

Processamento de Sinais aplicado à Engenharia Mecânica

Processos e sequências estocásticas

Flavius P. R. Martins, Prof.Dr.

Flávio C. Trigo, Prof.Dr.

12 – Processos estocásticos

12.1 Definição

- Seja Ω um espaço amostral e T um subconjunto da reta real representando o tempo de interesse e $\mathcal{F} \triangleq (\Omega, \sigma_a, P)$ um experimento bem definido pelo espaço amostral, sigma-álgebra e função de probabilidade;
- *definição*: um processo estocástico é uma função real $X(t, \omega)$ definida no espaço $T \times \Omega$ (função de 2 argumentos, $t \in T$ e $\omega \in \Omega$) que, para qualquer t fixo, $X(t, *)$ é uma variável aleatória;
- em um processo aleatório *escalar*, $X(t, \omega)$ assume valores em R^1 ; em um processo aleatório vetorial, $X(t, \omega)$ assume valores em R^n ;
- assim, um processo aleatório $X(t, \omega)$ qualquer como definido acima é um processo estocástico se todos os conjuntos $S = \{\omega \in \Omega; t \in T; \xi \in R^n: X(t, \omega) \leq \xi\}$ fizerem parte de \mathcal{F} , ou, em outras palavras, ***qualquer processo aleatório de interesse envolvendo o tempo é um processo estocástico.***

- a característica essencial de um processo estocástico que o distingue de um processo determinístico é que o conhecimento da situação atual de sua dinâmica a cada instante *não* é suficiente para prever sua evolução temporal;
- uma maneira de compreender o efeito das incertezas atuantes no processo é imaginá-lo como uma espécie de caixa transparente que contém o modelo de um fenômeno físico (portanto, determinístico) que possui uma saída bem definida para cada entrada;
- um grande número dessas mesmas caixas transparentes, então, deveria exibir exatamente a mesma saída;
- porém, verifica-se que isso não é verdade, pois cada uma das caixas transparentes é afetada por perturbações que não foram consideradas no modelo;

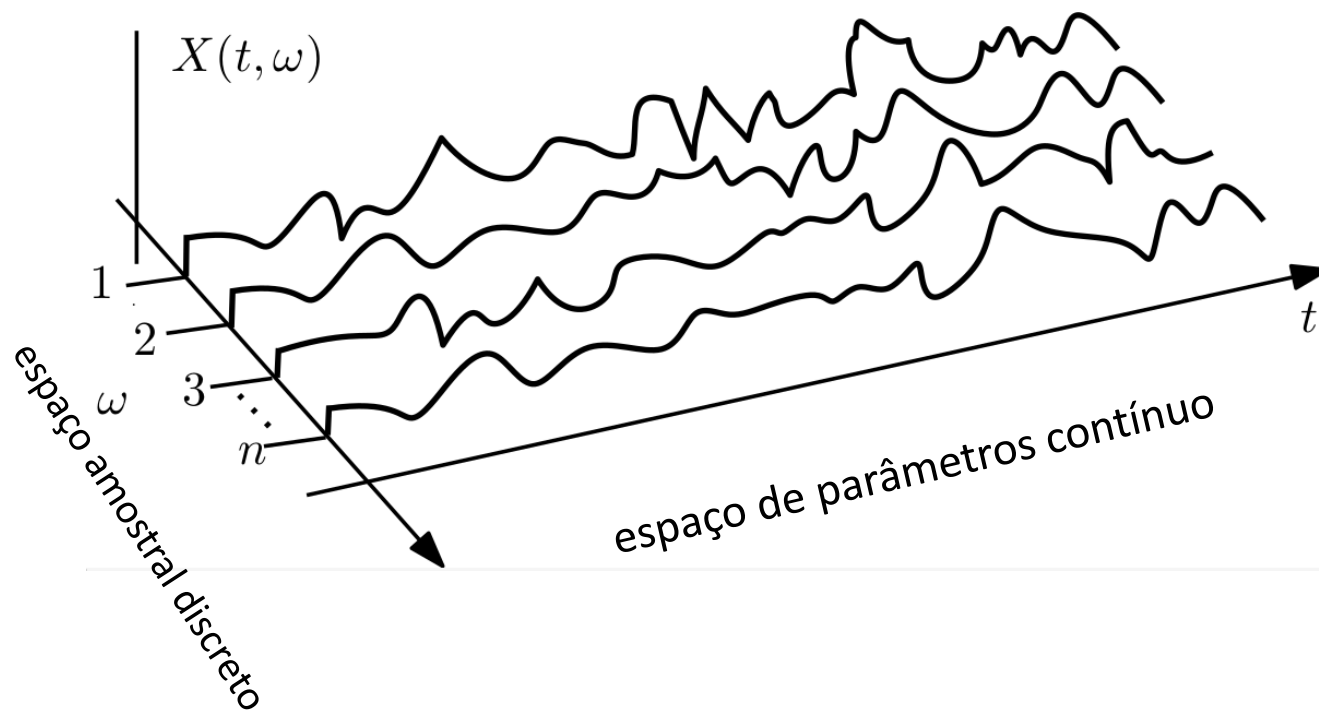
12 – Processos estocásticos

12.1 Definição

- por exemplo, considere um telefone celular de determinada marca e modelo. Dentro de certos limites estatisticamente definidos para um parâmetro qualquer, digamos a relação sinal/ruído na recepção de rede, não é possível diferenciá-los;
- no entanto, estreitando-se os limites estatísticos, ficará evidente que, para qualquer amostra de aparelhos, a relação sinal/ruído será distinta e que irá variar de forma aleatória à medida que o tempo transcorre.
- assim, a relação sinal/ruído variante no tempo pode ser classificada como um processo estocástico.

12.1 Definição

- é possível efetuar uma classificação geral para diferenciar processos estocásticos. Considere a figura abaixo:



12 – Processos estocásticos

- ela representa as realizações $X(t, \omega) = T_i$ correspondente ao processo estocástico “temperatura das cidades 1, 2, 3, ... n ao longo de um dia;”
- com o decorrer do tempo, cada cidade apresenta uma evolução diferente na temperatura que, é passível de caracterização determinística (através de um bom modelo matemático);
- porém, se fixarmos um determinado instante, as temperaturas em cada cidade serão variáveis aleatórias escalares e discretas cuja amostragem é regida pelo acaso.

Duas categorias de processos são particularmente importantes:

- **Processos estacionários**

Processos estacionários em sentido estrito (ESE – tradução livre do inglês SSS – strict sense stationary)

Um processo estocástico $X(t, \omega)$ é denominado estacionário em sentido estrito se todas as suas propriedades estatísticas (leia-se função densidade de probabilidade $f_X(t, \omega)$ ou função distribuição de probabilidade $F_X(t, \omega)$) forem *invariantes* quanto a uma translação na origem. Formalmente,

$$\begin{aligned} f_X(t + \tau, \omega) &= f_X(t, \omega) \\ f_X(t_1 + \tau, t_2 + \tau, \omega) &= f_X(t_1, t_2, \omega) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \forall \quad t, \tau \end{aligned}$$

12 – Processos estocásticos

12.2 Categorias quanto à estacionariedade

Duas categorias de processos são particularmente importantes:

- **Processos estacionários**

Processos estacionários em sentido amplo (ESA – tradução livre do inglês WSS – wide sense stationary)

Um processo estocástico $X(t, \omega)$ é denominado estacionário em sentido amplo se somente as duas primeiras propriedades estatísticas (valor médio e variância ou autocorrelação) de sua função densidade de probabilidade $f_X(t, \omega)$ ou função distribuição de probabilidade $F_X(t, \omega)$ forem *invariantes* quanto a uma translação na origem.

Como as estatísticas de ordens superiores à segunda são quase sempre desconhecidas (ou difíceis de calcular), processos estocásticos que possam ser considerados estacionários em sentido amplo são normalmente escolhidos como modelos para fenômenos reais.

12 – Processos estocásticos

12.3 Processos ergódicos

Até aqui (aula anterior), todas as propriedades estatísticas de um fenômeno aleatório foram calculadas considerando *toda uma população* (raramente possível em situações de interesse na Engenharia) ou sobre *amostras retiradas ao acaso* dessa população.

Considere o processo estocástico anterior, temperatura média no dia 1o. de abril apenas para a cidade #2:

- para obter estatísticas sobre uma amostra, deveria existir um número infinitamente grande de cidades #2 para que, exatamente no dia 1o. de abril, pudesse ser realizada a medição simultaneamente na amostra de cidades #2;
- no entanto, existe apenas uma cidade #2 e, portanto, esse experimento é impossível. O que fazer então?
- A única maneira de obter essa estatística seria, ao longo de vários anos, calcular a temperatura média no dia de interesse e, após a acumulação de quantidade representativa desses dados, obter as estatísticas sobre uma amostra (ou sobre toda a população) disponível.
- Surge a questão: como estatísticas temporais se relacionam àquelas obtidas sobre as amostras?
- Em geral, não há relação alguma! Novamente, o que fazer?

12 – Processos estocásticos

12.3 Processos ergódicos

Felizmente, para alguns processos estacionário “especiais”, estatísticas obtidas no tempo são idênticas às obtidas sobre amostras.

Processos com essa características são denominados ***ergódicos***.

- Da mesma forma como ocorre com outras propriedades estatísticas, não há uma maneira definitiva de verificar se um processo estacionário é realmente ergódico;
- assim, desde que o analista assim o considere , um processo ergódico fornece a estatística do fenômeno estocástico pela análise de uma simples amostra desse fenômeno.
- Essa hipótese, embora facilmente questionável é a única possibilidade para a análise de grande parte dos processos estocásticos, como no exemplo acima.
- Em nosso curso, assim como na prática cotidiana da Engenharia, processos estocásticos serão considerados estacionários em sentido amplo e ergódicos.

12 – Processos estocásticos

12.4 Estatísticas de processos ESA ergódicos contínuos

Para processos estocásticos ergódicos contínuos os dois primeiros momentos são dados por:

$$E[X] = \mu_X(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) dt$$

- valor médio ou média

$$E[X^2] = \sigma_X^2(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [X(t) - \mu_X(t)][X(t) - \mu(t)]' dt$$

- covariância ou autocovariância

$$E[X(t)X'(t + \tau)] = \rho(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)X'(t + \tau) dt$$

- autocorrelação

- Observe que X pode ser um escalar ou um vetor, daí a necessidade de, nos momentos de ordem 2, indicar o produto de X por X' , vetor transposto de X .
- Como normalmente os dados a serem analisados já foram previamente discretizados (ou digitalizados), a partir deste ponto serão discutidos métodos para o processamento de sinais discretos no tempo; nessas condições tem-se, em vez de processos, ***seqüências estocásticas***.

13 – Sequências estocásticas

13.1 Estatísticas de sequências ESA ergódicas discretas

Para sequências estocásticas ergódicas discretas de dimensão N , os dois primeiros momentos são obtidos através das seguintes expressões, análogas às do caso contínuo:

$$E[x] = m_x(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x(k)$$

$$E[x^2] = C_{xx}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N [x(k) - m_x(k)][x(k) - m_x(k)]'$$

$$E[x(k)x'(k+n)] = R_{xx}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x(k)[x(k+n)]'$$

para $n = -N, \dots, N$

- valor médio ou média
- covariância ou autocovariância
- autocorrelação

$$E[x] = m_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

$$E[x^2] = C_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [x(k) - m_x(k)][x(k) - m_x(k)]'$$

$$E[x(k)x'(k+n)] = R_{xx}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)[x(k+n)]'$$

para $n = 0, \dots, N-1$

Na prática, as sequências estocásticas são finitas. Nessas condições, as expressões acima modificam-se para:

13 – Sequências estocásticas

13.2 Densidade espectral de potência para sequências ESA discretas

- A *densidade espectral de potência* (energia, segundo Proakis & Manolakis), também conhecida como *densidade espectral de frequência* ou, ainda *periodograma**, é uma maneira largamente utilizada para descrever as características de uma sequência (também de um processo) estocástica de duração finita e, portanto, energia finita;
- como veremos adiante, ela é definida como a transformada de Fourier da função de autocorrelação do sinal amostrado, facilmente calculada com os computadores atuais;
- entretanto, quando não existiam computadores, havia instrumentos denominados *Analísadores de Espectro*, que determinavam a potência contida em diversas bandas de um sinal aleatório;
- na realidade, estes instrumentos eram filtros de bandas de frequências extremamente estreitas e seu funcionamento era simples: ajustava-se o aparelho para uma certa banda e fazia-se o sinal aleatório “passar” por esse filtro. Logicamente, caso o sinal tivesse componentes na banda selecionada, seu valor era registrado e gravado. Em seguida, ajustava-se o instrumento para outra banda e o processo era repetido até a varredura completa (evidentemente, dentro de um universo finito de frequências).

13 – Sequências estocásticas

13.2 Densidade espectral de potência para sequências ESA discretas

Feitas as considerações anteriores, formalmente, a densidade espectral de potência ou periodograma* é dada pela transformada de Fourier da função de autocorrelação do sinal amostrado

$$S_{xx}(k) \triangleq \mathcal{F}[R_{xx}(n)]$$

$$S_{xx}(k) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)[x(k+n)]'\right]$$

No entanto, pela propriedade da translação no tempo, podemos concluir que

$$S_{xx}(k) = \frac{1}{N} X(k)X'(k)$$

$$S_{xx}(k) = \frac{1}{N} |X(k)|^2$$

Estas expressões são bastante conhecidas e utilizadas na prática; elas nos permitem obter o periodograma através da transformada de Fourier da sequência $x(n)$ amostrada do sinal ESA de duração qualquer.

*A título de curiosidade, o termo “periodograma” foi cunhado por Arthur Schuster no artigo “On de investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena”, no periódico *Terrestrial Magnetism no. 3*, vol 1, 1898.

13 – Sequências estocásticas

13.2 Densidade espectral de potência para sequências ESA discretas

- Embora relativamente fácil de ser calculado com as ferramentas computacionais atualmente disponíveis, demonstra-se (ver Proakis e Manolakis) que o periodograma *não* é um *estimador consistente** para a densidade espectral de potência da sequência ESA que originou a sequência amostrada, $x(n)$;
- ainda de acordo com os mesmos autores, isto ocorre pois o valor médio do espectro estimado é, de fato, a convolução da verdadeira densidade espectral de potência do sinal amostrado com a transformada de Fourier de uma janela de Bartlett ou triangular;
- em termos práticos, isso equivale, no domínio do tempo, à multiplicação do sinal amostrado por uma janela de Bartlett;
- conseqüentemente, o espectro de potência exhibe problemas de vazamento (*leakage*) relacionados ao pequeno número de dados utilizado no seu cálculo.

*Um estimador é *consistente* quando, para $N \rightarrow \infty$, sua estimativa não é viciada e convergente para o valor correto com incerteza (variância) tendendo a zero.

13 – Sequências estocásticas

13.2 Densidade espectral de potência para sequências ESA discretas

- Perceba que o simples truncamento de qualquer sinal, contínuo ou discreto, equivale à multiplicação, no domínio do tempo, desse sinal por uma janela retangular (ou função porta); como consequência, há a convolução no domínio da frequência e potenciais problemas de vazamento.
- Isso nos leva a considerar mais cuidadosamente as questões de janelamento e resolução em frequência na obtenção da *estimativa* da densidade espectral de potência.
- além disso, mesmo para um sinal periódico, dependendo da janela e da resolução em frequência selecionadas, haverá potencial vazamento na densidade espectral de potência.

13 – Sequências estocásticas

13.3 Transformada discreta de Fourier no cálculo do periodograma

- Supondo que o sinal amostrado possua N pontos e que a taxa de amostragem seja a mínima que respeita o critério de Nyquist, o número mínimo de pontos para cálculo da TDF será N ;
- nesse caso, as amostras do periodograma serão dadas por

$$S_{xx} \left(\frac{n}{N} \right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi kn/N} \right|^2, \quad n = 0, \dots, N-1$$

nas frequências discretas $f_n = \frac{n}{N}$

- Ocorre que esse pequeno número de amostras não permite obter uma boa estimativa do espectro de potência do sinal;
- uma opção para contornar o problema é aumentar o número de pontos do sinal por meio do chamado *colchão de zeros* (zero padding);

13 – Sequências estocásticas

13.3 Transformada discreta de Fourier no cálculo do periodograma

- isso fará com que o espectro seja calculado em um conjunto maior de frequências. Supondo L o número disponível de frequências, o periodograma será dado por

$$S_{xx}\left(\frac{n}{L}\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi kn/L} \right|^2, \quad n = 0, \dots, L-1$$

nas frequências discretas $f_n = \frac{n}{L}$

- Salienta-se que o aumento no número de pontos através do colchão de zeros na aplicação da transformada discreta de Fourier **não implica** na extração de mais informações do sinal, apenas fornece a possibilidade de interpolação de valores do espectro em maior número de frequências.
- deve ficar claro que o efetivo aumento na resolução na densidade espectral de potências somente pode ser obtido com o processamento de uma sequência com maior número de pontos.

13 – Sequências estocásticas

13.4 Influência do janelamento no cálculo do periodograma através da TDF

- Em uma sequência estocástica de interesse para análise, há necessidade de janelamento por dois motivos:
 - 1) o trecho de sinal selecionado raramente possui início e fim coincidentes;
 - 2) é praticamente impossível que, em qualquer trecho selecionado, exista um número inteiro de períodos de qualquer tipo de informação cíclica que possa estar presente no sinal.
- Conforme já visto no curso, um dos problemas que existem na estimação do periodograma é o vazamento de parte da energia contida no sinal para frequências que não fazem parte dele;
- uma das causas para o vazamento é a número 1 mencionada acima. Atente para o fato de que a retirada de um trecho do sinal configura o janelamento por uma janela retangular no domínio do tempo e na convolução entre as TDFs dos dois sinais no domínio da frequência. Portanto, o janelamento utilizando janelas que promovam a equalização nas amplitudes dos sinais no começo e no fim da amostra selecionada contribui para evitar o vazamento;
- o problema número 2 ocorre quando há descentralização entre o posicionamento da janela em relação ao período assumido para o sinal que se deseja analisar;

13 – Sequências estocásticas

13.4 Janelamento e número de períodos amostrados

- em outras palavras, a janela pode estar *descentralizada* com respeito ao número de faixas de frequências que irão compor o periodograma.

Considere um sinal senoidal contínuo puro $y = \cos \omega t = \cos 2\pi f t$, em que f é a frequência em Hz e $P = 1/f$ é o seu período em segundos. O sinal é amostrado em N pontos a uma taxa f_a amostras/s. O período de amostragem é $T_a = 1/f_a$ s.

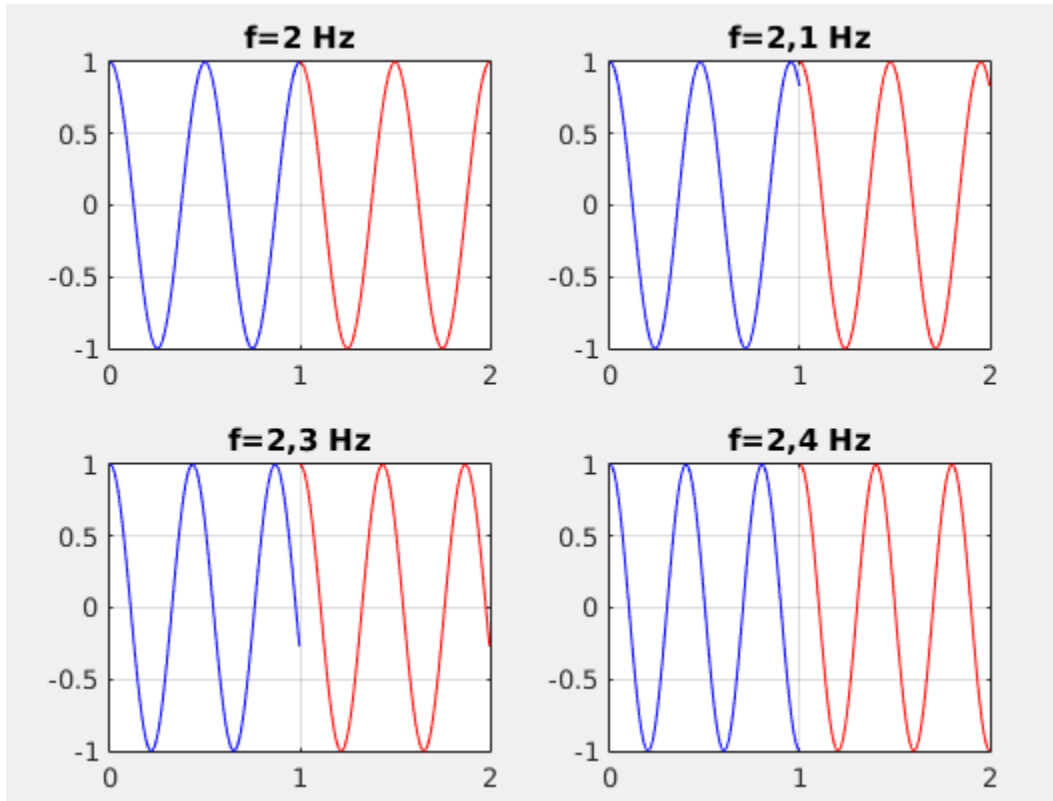
A duração total do sinal amostrado é $T = N T_a = N/f_a$ s.

O número de períodos amostrados é $N_p = \frac{T}{P} = \frac{N T_a}{P} = \frac{N f}{f_a}$. Se N_p for um número inteiro, a janela (retangular, no caso), estará centralizada e não ocorrerá vazamento para outras frequências no espectro.

Observe na figura do próximo slide o que ocorre quando um sinal cossenoidal puro contínuo de frequências $f = 2,0; 2,1; 2,3; 2,7$ Hz é amostrado com $f_a = 2048$ amostras/s (portanto obedecendo amplamente ao critério de Nyquist) é submetido a uma janela retangular de dimensão idêntica à dos 4 sinais. Ao vetor original (4096 amostras) não foi adicionado colchão de zeros pois essa dimensão é uma potência de 2 ($4096 = 2^{12}$).

13 – Sequências estocásticas

13.4 Janelamento e número de períodos amostrados



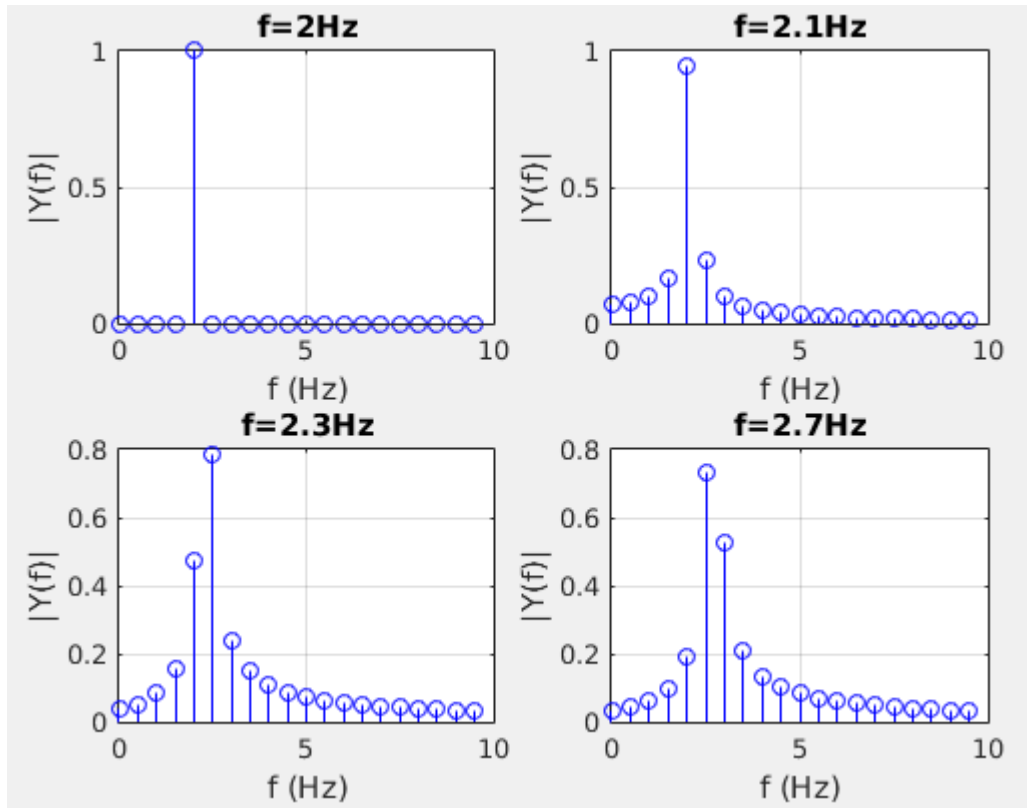
Os gráficos ao lado foram construídos concatenando-se o final de um período com o início do próximo período do mesmo sinal para cada uma das frequências.

Exceto no caso em que a frequência fundamental é um número (2 Hz), o número de períodos amostrados N_p para a mesma janela retangular de duração 2 segundos aplicada aos outros sinais resulta em números não inteiros de períodos capturados, como mostram as descontinuidades nos gráficos para as frequências distintas da fundamental.

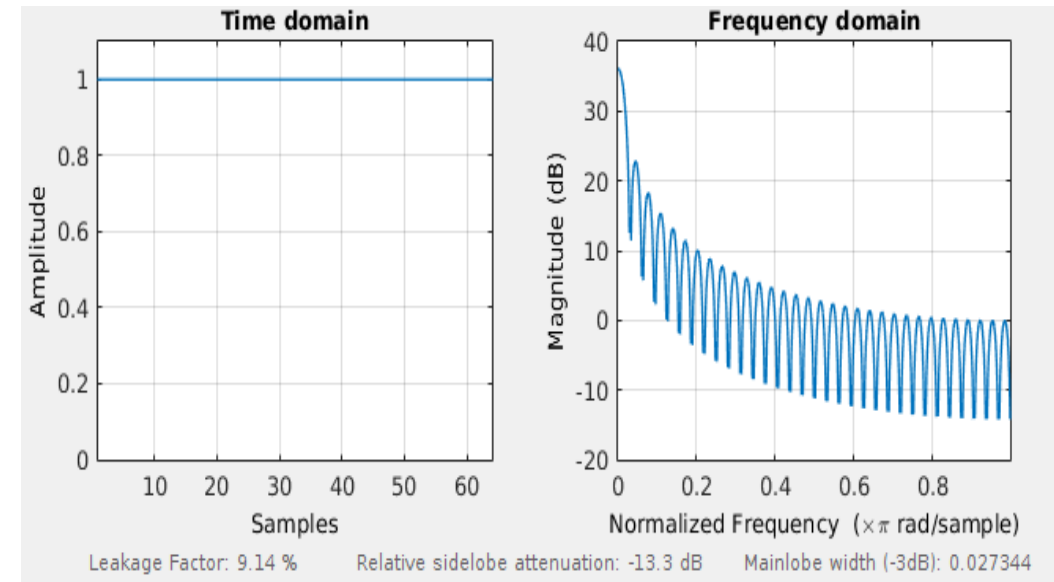
Em outras palavras, as perturbações na frequência fundamental em três dos casos tiveram como efeito prático a descentralização da janela retangular aplicada para obter a amostra.

13 – Sequências estocásticas

13.4.1 Efeito da janela retangular (sinal truncado, apenas)



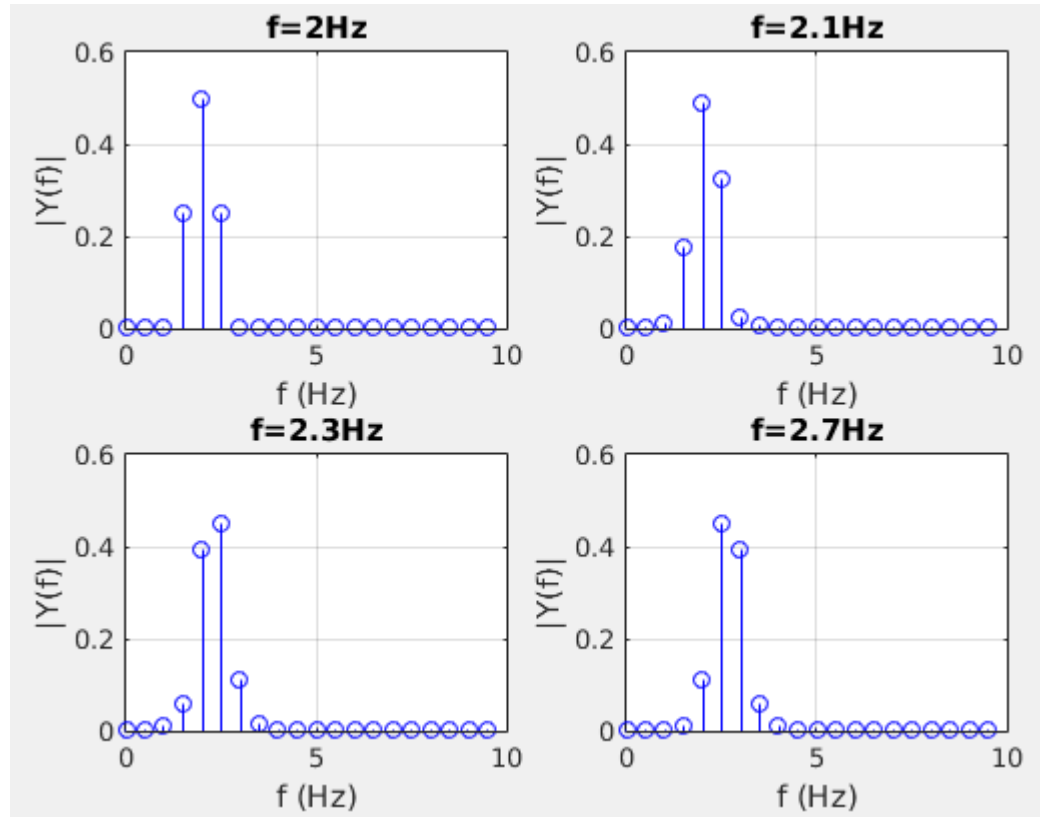
O efeito de vazamento fica bem evidente nas frequências cujos períodos não coincidem com a janela retangular.



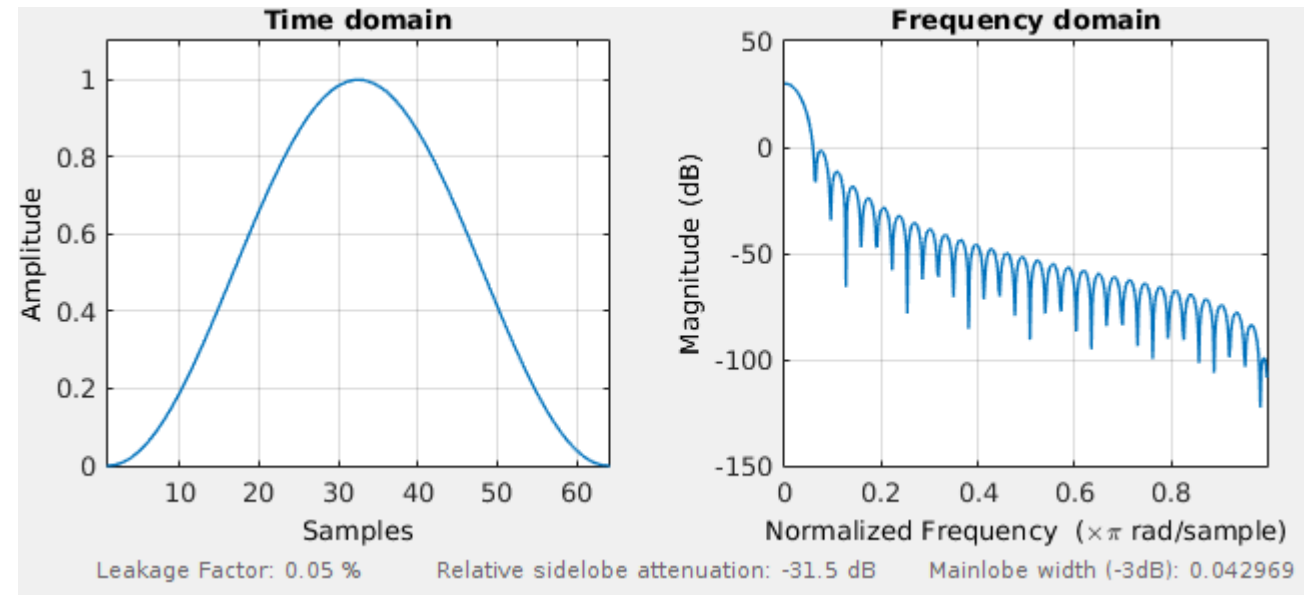
O vazamento ocorre pois, no domínio da frequência, há convolução entre as transformadas da janela retangular e do sinal cossenoidal. Para lembrar, a janela retantular é mostrada acima.

13 – Sequências estocásticas

13.4.2 Efeito da janela de Hann

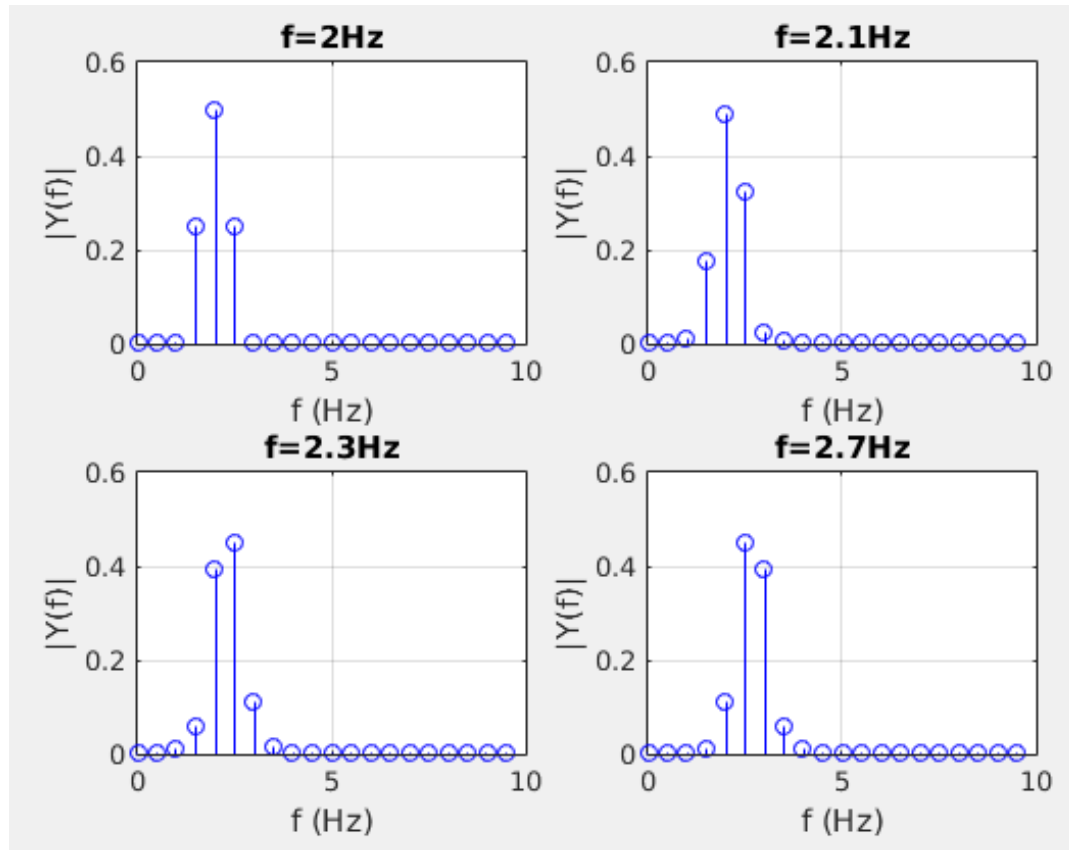


Janela de Hann

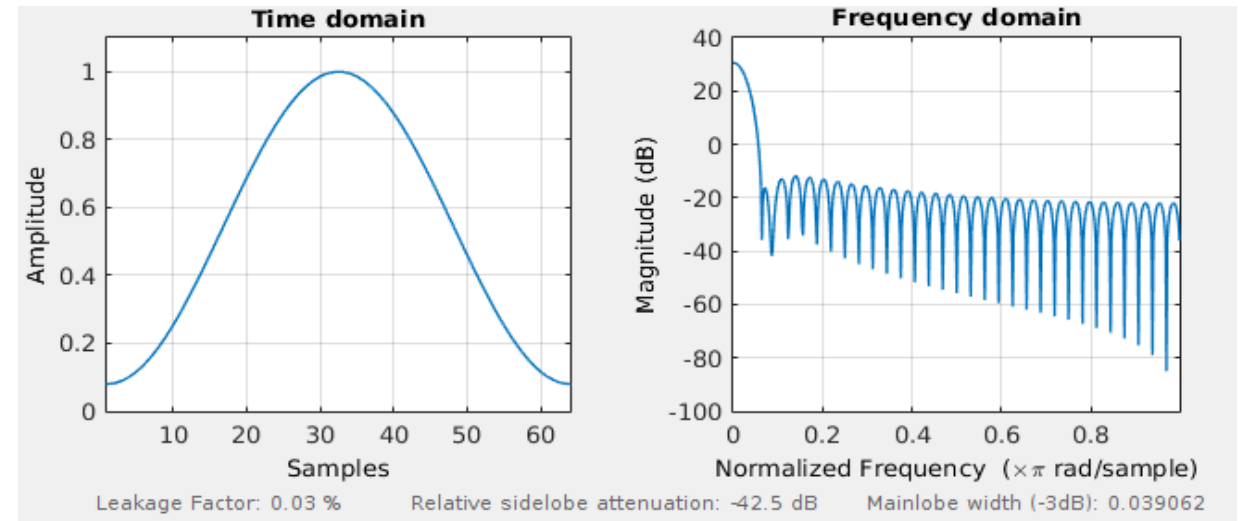


13 – Sequências estocásticas

13.4.3 Efeito da janela de Hamming

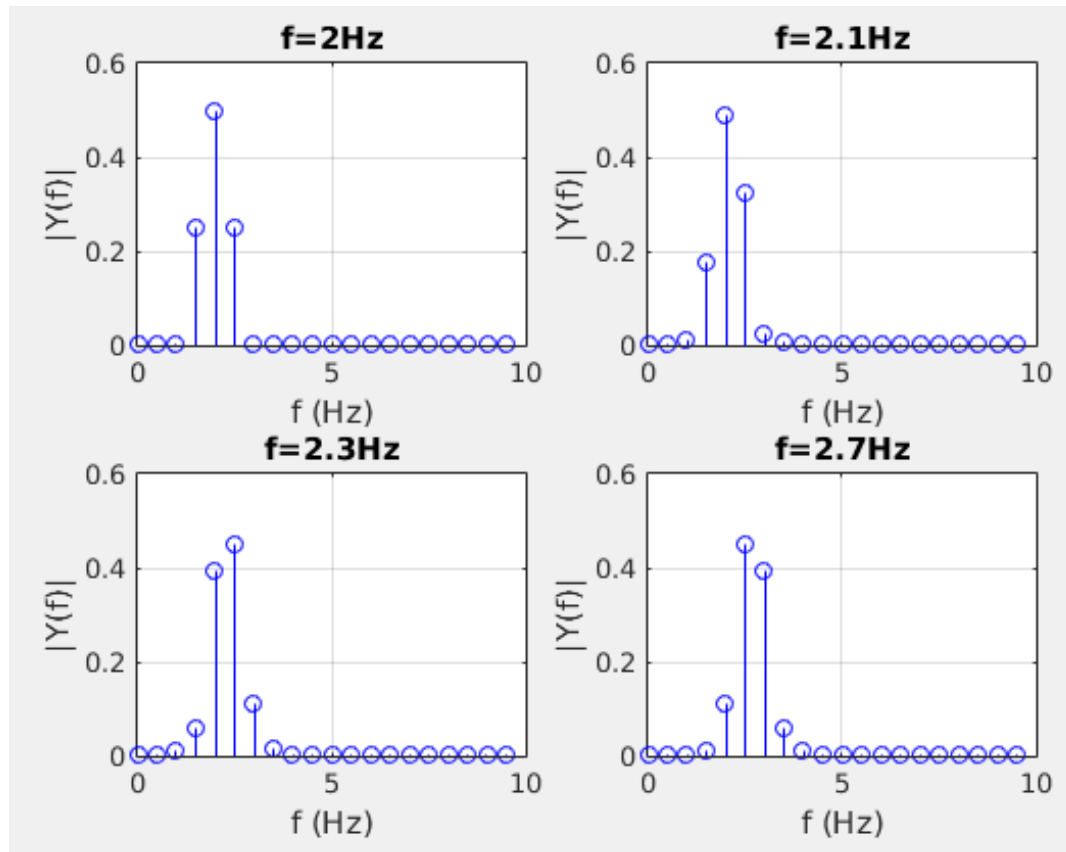


Janela de Hamming

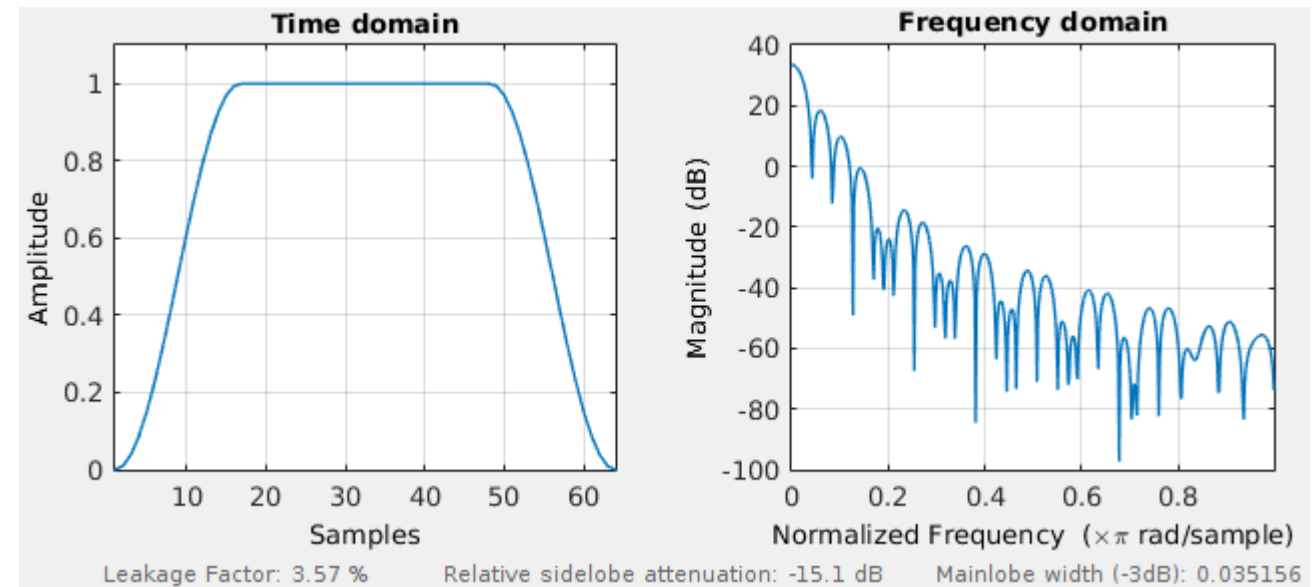


13 – Sequências estocásticas

13.4.4 Efeito da janela de Tukey (plana com $\alpha = 2$)

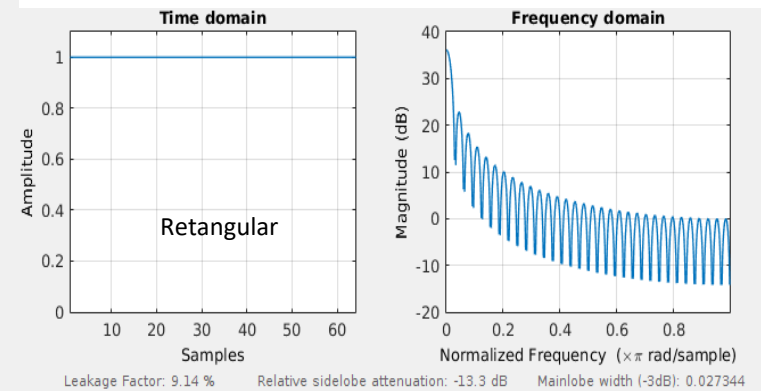
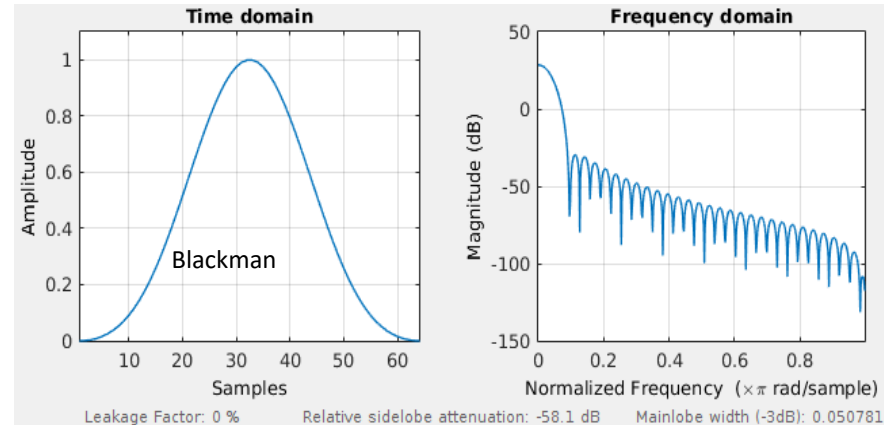
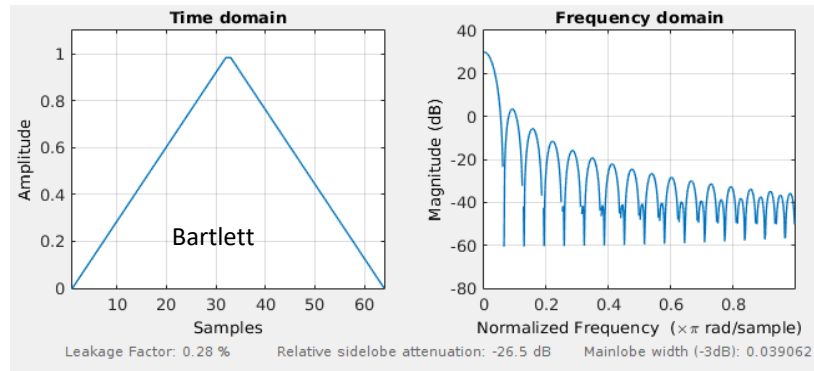
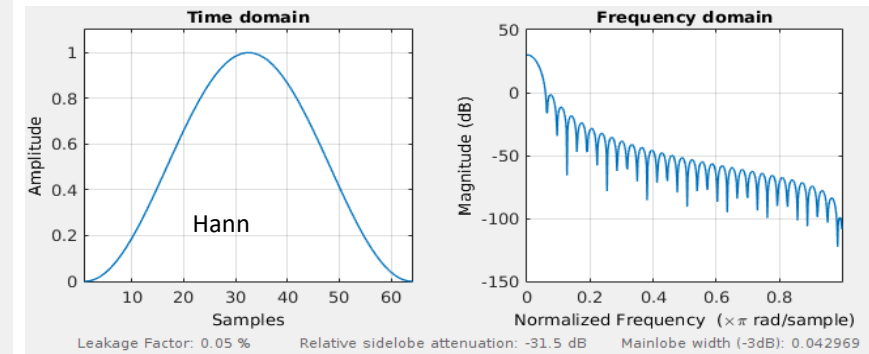
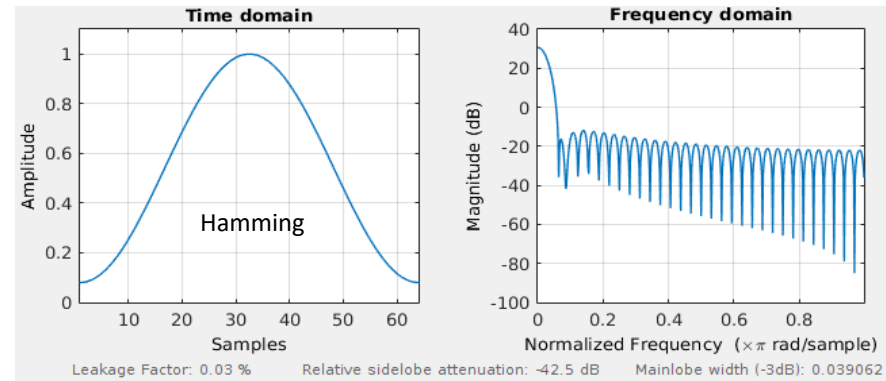
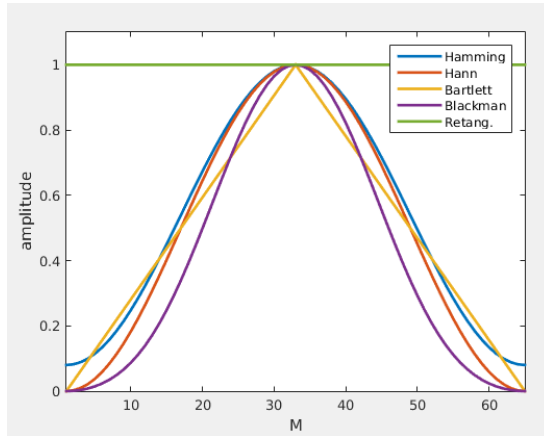


Janela de Tukey



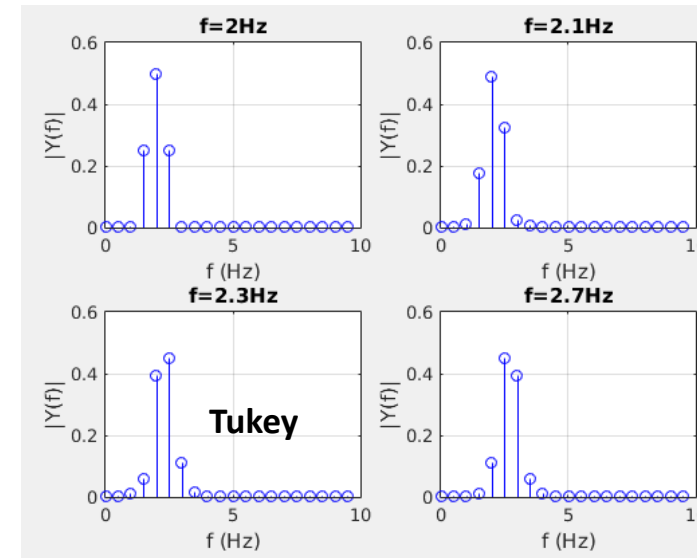
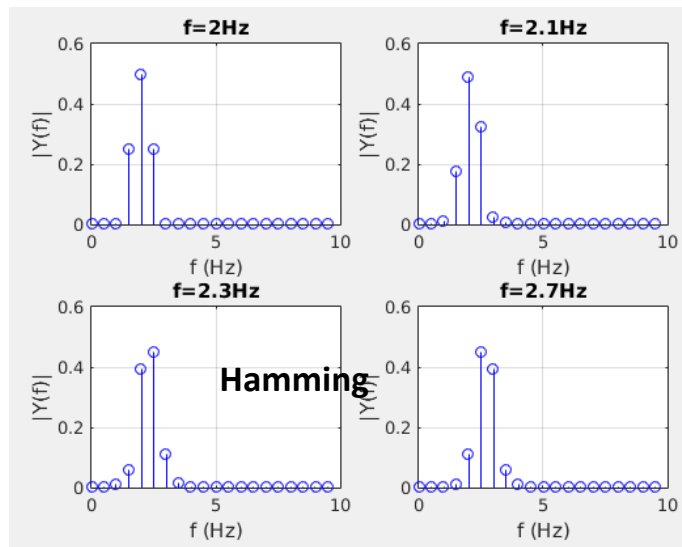
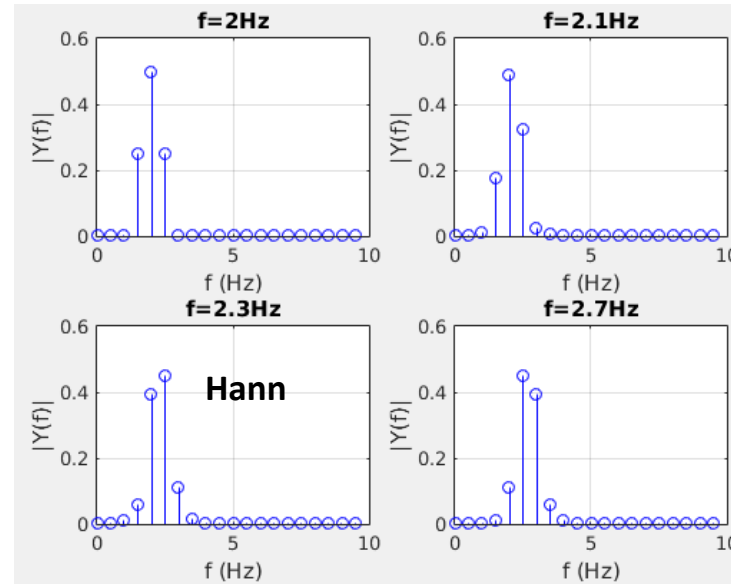
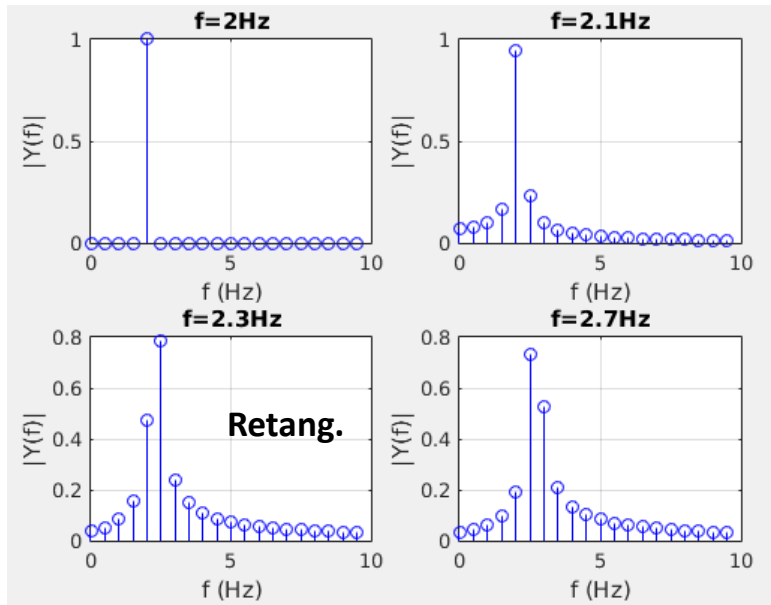
13 – Sequências estocásticas

13.4.5 Algumas janelas comumente utilizadas



13 – Sequências estocásticas

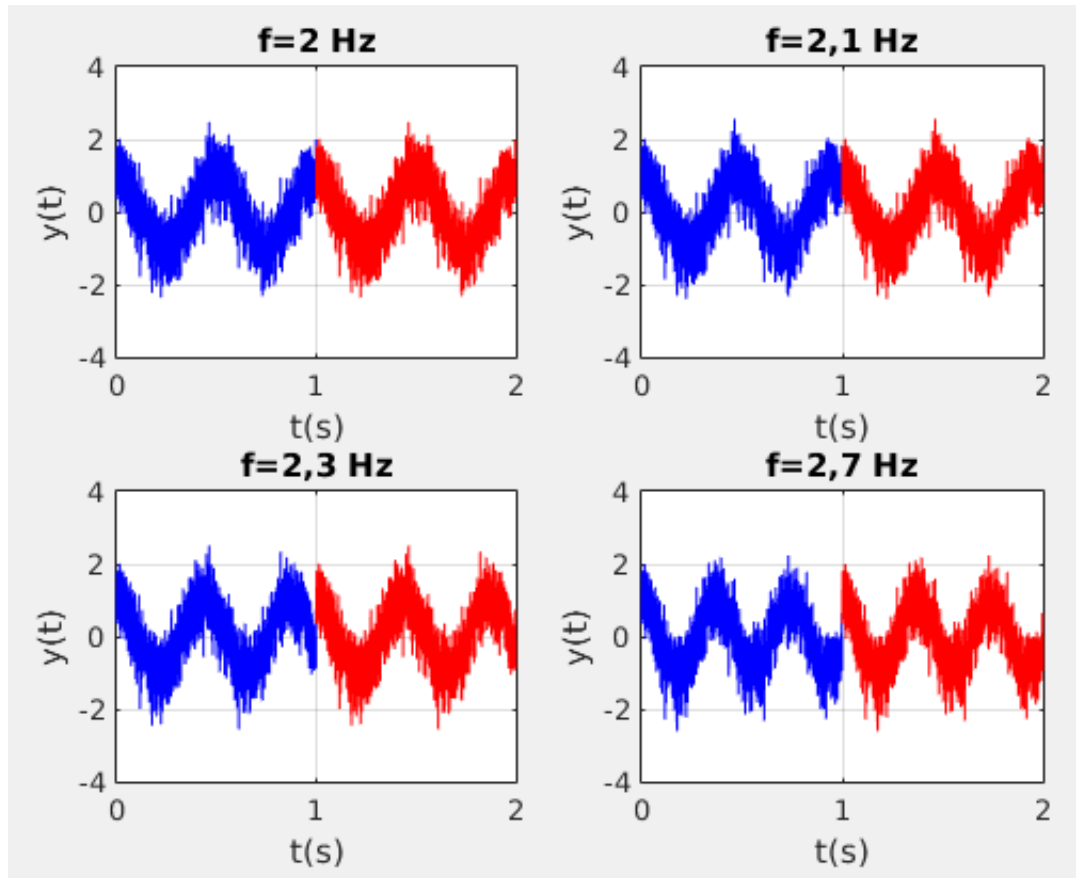
13.4.6 Comparação



13 – Sequências estocásticas

13.6 Efeitos do janelamento em um sinal aleatório

- Vamos, agora, supor que o sinal cossenoidal anterior seja corrompido com ruído gaussiano de média nula de amplitude máxima igual à metade da amplitude do sinal original.

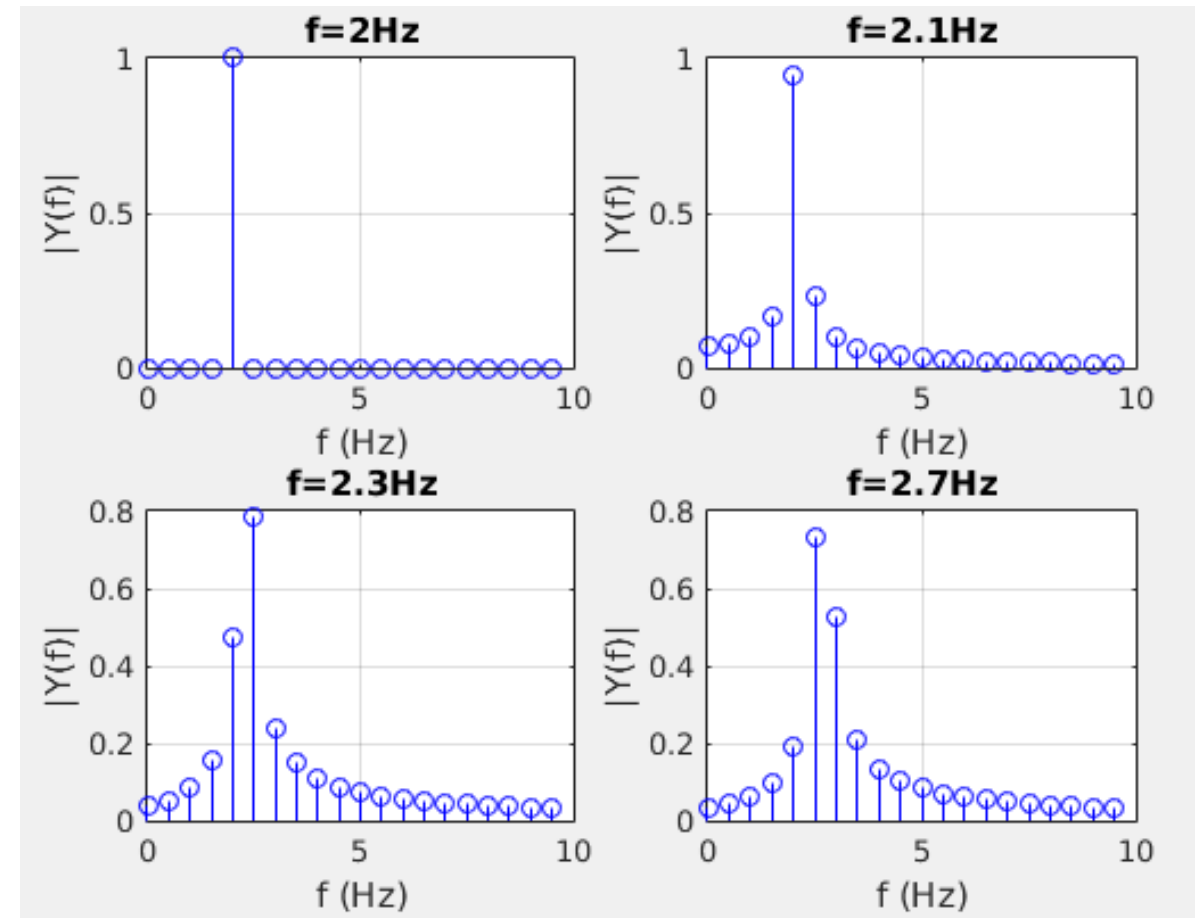
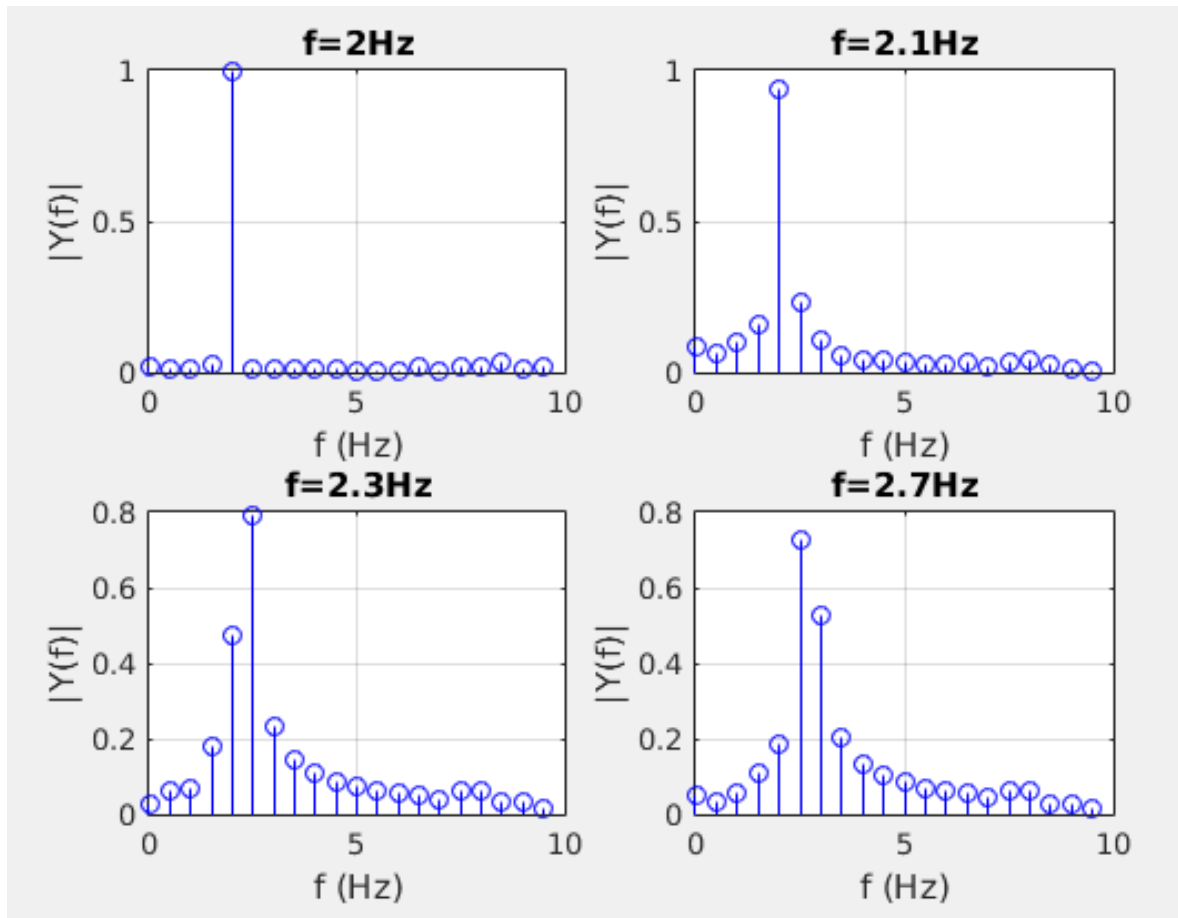


- nota-se o efeito do ruído aditivo em cada uma das frequências;
- eventualmente, as janelas descentralizadas apresentem melhor resposta do que anteriormente, pois a adição de ruído tende a tornar a diferença entre o final de um período e o início do subsequente menor.

13 – Sequências estocásticas

13.6.1 Efeitos do janelamento em um sinal aleatório: janela retangular

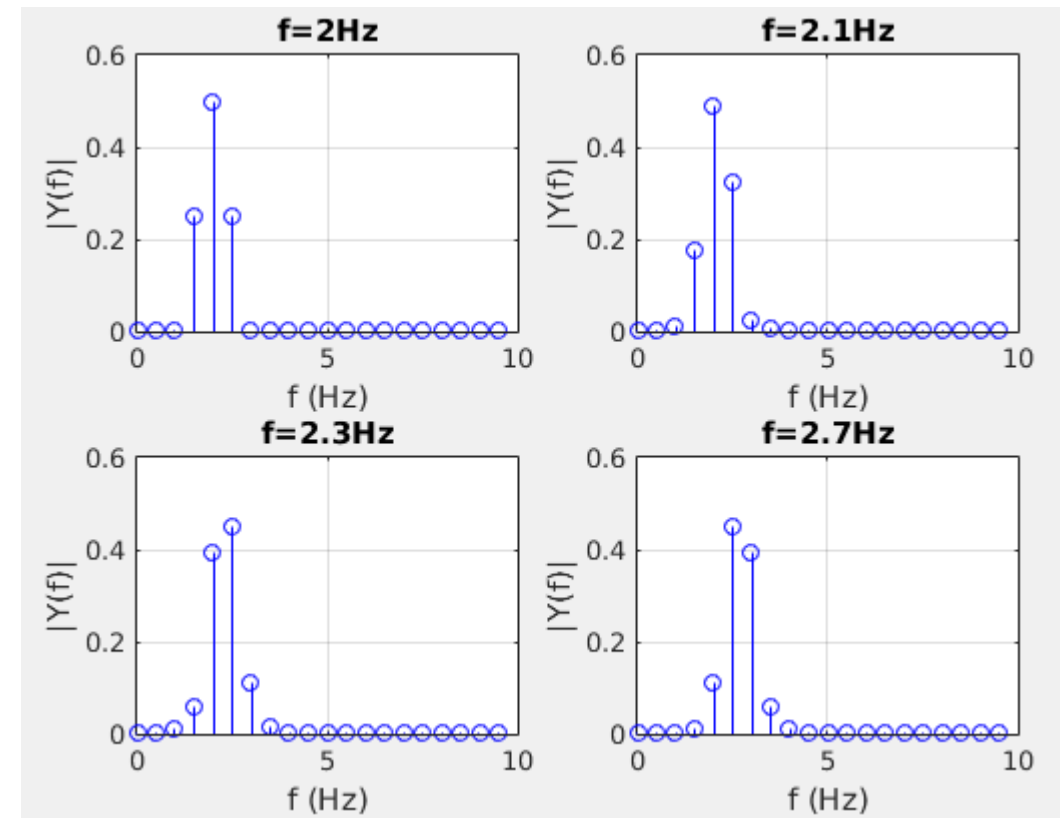
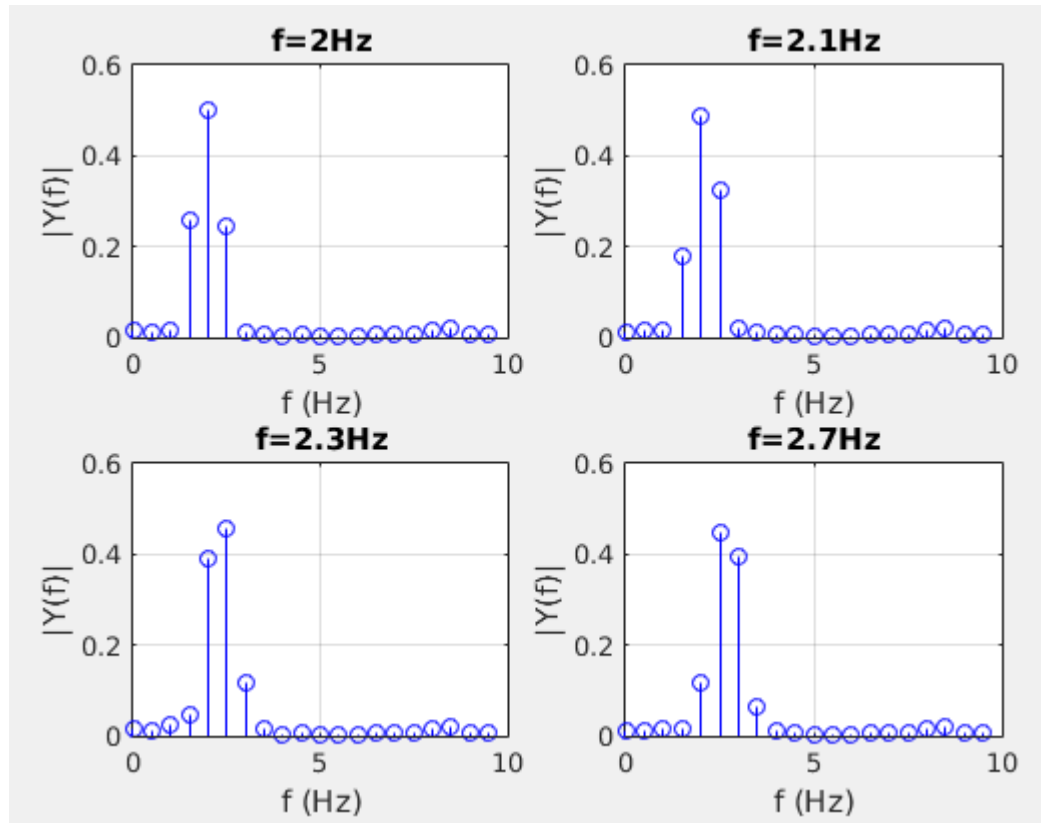
- Observa-se o vazamento também na frequência fundamental (2 Hz) causado pelo truncamento abrupto do sinal (esquerda);
- nas demais frequências, o comportamento foi semelhante ao anterior (direita);



13 – Sequências estocásticas

13.6.2 Efeitos do janelamento em um sinal aleatório: janela de Hann

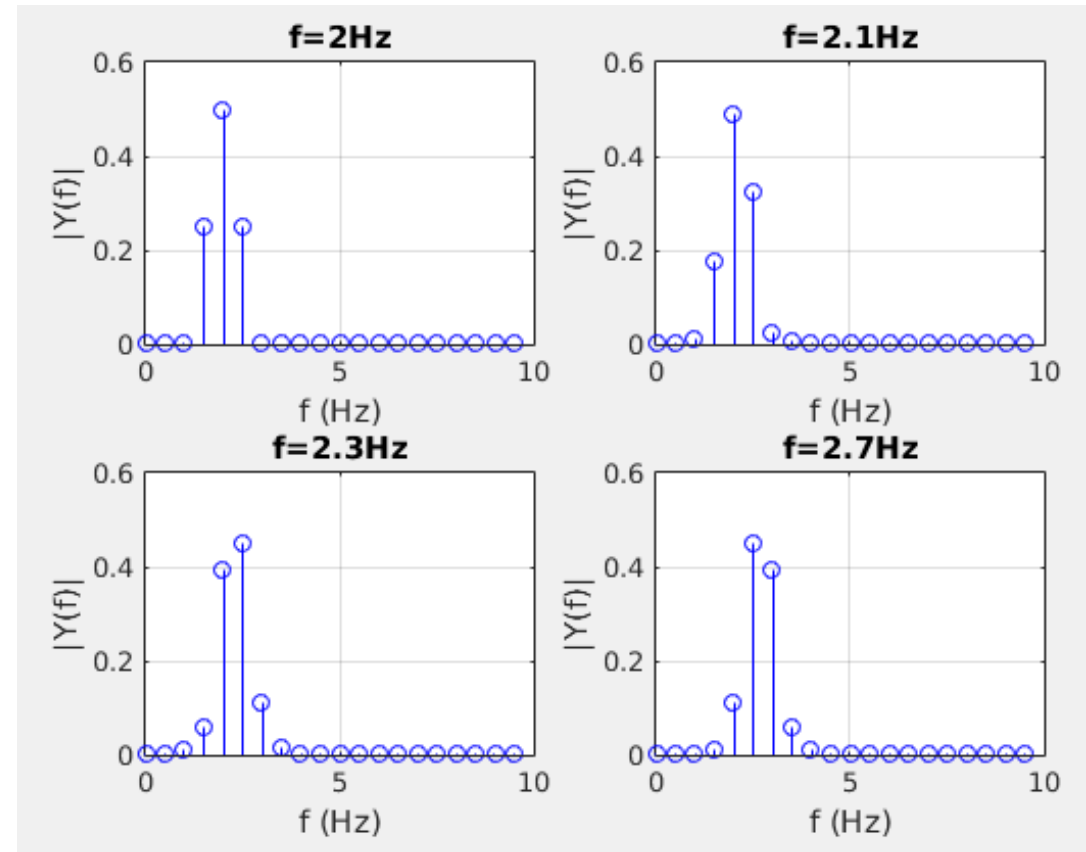
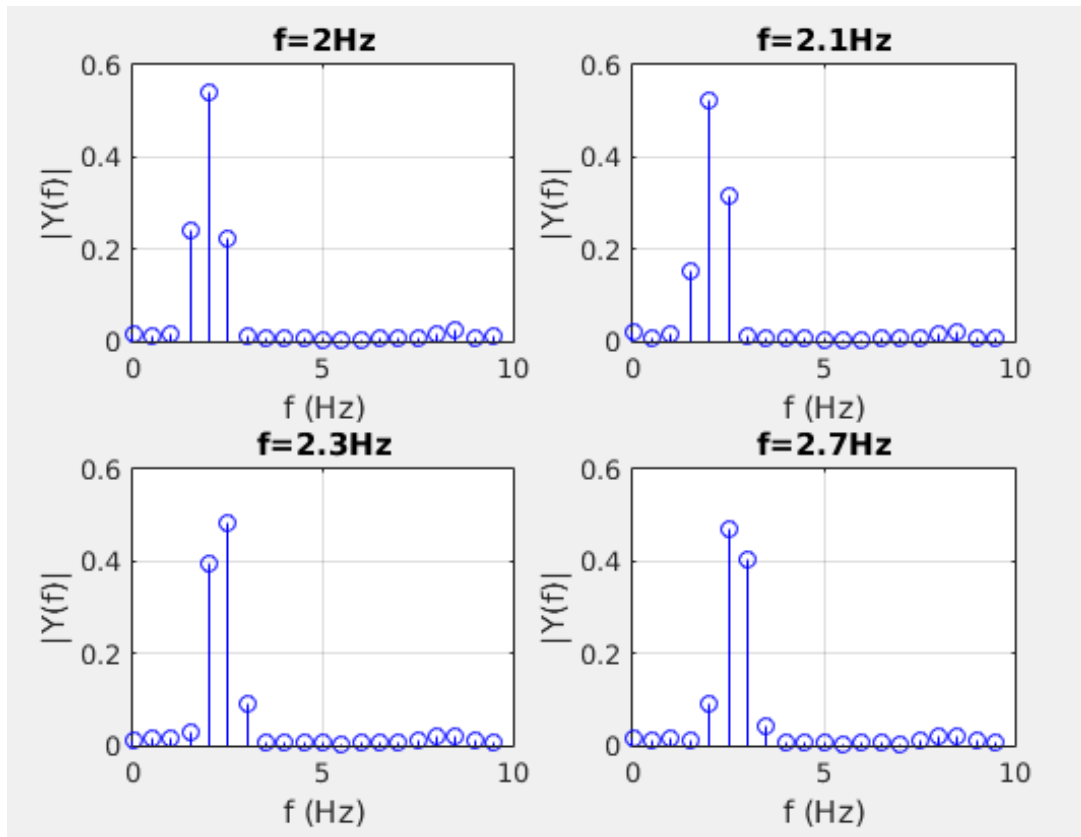
- com ruído, figura à esquerda



13 – Sequências estocásticas

13.6.3 Efeitos do janelamento em um sinal aleatório: janela de Hamming

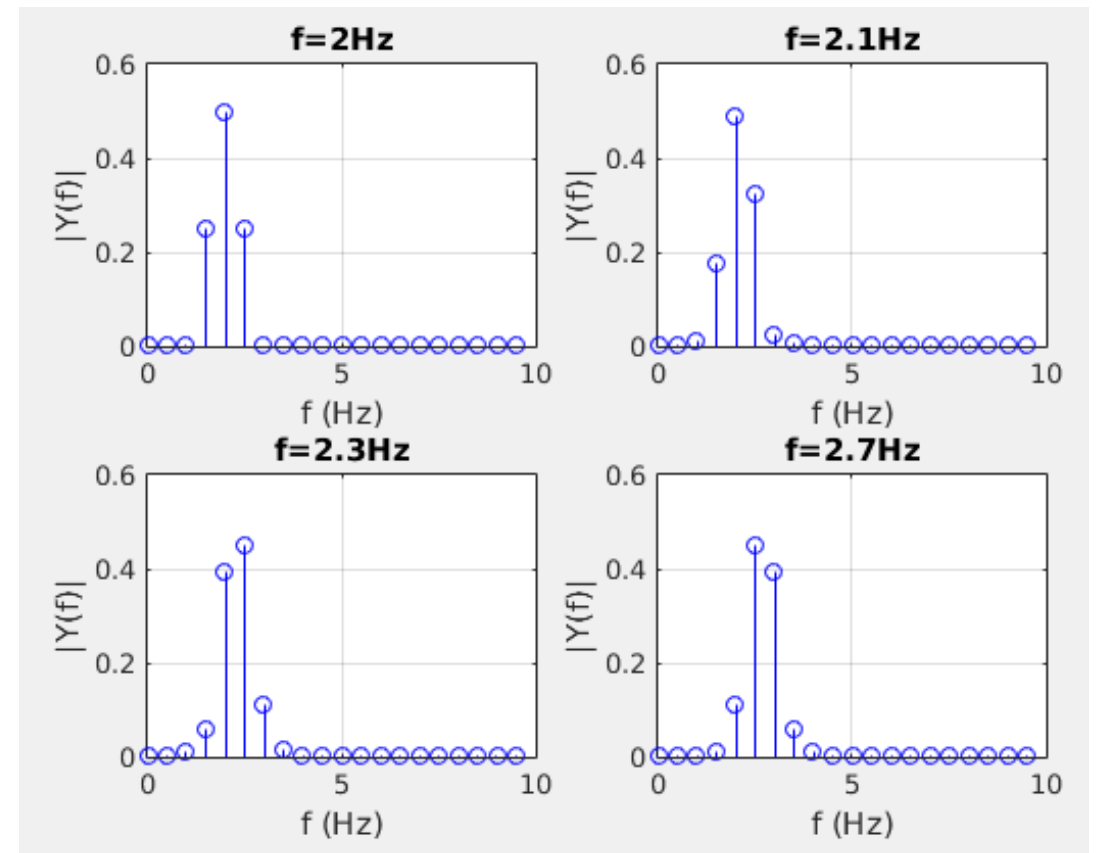
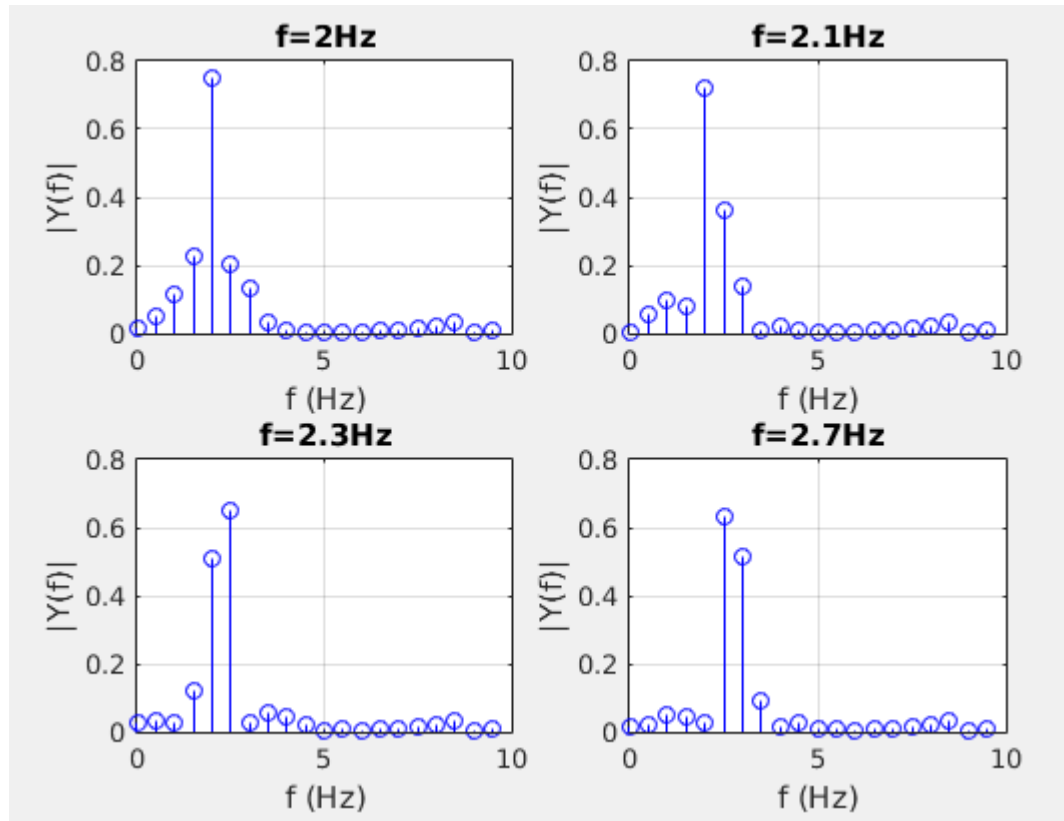
- com ruído, figura à esquerda



13 – Sequências estocásticas

13.6.4 Efeitos do janelamento em um sinal aleatório: janela de Tukey

- com ruído, figura à esquerda



13 – Sequências estocásticas

13.7 Comentários gerais sobre janelamento e cálculo do periodograma

- Não há uma regra definitiva para a seleção de janelas para a obtenção de estimativas do periodograma: cada caso deve ser analisado individualmente;
- entretanto, há recomendações que podem auxiliar no processamento de dados cuja composição espectral é aproximadamente conhecida. Por exemplo, em máquinas rotativas, desbalanceamentos normalmente excitam a frequência de rotação e seus harmônicos. Assim, deve-se procurar janelar o sinal medido de forma a selecionar trechos com número inteiro de períodos.
- Em turbinas, compressores, ventiladores e equipamentos similares, o periodograma irá exibir harmônicos correspondentes ao número de pás/hélices.
- Uma maneira de otimizar o cálculo da TDF que efetuado nos programas de análise de sinais por meio da FFT (transformada rápida de Fourier), recomenda-se sempre que possível amostras do sinal contendo um número de elementos que seja potência de 2. Com isso, são minimizados os erros de quantização.
- Caso o sinal de interesse seja completamente desconhecido, é importante visualizá-lo no domínio do tempo; eventualmente, fenômenos periódicos mais longos serão percebidos pela inspeção visual de maior série de dados;

13 – Sequências estocásticas

13.7 Comentários gerais sobre janelamento e cálculo do periodograma

- ainda nesse caso, a escolha de trechos cuja dimensão seja uma potência de 2 é recomendável; além disso, janelas que equalizem os extremos são normalmente adequadas.
- Ruídos são também visualmente perceptíveis na série temporal. Caso se imagine a existência de alguma ou algumas frequências marcantes, a filtragem previa irá contribuir para a obtenção de um periodograma mais representativo.

Em resumo, na análise espectral de um sinal qualquer, as seguintes etapas são recomendadas:

- 1) inspecionar visualmente o sinal no domínio do tempo;
- 2) mesmo que a inspeção em (1) não revele a presença de tendência ou componente constante (dC), deve-se fazer com que o valor médio seja nulo. Os softwares de análises de sinais possuem ferramentas específicas para executar esse cálculo;
- 3) janelar o sinal levando em conta a etapa (1), que vai guiar a seleção da janela mais adequada;
- 4) caso o sinal disponível não tenha um número de elementos que seja potência de 2, deve-se utilizar um colchão de zeros até a próxima potência de 2 superior ao número de elementos do sinal.

13 – Sequências estocásticas

13.7 Comentários gerais sobre janelamento e cálculo do periodograma

- 5) filtrar o sinal para isolar frequências aparentes e rejeitar ruído; o projeto dos filtros pode ser efetuado com base na transformada Z, conforme visto anteriormente;
- 6) finalmente, efetuar o cálculo do periodograma.

13 – Sequências estocásticas

13.8 O Espectrograma

- Toda a teoria que foi exposta até aqui teve como base a hipótese de que os sinais analisados poderiam ser considerados estacionários;
- com essa hipótese, é sabido que sequências mais longas proporcionam melhor resolução em frequência para a estimação do periodograma, haja vista que a composição espectral supostamente não varia. Nessas condições, o periodograma fornece boas informações.
- entretanto, sinais como os produzidos pelas cordas vocais (voz), sonar, radar e comunicação de dados não são estacionários; nesse caso, o periodograma não é capaz de rastrear as alterações que ocorrem ao longo do tempo na composição espectral.
- Para processar sinais não-estacionários existe uma ferramenta, a *transformada de Fourier dependente do tempo*, também conhecida como transformada de Fourier de tempo curto (tradução livre do inglês short-time Fourier transform).

13 – Sequências estocásticas

13.8 O Espectrograma

- A transformada de Fourier dependente do tempo é definida como (ver Oppenheim):

$$X[k, \lambda] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k + n)w(n)e^{-j\lambda n},$$

em que $w(n)$ representa uma janela.

- Nessa operação, a sequência $x(k)$, unidimensional função de apenas uma variável, é transformada em uma função bidimensional da variável discreta k , representativa do tempo, e da variável λ , representando frequências contínuas.
- A transformada de Fourier dependente do tempo é periódica em λ e possui período 2π .
- Ainda de acordo com Oppenheim, a transformada dependente do tempo pode ser vista como a transformada discreta de Fourier do sinal deslocado $x(k + n)$ “observado” através da janela estacionária à medida que n varia;
- com isso, para cada valor de n , parcelas distintas do conteúdo espectral são extraídas do sinal.

13 – Sequências estocásticas

13.8 O Espectrograma

- Não iremos aqui abordar aspectos teóricos mais aprofundados pois esse não é o escopo do curso;
- é importante compreender qualitativamente o alcance dessa teoria para poder utilizar os recursos computacionais hoje disponíveis para a análise de sinais.
- Nessa linha, convém apresentar um exemplo, conforme apresentado na documentação do software Matlab.

Exemplo: um sinal “chirp” quadrático é amostrado à frequência de 1 kHz durante o tempo de 2 s. O “chirp” é especificado de modo a iniciar com frequência de 100 Hz e aumentando até atingir 200 Hz após 1 segundo.

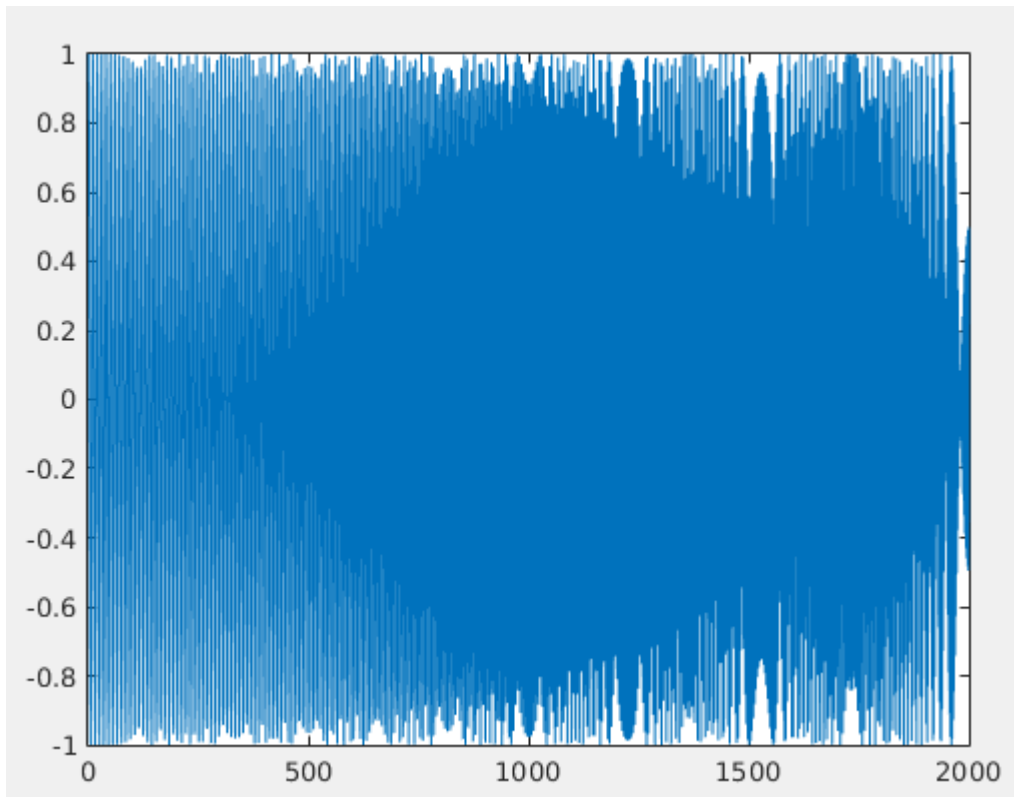
Estime o espectro do sinal utilizando a transformada de Fourier de tempo curto e o espectrograma para rastrear a frequência instantânea do sinal.

Segmente o sinal em trechos de 100 pontos com a janela de Hamming.

13 – Sequências estocásticas

13.8 O Espectrograma

- O sinal no domínio do tempo é mostrado na figura abaixo:



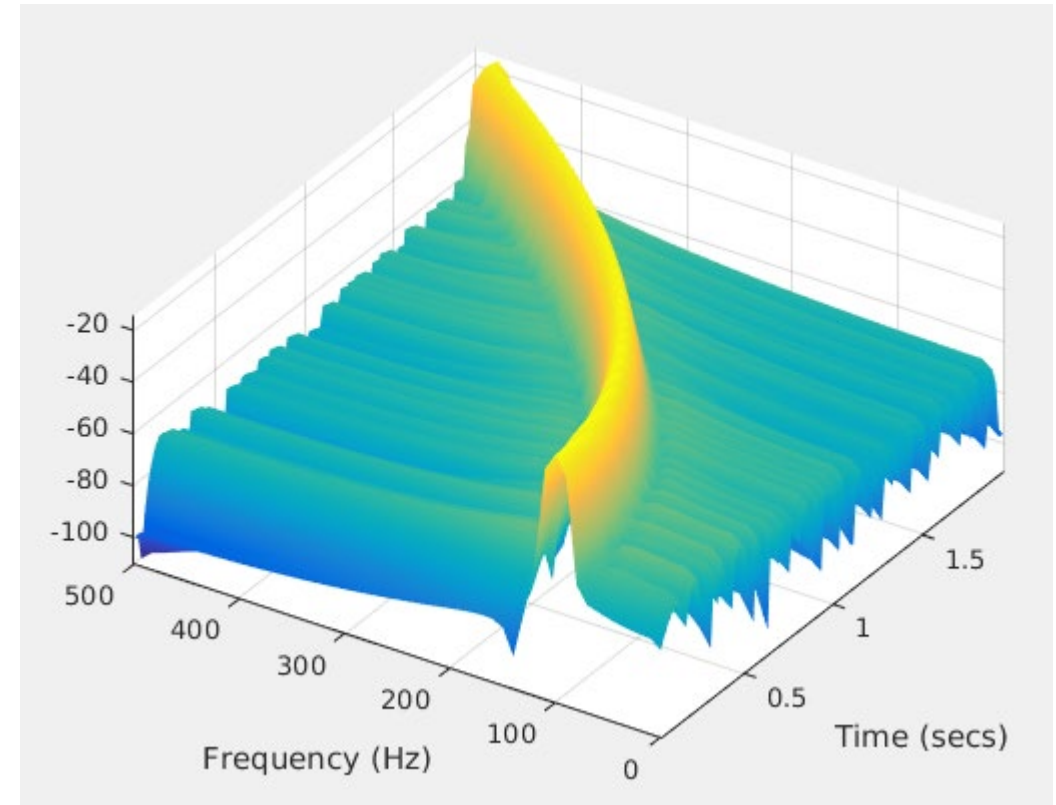
13 – Sequências estocásticas

13.8 O Espectrograma

- Agora, o espectrograma:

Observa-se que o espectrograma foi capaz de acompanhar a variação na frequência do sinal.

Evidentemente, há parâmetros a serem ajustados dependendo de cada caso a analisar.



13 – Sequências estocásticas

13.9 O Cepstro (ou *cepstrum*)

- É dada uma sequência $x(k)$ que possui transformada $\mathcal{Z}, X(z)$, com $x(k)$ estável e $X(z)$ convergente no círculo unitário;
- o cepstro complexo da sequência $x(k)$ é definido como a sequência $c_x(k)$ que é a transformada \mathcal{Z} inversa de $C_x(z)$, com $C_x(z) = \ln X(z)$.
- O cepstro complexo existe desde seja convergente em uma região anular do plano complexo tal que $r_1 < |z| < r_2$, $0 < r_1 < 1$ e $r_2 > 1$. Nessa região de convergência, o cepstro complexo pode ser expandido em série de Laurent,

$$C_x(z) = \ln X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x(k) z^{-k} \text{ com } c_x(k) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \ln X(z) z^{k-1} dz$$

- A integral é efetuada sobre um contorno fechado em torno da origem e pertencente à região de convergência.
- Nessas condições, o cepstro complexo, sequência $c_x(k)$ é estável.

13 – Sequências estocásticas

13.9 O Cepstro (ou *cepstrum*)

- Além disso, caso o ceptro complexo exista, $C_x(z)$ converge no círculo unitário e a seguinte operação é possível:

$$C_x(\omega) = \ln X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x(k) e^{-j\omega k}$$

em que $c_x(k)$ é a sequência obtida a partir da transformada inversa de Fourier de $X(\omega)$,

$$c_x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln X(\omega) e^{j\omega k} d\omega$$

- Para $X(\omega)$ dado na forma de amplitude (m) e fase, $X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$, então,
 $\ln X(\omega) = \ln|X(\omega)| + j\theta(\omega)$. Portanto, separando as transformadas inversas de Fourier de $|X(\omega)|$ e de $j\theta(\omega)$,

13 – Sequências estocásticas

13.9 O Cepstro (ou *cepstrum*)

$$\begin{cases} c_m(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |X(\omega)| e^{j\omega k} d\omega \\ c_\theta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\omega) e^{j\omega k} d\omega \end{cases}$$

- A análise cepstral é bastante utilizada no processamento da fala para separar seu efetivo conteúdo espectral do conteúdo devido à cadência ao falar.
- Na prática, a análise cepstral permite isolar dois sinais que tenham sido convoluídos, processo esse denominado *deconvolução*.
- Quando a deconvolução é realizada com o auxílio do cepstro complexo, o processo recebe o nome de *deconvolução homomórfica*.

13 – Sequências estocásticas

13.10 Deconvolução homomórfica

- Conforme mencionado anteriormente, essa operação tem como objetivo separar conteúdos espectrais presentes em sinais como a fala, sísmicos ou eletromagnéticos;

O método pode ser apresentado partindo-se da suposição de que os sinais a serem deconvoluídos, uma sequência $y(k)$ é a saída de um sistema linear e invariante no tempo excitado pela sequência $x(k)$. Utilizando as transformadas \mathcal{Z} obtém-se $Y(z) = X(z)H(z)$, em que $H(z)$ representa a dinâmica do sistema. Tomando-se o logaritmo natural em ambos os lados obtém-se

$$\ln Y(z) = \ln X(z) + \ln H(z) \Rightarrow C_y(z) = C_x(z) + C_h(z)$$

Assim, o cepstro da sequência de saída, $y(k)$, é igual à soma dos ceptros das sequências $x(k)$ e $h(k)$:

$$c_y(k) = c_x(k) + c_h(k)$$

Portanto, a convolução de duas sequências no domínio do tempo corresponde à sua soma no domínio cepstral.

13 – Sequências estocásticas

13.10 Deconvolução homomórfica

Nas aplicações citadas anteriormente, a diferença entre os conteúdos cepstrais $c_x(k)$ e $c_h(k)$ é tal que permite a sua separação no domínio cepstral.

Para citar um exemplo, consideremos que em um sinal haja componentes $c_x(k)$ concentradas em valores pequenos de k e que a energia contida em $c_h(k)$ esteja ligada a maiores valores de k ; nessas condições, as componentes cepstrais seriam respectivamente separadas por meio de filtros respectivamente passa-baixa e passa-alta:

$$\begin{aligned}\widehat{c}_x(k) &= c_x(k)w_{lp}(k), & w_{lp}(k) &= \begin{cases} 1, & |k| \leq N \\ 0, & |k| > N \end{cases} \\ \widehat{c}_h(k) &= c_h(k)w_{hp}(k), & w_{hp}(k) &= \begin{cases} 0, & |k| \leq N \\ 1, & |k| > N \end{cases}\end{aligned}$$

Após separadas, as sequências temporais são obtidas aplicando às sequências cepstrais a transformação homomórfica inversa.

13 – Sequências estocásticas

13.11 Um exemplo da aplicação da transformação cepstral

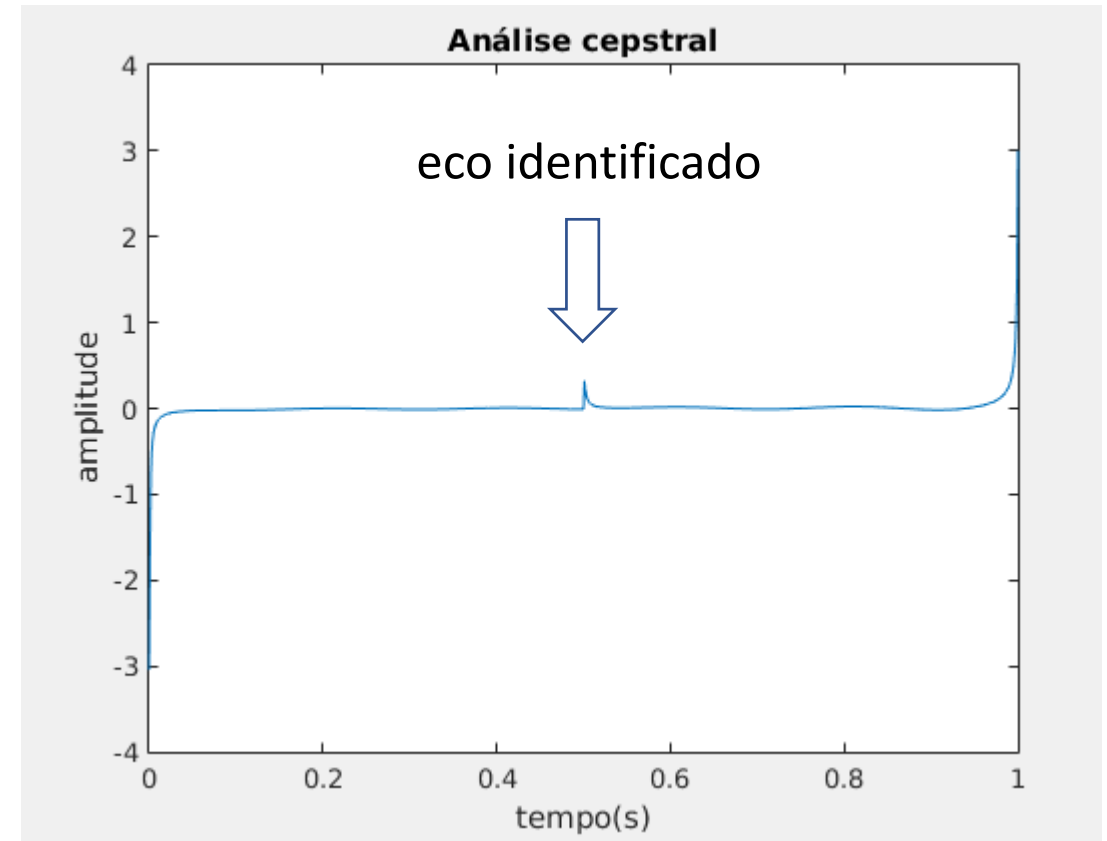
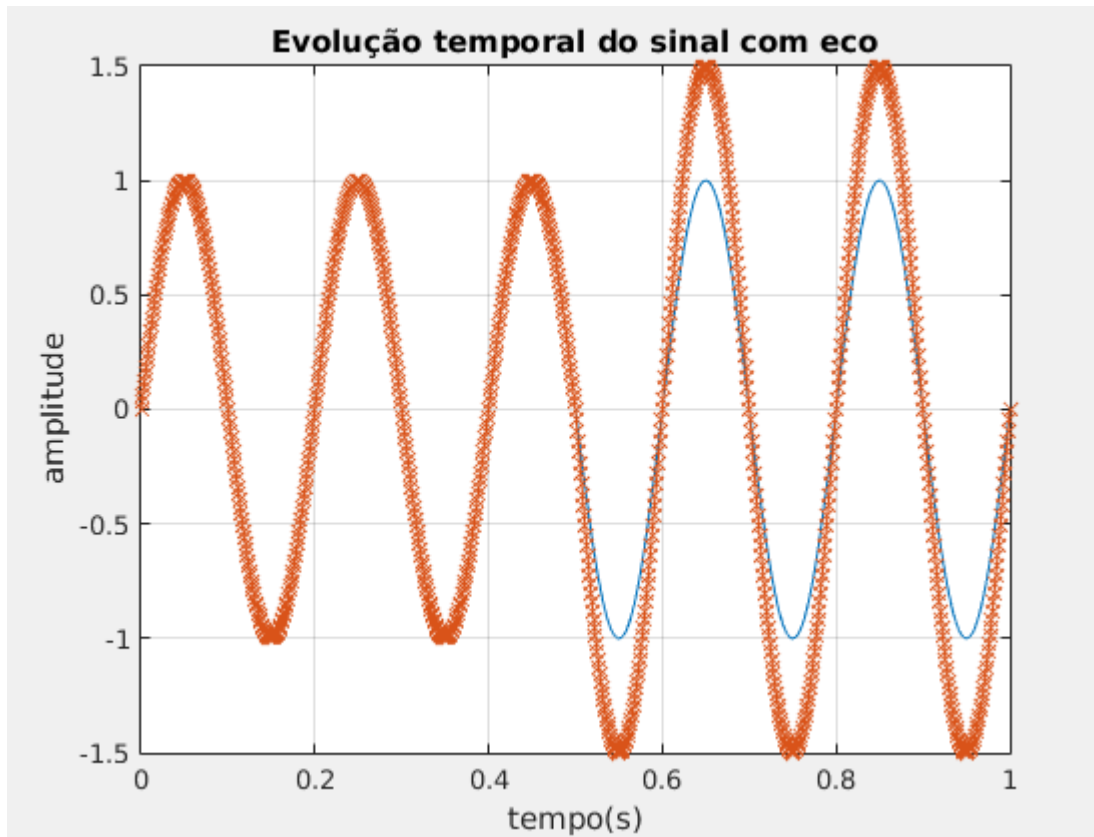
Como veremos a seguir, na prática o computador é utilizado para calcular o cepstro da sequência $y(k)$, aplicar os filtros (janelamento) e efetuar a transformação homomórfica inversa. Salienta-se que, em lugar das transformadas z direta e inversa, computacionalmente são utilizadas as transformadas discretas direta e inversa de Fourier.

O exemplo visa identificar a presença de eco em um sinal de frequência conhecida. Para tanto, será criada uma sequência senoidal de frequência 5 Hz e duração de 1 segundo, amostrada à taxa de 1000 amostras/s que, após 0,5 segundos, recebe o reforço de um eco cuja amplitude é metade da amplitude da senoide original. A análise cepstral será utilizada para identificar a ocorrência do eco (este exemplo é baseado na documentação do Matlab).

13 – Sequências estocásticas

13.11 Um exemplo da aplicação da transformação cepstral

Observemos os gráficos contendo o resultado da análise:



13 – Sequências estocásticas

13.12 Tarefas

- 1) Grave um sinal de sua escolha utilizando seu telefone celular (mesmo os mais simples possuem pelo menos microfone e acelerômetro, dentre outros sensores) ou outro sensor que dispuser e efetue sua análise. Pesquise os parâmetros dos sensores que utilizar (taxa de aquisição, sensibilidade, fundo de escala) para garantir que a análise seja efetuada de maneira correta.
- 2) Na internet há bancos de dados de sinais não processados obtidos em testes de máquinas e equipamentos reais. Pesquise e escolha um desses sinais e efetue sua análise.. Atente para os parâmetros dos sensores que escolher, conforme as orientações em (1), acima.

Observação: não serão aceitos dois sinais obtidos com o mesmo tipo de sensor, por exemplo: se em (1) for utilizado um sinal capturado por microfone, em (2) o sensor deverá ser outro.

Elaborar um relatório técnico com as tarefas solicitadas que contenha:

- descrição do experimento realizado (apenas para o item 1) incluindo os parâmetros do sensor;
- as ferramentas computacionais utilizadas e os resultados obtidos;
- breve discussão levando em conta o que se esperava obter na análise dos sinais;
- no caso do item 2, mencionar a fonte e, os parâmetros do sensor e, se possível, o que o experimento buscava identificar;
- os códigos ou ferramentas computacionais utilizados.

Para efetuar o processamento dos sinais é permitido utilizar quaisquer ferramentas computacionais de que dispuser. O relatório deverá ser entregue em formato pdf.