Exercício 5

Athos Damiani (NUSP 6796736)

07-28-2021

5. Exercícios

1) A equação de diferenças $y(k) - y(k-1) + 0{,}25y(k-2) = 0{,}5(x(k) - x(k-1))$ representa a dinâmica de um circuito RLC que recebe como entrada $x(k)$ um degrau unitário em $t = 0$ $(k = 0)$ e fornece como saída $y(k)$.

(a) obtenha a função de transferência que corresponde a essa equação;
(b) efetue a transformação que converta essa equação em espaço de estados utilizando a forma canônica controlável;

2) Dadas as matrizes que correspondem a um sistema discreto na forma de espaço de estados para entradas $u(k)$ e saídas $y(k)$:

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = [0 \;\; b_2]$$

(a) obtenha a função de transferência discreta $H(z) = Y(z)/U(z)$;
(b) obtenha uma realização mínima para $H(z)$;
(c) esboce um diagrama de blocos indicando quais são as variáveis de estado.

Exercício 1.a

Sejam $X(z)$ e $Y(z)$ as respectivas transformadas Z de $x(t)$ e $y(t)$. Aplicando-se a transformada Z em ambos os lados da equação de diferenças, temos:

$$\begin{aligned}
Z[y(k) - y(k-1) + 0,25y(k-2)] &= Z[0,5(x(k) - x(k-1))] \Rightarrow \text{(linearidade...)} && (1)\\
Z[y(k)] - Z[y(k-1)] + 0,25Z[y(k-2)] &= 0,5(Z[x(k)] - Z[x(k-1)]) \Rightarrow \text{(translação...)} && (2)\\
Y(z) - z^{-1}Y(z) + 0,25z^{-2}Y(z) &= 0,5(X(z) - z^{-1}X(z)) \Rightarrow \text{(fator comum...)} && (3)\\
Y(z)(1 - z^{-1} + 0,25z^{-2}) &= X(z)0,5(1 - z^{-1}) && (4)\\
& && (5)
\end{aligned}$$

Prosseguindo para a forma da função de transferência, temos:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,5(1 - z^{-1})}{(1 - z^{-1} + 0,25z^{-2})} = \frac{0,5(1 - z^{-1})}{(1 - z^{-1} + 0,25z^{-2})}\frac{z^2}{z^2} = \frac{0,5z^2 - 0,5z}{z^2 - z + 0,25}$$

Exercício 1.b

Do exercício anterior, extrai-se os coeficientes $n = 2,\ b_0 = 0,5,\ b_1 = -0,5,\ b_2 = 0,\ a_1 = -1,\ a_2 = 0,25$. Assim, o modelo em espaço de estado será:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{6}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -0,125 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \end{bmatrix} + u(k)$$

Exercício 2.a

Os coeficientes são: $n = 2$, $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = b_2$, $a_1 = a_1$, $a_2 = a_2$. Assim, a função de transferência será:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b2}{z^2 + a_1 z + a2} = \frac{b2}{z^2 + a_1 z + a2} \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Exercício 2.b

Exercício 2.c