Processamento de Sinais aplicado à Engenharia Mecânica

Transformada Z

Flavius P. R. Martins, Prof. Dr.
Flávio C. Trigo, Prof. Dr.

1. Introdução

1.1 Um pouco de história

- 1740: De Moivre, matemático francês, introduziu a função característica para descrever funções densidade de probabilidade de variáveis aleatórias discretas. A transformada $\mathcal{Z}$ é um caso especial das séries de Laurent, utilizadas para a representação de funções complexas;

- década de 1950: Yakov Tsypkin (1919-1997), matemático e engenheiro russo, propôs a transformada de Laplace discreta para o estudo de sistemas amostrados;

- década de 1950: Prof. John Ragazzini (1912-1988) e seus alunos Eliahu Jury (1923-2020) e Lofti Zadeh (1921-2017) desenvolveram a transformada $\mathcal{Z}$;

- John Ragazzini teve como alunos, entre outros: Jury (transformada $\mathcal{Z}$, sistemas não lineares e teoria da estabilidade interna); Zadeh (transformada $\mathcal{Z}$ e teoria da lógica difusa) e R. E. Kalman (1930-2016), cujo nome dispensa apresentações.

1. Introdução

1.2 Motivação (algumas) para a gênese da transformada Z

- A transformada Z é uma ferramenta matemática que permite descrever sinais e sistemas discretos;

- a representação de sinais discretos por meio dessa transformada é bastante intuitiva, pois o conjunto de sinais amostrados é convertido em um polinômio;

- fornece o arcabouço teórico para a solução de equações de diferenças decorrentes da discretização de equações diferenciais ordinárias;

- permite efetuar a o projeto de sistemas de controle na forma discreta e, através da transformada Z inversa, promove a interface entre os ambientes digital de processamento e analógico ou digital dos atuadores;

- é amplamente utilizada no projeto de filtros digitais.

2.1 Transformada de Laplace de sinais discretos

- a transformada de Laplace de um sinal amostrado com período de amostragem T,

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$$

é dada por

$$X_a(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\mathcal{L}[\delta(-kT)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

- fazendo $z = e^{Ts} \Rightarrow \quad s = \frac{1}{T}\ln z$ segue que:

- z é uma *variável complexa;*
- um sinal amostrado é, essencialmente, uma sequência numérica.

Portanto, pode-se escrever a expressão anterior como

$$X_a(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)e^{-\frac{kT}{T}\ln z}$$

$$X_a(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)e^{-k\ln z}$$

2.2 Transformada Z bilateral

- a transformada Z de $x_a(t) = x(kT)$ ou de $x(k)$ para $-\infty < t < \infty$ definida como

$$X(z) \triangleq \mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad \text{ou}$$

$$\mathcal{Z}[x_a(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = X(z) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

é denominada *transformada Z bilateral*

- a transformada bilateral é uma série de potências em z^{-k} ;

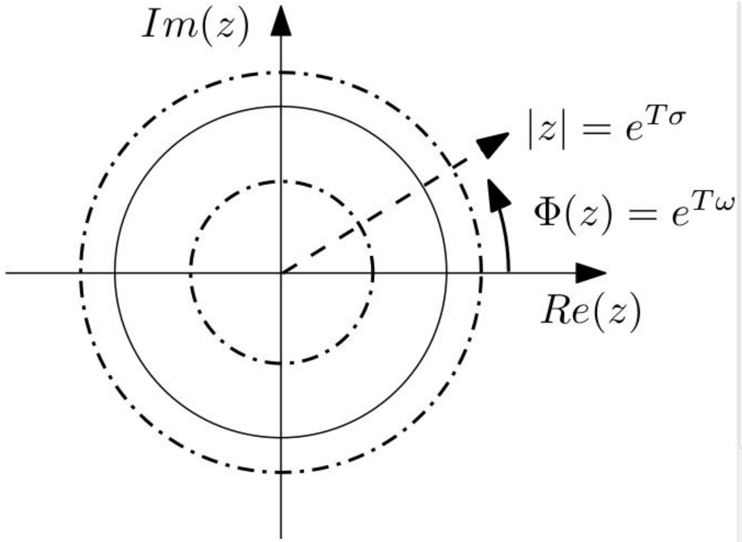
- sendo z um número complexo e a tranformada $X(z)$ uma série infinita de potências em z, $X(z)$ somente existe para os valores de z em que a série converge;

- Portanto, para que uma transformada Z seja univocamente definida, sua *região de convergência* (RDC em tradução livre do inglês ROC – Região de Convergência) *deve ser especificada*.

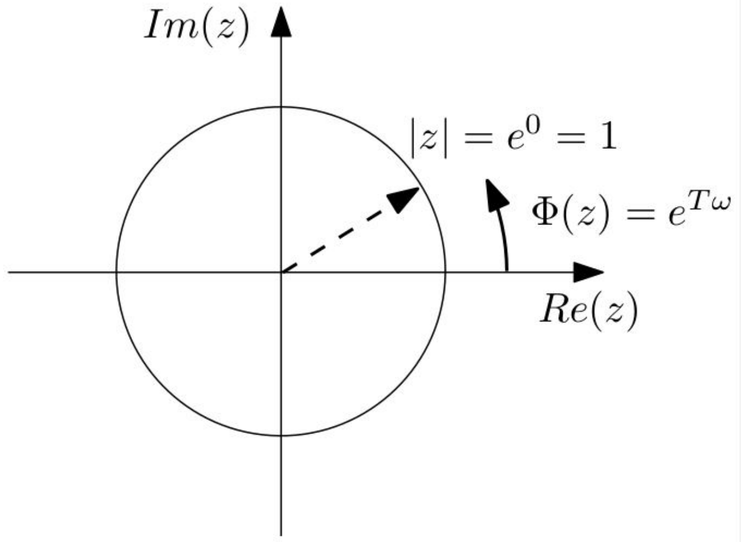
2.3 Região de Convergência (RDC)

- as RDCs da transformada Z têm estreita relação com o conjunto imagem dessa transformação no plano complexo z;
- vejamos o que ocorre na transformação $z = e^{Ts}$, do plano s (Laplace) para o plano z (transformada Z) com período de amostragem T.

$$\Longrightarrow z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma}.e^{Tj\omega}$$



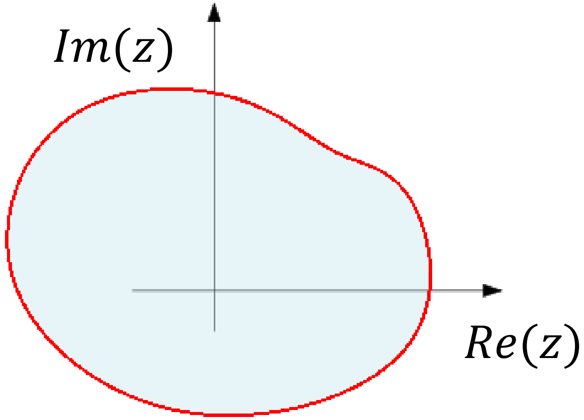
- Em coordenadas polares, $z = re^{j\omega T}$, com ω, frequência do sinal em rad/s e $r = e^{T\sigma}$, módulo do número complexo z. Em análise de sinais, há particular interesse em oscilações persistentes, ou seja, $z = e^{j\omega T}$, cujo módulo é o **círculo unitário**.
- Portanto, todo o eixo imaginário é mapeado para o círculo unitário à medida que $t = kT$ varia de zero a infinito, independentemente do módulo de z



2.3 Região de Convergência (RDC)

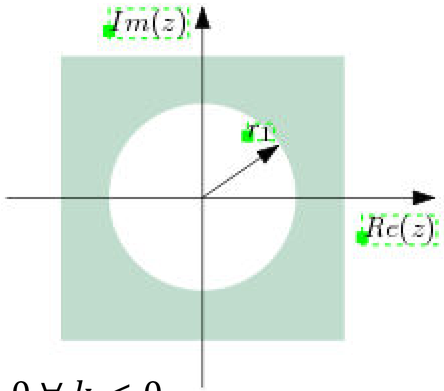
As RDCs para sequências ou sinais amostrados finitos ou infinitos definem as respectivas sequências como *causais* ou *anti-causais*. Abaixo apresenta-se um resumo de tais RDCs.

- RDCs para sequências finitas

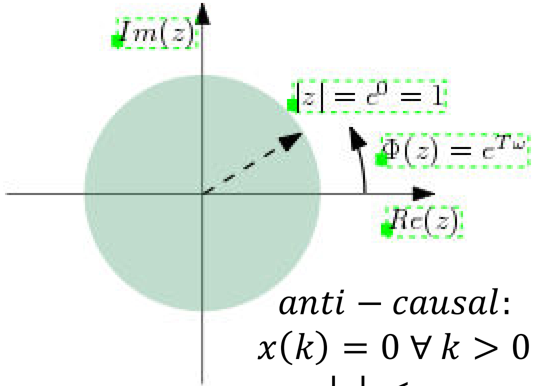


RDC: todo o plano z exceto, eventualmente, $z = 0 \;\; e/ou \; z = \pm\infty$

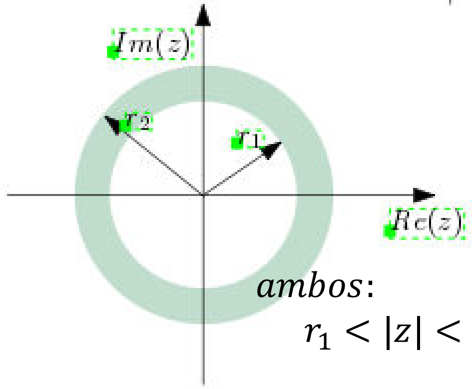
- RDCs para sequências infinitas



$causal$:
$x(k) = 0 \; \forall \; k < 0$
$|z| > r_1$



$anti - causal$:
$x(k) = 0 \; \forall \; k > 0$
$|z| < r_2$



$ambos$:
$r_1 < |z| < r_2$

2.4 Transformada Z unilateral

- na transformada Z unilateral, supõe-se que $x(t) = 0$ para $t < 0$ ou $x(kT) = 0$ ou $x(k) = 0$ para $k < 0$

- a transformada Z unilateral de um sinal amostrado com período T é definida como

$$X(z) \triangleq Z[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

- não há necessidade de especificar a RDC da transformada unilateral pois todos os sinais/sequências são causais e todo o plano complexo, à exceção de $z = 0$ e $z = \infty$;

- para efeitos práticos em aplicações de Engenharia, a transformada unilateral é, normalmente, adequada.

2.4 Transformada Z: exemplos

Exemplos: dadas as sequências ***finitas***, determinar suas transformadas unilaterais e bilaterais, especificando as RDCs:

$a)\ x_1(k) = [\underline{9}; 2; 3; 0; 4]$

$$X_1(z) = Z[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = 9z^0 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 0z^{-3} + 4z^{-4}$$ RDC: todo o plano z exceto $z = 0\ e\ z = \infty$

$b)\ x_2(k) = [9; 2, \underline{3}; 0; 4]$

$$Z[x(k)] = \sum_{k=-2}^{\infty} x(k)z^{-k} = 9z^2 + 2z^1 + 3z^0 + 4z^{-2}$$ RDC: todo o plano z exceto $z = 0\ e\ z = \infty$

$c)\ x_3(k) = \delta(k) \Rightarrow \quad Z[\delta(k)] = 1\ ,$ RDC: todo o plano z exceto $z = 0\ e\ z = \infty$

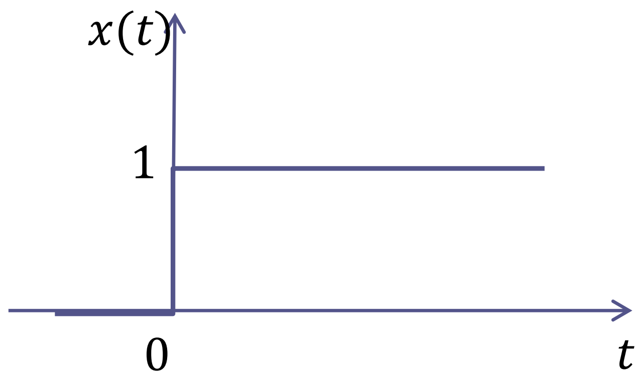
2.5 Transformada Z de funções elementares

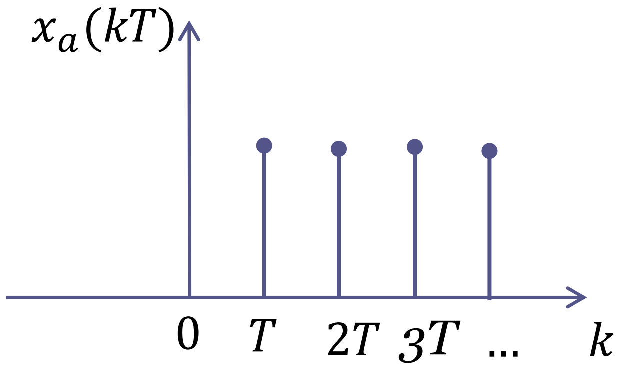
Obs.: em todas as transformações, pressupõe-se que haja uma RDC correspondente;

(a) sequência amostrada com período T da função **degrau unitário** $\boldsymbol{u(t)}$ iniciado em $t = 0$:

$$x_a(kT) = \begin{cases} u(kT), t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \underset{Z[u(kT)]}{\Longleftrightarrow} X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\, z^{-k} = u(0T)z^0 + u(T)z^{-1} + u(2T)z^{-2} + \cdots + u(kT)z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Observa-se que a série converge somente para $|z| > 1$





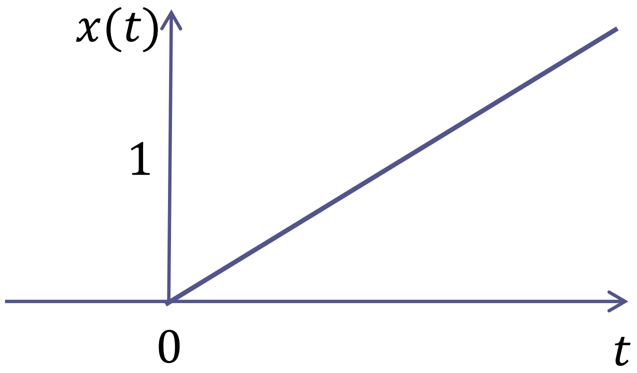
2.5 Transformada Z de funções elementares

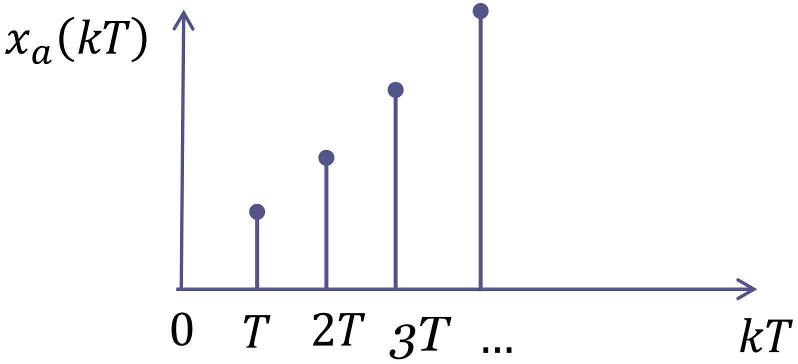
Obs.: daqui em diante, a menos que explicitamente mencionado, todas as somatórias indicadas de maneira simplificada como abaixo englobam valores de $k = 0$ *até* ∞

(b) sequência amostrada com período T da função rampa $x(t) = t$, iniciada em $t = 0$:

$$x_a(kT) = \begin{cases} kT, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \underset{Z[kT]}{\Longleftrightarrow} X(z) = \sum_k x_a(kT)\, z^{-k} = \sum_k kTz^{-k} = T\sum_k kz^{-k} =$$

$$= T(z^{-1} + 2z^{-2} + \cdots + kz^{-k} + \cdots = T\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z - 1)^2}$$





2.5 Transformada Z de funções elementares

Obs.: as somatórias com notação simplicada vão de $k = 0$ até ∞

(c) função polinomial $x(k) = e^k,\ k = 0, 1, 2 \ldots$

$$Z[x(k)] = \sum_{k=0} x(k)\, z^{-k} = \sum_{k} a^k z^{-k} = 1 + z^{-1} + 2z^{-2} + \cdots + kz^{-k} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

(d) sequencia amostrada da função exponencial $x(t) = e^{-at}$ a partir de $t = 0$

$$x_a(kT) = \begin{cases} e^{-akT}, k = 0, 1, 2, \ldots \\ \quad\quad 0, k < 0 \end{cases} \underset{\mathcal{Z}[e^{-akT}]}{\Longleftrightarrow} X(z)$$

$$= \sum_{k} x_a(kT)\, z^{-k} = \sum_{k} e^{-akT} z^{-k} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \cdots + e^{-akT} z^{-k} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

2.5 Transformada Z de funções elementares

(e) função seno: $x(t) = \begin{cases} \text{sen}\,\omega t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$. Lembrando que $z[e^{-aT}] = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$ e que

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos\omega t + j\,\text{sen}\,\omega t \\ e^{-j\omega t} &= \cos\omega t - j\,\text{sen}\,\omega t \end{aligned} \Rightarrow \text{sen}\,\omega t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right),$$

$$X(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)\right] = \frac{1}{2\text{j}}\left(\mathcal{Z}\left[e^{j\omega t}\right] - \mathcal{Z}\left[e^{-j\omega t}\right] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T}z^{-1}}\right)\right.$$

$$X(z) = \frac{1}{2j}\frac{z^{-1}\left(1 - e^{-j\omega T} - 1 + e^{j\omega T}\right)}{1 - z^{-1}\left(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}\right) + z^{-2}} = \frac{z^{-1}\text{sen}\,\omega T}{1 - 2z^{-1}\cos\omega T + z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{z\,\text{sen}\,\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$$

2.5 Transformada Z de funções elementares

(f) função cosseno $x(t) = \begin{cases} \cos \omega t\,, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$. Lembrando que $\mathcal{Z}[e^{-aT}] = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$ e que

$$\left.\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos \omega t + j \text{ sen } \omega t \\ e^{-j\omega t} &= \cos \omega t - j \text{ sen } \omega t \end{aligned}\right. \Rightarrow \cos \omega t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right),$$

$$X(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{Z}\left[e^{j\omega t}\right] + \mathcal{Z}\left[e^{-j\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T}z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T}z^{-1}}\right)\right.$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - e^{-j\omega t}z^{-1} + 1 - e^{j\omega t}z^{-1}}{1 - z^{-1}(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) + z^{-2}}\right) = \left(\frac{1 - z^{-1}\cos \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}\right)$$

$$X(z) = \frac{z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

2.6 Propriedades da transformada Z

(a) multiplicação por constante: se $Z[x(t)] = X(z) \Longrightarrow Z[a\,x(t)] = a\,z[x(t)] = aX(z), a \in \mathcal{R}$

Demonstração: por definição,

$$Z[x(t)] = Z[x(kT)] = Z[ax(kT)] = \sum_{k=0} a\,x(kT)z^{-k} = a\sum_{k=0} x(kT)z^{-k} = aX(z)$$

(b) linearidade: se $Z[x(t)] = X(z)$, $Z[y(t)] = Y[z]$, α, β *constantes* $\in \mathcal{R}$ *então*

$$Z[w(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)] = W(z) = \alpha X(z) + \beta Y(z)$$

A demonstração dessa propriedade é deixada como exercício.

(c) multiplicação por a^k: *se* $Z[x(k)] = X(z)$, *então* $Z\left[a^k x(k)\right] = X(a^{-1}z)$, $a \in \mathcal{R}$

Demonstração:

$$Z\left[a^k x(k)\right] = \sum_{k} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{k} x(k)(a^{-1}z)^{-k} = X(a^{-1}z)$$

2.6 Propriedades da transformada Z

(d) deslocamento ou translação real: se $x(t) = 0,\ \forall t < 0$ e $Z[x(t)] = X(z)$

$$\Rightarrow Z[x(t-nT)] = z^{-n}X(z), n \in \mathcal{Z}, n \geq 0 \qquad (d1)$$
$$\Rightarrow Z[x(t+nT)] = z^{n}X(z), n \in \mathcal{Z}, n \geq 0 \qquad (d2)$$

Demonstração (d1):

$$Z[x(t-nT)] = \sum_{k=0} x(kT-nT)z^{-k} = z^{-n}\sum_{k=0} x(kT-nT)z^{-k}z^{n} = z^{-n}\sum_{k} x(kT-nT)z^{-(k-n)}$$

Fazendo $-(k-n) = m$, a somatória terá como limite inferior $m = n$; porém, como $x(t) = 0,\ \forall t \leq n$, a somatória em m pode ser iniciada em zero. Assim,

$$Z[x(k-n)] = z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} x(mT)z^{-m} = z^{-n}X(z)$$

Conclusão: a multiplicação da transformada $X(z)$, de $x(t)$, por z^{-n}, **equivale a um atraso *de*** n *unidades de tempo na função* $x(t)$*(a função é transladada para a direita n unidades de tempo).*

2.6 Propriedades da transformada Z

(d) deslocamento ou translação real: se $x(t) = 0,\ \forall t < 0$ e $Z[x(t)] = X(z)$

$$\Rightarrow Z[x(kT - nT)] = z^{-n} X(z), n \in \mathcal{Z}, n \geq 0 \qquad (d1)$$

$$\Rightarrow Z[x(kT + nT)] = z^{n} \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right], n \in \mathcal{Z}, n \geq 0 \qquad (d2)$$

Demonstração (d2):

$$Z[x(kT + nT)] = \sum_{k=0} x(kT + nT) z^{-k} = z^{n} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT) z^{-(k+n)}$$

Fazendo $k + n = m, k = m - n$ e, para $k = 0 \Rightarrow m = n,$ a expressão fica:

$$= z^{n} \left[\sum_{m=n}^{\infty} x(mT) z^{-m} + \sum_{m=0}^{n-1} x(mT) z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} x(mT) z^{-m} \right] = z^{n} \left[\sum_{m=0}^{\infty} x(mT) z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} x(mT) z^{-m} \right]$$

$$\Rightarrow Z[x(k + n)] = z^{n} \left[X(z) - \sum_{m=0}^{n-1} x(k) z^{-k} \right]$$

Conclusão: a multiplicação da transformada $X(z)$, de $x(t)$, por z^{n}, **equivale a um avanço *de*** *n unidades de tempo na função* $x(t)$*(a função é transladada para a esquerda n unidades de tempo).*

2.6 Propriedades da transformada Z

Deslocamento ou translação real -- Exemplos:
Obs.: subentende-se o período de amostragem T

a) $x(k) = \delta(k-n), \quad n > 0$

$$Z[x(k)] = z[\delta(k-n)] = z^{-n} Z[\delta(0)] = z^{-n}$$

b) $x(k) = \delta(k+n), \quad n > 0$

$$Z[x(k)] = Z[\delta(k+n)] = z^{n}\left[Z[\delta(0)] - \sum_{k=0}^{n-1} \delta(k+n) z^{-k}\right]$$

$$= z^{n}\, Z[\delta(0)] = z^{n} \ \ (\text{pois } n > 0 \text{ e } \delta(k+n) = 0 \text{ para } k < n);$$

$$\text{RDC} = \text{todo o plano } z \text{ exceto } z = \infty$$

c) $x(k) = [2, 4, \underline{5}, 7, 0, 1]$

$$Z[x(k)] = 2z^{2} + 4z^{1} + 5z^{0} + 7z^{-1} + 1z^{-3}$$

$$X(z) = 2z^{2} + 4z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}, \qquad \text{RDC} = \text{todo o plano } z \text{ exceto } z = 0 \ e \ z = \infty$$

2.6 Propriedades da transformada Z

(e) translação complexa: se $x(t) = 0,\ \forall t < 0$ e $Z[x(t)] = X(z),$ então $Z[e^{-aT}x(t)] = X(ze^{aT})$

Demonstração

$$Z[e^{-at}x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}\,x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(ze^{aT})^{-k} = X(ze^{aT})$$

(f) Teorema do valor inicial: se $x(t) = 0,\ \forall t < 0$ e $Z[x_a(kT)] = X(z)$ então $x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$

Demonstração:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots + x(k)z^{-k}$$

$$\therefore \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{k\to\infty}\left(x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots + x(k)z^{-k}\right) = 0$$

2.6 Propriedades da transformada Z

(g) Teorema do valor final: se $x(t) = 0,\ \forall t < 0$ e $Z[x(kT)] = X(z)$

$$\lim_{k\to\infty} x(kT) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$$

Demonstração:

$$Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \Rightarrow Z[x(kT - T)] = z^{-1}X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - T)z^{-k}$$

$$Z[x(kT)] - Z[(k-1)T] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - T)z^{-k}$$

no limite,

$$\lim_{z\to 1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k}\right\} = \lim_{z\to 1}\{(1 - z^{-1})X(z)\}$$

2.6 Propriedades da transformada Z

(g) Teorema do valor final:
Demonstração (continuação):

Como $x(k) = 0$ para $k < 0$, as somatórias na equação acima, quando desenvolvidas, fornecem

$$\sum_{k=0}^{\infty}[x(k) - x(k-1)] = [x(0) - x(-1)] + [x(1) - x(0)] + [x(2) - x(1)] + \cdots$$

$$\ldots + [x(k) - x(k-1)] = \lim_{k\to\infty} x(k) \Rightarrow \therefore \lim_{k\to\infty} x(kT) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$$

- existem tabelas nas quais são apresentadas as transformadas Z diretas das diversas sequências normalmente utilizadas nos projetos de sistemas de controle ou de filtros digitais;

- da mesma forma, há tabelas que contêm as propriedades dessas transformadas, que auxiliam tanto no cálculo da tranformação direta quanto no da transformação inversa.

2.6 Propriedades da transformada Z

(h) convolução discreta: para enunciar essa propriedade, é necessário antes caracterizar a *representação impulsiva de sinais amostrados* (e, portanto, discretos).

Definição: a sequência $\delta(k-n)\begin{cases} = 1, & k = n \\ = 0, & k \neq n \end{cases}$ é denominada impulso unitário discreto ou sequência unitária amostral. O impulso unitário somente é distinto de zero quando seu argumento é zero.

Então, para qualquer sequência $x(k)$ tem-se, para $k = n,\quad x(n)\delta(k-n) = x(k)\delta(k-k) = x(k)$

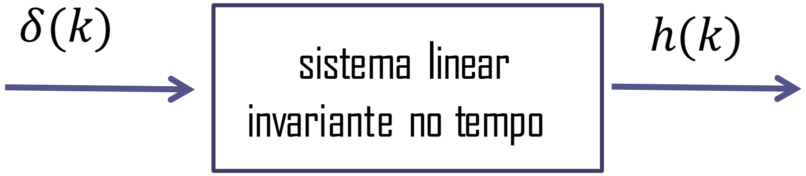
De maneira geral, $x(n)\delta(k-n)\begin{cases} = x(k), & k = n \\ = 0, & k \neq n \end{cases}$

Finalmente, a sequência $x(k)$ é obtida pela somatória de todos os n termos:

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(k-n)$$

2.6 Propriedades da transformada Z

(h) convolução discreta: considere um sistema linear discreto e invariante no tempo (LIT) que é submetido a um impulso unitário $\delta(n)$. A resposta (saída) do sistema é $h(n)$



Lembrando que $\delta(n) \neq 0$ somente se $n = 0$ e que o sistema é LIT, segue que:

- à entrada $\delta(k)$ corresponde a saída $h(k)$: $\delta(k) \rightarrow h(k)$

- pela invariância no tempo, $\delta(k-n) \rightarrow h(k-n)$

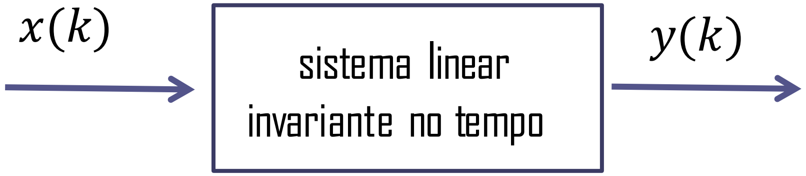
- pela linearidade, pode-se multiplicar ambos os lados por $x(n)$: $x(n)\delta(k-n) \rightarrow x(n)h(k-n)$

- recorda-se que a sequência de entrada completa é dada por: $x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(k-n)$

- pela linearidade, se a entrada for uma sequência impulsiva $x(k)$, a saída também será uma sequência impulsiva $y(k)$

2.6 Propriedades da transformada Z

(h) convolução discreta: considere um sistema linear discreto e invariante no tempo (LIT) que é submetido a um impulso unitário $\delta(n)$. A resposta (saída) do sistema é $h(n)$



- como a sequência completa de entrada é $x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(k-n)$ e $x(k) \rightarrow y(k)$

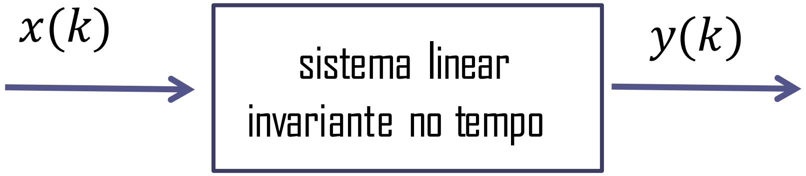
então, $$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(k-n)$$ pois $x(k)\delta(k-n) \rightarrow x(k)h(k-n)$

A expressão acima é chamada de soma de convolução e é indicada pelo caractere asterisco ($*$). Portanto,

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(k-n) = x(k) * h(k)$$

2.6 Propriedades da transformada Z

(h) convolução discreta: considere um sistema linear discreto e invariante no tempo (LIT) que é submetido a um impulso unitário $\delta(n)$. A resposta (saída) do sistema é $h(n)$



Desenvolve-se a de soma de convolução

$$y(k) = \cdots + x(-2)h(k+2) + x(-1)h(k+1) + x(0)h(k) + x(1)h(k-1) + \cdots + x(k+1)h(-1) + x(k+2)h(-2) \ldots$$

Nota-se que a soma dos argumentos de x e h é sempre k; além disso, há simetria entre $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$

$$y(k) = \cdots + x(-2)h(k+2) + x(-1)h(k+1) + x(0)h(k) + x(1)h(k-1) + \cdots + x(k+1)h(-1) + x(k+2)h(-2) \ldots$$

Portanto, a soma de convolução pode ser escrita também na forma equivalente

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k)x(k-n) = h(k) * x(k)$$

2.6 Propriedades da transformada Z

(h) convolução discreta: no caso particular em que $x(k) = \delta(k)$, demonstra-se uma importante propriedade da soma de convolução. Vimos que $y(k) = \delta(k) * h(k) = h(k)$ é, por definição, a resposta impulsiva. Substituindo $h(k)$ por $h(k-k_0)$ resulta em

$$\delta(k) * h(k-k_0) = h(k-k_0)$$

- além disso, pela hipótese de invariância no tempo, pode-se escrever

$$\delta(k-k_0) * h(k) = h(k-k_0)$$

- das duas últimas equações resulta

$$\delta(k) * h(k-k_0) = h(k-k_0) = \delta(k-k_0) * h(k)$$

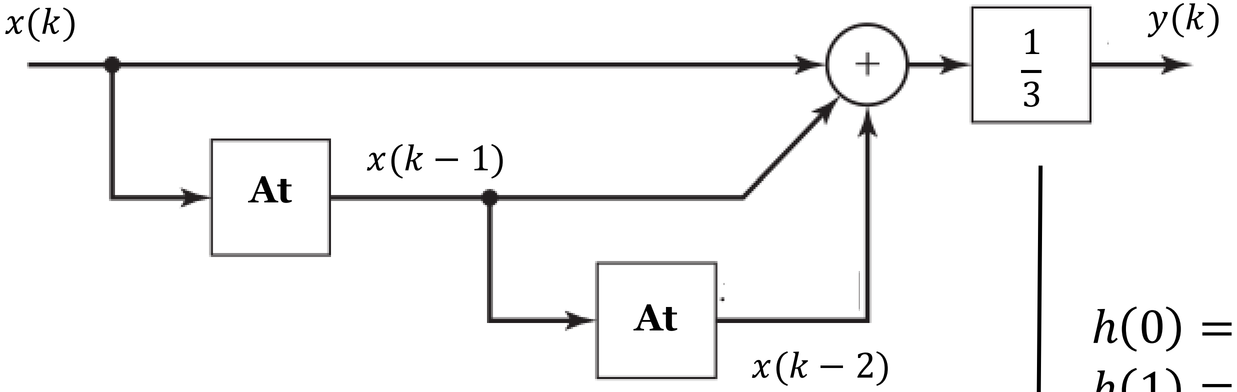
- não há restrições a $h(k)$; dessa forma, $h(k)$ pode ser substituído por uma sequência genérica $g(k)$, obtendo-se a propriedade procurada:

$$\delta(k) * g(k-k_0) = \delta(k-k_0) * g(k) = g(k-k_0)$$

- caso $h(k)$ seja conhecido, a soma de convolução permite determinar a resposta do sistema a qualquer sequência de entrada $x(k)$. Assim, a resposta impulsiva $h(k)$ de um sistema LIT discreto *caracteriza totalmente a relação entre a entrada e a saída desse sistema.*

2.6 Propriedades da transformada Z

(h) convolução discreta – exemplo: o diagrama de blocos da figura mostra a resposta de um sistema a uma entrada $x(k)$. Pede-se: *(i)* escrever a equação de diferenças correspondente ao diagrama; *(ii)* obter a função resposta impulsiva $h(k)$ desse sistema.



Solução

(i) diretamente, a partir do diagrama,

$$y(k) = \frac{1}{3}(x(k) + x(k-1) + x(k-2))$$

Como se pode constatar, sistema é um filtro de média móvel

(ii) para obter $h(k)$, faz-se $x(k) = \delta(k)$:

$$\Rightarrow y(k) = h(k) = \frac{1}{3}\big(\delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2)\big)$$

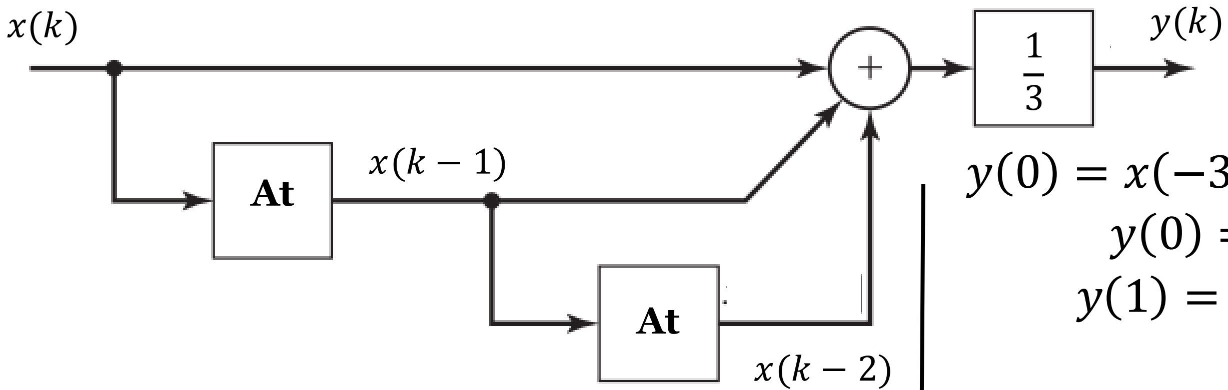
Portanto,

$$h(0) = \delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2)/3|_{k=0} = (1+0+0)/3 = 1/3$$
$$h(1) = \delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2)/3|_{k=1} = (0+1+0)/3 = 1/3$$
$$h(2) = \delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2)/3|_{k=2} = (0+0+1)/3 = 1/3$$
$$h(k) = 0, \qquad \forall k \neq 0, 1, 2$$

Esse é um sistema de *resposta impulsiva finita*, pois a saída $h(k)$ (resposta impulsiva) contém *número finito* de elementos *não nulos*.

2.6 Propriedades da transformada Z

(h) convolução discreta – exemplo (continuação): para mostrar a operação de convolução, vamos calcular a convolução entre o mesmo sistema e a sequência de entrada $x(1) = 3, x(2) = 4{,}5,\ x(3) = 6,\ x(k) = 0$ para qualquer outro valor de k.



Solução

Da definição, $y(k) = x(k) * h(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k-n)\,y(n)$

$$y(k) = \cdots x(k-3)h(3) + x(k-2)h(2) + x(k-1)h(1) + x(k)h(0) + x(k+1)h(-1) + \cdots$$

Assim,

$$y(0) = x(-3)h(3) + x(-2)h(2) + x(-1)h(1) + x(0)h(0) + x(1)h(-1)$$
$$y(0) = 0.(0) + 0.(1/3) + 0.(1/3) + 0.(1/3) + 3.(0) = 0$$
$$y(1) = x(-2)h(3) + x(-1)h(2) + x(0)h(1) + x(1)h(0) + \cdots$$
$$y(1) = 0 + 0 + 0 + 3.(1/3) = 1$$
$$y(2) = x(-1)h(3) + x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) + x(3)h(-1) + \cdots$$
$$y(2) = 0 + 0 + 3.(1/3) + 4{,}5.(1/3) + 6.(0) = 2{,}5$$
$$y(3) = x(0)h(3) + x(1)h(2) + x(2)h(1) + x(3)h(0) + \cdots.$$
$$y(3) = 0 + 3.(1/3) + 4{,}5.(1/3) + 6.(1/3) = 4{,}5$$
$$y(4) = x(2)h(2) + x(3)h(1) + x(4)h(0) + \cdots$$
$$y(4) = 4{,}5.(1/3) + 6.(1/3) + 0(1/3) = 3{,}5$$
$$y(5) = x(3)h(2) + x(4)h(1) + x(5)h(0) + \cdots$$
$$y(5) = 6.(1/3) + 0 + 0 = 2$$

2.6 Propriedades da transformada Z

(h) convolução discreta: finalmente, apresenta-se essa propriedade

A convolução entre duas sequências amostradas $x_1(k)$, $x_2(k)$, é igual o produto das suas transformadas Z individuais:

$$y(k) = x_1(k) * x_2(k) \overset{Z}{\leftrightarrow} Y(z) = X_1(z).X_2(z)$$

Demonstração: pela definição de soma de convolução temos

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(k-n) \text{ de forma que,}$$

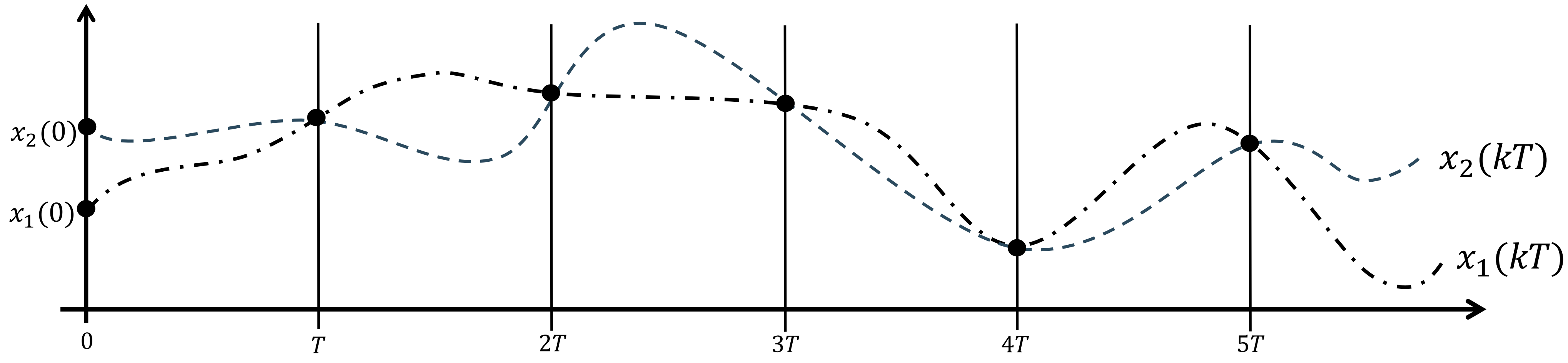
$$Y(z) = \sum_{\boldsymbol{k}=-\infty}^{\infty} y(k)z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(k-n)\right\}z^{-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k-n)z^{-k} \quad .$$

Fazendo $m = k - n \Rightarrow k = n + m$ resulta

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(m)z^{-m}\right\}z^{-\mathrm{n}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\,X_2(z)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\{\,x_1(n)\,z^{-n}\}\,X_2(z) = X_1(z)X_2(z)$$

2.7 Transformada Z inversa

- A transformada Z representa para as sequências amostradas $x(kT)$ ou $x(K)$ de um sinal contínuo o mesmo que a Transformada de Laplace para as funções contínuas;
- ao contrário da Transformada de Laplace, a transformada Z inversa fornece somente os valores temporais da sequência nos instantes amostrados;
- assim, uma mesma sequência $x(k)$ obtida pela transformação Z inversa pode representar sequências iniciais bastante diferentes, conforme mostrado abaixo:



2.7 Transformada Z inversa

- Na análise de sistemas lineares, é necessário conhecer a inversa da transformada Z para que esta seja útil no projeto de controladores ou filtros digitais;

- a transformada Z inversa é dada pela seguinte integral de linha sobre um contorno complexo:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z)\, z^{k-1} dz,$$

onde $\mathcal{C}$ representa uma curva fechada (contorno) no interior da RDC. A expressão acima pode ser deduzida no âmbito da teoria das variáveis complexas a partir do teorema integral de Cauchy;

- no entanto, para a análise de sistemas lineares e invariantes no tempo, as sequências e respectivas transformadas Z normalmente encontradas não necessitam de tamanho formalismo para o cálculo das transformadas inversas;
- assim, prefere-se utilizar técnicas mais simples e, nem por isso, menos eficientes, na obtenção de inversão. Estas técnicas são o escopo deste módulo.

2.7 Transformada Z inversa

Métodos de inversão:

a. *por inspeção*: utiliza-se as tabelas de transformadas e de propriedades para "identificar" certos pares de transformadas. Esse método é adequado para expressões simples ou para aquelas mais complexas porém que podem ser escritas na forma de expressões mais simples;

Exemplo: sequências na forma $x(k) = a^k u[k]$ aparecem com frequência; assim, lembrando da propriedade $Z\left[a^k x(k)\right] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(a^{-1}z)$ aplicada à sequência acima, temos:

$$X[u(k)]\Big|_{a^{-1}z} = \frac{z}{z-1}\Big|_{a^{-1}z} = \frac{a^{-1}z}{a^{-1}z-1} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z| > |a| \quad (a \text{ pode ser complexo})$$

Assim, para determinar a transformada inversa de $X(z) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)$, por inspeção, com o auxílio de uma tabela de pares de transformadas Z obtém-se

$$x(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k], |z| > \frac{1}{2}$$

2.7 Transformada Z inversa

b. por divisão direta: utiliza-se este método quando não é difícil encontrar uma expressão tabelada que possa ser *inspecionada* para a transformada inversa $Z^{-1}[X(z)]$. Para efetuar a divisão direta, convém expressar a função $X(z)$ em termos de potências de z^{-1}. Apresenta-se o método a partir de um exemplo:

Exemplo: considere que $X(z) = \frac{10z+5}{z^2-1{,}2z+0{,}2}$. Primeiramente, multiplica-se numerador e denominador por z^{-2} para deixar a expressão na forma requerida: $X(z) = \frac{10z^{-1}+5z^{-2}}{1-1{,}2z^{-1}+0{,}2z^{-2}}$. Efetua-se a divisão:

$$\begin{array}{l|l}
 & 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18{,}4z^{-3} + 18{,}68z^{-4} + \cdots \\
\hline
1 - 1{,}2z^{-1} + 0{,}2z^{-2} & 10z^{-1} + 5z^{-2} \\
 & 10z^{-1} - 12z^{-2} + 2z^{-3} \\
 & \quad 17z^{-2} - 2z^{-3} \\
 & \quad 17z^{-2} - 20{,}4z^{-3} + 3{,}4z^{-4} \\
 & \qquad 18{,}4z^{-3} - 3{,}4z^{-4} \\
 & \qquad 18{,}4z^{-3} - 22{,}08z^{-4} \\
 & \qquad\quad 18{,}68z^{-4} - 3{,}68z^{-5} \\
 & \qquad\quad 18{,}68z^{-4} - 22{,}416z^{-5} + 3{,}736z^{-6}
\end{array}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x(k) = Z^{-1}[X(z)] &= 0x(0) + 10x(1) + 17x(2) + 18{,}4x(3) \\ &+ 18{,}68x(4) + \cdots \end{aligned}$$

Esse método somente é justificável quando se deseja obter os primeiros termos da série. Em geral, não permite obter expressões fechadas em séries infinitas.

2.7 Transformada Z inversa

c.solução de equação de diferenças: para ilustrar esse método, vamos utilizar as propriedades de translação real e de soma de convolução. Considere um sistema cuja função de transferência discreta seja dada por $Y(z)/X(z) = 0{,}1/(1 - 0{,}9z^{-1})$. Obter a equação de diferenças correspondente.

Solução:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0{,}1}{1 - 0{,}9z^{-1}} = \frac{0{,}1\mathrm{z}}{\mathrm{z} - 0{,}9}$$

$$Y(z)(z - 0{,}9) = X(z)(0{,}1z)$$

$$Z^{-1}[Y(z)(z - 0{,}9)] = Z^{-1}[X(z)(0{,}1z)]$$

$$y(k+1) - 0{,}9y(k) = 0{,}1x(k+1)$$

Fazendo $k + 1 = m \Rightarrow k = m - 1$ chega-se à equação procurada:

$$y(m) = 0{,}1x(m) + 0{,}9y(m-1)$$

2.7 Transformada Z inversa

d. expansão em frações parciais: este método é útil quando a função de transferência $X(z)$ é dada como o quociente entre polinômios na forma

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}.$$

Se $a_N \neq 0$ e $M < N$ a função de transferência discreta é denominada *própria*; caso seja imprópria, sempre será possível escrevê-la na forma de um polinômio mais uma função racional própria.

Para efetuar a expansão é conveniente, em primeiro lugar, eliminar as potências negativas em z:

$$X(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \cdots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \cdots + a_N z}.$$

A função $X(z)/z$ é sempre própria e os valores que anulam o denominador são os seus polos:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + b_2 z^{N-3} + \cdots + b_M z^{N-M-1}}{z^{N-1} + a_1 z^{N-2} + a_2 z^{N-3} + \cdots + a_N}$$

2.7 Transformada Z inversa

d. expansão em frações parciais (continuação):
(i) polos distintos:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{A_N}{z-p_N}$$

Os A_k são obtidos multiplicando-se $X(z)/z$ por $(z-p_k)$ e calculando o resíduo referente ao *k-ésimo* polo no limite em que $z \to z_k$:

$$\frac{X(z)}{z}(z-p_k) = \left(\frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} + \cdots \frac{A_k}{z-p_k} + \frac{A_N}{z-p_N}\right)(z-p_k) = A_k$$

(ii) *polos múltiplos*: toma-se como exemplo o caso em que o *k-ésimo* possui multiplicidade *r*, em que a expansão em fraçoes parciais deverá conter os termos

$$\frac{A_{1k}}{z-p_k} + \frac{A_{2k}}{(z-p_k)^2} + \cdots + \frac{A_{kr}}{(z-p_k)^r}$$

Em seguida, multiplica-se toda a expansão em frações parciais por $(z-p_k)^r$ e avaliam-se as expressões e suas derivadas de ordem $r-1$ com respeito a z em $z = z_k$ para determinar os A_k

2.7 Transformada Z inversa

d. expansão em frações parciais (continuação):
(i) polos múltiplos: um exemplo com polos de multiplicidade $r = 2$ irá ilustrar o procedimento. Assim, deseja-se obter a expansão em frações parciais da função de transferência

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}.\ \text{Em termos de potências positivas de } z \text{ tem} - \text{se}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{A_3}{(z-1)^2}$$

$$\left(\frac{(z+1)X(z)}{z}\right)\bigg|_{z=-1} = A_1 = \frac{(z+1)z^2}{(z+1)(z-1)^2}\bigg|_{z=-1} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{(z-1)^2X(z)}{z}\right)\bigg|_{z=1} = A_3 = \frac{(z-1)^2z^2}{(z+1)(z-1)^2}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-1)^2X(z)}{z}\right)\bigg|_{z=1} = A_2 = \frac{d}{dz}\left(\frac{(z-1)^2z^2}{(z+1)(z-1)^2}\right)\bigg|_{z=1} = \left[2z(z+1)^{-1} - z^2(z+1)^{-2}\right]_{z=1} = \frac{3}{4}$$

2.7 Transformada Z inversa

d. expansão em frações parciais (continuação):

Com a função de transferência discreta expandida em frações parciais, a transformada inversa é facilmente calculada pela “inspeção” dos pares de transformadas tabelados.

$$\frac{X(z)}{z}z^{-1} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A_1 z^{-1}}{z+1} + \frac{A_2 z^{-1}}{z-1} + \frac{A_3 z^{-1}}{(z-1)^2}$$

$$X(z) = \frac{1}{4}\frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{3}{4}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$Z^{-1}[X(z)] = x(k) = Z^{-1}\left[\frac{1}{4}\frac{1}{1+z^{-1}}\right] + Z^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1-z^{-1}}\right] + Z^{-1}\left[\frac{3}{4}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right]$$

$$z(k) = \frac{1}{4}(-1)^k u(k) + \frac{3}{4}u(k) + \frac{1}{2}ku(k)$$

2.8 Tabelas de transformadas Z diretas e inversas

	Signal, $x[n]$	Z-transform, $X(z)$	ROC
1	$\delta[n]$	1	all z
2	$\delta[n-n_0]$	z^{-n_0}	$z \neq 0$
3	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
4	$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
5	$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
6	$-nu[-n-1]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < 1$
7	$n^2u[n]$	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\lvert z\rvert > 1$
8	$-n^2u[-n-1]$	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\lvert z\rvert < 1$
9	$n^3u[n]$	$\frac{z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$	$\lvert z\rvert > 1$
10	$-n^3u[-n-1]$	$\frac{z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$	$\lvert z\rvert < 1$
11	$a^nu[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
12	$-a^nu[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

	Signal, $x[n]$	Z-transform, $X(z)$	ROC
13	$na^nu[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
14	$-na^nu[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
15	$n^2a^nu[n]$	$\frac{az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
16	$-n^2a^nu[-n-1]$	$\frac{az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
17	$\binom{n+m-1}{m-1}a^nu[n]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^m}$, for positive integer m[10]	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
18	$(-1)^m\binom{-n-1}{m-1}a^nu[-n-m]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^m}$, for positive integer m[10]	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
19	$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
20	$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
21	$a^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
22	$a^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Z-transform

3. Representação em espaço de estados

- Sistemas de controle modernos, sejam eles contínuos ou discretos, são frequentemente representados na forma de espaço de estados;
- a grande vantagem da reprentação de um sistema contínuo ou discreto em espaços de estados sobre a representação em funções de transferência é a capacidade de lidar com sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (sistema MIMO, em inglês);

Supondo-se que um sistema linear discreto seja representado por uma equação de diferenças (que poderia ter sido obtida a partir da discretização de uma equação diferencial ordinária representando a dinâmica de um sistema contínuo no tempo) seja dada por

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_n\,, \qquad n \geq 0,$$

onde $u(k)$ são as entradas e $y(k)$ as saídas e com condições iniciais $y(k), -n \leq k \leq -1$ conhecidas. A aplicação da transformada Z a esta equação irá fornecer a função de transferência discreta do sistema:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

3. Representação em espaço de estados

Demonstra-se (vide Ogata) que uma repesentação em espaço de estados desse sistema discreto é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [b_n - a_n b_0 \vdots b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \vdots \cdots \vdots b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

ou

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= A\boldsymbol{x}(k) + B\boldsymbol{u}(k) \\ y(k) &= c^T \boldsymbol{x}(k) + b_0 \boldsymbol{u}(k), \qquad k \geq 0 \end{aligned}$$

Esta forma de descrição em espaço de estados é denominada *forma canônica controlável*

3. Representação em espaço de estados

Outra forma possível de representação é a *forma canônica observável*, conforme abaixo:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \vdots 0 \quad 0 \vdots \cdots \ \vdots 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

ou

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= A\boldsymbol{x}(k) + B\boldsymbol{u}(k) \\ y(k) &= c^T \boldsymbol{x}(k) + b_0 \boldsymbol{u}(k), \qquad k \geq 0 \end{aligned}$$

3. Representação em espaço de estados

Solução das equações em espaço de estados

Conhecidas as condições iniciais, a equação de estado, $\boldsymbol{x}(k+1) = A\,\boldsymbol{x}(k) + B\,\boldsymbol{u}(k)$ pode ser resolvida de maneira recursiva, com $A^0 \equiv I$, matrix identidade de ordem N:

$$\boldsymbol{x}(1) = A\,\boldsymbol{x}(0) + B\,\boldsymbol{u}(0)$$
$$\boldsymbol{x}(2) = A\,\boldsymbol{x}(1) + B\,\boldsymbol{u}(1) = A^2\boldsymbol{x}\,(0) + AB\,\boldsymbol{u}(0) + B\,\boldsymbol{u}(1)$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{x}_N(k) = A^k\,\boldsymbol{x}(0) + \sum_{q=0}^{k-1} A^{k-1-q}\,B\,\boldsymbol{u}(q)$$

Para a solução completa, utiliza-se o modelo de observação, $y(k) = c^T\,\boldsymbol{x}(k) + b_0\,\boldsymbol{u}(k)$:

$$y(k) = c^T\boldsymbol{x}(0) + \sum_{q=0}^{k-1} c^T A^{k-1-q}\,B\,\boldsymbol{x}(q) + b_0\,\boldsymbol{x}(k)$$

3. Representação em espaço de estados

A solução em forma fechada é obtida aplicando-se a tranformada Z ao modelo completo em espaço de estados. Admitindo condições iniciais nulas, para um modelo genérico em espaço de estados,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= A\boldsymbol{x}(k) + B\boldsymbol{u}(k) \\ y(k) &= c^T\boldsymbol{x}(k) + b_0\boldsymbol{u}(k), \qquad k \geq 0 \end{aligned}$$

a aplicação da transformada Z leva a

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\boldsymbol{x}(k+1)] &= \mathcal{Z}\,[A\boldsymbol{x}(k) + B\boldsymbol{u}(k) \Rightarrow zX(z) = AX(z) + B\,U(z) \\ \mathcal{Z}[y(k)] &= \mathcal{Z}[c^T\boldsymbol{x}(k) + d^T\boldsymbol{u}(k)] \Rightarrow Y(z) = c^TX(z) + b_0U(z) \end{aligned}$$

Isolando $X(z)$ na primeira equação temos: $X(z) = (zI - A)^{-1}BU(z)$

Supondo, agora, que a invesa de $(zI - A)$ exista, podemos escrevê-la em termos de sua adjunta e de seu determinante como $(zI - A)^{-1} = \frac{Adj(zI-A)}{\det(zI-A)}$, pode-se obter $X(z)$:

$$X(z) = \frac{Adj(zI - A)}{\det(zI - A)}\;BU(z)$$

3. Representação em espaço de estados

Finalmente, a saída $Y(z)$ será dada por

$$Y(z) = \left[\frac{c^T Adj(zI - A)}{\det(zI - A)}\ B + b_0\right] U(z),$$

e a função de transferência discreta entre a entrada e a saída será

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \left[\frac{c^T Adj(zI - A)}{\det(zI - A)}\ B + b_0\right]$$

Vejamos 2 exemplos de aplicação:

1) Um sistema dinâmico é representado pela EDO $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = u(t),\ \ t \geq 0$. Obtenha sua realização mínima e sua representação em espaço de estados.

3. Representação em espaço de estados

1) Solução

Em primeiro lugar, vamos converter a EDO em uma equação de diferenças pela aproximação em série de Taylor de 1a. ordem:

$$\dot{y}(t) \approx y(t) - \frac{y(t - T_a)}{T_a}$$

$$\ddot{y}(t) \approx y(t) - 2y(t - T_a) + \frac{y(t - 2T_a)}{T_a^2}$$

Com $T_a = 1$ e $t = kT_a = k$ e as devidas substituições na equação acima vamos obter

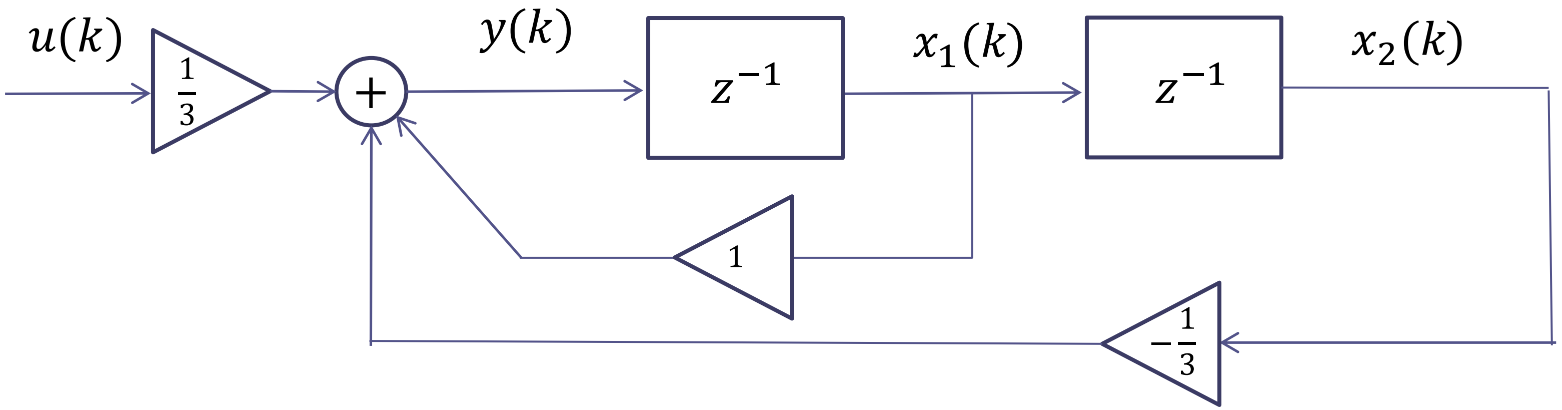
$$\big(y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)\big) + \big(y(k) - y(k-1)\big) + y(k) = u(k)$$

$$y(k) - y(k-1) + \frac{1}{3}y(k-2) = \frac{1}{3}u(k)$$

3. Representação em espaço de estados

O diagrama de blocos correspondente a essa equação de diferenças é mostrado abaixo:

$$y(k) - y(k-1) + \frac{1}{3}y(k-2) = \frac{1}{3}u(k)$$



Como a equação de diferenças é de segunda ordem e foi possível *realizá-la* utilizando apenas dois atrasos, a realização é denominada ***mínima***.

Aplicando a transformada Z à eq. de diferenças chega-se à função de transferência:

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + \frac{1}{3}z^{-2}Y(z) = \frac{1}{3}U(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{3\left(\frac{z^{-2}}{3} - z^{-1} + 1\right)}$$

3. Representação em espaço de estados

Para obter a realização em espaço de estados, vamos utilizar as saídas dos atrasos como variáveis de estado. Assim, com $x_1(k) = y(k-1)$ e $x_2(k) = y(k-2)$, obtemos as seguintes equações matriciais de estado e saída:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}^T} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\boldsymbol{d}} u(k)$$

Importante: a realização em espaço de estados a partir da equação de diferenças não é única. Por exemplo, se a matriz inversível F for utilizada na transformação

$$\boldsymbol{w}(k) = F\boldsymbol{x}(k)$$

pode-se obter uma nova descrição em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}(k+1) &= F\boldsymbol{x}(k+1) = FA\boldsymbol{x}(k) + Fbu(k) \\ &= FAF^{-1}\boldsymbol{w}(k) + FBu(k) \end{aligned}$$

$$y(k) = c^T\boldsymbol{x}(k) + du(k) = c^T F^T \boldsymbol{w}(k) + du(k)$$

3. Representação em espaço de estados

2) Um sistema dinâmico é representado pela seguinte equação de diferenças:

$$y(k) - y(k-1) - y(k-2) = u(k) - u(k-1)$$

Obtenha sua representação em espaço de estados.

Solução: vamos utilizar a forma canônica controlável. Para tanto, em primeiro lugar vamos aplicar a transformada Z a ambos os lados da equação:

$$\mathcal{Z}\big(y(k) - y(k-1) - y(k-2)\big) = \mathcal{Z}\big(u(k) - u(k-1)\big) \Rightarrow Y(z)(1 - z^{-1} - z^{-2}) = U(z)(1 - z^{-1})$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}} \left(.\frac{z^{-2}}{z^{-2}}\right) = \frac{z^2 - z}{z^2 - z - 1}$$

Identificando os termos $n = 2$; $b_0 = 1$; $b_1 = -1$; $b_2 = 0$; $a_1 = -1$; $a_2 = -1$ o modelo em espaço de estado será

3. Representação em espaço de estados

$$n = 2; \quad b_0 = 1; \;\; b_1 = -1; \;\; b_2 = 0; \;\; a_1 = -1; \;\; a_2 = -1$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [b_2 - a_2 b_0 \vdots b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

$$y(k) = [1 \vdots 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

Esse é modelo em espaço de estados procurado

3. Representação em espaço de estados

3) O mesmo sistema dinâmico é representado pela seguinte equação de diferenças:

$$y(k) - y(k-1) - y(k-2) = u(k) - u(k-1)$$

Obtenha sua representação em espaço de estados utilizando a forma canônica observável

Solução: como anteriormente, façamos

$$\mathcal{Z}\big(y(k) - y(k-1) - y(k-2)\big) = \mathcal{Z}\big(u(k) - u(k-1)\big) \Rightarrow Y(z)(1 - z^{-1} - z^{-2}) = U(z)(1 - z^{-1})$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}} \left(.\frac{z^{-2}}{z^{-2}}\right) = \frac{z^2 - z}{z^2 - z - 1}$$

Identificando os termos $n = 2$; $b_0 = 1$; $b_1 = -1$; $b_2 = 0$; $a_1 = -1$; $a_2 = -1$ o modelo em espaço de estado será

3. Representação em espaço de estados

$$n = 2; \quad b_0 = 1; \; b_1 = -1; \quad b_2 = 0; \quad a_1 = -1; \quad a_2 = -1$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

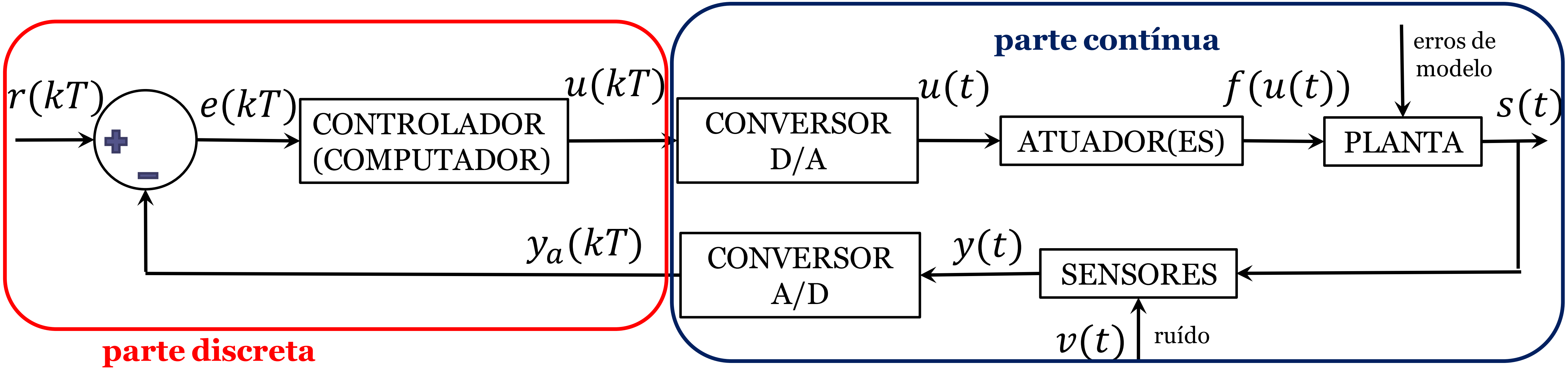
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \,\vdots\, 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

4. O segurador de ordem zero (ZOH, zero order hold)

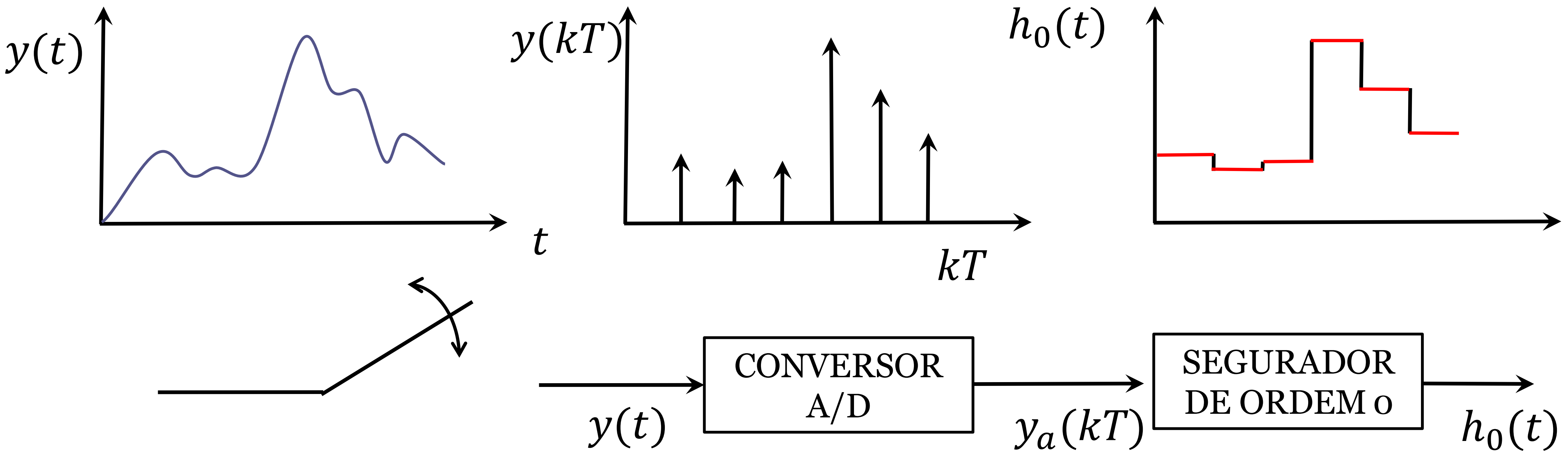
Antecipando uma das aplicações das transformada Z, vamos apresentar a função de transferência discreta do segurador de ordem zero, normalmente presente nos conversores A/D de sistemas de medição e/ou controle

Abaixo é mostrado o diagrama de um sistema de controle que incorpora partes contínua e discreta:



4. O segurador de ordem zero (ZOH, zero order hold)

- A entrada do conversor A/D é um sinal contínuo;
- esse sinal é submetido a um trem de impulsos unitários de período T, $\delta(kT)$;
- efetua-se a multiplicação do sinal pelo trem de impulsos unitários;
- o valor obtido é mantido constante durante o período T;
- após esse período, reinicia-se o processo e, assim, sucessivamente.



4. O segurador de ordem zero (ZOH, zero order hold)

A função de transferência no domínio contínuo é: $G_{h_0} = (1 - e^{-Ts})\dfrac{G(s)}{s}$

Assim $\mathcal{Z}[G_{h_0}] = \mathcal{Z}\left[(1 - e^{-Ts})\dfrac{G(s)}{s}\right] \Rightarrow G_{h_0}(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\dfrac{G(s)}{s}\right]$

Por exemplo, para um sistema cuja função de transferência é $G(s) = \dfrac{a}{s+a}$

a correspondente função de transferência discreta após a passagem pelo segurador de ordem zero será

$$G(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}}$$

A partir dessa transformação, pode-se trabalhar totalmente no domínio discreto. É importante ressaltar que, após processamento discreto, no caso de um sistema de controle, eventualmente será necessário aplicar a operação inversa à transformação ZOH para fornecer um sinal analógico aos atuadores.

5. Exercícios

1) A equação de diferenças $y(k) - y(k-1) + 0,25y(k-2) = 0,5(x(k) - x(k-1))$ representa a dinâmica de um circuito RLC que recebe como entrada $x(k)$ um degrau unitário em $t = 0$ $(k = 0)$ e fornece como saída $y(k)$.

(a) obtenha a função de transferência que corresponde a essa equação;
(b) efetue a transformação que converta essa equação em espaço de estados utilizando a forma canônica controlável;

2) Dadas as matrizes que correspondem a um sistema discreto na forma de espaço de estados para entradas $u(k)$ e saídas $y(k)$:

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

(a) obtenha a função de transferência discreta $H(z) = Y(z)/U(z)$;
(b) obtenha uma realização mínima para $H(z)$;
(c) esboce um diagrama de blocos indicando quais são as variáveis de estado.