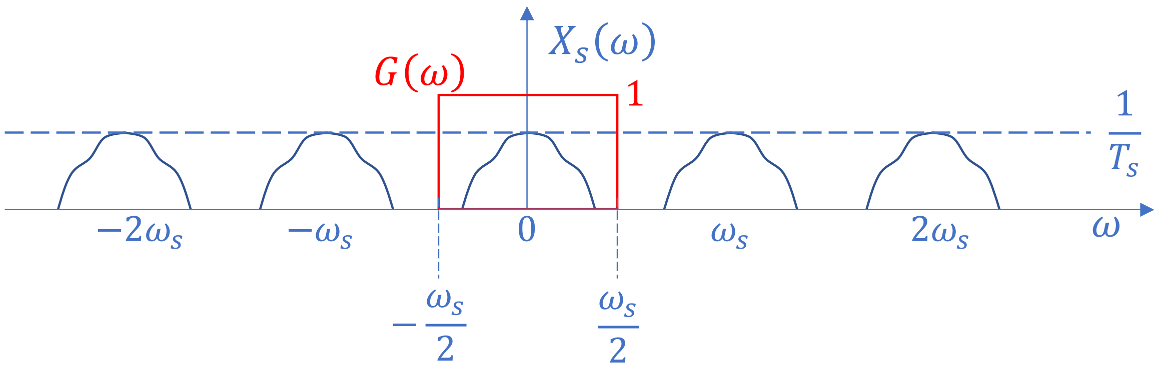
Amostragem

Transformada de Fourier do sinal amostrado (cont)

É fácil notar que a transformada de Fourier do sinal contínuo $x(t)$ pode ser recuperada aplicando-se um filtro passa-baixa ideal

$$G(\omega) = \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) = \begin{cases} 1 \text{ para } |\omega| < \dfrac{\omega_s}{2} \\ 0 \text{ para} |\omega| \geq \dfrac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

A figura abaixo ilustra essa operação.



Amostragem

Transformada de Fourier do sinal amostrado (cont)

Multiplicando-se $X_s(\omega)$ por $G(\omega)$ obtém-se:

$$X_s(\omega) \cdot G(\omega) = \left[\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)\right] \cdot \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) = \frac{1}{T_s} X(\omega)$$

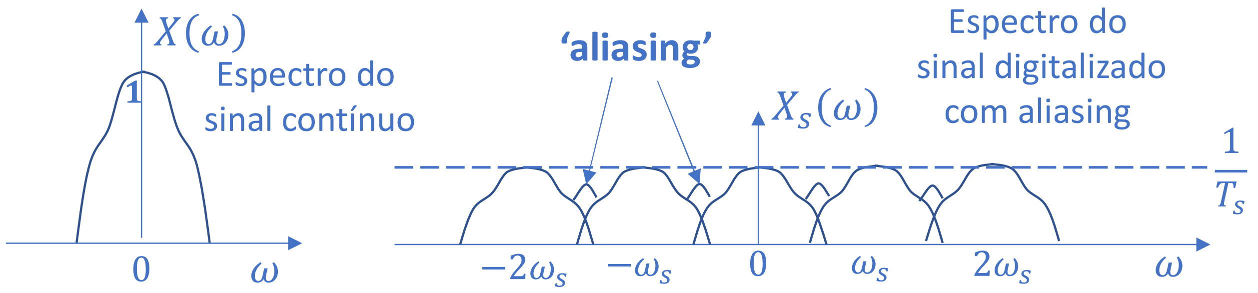
Logo, aplicando-se a transformada de Fourier inversa, resulta:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{T_s} X(\omega)\right\} = \frac{1}{T_s} x(t)$$

Amostragem

Aliasing

Dependendo da taxa de amostragem utilizada, o espectro do sinal amostrado pode exibir um fenômeno denominado ‘**aliasing**’, o qual pode ser facilmente explicado através da figura a seguir:



É importante destacar que a aplicação da transformada inversa de Fourier de $X_s(\omega) \cdot \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)$ **<u>não</u>** irá recuperar o sinal $\frac{1}{T_s}x(t)$, mas uma versão corrompida do mesmo.

Amostragem

Teorema de Nyquist

Seja um sinal $x(t)$ com espectro de magnitude $X(\omega)$ cuja faixa de freqüência é limitada ao intervalo $[-\omega_{max}, \omega_{max}]$ e seja $x_s(t)$ a versão digitalizada de $x(t)$. Em tal caso, pode-se reconstruir perfeitamente $x(t)$ a partir de $x_s(t)$ se e somente se a freqüência de amostragem satisfizer à inequação
$\omega_s > 2\omega_{max}$ ou, o que é o equivalente, $f_s > 2f_{max}$
A freqüência $f_c = 2f_{max}$ é chamada de **freqüência de Nyquist**.

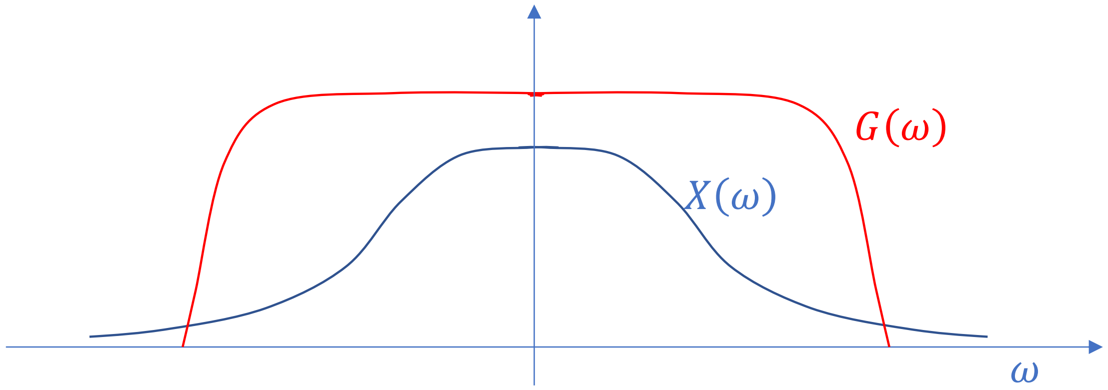
É importante destacar que:

- Sinais de energia (sinais reais) têm duração finita e suas transformadas de Fourier abrangem um intervalo **infinito** de freqüências.
- Sinais reais digitalizados sempre exibem algum nível de 'aliasing'.
- Aumentando-se a freqüência de amostragem ω_s, diminui-se o nível de 'aliasing', permitindo, assim, que o sinal contínuo seja reconstruído de forma quase perfeita.
- A freqüência de amostragem deve ser sempre superior a f_c. (No caso de música digital, é cerca de 5% superior a f_c, por exemplo)

Amostragem

Condicionamento do sinal

Quando a faixa de freqüências do sinal $x(t)$ não é limitada e a freqüência de amostragem ω_s não é muito grande, torna-se necessário submeter $x(t)$ a um filtro passa-baixa de **condicionamento** antes de se realizar a sua digitalização.
Esse processo introduzirá pequenas alterações no sinal, mas evitará degradações piores decorrentes do 'aliasing'.
A figura abaixo ilustra a etapa de condicionamento do sinal:



Amostragem

Exemplo de aplicação: Digitalização de sinal

Consideremos a digitalização do sinal definido analiticamente por $x(t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{sc}(t)$

Examinaremos a transformada de Fourier desse sinal partindo do par de Fourier

$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \cdot \mathrm{sc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

e obtendo, por dualidade, o par

$$\mathrm{sc}(t\tau) \Leftrightarrow \frac{1}{\tau}\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{2\tau}\right)$$

Adotando-se $\tau = 1$, resulta:

$$\mathrm{sc}(t) \Leftrightarrow \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Assim, tem-se:

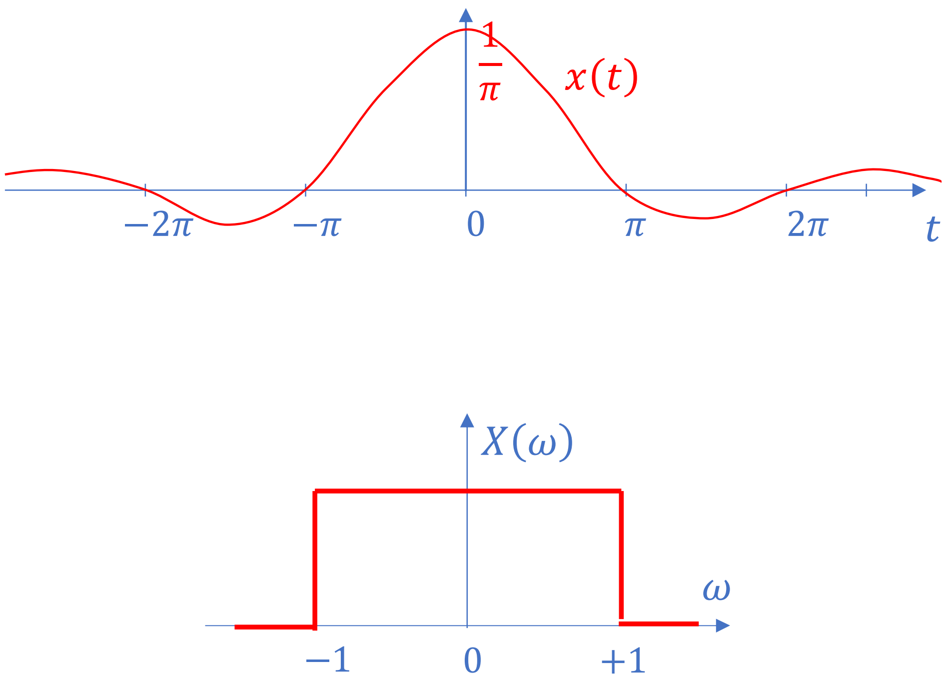
$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi}\mathrm{sc}(t)\right\} = \pi \cdot \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Vê-se, portanto, que **a faixa de freqüências que compõem o sinal $x(t)$ é limitada**: $|\omega| < \tau = 1$

Amostragem

Exemplo de aplicação: digitalização de sinal (cont)

Os gráficos de $x(t)$ e de sua transformada de Fourier são apresentados na figura abaixo.



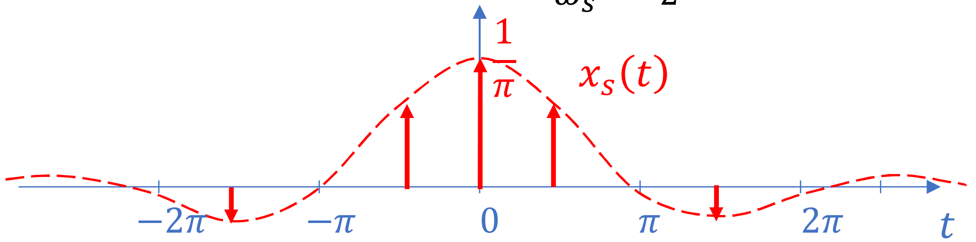
ω

Amostragem

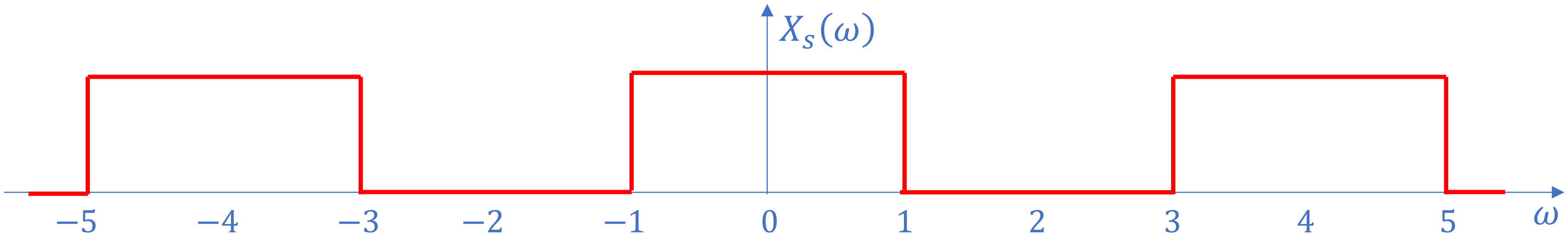
Exemplo de aplicação: digitalização de sinal (cont)

Amostraremos $x(t)$ a uma taxa de amostragem superior a $\omega_c = 2\omega_{max} = 2$, respeitando, assim, o Teorema de Nyquist.

Tomando-se, por exemplo, $\omega_s = 4$, ou seja, $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{\pi}{2}$, gera-se o seguinte sinal digital:



De acordo com o Teorema da Convolução, o espectro de magnitude de $x_s(t)$ é o resultado da convolução de $X(\omega)$ com o pente de Dirac $\delta_\Omega(\omega)$ conforme ilustrado na figura a seguir



Vê-se, portanto, que **não ocorre aliasing**, uma vez que se respeitou o Teorema de Nyquist; logo, o sinal contínuo poderá ser perfeitamente reconstruído eliminando-se as réplicas de $X(\omega)$ e aplicando-se em seguida a transformada de Fourier inversa.

Amostragem

Reconstrução de sinal digital

Consideremos o sinal digital arbitrário definido por

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

Seqüência de impulsos multiplicados por constantes

Para determinar a transformada de Fourier desse sinal, lembremo-nos da propriedade do **deslocamento no tempo**:

$$\delta(t - nT_s) \Leftrightarrow e^{-i\omega nT_s}$$

Com isso, pode-se escrever:

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-i\omega nT_s}$$

Espectro (contínuo) do sinal discreto: seqüência de réplicas do espectro do sinal contínuo correspondente

Filtremos agora o sinal **digital** $x_s(t)$ utilizando um filtro passa-baixa ideal dado por

$$G(\omega) = \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)$$

de modo a eliminar as réplicas do espectro do sinal contínuo $x(t)$:

$$Y(\omega) = X_s(\omega) \cdot G(\omega)$$

Espectro (contínuo) do sinal **contínuo**

Amostragem

Reconstrução de um sinal digital (cont)

O espectro do sinal filtrado por $G(\omega)$ (ou seja, o espectro do sinal **contínuo**) será, então:

$$Y(\omega) = X_s(\omega) \cdot G(\omega) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-i\omega nT_s}\right] \cdot \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)$$

Finalmente, para determinar $y(t)$ aplica-se a equação de síntese, isto é:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-i\omega nT_s}\right] \cdot \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-i\omega nT_s}\right] \cdot \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{i\omega(t-nT_s)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\omega_s \frac{e^{i\frac{\omega_s}{2}(t-nT_s)} - e^{-i\frac{\omega_s}{2}(t-nT_s)}}{2i\left[\frac{1}{2}\omega_s(t-nT_s)\right]} = \frac{1}{T_s} \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT_s)\mathrm{sc}\left[\frac{1}{2}\omega_s(t-nT_s)\right]$$

Amostragem

Reconstrução de sinal digital (cont)

Sabemos que a transformada de Fourier de um sinal digital filtrado por um filtro passa-baixa é a transformada de Fourier do sinal contínuo multiplicada por um fator de escala, ou seja,

$$X_s(\omega) \cdot G(\omega) = \frac{1}{T_s} X(\omega)$$

de modo que, no domínio do tempo, tem-se:

$$y(t) = \frac{1}{T_s} x(t)$$

Logo, resulta:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \mathrm{sc}\left[\frac{1}{2}\omega_s(t - nT_s)\right]$$

Concluímos, portanto, que o sinal contínuo $x(t)$, reconstruído a partir do sinal digital $x_s(t)$, é a **soma de infinitas funções sinc**, cada qual multiplicada por uma constante.

Amostragem

Amostragem baseada em função periódica

Ao invés de utilizar um pente de Dirac para digitalizar o sinal contínuo, pode-se fazê-lo, igualmente, por meio de uma função periódica $f_p(t)$. Para tanto, basta representar essa função por meio de uma série de Fourier:

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_p(n) e^{in\quad {}_s t}$$

O sinal digital será, então, dado por:

$$x_s(t) = x(t) \cdot f_p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_p(n) e^{in\quad {}_s t}$$

Da propriedade de deslocamento no domínio das freqüências sabemos que

$x(t)e^{in\quad {}_s t} \Leftrightarrow X(\omega - n\omega_s)$

Assim, concluímos que a transformada de Fourier do sinal digital será

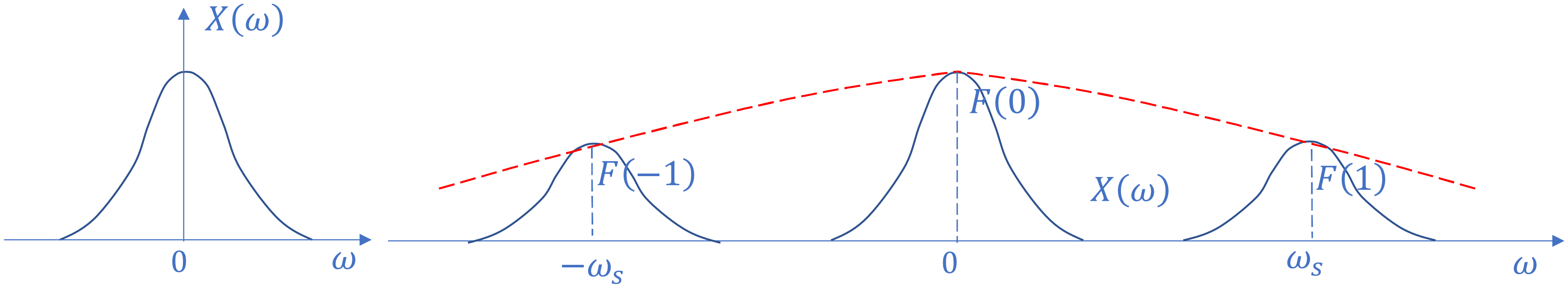
$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_p(n) X(\omega - n\omega_s)$$

Ou seja, uma sucessão de réplicas do espectro do sinal contínuo original, cada qual multiplicada pelo respectivo coeficiente de Fourier da função periódica $f_p(t)$

Amostragem

Amostragem baseada em função periódica (cont)

Nas figuras a seguir apresentam-se o espectro de magnitude de $x(t)$ e o espectro de magnitude do sinal digital $x_s(t)$ amostrado por uma função periódica $f_p(t)$.

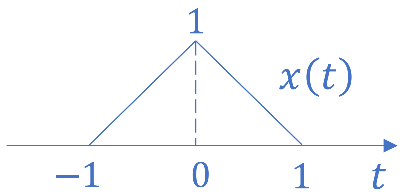


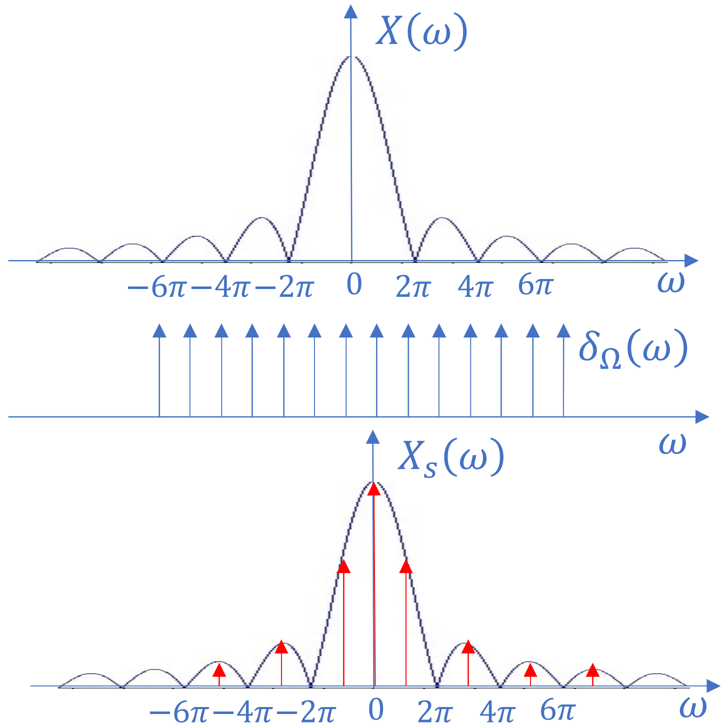
Para reconstruir $x(t)$ a partir de $x_s(t)$ basta aplicar um filtro passa baixa de reconstrução e aplicar ao sinal filtrado a transformada inversa de Fourier.

Amostragem

Amostragem no domínio das freqüências

Amostrando-se a transformada de Fourier de um sinal por meio de um pente de Dirac, obtém-se, no domínio do tempo, um **sinal periódico** constituído por réplicas equiespaçadas do sinal original. Consideremos, a título de exemplo, o sinal $x(t)$ e o seu espectro de magnitude $|X(\omega)|$ abaixo ilustrados.





Adotando-se um trem de impulsos para a digitalização, ou seja,

$$\delta_\Omega(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

obtém-se $X_s(\omega)$ conforme ilustrado ao lado:

Amostragem

Amostragem no domínio das freqüências (cont)

Detalhemos o procedimento anteriormente esboçado. Digitalizando-se o espectro de $x(t)$ obtém-se:

$$X_s(\omega) = X(\omega)\left[\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)\right]$$

Multiplicação de duas funções no domínio das freqüências

Aplicando-se a propriedade seletiva da função δ tem-se:

$$X_s(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)$$

Lembremos agora do par de Fourier

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \Leftrightarrow \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

Assim, a transformada de Fourier inversa de $X_s(\omega)$ será:

$$x_s(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(t)\delta_T(t-\tau) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0 - \tau)\right] d\tau$$

Convolução de duas funções no domínio do tempo

Amostragem

Amostragem no domínio das freqüências (cont)

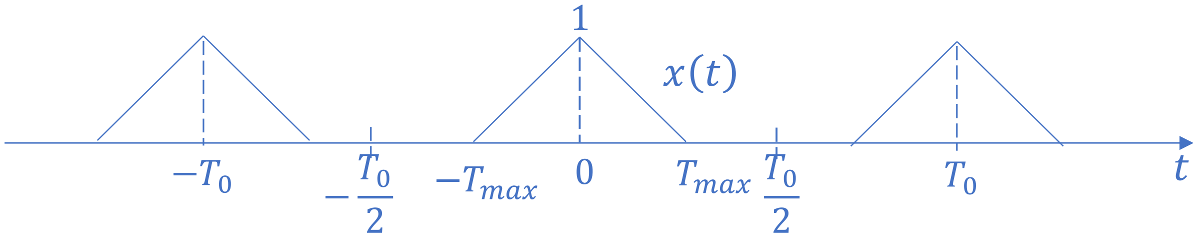
Aplicando-se, em seguida, a propriedade seletiva, obtém-se

$$x_s(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0)\delta(t - nT_0 - \tau) \right] d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nt_0) \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0 - \tau) d\tau$$

de onde resulta:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0)$$

Conclui-se, assim, que, ao se digitalizar a transformada de Fourier de um sinal contínuo $x(t)$, obtém-se, no domínio do tempo, uma **função periódica** de réplicas de $x(t)$.



Vê-se que, no domínio do tempo não ocorre aliasing se e somente se $T_0 > 2T_{max}$, onde $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Transformada de Fourier discreta

Introdução

A **DFT** (Discrete Fourier Transform) é a versão da Transformada de Fourier que desperta maior interesse, pois é a que se pode implementar numericamente. A **FFT** (Fast Fourier Transform) é um algoritmo computacional extremamente eficiente, da autoria de Cooley e Tukey (1965), mas que já havia sido previamente concebido por Gauss (1805), Yates (1932) e Danielsson e Lanczos (1942).

Exponenciais complexas discretas

- Série de Fourier: a base de exponenciais complexas pertence ao conjunto

$S_1 = \left\{e^{in\quad{}_0 t}, n \in \mathbb{Z}\right\}$, com t **contínuo**

- Transformada de Fourier: a base de exponenciais complexas pertence ao conjunto

$S_2 = \left\{e^{i\omega\quad}, \omega \in \mathbb{R}\right\}$, com t **contínuo**

- Transformada Discreta de Fourier: a base de exponenciais complexas, de ordem N, pertence ao conjunto

$S = \left\{e^{i2\pi\frac{m}{N}}, m, N \in \mathbb{Z}\right\}$, com m **discreto**

Mostraremos adiante que S é um conjunto de **funções ortogonais**.

Transformada de Fourier discreta

Antes de prosseguir, necessitaremos analisar com cuidado a operação **resto** da divisão de inteiros.

A operação 'resto'

Calcularemos o resto da divisão de 2 inteiros a e N através das seguintes regras:

- $a > 0 \Longrightarrow \begin{matrix} a & \div N \\ c & b \end{matrix} = c$, tal que $c = a - b \times N$
- $a < 0 \Longrightarrow \begin{matrix} a & \div N \\ c & b \end{matrix} = c$, tal que $c = a - b \times N + N$

Exemplos:

- $a = 13, N = 5 \Longrightarrow c = 13 - 2 \times 5 = 3$
- $a = -13, N = 5 \Longrightarrow c = -13 - (-2 \times 5) + 5 = 2$

Doravante, designaremos a operação 'resto da divisão de a por N como: $|a|_N$

Consideremos, então, a operação $|m|_8$ sobre o conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$):

m	⋯	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯
$\|m\|_8$	⋯	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	⋯

Analisando-se agora a exponencial complexa $e^{i2\pi\frac{m}{N}}$, com $N = 8$,vemos que, à medida que m varia de 1 a 8, a exponencial retorna ao ponto de partida.

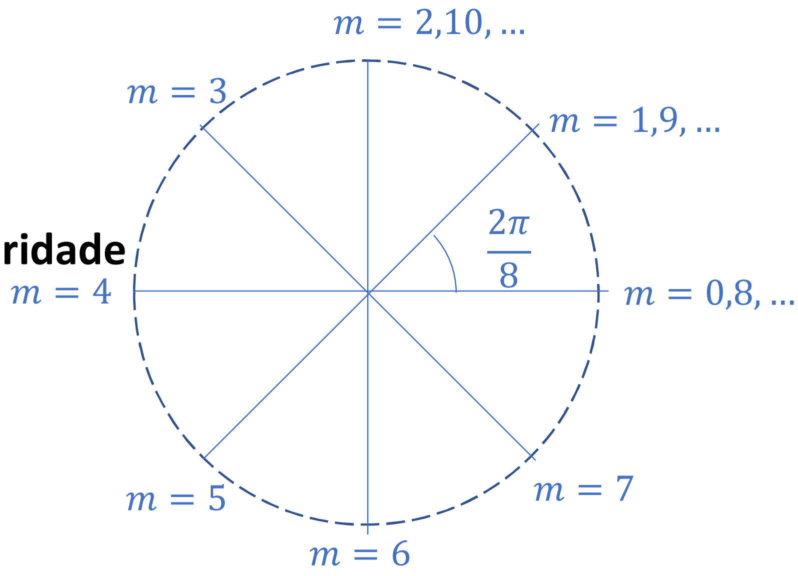
Transformada de Fourier discreta

A operação ‘resto’ (cont)

Analisando-se a figura ao lado, verificamos a seguinte igualdade:

$e^{i2\pi\frac{m}{N}} = e^{i2\pi\frac{|m|_N}{N}}$

A equação acima expressa **a propriedade da circularidade** das exponenciais complexas discretas.



Exemplo: Determinar $e^{i2\pi\frac{53}{8}}$

Sabemos que $|53|_8 = 5$; logo, $e^{i2\pi\frac{53}{8}} = e^{i2\pi\frac{5}{8}}$

Lema: Se q e r pertencem ao conjunto $\{0, \cdots, N-1\}$ e $q \neq r$ e $p = q - r$, então $p \notin \{-N, 0, N\}$, ou seja, $|p|_N \neq 0$

Verificação:

Suporemos que $q, r \in \{0,1,2,3\}$ e seja $p = q - r$, e $q \neq r$.

Notemos que $p \in \{-3,-2,-1,1,2,3\}$ e que $p \notin \{-4,0,4\}$, ou seja, $|p|_4 \neq 0$

Transformada de Fourier discreta

Produto escalar de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ complexos

Esse produto é definido como

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}a_k b_k^*$$

onde

$$\vec{a}=\mathrm{Re}(\vec{a})+i\cdot\mathrm{Im}(\vec{a})=\left(\mathrm{Re}(a_0)+i\cdot\mathrm{Im}(a_0),\mathrm{Re}(a_1)+i\cdot\mathrm{Im}(a_1),\cdots,\mathrm{Re}(a_{N-1})+i\cdot\mathrm{Im}(a_{N-1})\right)$$

$$\vec{b}=\mathrm{Re}\left(\vec{b}\right)+i\cdot\mathrm{Im}\left(\vec{b}\right)=\left(\mathrm{Re}(b_0)+i\cdot\mathrm{Im}(b_0),\mathrm{Re}(b_1)+i\cdot\mathrm{Im}(b_1),\cdots,\mathrm{Re}(b_{N-1})+i\cdot\mathrm{Im}(b_{N-1})\right)$$

O resultado dessa operação é, portanto, um **número complexo**.

Consideremos o seguinte exemplo:

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}1+i\\2-i\\i\end{bmatrix}\quad\vec{b}=\begin{bmatrix}i\\1+2i\\-i\end{bmatrix}$$

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\sum_{k=0}^{2}a_k b_k^*=(1+i)\cdot(-i)+(2-i)\cdot(1-2i)+(i)\cdot(i)=-6i$$

Naturalmente, $\vec{a},\vec{b}$ são ortogonais se $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$.

Transformada de Fourier discreta

A exponencial complexa W

A partir deste ponto, adotaremos a notação

$W = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ (deve-se frisar que o expoente de W é negativo)

de onde resultam

- $e^{-i2\pi\frac{k}{N}} = W^k$
- $e^{i2\pi\frac{k}{N}} = W^{-k} = \left(W^k\right)^*$

Tomando-se, por exemplo, $N = 4$, obtêm-se:

- $W^0 = 1$
- $W^1 = e^{-i\frac{2\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i$
- $W^2 = e^{-i\pi} = \cos\pi - i\sin\pi = -1$
- $W^3 = e^{-i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2} = i$

Transformada de Fourier discreta

Teorema da ortogonalidade das exponenciais complexas discretas

Sejam q e r dois inteiros pertencentes ao conjunto $\{0,1,\cdots,N-1\}$
Então as exponenciais complexas discretas de ordem N satisfazem à condição de ortogonalidade:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi\frac{qk}{N}} \cdot \left(e^{i2\pi\frac{rk}{N}}\right)^* = \begin{cases} 0 \text{ se } q \neq r \\ 1 \text{ se } q = r \end{cases}$$

Alternativamente, podemos escrever:

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{-kq} \cdot \left(W^{-kr}\right)^* = \begin{cases} 0 \text{ se } q \neq r \\ 1 \text{ se } q = r \end{cases}$$

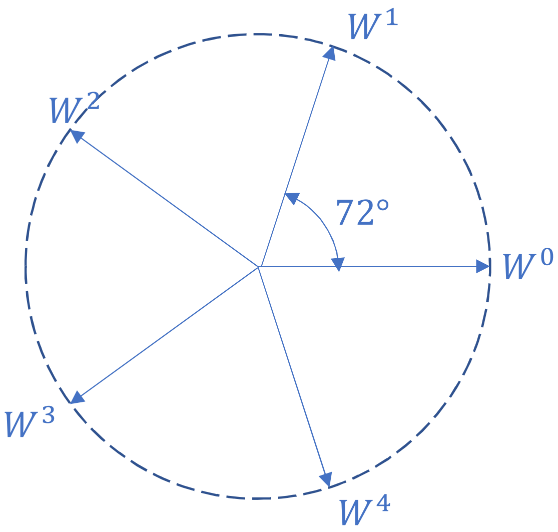
Antes de demonstrarmos esse teorema, analisaremos o seguinte exemplo:

Exemplo
Seja $N = 5$ e consideremos os dois casos gerais: $q \neq r$ e $q = r$
<u>Caso 1</u>: $q \neq r$. Como $q, r \in \{0,1,2,3,4\}$ admitiremos, por exemplo, $q = 2$ e $r = 3$
Calcularemos agora as componentes $a_k, b_k, k = 0, \cdots, 4$ dos vetores complexos $\vec{a}, \vec{b}$.

Transformada de Fourier discreta

Teorema da ortogonalidade das exponenciais complexas discretas (cont)

k	$a_k = W^{-qk}$	$b_k = W^{-rk}$
0	W^0	W^0
1	$W^{-2\times 1} = W^{-2}$	$W^{-3\times 1} = W^{-3}$
2	$W^{-2\times 2} = W^{-4}$	$W^{-3\times 2} = W^{-6}$
3	$W^{-2\times 3} = W^{-6}$	$W^{-3\times 3} = W^{-9}$
4	$W^{-2\times 4} = W^{-8}$	$W^{-3\times 4} = W^{-12}$



O produto escalar $(\vec{a}, \vec{b})$ é, portanto:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{k=0}^{4} W^{-2k}\left(W^{-3k}\right)^* = W^0W^0 + W^{-2}W^3 + W^{-4}W^6 + W^{-6}W^9 + W^{-8}W^{12} =$$

$$= 1 + W + W^2 + W^3 + W^4 = 1 + e^{\frac{2\pi}{5}} + e^{\frac{4\pi}{5}} + e^{\frac{6\pi}{5}} + e^{\frac{8\pi}{5}} = 1 + \cos 72° + i\sin 72° + \cos 144° + i\sin 144° + \cos 216° + i\sin 216° + \cos 288° + i\sin 288° = \mathbf{0}$$

Na figura acima os componentes dessa somatória são representados como fasores. Vê-se que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais.

Transformada de Fourier discreta

Teorema da ortogonalidade das exponenciais complexas discretas (cont)

Caso 2: $q = r$. Admitiremos, por exemplo, $q = 2$.

Calcularemos, agora, as componentes dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

k	$a_k = W^{-qk}$	$b_k = W^{-rk}$
0	W^0	W^0
1	$W^{-2\times 1} = W^{-2}$	$W^{-2\times 1} = W^{-2}$
2	$W^{-2\times 2} = W^{-4}$	$W^{-2\times 2} = W^{-4}$
3	$W^{-2\times 3} = W^{-6}$	$W^{-2\times 3} = W^{-6}$
4	$W^{-2\times 4} = W^{-8}$	$W^{-2\times 4} = W^{-8}$

O produto escalar $(\vec{a}, \vec{b})$ é, portanto:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{k=0}^{4} W^{-2k}\left(W^{-2k}\right)^* = \sum_{k=0}^{4} W^{-2}\ W^{2k} = \sum_{k=0}^{4} W^0 = 5 \neq 0$$

Transformada de Fourier discreta

Teorema da ortogonalidade das exponenciais complexas discretas (cont)

<u>Demonstração</u>

Desenvolvendo a expressão do produto escalar $(\vec{a}, \vec{b})$, tem-se:

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{-q} \left(W^{-rk}\right)^* = \sum_{k=0}^{N-1} W^{-(q-r)k} = \sum_{k=0}^{N-1} W^{-pk}$$

com $p = q - r$

Temos agora dois casos a considerar:

<u>Caso 1</u>: $q \neq r$, $q, r \in \{0,1,\cdots,N-1\}$, $p \notin \{-N, 0, N\}$, ou seja: $|p|_N \neq 0$

Assim, tem-se:

Progressão geométrica

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{-pk} = \sum_{k=0}^{N-1} (W^{-p})^k = \frac{1-(W^{-p})^N}{1-W^{-p}} = \frac{1-W^{-pN}}{1-W^{-p}} = \frac{1-\left(e^{i2\pi\frac{p}{N}}\right)^N}{1-e^{i2\ \frac{p}{N}}} = \frac{1-e^{i2\pi p}}{1-e^{i2\pi\frac{p}{N}}} =$$

$$= \frac{1-(\cos 2\pi p + i\sin 2\pi p)}{1-\left(\cos 2\pi\frac{p}{N} + i\,\sin 2\pi\,\frac{p}{N}\right)} = \frac{1-1}{1-\left(\cos 2\pi\frac{p}{N} + i\,\sin 2\pi\,\frac{p}{N}\right)}$$

Transformada de Fourier discreta

Teorema da ortogonalidade das exponenciais complexas discretas (cont)

Como $\boldsymbol{p \notin \{-N, 0, N\}}$ concluímos que $\left(\cos 2\pi\frac{p}{N} + i \sin 2\pi \frac{p}{N}\right) \neq 1$

Logo, resulta que

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{-qk}\left(W^{-rk}\right)^{*} = 0$$

para o caso em que $q \neq r$

Caso 2: $q = r$

Nesse caso, $p = q - r = 0$

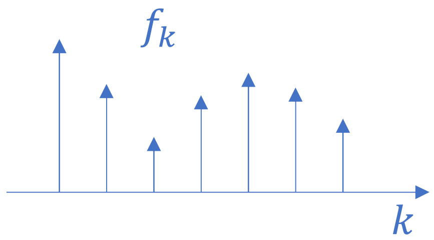
Logo, tem-se:

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{-pk} = \sum_{k=0}^{N-1} W^{0} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$$

E assim, fica demonstrado que **as exponenciais complexas discretas de ordem N são ortogonais entre si.**

Transformada de Fourier discreta

Equações de síntese e de análise



Seja $f_k, 0 \leq k \leq N-1$ uma função discreta complexa ou real (vide figura ao lado). Pretende-se expressar f_k como uma combinação linear de exponenciais complexas **discretas** da forma $e^{i2\pi\frac{nk}{N}}$

Já resolvemos um problema parecido com este: sintetizar uma função **periódica** de t através de uma combinação linear de exponenciais complexas **contínuas** da forma $e^{in\omega_0 t}$

ou seja, através de uma **série de Fourier**.

Afirmamos que f_k pode ser expressa como:

$$f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi\frac{nk}{N}}, 0 \leq k \leq N-1$$

Equação de Síntese: IDFT

Para determinar F_n multiplicamos a igualdade acima por $e^{-i2\pi\frac{mk}{N}}$, ou seja:

$$f_k e^{-i2\pi\frac{mk}{N}} = \left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi\frac{nk}{N}}\right] e^{-i2\pi\frac{mk}{N}}$$

Transformada de Fourier discreta

Equações de síntese e de análise (cont)

Somando, para $k = 0, \dots, N-1$, tem-se:

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi\frac{mk}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_k e^{i2\ \frac{nk}{N}}\right] e^{-i2\pi\frac{mk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_n \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi\frac{nk}{N}} e^{-i2\pi\frac{mk}{N}}\right]$$

Sabemos que as exponenciais complexas discretas são ortogonais, ou seja, que

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\ \frac{nk}{N}} \cdot \left(e^{i2\pi\frac{mk}{N}}\right)^* = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$$

Assim, concluímos que

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi\frac{mk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} F_m = F_m$$

Como m e n são símbolos arbitrários para o mesmo índice, resulta:

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi\frac{nk}{N}} \quad , 0 \leq n \leq N-1$$

Equação de análise: DFT

Transformada de Fourier discreta

Equações de síntese e de análise (cont)

Mostraremos agora que a DFT e a IDFT são reciprocamente inversas.
Suporemos, por absurdo, que a equação de síntese produza números g_k, com $g_k \neq f_k$.
Em seguida, mostraremos que $g_k = f_k$.
Assim, tem-se:

$$g_k = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n W^{-nk}}_{\text{Equação de síntese}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\underbrace{\left[\sum_{r=0}^{N-1} f_r W^{nr}\right]}_{\text{Análise de } F_n} W^{-nk} = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} f_r \sum_{n=0}^{N-1} W^{nr}\cdot\left(W^{nk}\right)^*$$

$r \neq k: 0$
$r = k: 1$

ou seja,

$$g_k = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} f_r = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k = f_k$$

Assim, fica demonstrado que **a DFT e a IDFT são reciprocamente inversas**, ou seja, que
$f_n \Leftrightarrow F_n$
constituem um par de Fourier

Transformada de Fourier discreta

Periodicidade da DFT e da IDFT

Consideremos a seqüência discreta de números complexos

$f_k = [f_0, f_1, \dots, f_{N-1}]$

e a equação de análise

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi\frac{nk}{N}} \quad ,0 \le n \le N-1$$

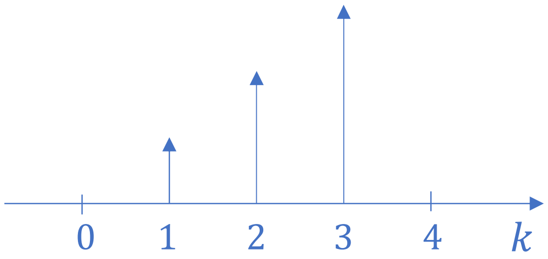
Notemos que, se $n \notin \{0, N-1\}$, as exponenciais $e^{-i2\pi\frac{nk}{N}}$ se repetem periodicamente com período N. Logo, os respectivos coeficientes F_n se repetem com período N econseqüentemente, a seqüência f_k gerada a partir da equação de síntese

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\ \frac{nk}{N}}$$

é uma seqüência periódica de período N.

Transformada de Fourier discreta

Exemplo de aplicação



Para o sinal discreto

$$f_k = \begin{cases} k, & 0 \leq k \leq 3 \\ 0, & k < 0 \ \text{ ou } k > 3 \end{cases}$$

(a) determine a DFT (F_n) ; (b) obtenha f_k a partir de F_n; (c mostre que f_k é uma combinação linear de exponenciais complexas.

<u>Resolução</u>

No caso, $N = 4$ e $\vec{f} = \{0,1,2,3\}$

Lembrando que $W = e^{-i2\pi\frac{1}{N}}$, escrevemos

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi\frac{nk}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{nk}$$

Para facilitar o cálculo, construímos a tabela a seguir:

Transformada de Fourier discreta

Exemplo de aplicação (cont)

n	F_n	$\sum_{k=0}^{3} f_k W^{nk}$	$\sum_{k=0}^{3} f_k W^{nk}$	$\sum_{k=0}^{3} f_k W^{nk}$
0	F_0	$f_0W^0 + f_1W^0 + f_2W^0 + f_3W^0 =$	$0+1+2+3$	6
1	F_1	$f_0W^0 + f_1W^1 + f_2W^2 + f_3W^3 =$	$0 + 1e^{-i\frac{2\pi}{4}} + 2e^{-i\frac{4\pi}{4}} + 3e^{-i\frac{6\pi}{4}}$	$-2+2i$
2	F_2	$f_0W^0 + f_1W^2 + f_2W^4 + f_3W^6 =$	$0 + 1e^{-i\frac{4\pi}{4}} + 2e^{-i\frac{8\pi}{4}} + 3e^{-i\frac{12\pi}{4}}$	-2
3	F_3	$f_0W^0 + f_1W^3 + f_2W^6 + f_3W^9 =$	$0 + 1e^{-i\frac{6\pi}{4}} + 2e^{-i\frac{12\pi}{4}} + 3e^{-i\frac{18}{4}}$	$-2-2i$

Assim, resulta: $\vec{F} = (6, -2+2i, -2, -2-2i)$

A partir da DFT sintetiza-se o sinal original através da equação de síntese:

$$f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\ \frac{nk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\ \frac{nk}{N}}$$

O cálculo numérico de f_k é apresentado a seguir:

Transformada de Fourier discreta

Exemplo de aplicação (cont)

k	f_k	$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n W^{nk}$	$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi\frac{nk}{N}}$	$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi\frac{nk}{N}}$
0	f_0	$\frac{1}{4}[F_0W^0 + F_1W^0 + F_2W^0 + F_3W^0] =$	$\frac{1}{4}[F_0 + F_1 + F_2 + F_3]$	0
1	f_1	$\frac{1}{4}[F_0W^0 + F_1W^{-1} + F_2W^{-2} + F_3W^{-3}] =$	$\frac{1}{4}\left[F_0 + F_1e^{i\frac{2\pi}{4}} + F_2e^{i\frac{4\pi}{4}} + F_3e^{i\frac{6\pi}{4}}\right]$	1
2	f_2	$\frac{1}{4}[F_0W^0 + F_1W^{-2} + F_2W^{-4} + F_3W^{-6}] =$	$\frac{1}{4}\left[F_0 + F_1e^{i\frac{4\pi}{4}} + F_2e^{i\frac{8\pi}{4}} + F_3e^{i\frac{12}{4}}\right]$	2
3	f_3	$\frac{1}{4}[F_0W^0 + F_1W^{-3} + F_2W^{-6} + F_3W^{-9}] =$	$\frac{1}{4}\left[F_0 + F_1e^{i\frac{6\pi}{4}} + F_2e^{i\frac{12}{4}} + F_3e^{i\frac{18}{4}}\right]$	3

Vê-se que a função discreta $f_k = [0,1,2,3]$ pode ser escrita como uma combinação linear de exponenciais complexas discretas:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{6}{4}\begin{bmatrix} W^0 \\ W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{bmatrix} + \frac{-2+2i}{4}\begin{bmatrix} W^{-0} \\ W^{-1} \\ W^{-2} \\ W^{-3} \end{bmatrix} + \frac{-2}{4}\begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-2} \\ W^{-4} \\ W^{-6} \end{bmatrix} + \frac{-2-2i}{4}\begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-3} \\ W^{-6} \\ W^{-9} \end{bmatrix}$$

Transformada de Fourier discreta

Séries de Fourier, Transformadas de Fourier e DFT

Traçando um paralelo com o caso contínuo, vemos que:

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega_0 t}$$

é a equação de síntese para sinais **periódicos** e $\left\{\dots, e^{i\cdot 0\cdot\omega_0 t}, e^{i\cdot 1\cdot\omega_0 t}, e^{i\cdot 2\cdot\omega_0 t}, \dots\right\}$ é o conjunto infinito de autofunções associadas a um sinal contínuo **periódico**.

$$f(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, dt$$

é a equação de síntese para sinais **não periódicos** e $\left\{e^{i\omega}\ , \omega \in \mathbb{R}\right\}$ é o conjunto infinito e inumerável de autofunções associadas a um sinal contínuo **não periódico**.

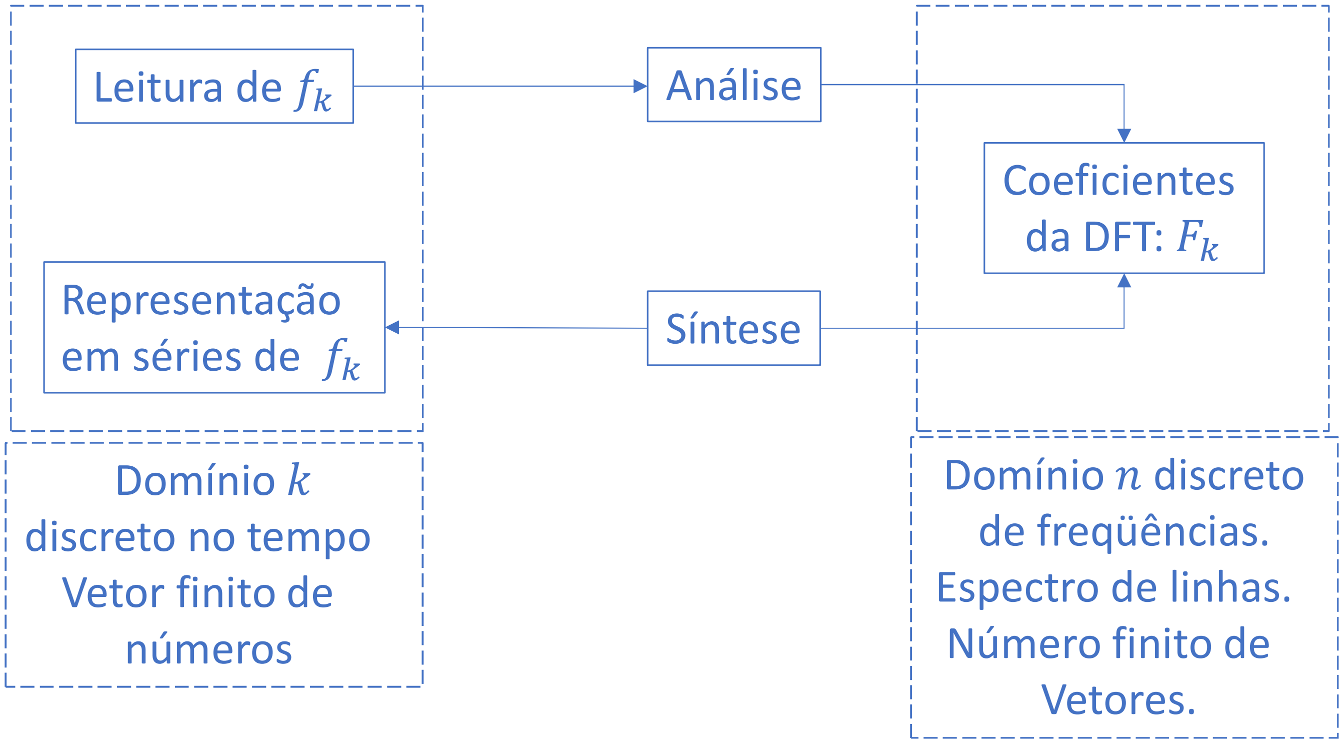
$$f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n W^{-n} \quad , 0 \le k \le N-1$$

é a equação de síntese para sinais **discretos** e $\left\{\begin{bmatrix} W^0 \\ W^1 \\ \vdots \\ W^{N-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-1} \\ \vdots \\ W^{-(N-1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-2} \\ \vdots \\ W^{-2(N-1)} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-(N-1)} \\ \vdots \\ W^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}\right\}$ é o conjunto finito de vetores de autofunções associadas a um sinal **discreto**.

Transformada de Fourier discreta

Esquema de cálculo da DFT e da IDFT

Chega-se, finalmente, ao seguinte esquema de cálculo da DFT e da IDFT:



É importante destacar que a DFT produz **aproximações** dos **coeficientes de Fourier** e das **transformadas de Fourier**.

Transformada de Fourier discreta

Propriedades da DFT

Consideremos o par de Fourier $f_k \Leftrightarrow F_n$

e a representação da DFT nas formas cartesiana e polar, ou seja:

- $F_n = A_n + iB_n$
- $F_n = |F_n|e^{i\theta_n}$ com

$$|F_n| = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}} \quad \theta_n = \tan^{-1}\frac{B_n}{A_n}$$

Valem, então, as seguintes propriedades:

- $F_n^* = F_{-n}$
- Se f_k é real e possui uma componente par f_k^P e uma componente ímpar f_k^I então:

  $F_k^P \Leftrightarrow A_n$ e $F_k^I \Leftrightarrow iB_n$
- F_n é real e par se e somente se f_k é par.
- F_n é puramente imaginária e ímpar se e somente se f_k é ímpar.
- Simetria: Essa propriedade será examinada através de um exemplo.

Consideremos $N = 8$. Nesse caso, os valores F_n se igualam para os índices n mostrados abaixo:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

Transformada de Fourier discreta

Propriedades da DFT (cont)

Justaporemos esses valores, obtendo a seqüência

-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Consideraremos, então, o intervalo central $\left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right]$, ou seja

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Notemos então, que:

$F_0^* = F_0 \quad F_1^* = F_{-1} \quad F_2^* = F_{-2} \quad F_3^* = F_{-3} \quad F_4^* = F_{-4}$

$F_{-1} = F_7 \quad F_{-2} = F_6 \quad F_{-3} = F_5 \quad F_{-4} = F_4$

Logo, resulta que:

$F_0^* = F_0 \quad F_1^* = F_7 \quad F_2^* = F_6 \quad F_3^* = F_5 \quad F_4^* = F_4$

- Soma nula: (Facilmente demonstrável usando o círculo trigonométrico)

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi\frac{n}{N}} = 0$$

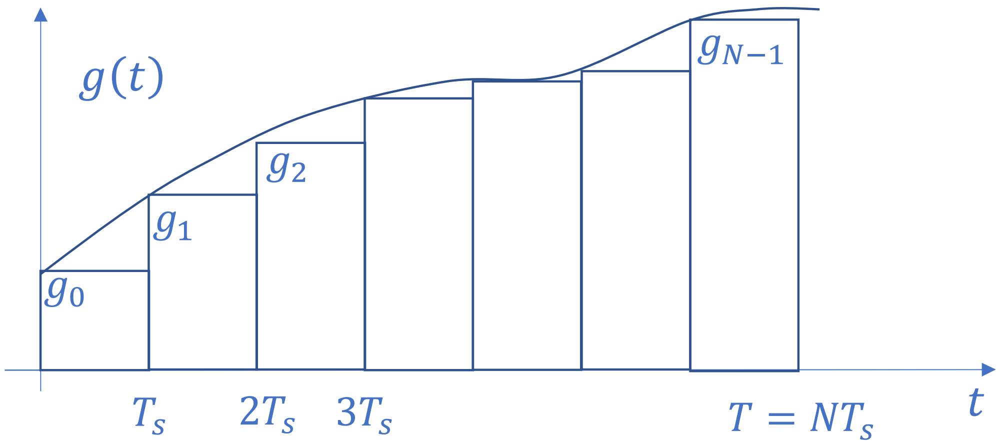
Transformada de Fourier discreta

DFT operando como um estimador

A DFT pode ser aplicada para obter **estimativas** da transformada de Fourier e das séries de Fourier.
Chamaremos doravante de **CFT** às ferramentas matemáticas aplicáveis a sinais **contínuos**, produzindo as séries e transformadas de Fourier.

Integração numérica retangular

Consideremos determinar a área I sob o gráfico de $g(t)$, abaixo ilustrado.



Naturalmente, I é dada por:

$$I = \int_{t=0}^{T} g(t)dt$$

Transformada de Fourier discreta

Integração numérica retangular (cont)

Consideraremos o intervalo T_s e calcularemos uma estimativa da área sob $g(t)$ a partir da fórmula:

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} g_k T_s$$

Concluímos, portanto, que

$$I = \int_{t=0}^{T} g(t)dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} g_k T_s$$

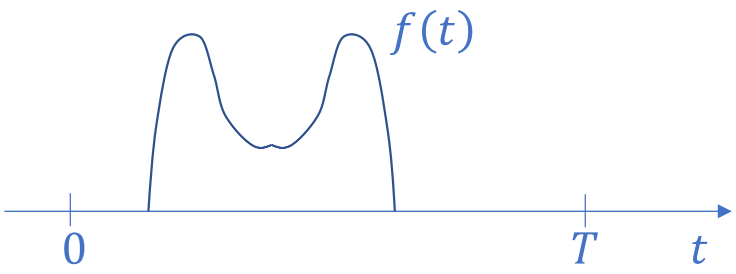
Ou seja, supondo-se que N seja suficientemente grande, pode-se escrever:

$$I = \int_{t=0}^{T} g(t)dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} g_k T_s$$

Transformada de Fourier discreta

Aplicação da integração retangular ao cálculo da CFT. Sinais aperiódicos

Consideremos um sinal contínuo definido no intervalo $0 \le t \le T$, para o qual se pretende calcular a CFT. Sabemos que



$$F(\omega) = \int_0^T f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Apliquemos, então, a aproximação numérica:

$$F(\omega) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i\omega k T_s} T_s$$

Vê-se que $F(\omega)$ é uma função da variável contínua ω .

Adotaremos as freqüências $\omega_n = n\omega_0$, com $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e $-\frac{N}{2} \le n \le \frac{N}{2}$. Assim, tem-se:

$$F(n\omega_0) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-in\omega_0 k T_s} \cdot T_s = T_s \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-in\frac{2\pi}{T} k T_s}$$

Como $T_s = \frac{T}{N}$, resulta:

$$F(n\omega_0) \approx \frac{T}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi\frac{nk}{N}}$$

Transformada de Fourier discreta

Aplicação da integração retangular ao cálculo da CFT. Sinais aperiódicos (cont)

Notemos que

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi\frac{nk}{N}}$$

é a DFT do sinal discreto f_k

Adotando-se N suficientemente grande obtém-se uma aproximação bastante razoável da CFT do sinal contínuo $f(t)$.

Assim, concluímos que estimativas de $F(\omega)$, amostradas a intervalos ω_0, são calculadas como:

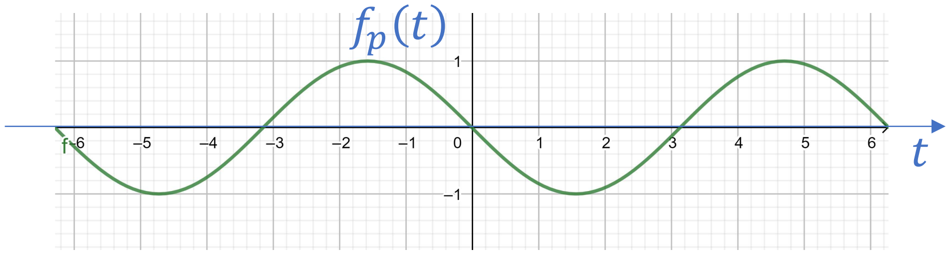
$$F(n\omega_0) \approx \frac{T}{N} F_n$$

para $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}$

Transformada de Fourier discreta

Aplicação da integração retangular ao cálculo da CFT. Sinais periódicos

Consideremos agora um sinal periódico contínuo $f_p(t)$



Aplicaremos a regra de integração numérica retangular para estimar a série de Fourier de $f_p(t)$, ou seja:

$$F_p(n) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_p(t)e^{-in\omega_0 t}dt \approx \frac{1}{T_0}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-in\omega_0 kT_s}\cdot T_s\,, \qquad \text{com } n\omega_0 \in \left(-\frac{N}{2},\frac{N}{2}\right)$$

Lembremos que

$$T_s = \frac{T_0}{N}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \qquad n\omega_0 \in \left(-\frac{N}{2},\frac{N}{2}\right)$$

Assim, tem-se:

$$F_p(n) \approx \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-in\frac{2\pi}{T_0}k\frac{T_0}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi\frac{nk}{N}}$$

Ou seja,

$$F_p(n) \approx \frac{1}{N}F_n$$

Transformada de Fourier discreta

Utilidade da DFT

Os resultados dos dois tópicos anteriores nos permitem concluir que

A DFT, multiplicada por um fator de escala apropriado, fornece **estimativas** dos espectros CFT de sinais **contínuos** **periódicos** e **aperiódicos**.

Transformada de Fourier discreta

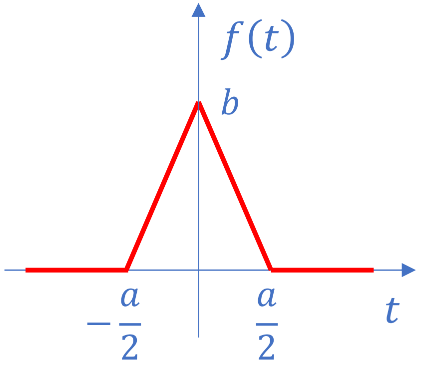
EXERCÍCIO 4

Utilizando a função fft do Matlab determine a transformada de Fourier, na forma polar, dos seguintes sinais:

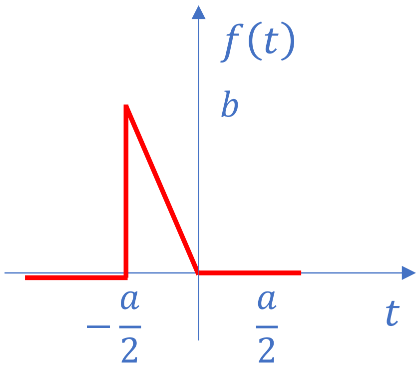
(a) $f(t) = \sin(\omega t)$

(b) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \leq 1 \\ 1 & \text{se } |t| > 1 \end{cases}$

(c)



(d)



(e) Aplicar aos sinais dos itens b-d os seguintes filtros: 1) Passa-baixa ideal; 2) Butterworth de 4ª ordem;3) Chebyshev tipo 1; 4) Chebyshev tipo 2. Em seguida, reconstruir os sinais filtrados.

Transformada de Fourier de Tempo Curto

Definição

A Transformada de Fourier de Tempo Curto (Short Term Fourier Transform - **STFT**) é uma variante da TF aplicável a sinais cuja composição espectral é variável no tempo.
Baseia-se em uma ideia muito simples:

- O sinal $x(t)$ é examinado através de uma janela $w(t-\tau)$ deslizante ao longo do tempo;
- Ao segmento desse sinal 'visto' através dessa janela, ou seja, $x(t) \cdot [w(t-\tau)]^*$, aplica-se a transformada de Fourier;

$$F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} \{x(t) \cdot w(t-\tau)\}\, e^{-i\omega t} dt$$

- Fazendo-se a janela $w(t-\tau)$ deslizar ao longo do tempo, gera-se a Transformada de Fourier de Termo Curto, ou seja, a função

$$F(\tau,\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} \{x(t) \cdot w(t-\tau)\}\, e^{-i\omega t} dt$$

Representada na forma de uma imagem denominada Espectrograma

- O domínio de definição da STFT é o plano tempo-freqüência.

Transformada de Fourier de Tempo Curto

- Para a versão discreta da transformada de tempo curto de Fourier, utiliza-se as seguinte fórmula:

$$F(\tau,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n-m]e^{-i\omega n}$$

Na figura da próxima página apresenta-se um pequeno segmento do sinal temporal da Passacaglia e Fuga, em Dó Menor, BWV 582, de Bach, acompanhada do respectivo espectrograma.

Essa magnífica obra, tocada em um sintetizador, pode ser apreciada em:

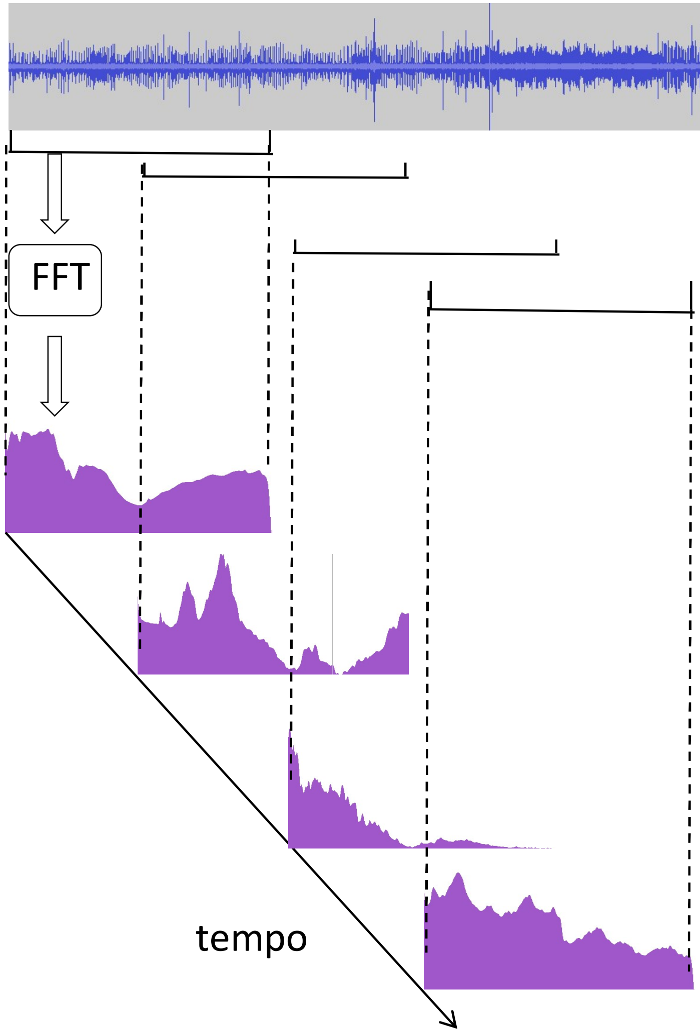
https://www.youtube.com/watch?v=e-MQVr5UIjs

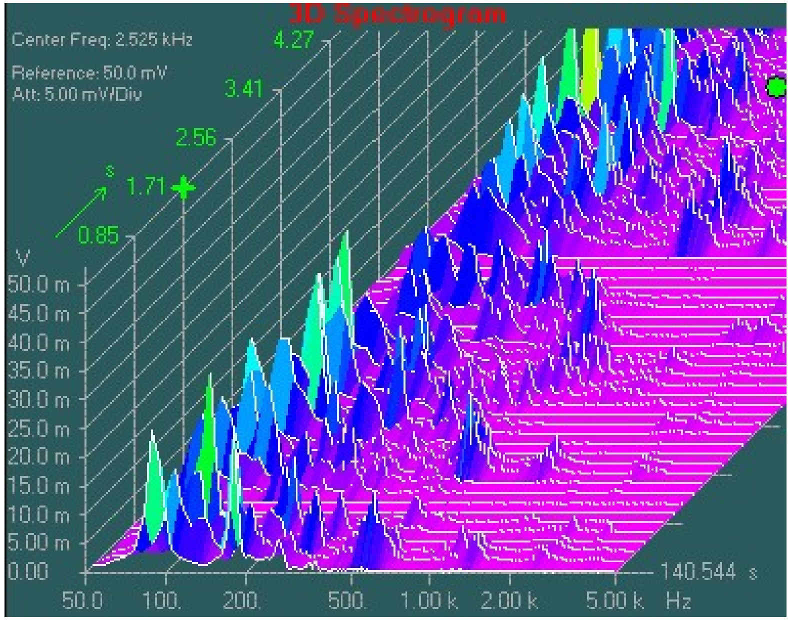
A mesma obra, tocada em um órgão mecânico, por Karl Richter, pode ser apreciada em

https://www.youtube.com/watch?v=_W4PJUOeVYw&t=39s

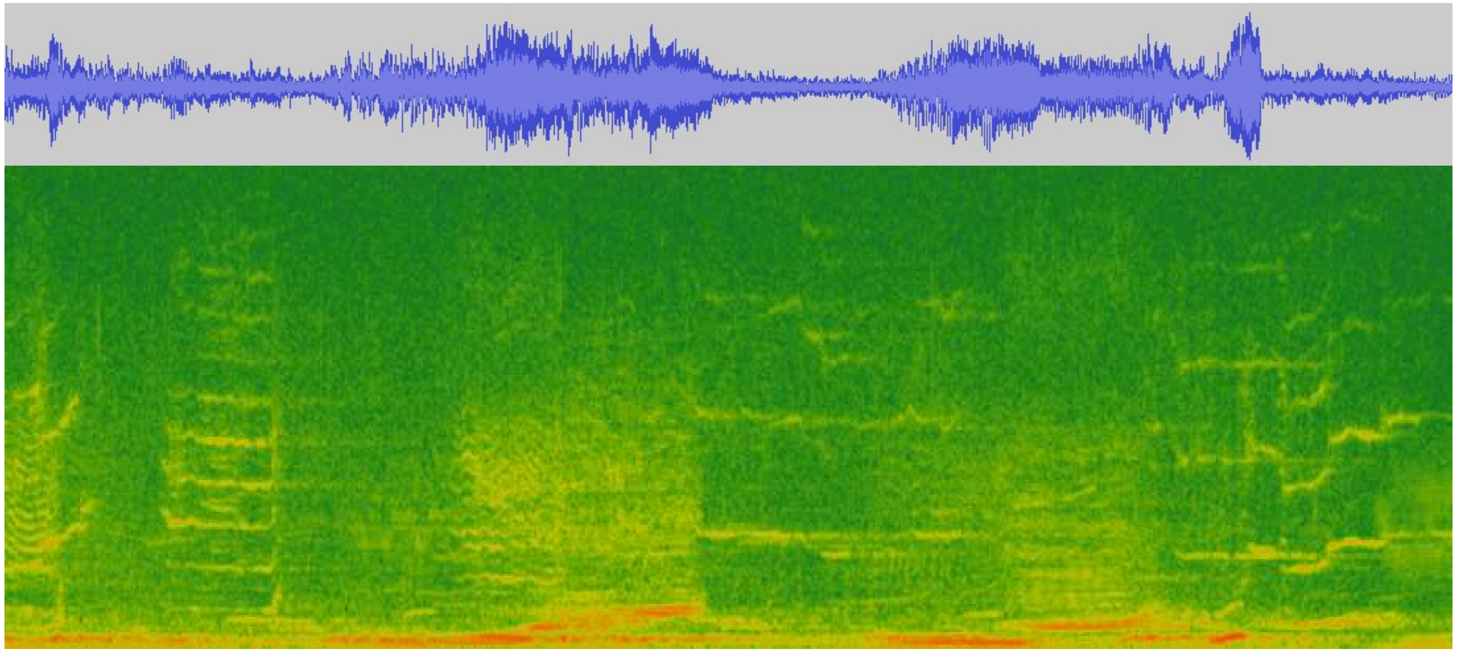
E na página seguinte apresenta-se o espectrograma de uma vocalização de baleia jubarte.

Transformada de Fourier de Tempo Curto





Transformada de Fourier de Tempo Curto



Transformada de Fourier de Tempo Curto

Funções janela

]Para construir a STFT utilizam-se funções

$$w(t) \text{ tal que} \begin{cases} \neq 0 \text{ se } |t| < \tau \\ 0 \text{ se} |t| \geq \tau \end{cases}$$

As funções-janela mais utilizadas são:

- Janela retangular: $w(t) = \begin{cases} 1 \text{ se } |t| \leq \tau \\ 0 \text{ se } |t| > \tau \end{cases}$
- Gaussiana: $w(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)^2}$
- Janela Hanning

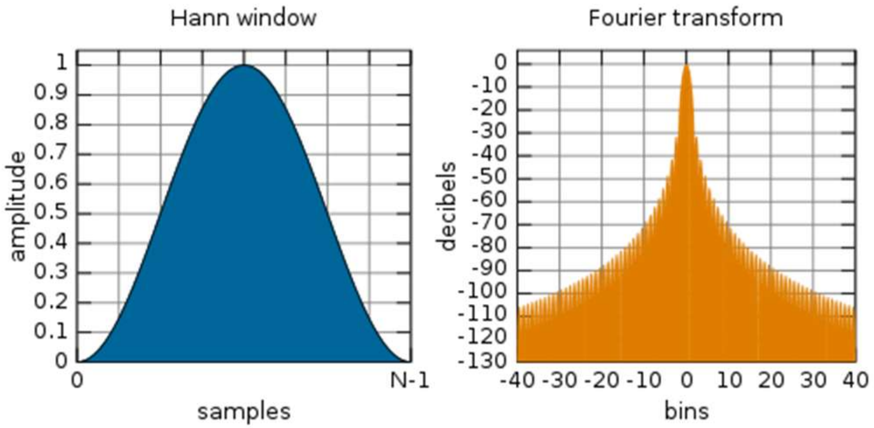
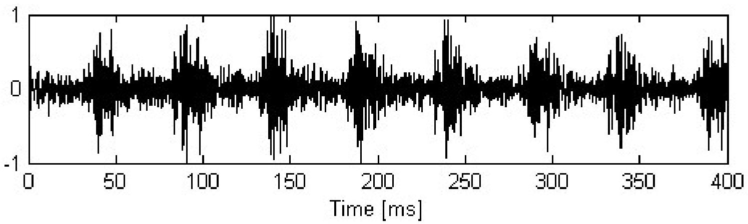


Figura extraída da Wikipedia

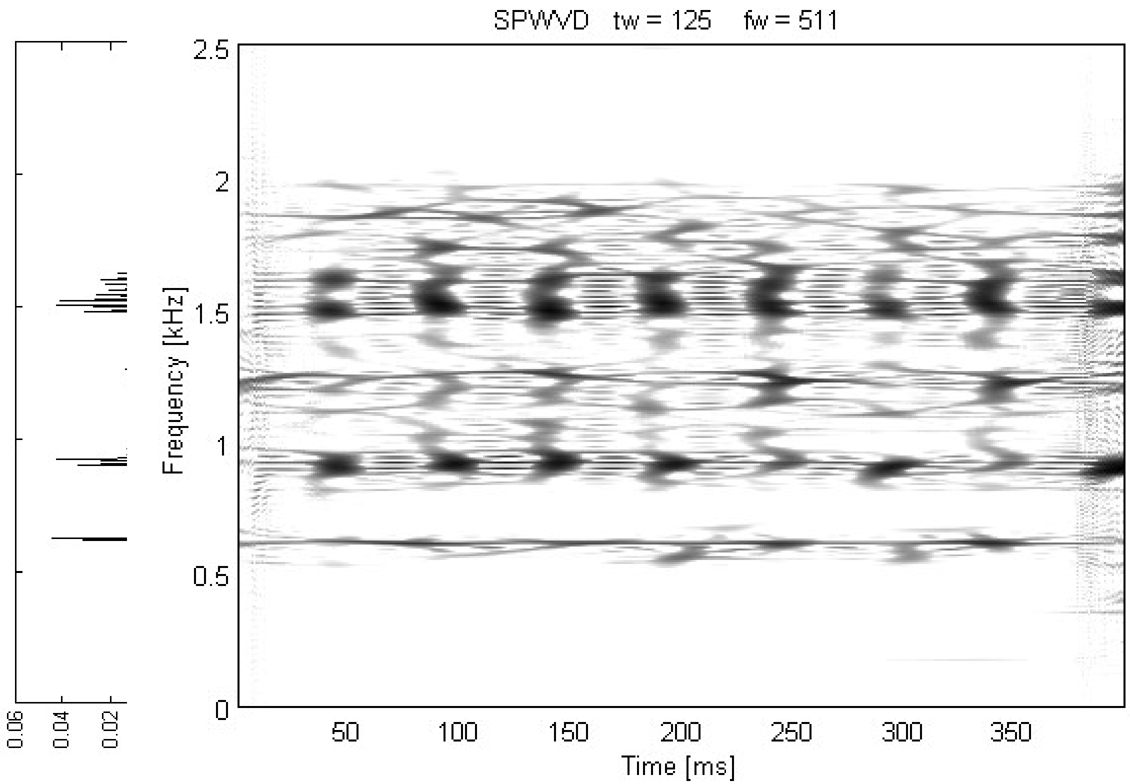
Transformada de Fourier de Tempo Curto

Exemplo de aplicação industrial

1) Engrenagem de 10 dentes com superfícies desgastadas



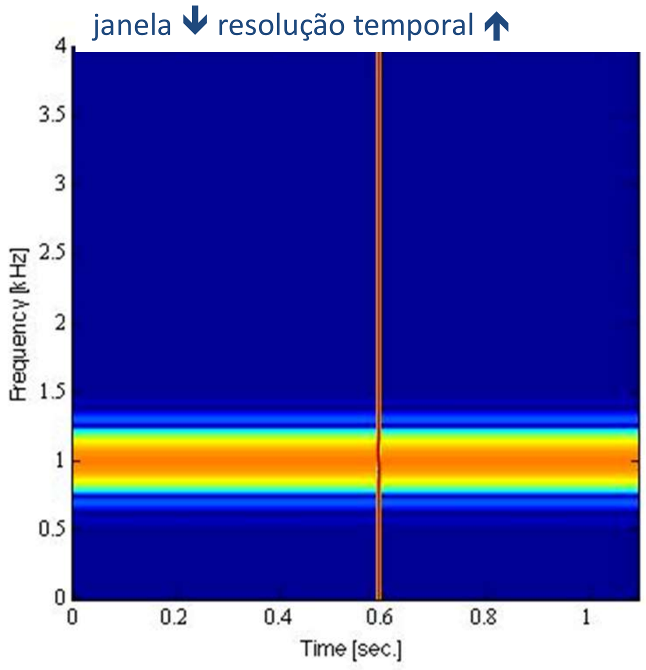
Sinal temporal

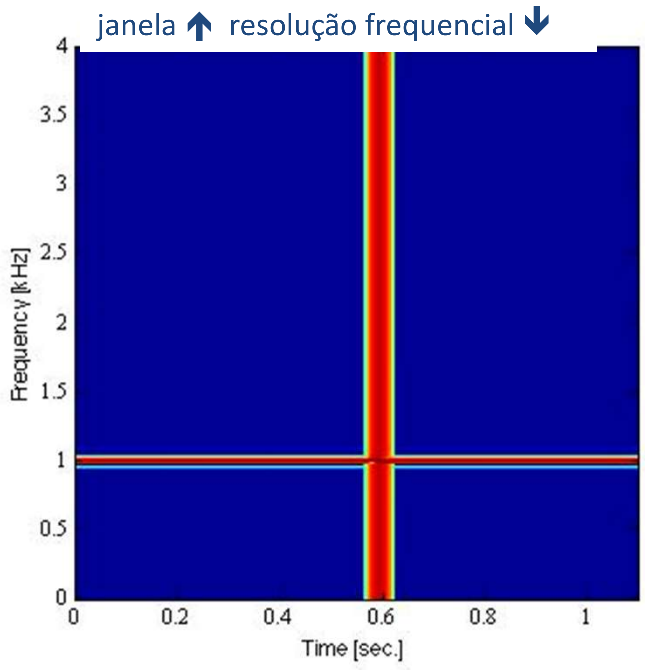


Espectrograma

Transformada de Fourier de Tempo Curto

Resolução temporal versus resolução freqüencial





- Aumentando-se a resolução temporal, diminui-se a resolução freqüencial.
- Aumentando-se a resolução freqüencial, diminui-se a resolução temporal.