دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

تمرین سوم

درس هوش محاسباتی

استاد عبادزاده

عطیه براتی نیا ۹۶۳۱۰۱۰

سوال ۱

بطری‌های A و B را در نظر میگیریم. روی بطری A نوشته شده است: امکان اینکه آب بطری آشامیدنی باشد ۰.۹ است. روی بطری B نوشته است: احتمال اینکه آب بطری آشامیدنی باشد، ۰.۹ است. یعنی: مرغوبیت آب بطری A، ۰.۹ است. برای B از هر ۱۰ بطری آب یکی سمی و بقیه سالم است. نتیجه اینکه بطری A برای آشامیدن مناسب‌تر است. A یک متغیر فازی و B یک متغیر تصادفی است.

سوال ۲

الف) (B∪C)∩A

$$X = \{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6}\} \qquad Y = \{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}\}$$

$$B^+ = \{\frac{0.5}{2,2} + \frac{0.5}{3,2} + \frac{0.5}{4,2} + \frac{0.5}{5,2} + \frac{0.5}{6,2} + \frac{0.3}{2,6} + \frac{0.3}{3,6} + \frac{0.3}{4,6} + \frac{0.3}{5,6} + \frac{0.3}{6,6}\}$$

$$C^+ = \{\frac{0.8}{2,2} + \frac{0.8}{2,3} + \frac{0.8}{2,6} + \frac{1}{4,2} + \frac{1}{4,3} + \frac{1}{4,6} + \frac{0.2}{6,2} + \frac{0.2}{6,3} + \frac{0.2}{6,6}\}$$

$$C^+ \cup B^+ = \{\frac{0.8}{2,2} + \frac{0.8}{2,6} + \frac{1}{4,2} + \frac{1}{4,6} + \frac{0.5}{6,2} + \frac{0.3}{6,6}\}$$

$$A^+ = \{\frac{0.1}{2,2} + \frac{0.1}{2,3} + \frac{0.1}{2,6} + \frac{0.7}{3,2} + \frac{0.7}{3,3} + \frac{0.7}{3,6} + \frac{1}{5,2} + \frac{1}{5,3} + \frac{1}{5,6}\}$$

$$(C^+ \cup B^+) \cap A^+ = \{\frac{0.1}{2,2} + \frac{0.1}{2,6}\}$$

ب) $A \cap \bar{A}$

$$A = \{\tfrac{0.1}{2}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{0.7}{3}\} \qquad \bar{A} = \{\tfrac{0.9}{2}, \tfrac{0}{5}, \tfrac{0.3}{3}\}$$

$$A \cap \bar{A} = \left\{\frac{\min\{0.1,0.9\}}{2}, \frac{\min\{1,0\}}{5}, \frac{\min\{0.7,0.3\}}{3}\right\} = \{\frac{0.1}{2} + \frac{0}{5} + \frac{0.3}{3}\}$$

ج) A∩B

ابتدا باید A و B را توسعه استوانه ای بدهیم تا بتوان اشتراک آنها را پیدا کرد.

$$X = \{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6}\} \qquad Y = \{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}\}$$

$$A^+ = \{\frac{0.1}{2,2} + \frac{0.1}{2,3} + \frac{0.1}{2,6} + \frac{0.7}{3,2} + \frac{0.7}{3,3} + \frac{0.7}{3,6} + \frac{1}{5,2} + \frac{1}{5,3} + \frac{1}{5,6}\}$$

$$B^{+} = \{\frac{0.5}{2,2} + \frac{0.5}{3,2} + \frac{0.5}{4,2} + \frac{0.5}{5,2} + \frac{0.5}{6,2} + \frac{0.3}{2,6} + \frac{0.3}{3,6} + \frac{0.3}{4,6} + \frac{0.3}{5,6} + \frac{0.3}{6,6}\}$$

$$A^{+} \cap B^{+} = \{\frac{0.1}{2,2} + \frac{0.1}{2,6} + \frac{0.5}{3,2} + \frac{0.3}{3,6} + \frac{0.5}{5,2} + \frac{0.3}{5,6}\}$$

د) چون مجموعه مرجع‌های A و B یکسان نیست حاصل ضرب کارتزین همان اشتراک توسعه‌ی استوانه ای است. با توجه به قسمت ج داریم:

$$A^{+} \cap B^{+} = \left\{\frac{0.1}{2,2} + \frac{0.1}{2,6} + \frac{0.5}{3,2} + \frac{0.3}{3,6} + \frac{0.5}{5,2} + \frac{0.3}{5,6}\right\} = A \times B$$

سوال ۳

خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$A \cup B \overset{?}{\Leftrightarrow} B \cup A$$

$$\max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \max(\mu_B(x), \mu_A(x))$$

$$A \cap B \overset{?}{\Leftrightarrow} B \cap A$$

$$\mu_A(x) * \mu_B(x) = \mu_B(x) * \mu_A(x)$$

جابه‌جایی در ضرب اثر ندارد.

خاصیت شرکت پذیری دارد.

$$A \cup (B \cup C) \overset{?}{\Leftrightarrow} (A \cup B) \cup C$$

$$\max\{\mu_A(x), \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} = \max\{max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \mu_C(x)\}$$

هر کدام از این سه تا که max باشد جواب نهایی خواهد بود و ربطی به اینکه اول کدام دوتا را max بگیریم ندارد.

$$A \cap (B \cap C) \overset{?}{\Leftrightarrow} (A \cap B) \cap C$$

$$\mu_A(x) * (\mu_B(x) * \mu_C(x)) = (\mu_A(x) * \mu_B(x)) * \mu_B(x)$$

چون پرانتز تاثیری در ضرب نمیگذارد بنابراین رابطه بالا برقرار است.

خاصیت توزیع پذیری ندارد.

$$A \cup (B \cap C) \overset{?}{\Leftrightarrow} (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\max\{\mu_A(x), (\mu_B(x) * \mu_C(x))\} != \max\{(\mu_A(x) * \mu_B(x)), (\mu_A(x) * \mu_C(x))\}$$

مقدار $\mu_A(x)=0.2$ و $\mu_B(x)=0.3$ و $\mu_C(x)=0.4$ را در نظر میگیریم. سمت چپ معادله میشود $\max\{0.2,0.12\}=0.2$ و سمت راست معادله میشود $\max\{0.06,0.08\}=0.08$ که برابر نیستند، بنابراین خاصیت توزیع پذیری را ندارد.

خاصیت دمورگان را ندارد.

$$(A \cup B)' \overset{?}{\Leftrightarrow} B' \cap A'$$

$$(\max\{\mu_B(x), \mu_A(x)\})' != (1 - \mu_B(x))(1 - \mu_A(x))$$

مقدار $\mu_A(x)=0.2$ و $\mu_B(x)=0.4$ را در نظر میگیریم. سمت چپ معادله میشود 0.6 و سمت راست معادله میشود $0.6*0.8=0.48$ که برابر نیستند، بنابراین خاصیت دمورگان را ندارد که نتیجه میشود این مجموعه عملگرها یک کلاس نرمال نیستند.

سوال ۴

الف)

تصویر R روی A و B:

A={0.7 , 0.9 , 1}   B={0.3 , 0.8 , 1}

حال مجدد از روی تصاویر توسعه‌ی استوانه‌ای A و B را انجام میدهیم.

R	b_1	b_2	b_3
a_1	0.3	0.7	0.7
a_2	0.3	0.8	0.9
a_3	0.3	0.8	1

چون به جدول اولیه رسیدیم پس R جداپذیر است.

تصویر S روی B و C:

B={0.7 , 0.9 , 0.4}   C={0.4 , 0.8 , 0.9}

حال مجدد از روی تصاویر توسعه‌ی استوانه‌ای C و B را انجام میدهیم.

C	c_1	c_2	c_3
b_1	0.4	0.7	0.7
b_2	0.4	0.8	0.9
b_3	0.4	0.4	0.4

چون جدول اولیه به دست نیامد پس یعنی S جداپذیر نیست.

ب)

درایه سطر اول ستون اول : max{min{0.3,0.2},min{0.7,0.3},min{0.7,0.4}}=max{0.2,0.3,0.4}=0.4

درایه سطر اول ستون دوم : max{min{0.3,0.7},min{0.7,0.8},min{0.7,0.1}}=max{0.3,0.7,0.1}=0.7

درایه سطر اول ستون سوم : max{min{0.3,0.5},min{0.7,0.9},min{0.7,0.4}}=max{0.3,0.7,0.4}=0.7

درایه سطر دوم ستون اول : max{min{0.3,0.2},min{0.8,0.3},min{0.9,0.4}}=max{0.2,0.3,0.4}=0.4

درایه سطر دوم ستون دوم : max{min{0.3,0.7},min{0.8,0.8},min{0.9,0.1}}=max{0.3,0.8,0.1}=0.8

درایه سطر دوم ستون سوم : max{min{0.3,0.5},min{0.8,0.9},min{0.9,0.4}}=max{0.3,0.8,0.4}=0.8

درایه سطر سوم ستون اول : max{min{0.3,0.2},min{0.8,0.3},min{1,0.4}}=max{0.2,0.3,0.4}=0.4

درایه سطر سوم ستون دوم : max{min{0.3,0.7},min{0.8,0.8},min{1,0.1}}=max{0.3,0.8,0.1}=0.8

درایه سطر سوم ستون سوم : max{min{0.3,0.5},min{0.8,0.9},min{1,0.4}}=max{0.3,0.8,0.4}=0.8

$$Z = R^{o}S = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 & 0.7 \\ 0.4 & 0.8 & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}$$

ج)

$$A_1{}^{o}Z = \left[\frac{0.1}{a_1}\ \frac{0}{a_2}\ \frac{0.8}{a_3}\right]\begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 & 0.7 \\ 0.4 & 0.8 & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix} =$$

$$[\max\{0.04,0,0.32\}, \max\{0.07,0,0.64\}, max\{0.07,0,0.64\}] = [\frac{0.32}{a_1} + \frac{0.64}{a_2} + \frac{0.64}{a_3}]$$

سوال ۵

$x_1=A_1=\{\frac{0.5}{1}+\frac{0.3}{0}\}$ $x_2=A_2=\{\frac{0.7}{1}+\frac{0.3}{0}\}$

$A_1\times A_2=\{\frac{0.5}{1,1}+\frac{0.3}{1,0}+\frac{0.3}{0,1}+\frac{0.3}{0,0}\}$

x_1,x_2	$2\sqrt{2}$	3	$\sqrt{10}$
1,1	1	0	0
1,0	0	1	0
0,1	0	1	0
0,0	0	0	1

با توجه به جدول بالا $y=C=\{\frac{0.5}{2\sqrt{2}}+\frac{0.3}{3}+\frac{0.3}{\sqrt{10}}\}$

سوال ۶

$$C=A'\cap B=\{\frac{0.2}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.3}{x_3}+\frac{0.7}{x_4}\}$$

$$C_{0.3}=\{x_2,x_3,x_4\}$$

$$B=\{\frac{0.2}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.3}{x_3}+\frac{0.8}{x_4}\}$$

$$B_0=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$$

سوال ۷

الف) ویژگی normal مجموعه‌های فازی: مجموعه‌ی فازی A روی مجموعه مرجع X را نرمال میگویند اگر حداقل یک عضو x از X وجود داشته باشد به گونه ای که تعلق آن به مجموعه‌ی A یک است. ($\mu_A(x)=1$)

ویژگی subnormal مجموعه‌های فازی: مجموعه‌ی فازی که نرمال نیست را subnormal میگویند.

Convexity: به مجموعه هایی گفته میشود که یک سره مقدار تعلق افزایش و سپس یک سره مقدار تعلق کاهش میابد یا یک سره مقدار تعلق افزایش میابد یا یک سره مقدار تعلق کاهش میابد. شبیه شکل های محدب در هندسه

Nonconvexity: مجموعه‌ای که مقدار تعلق کم و زیاد و کم میشود یا چنین تغییراتی دارند گفته میشود. (یا به عبارتی شبیه شکل های محدب هندسه نیست)

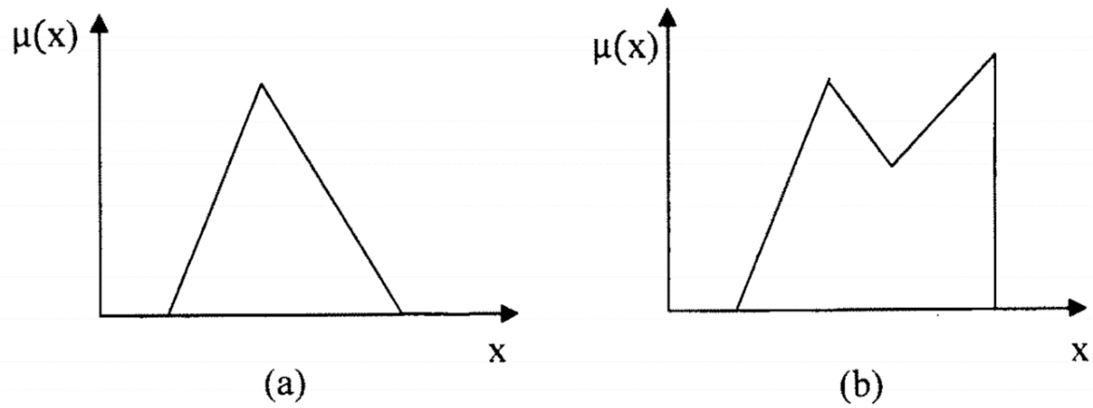
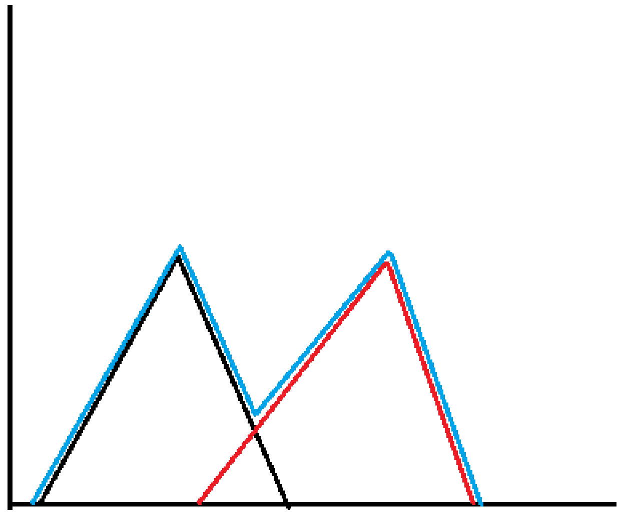
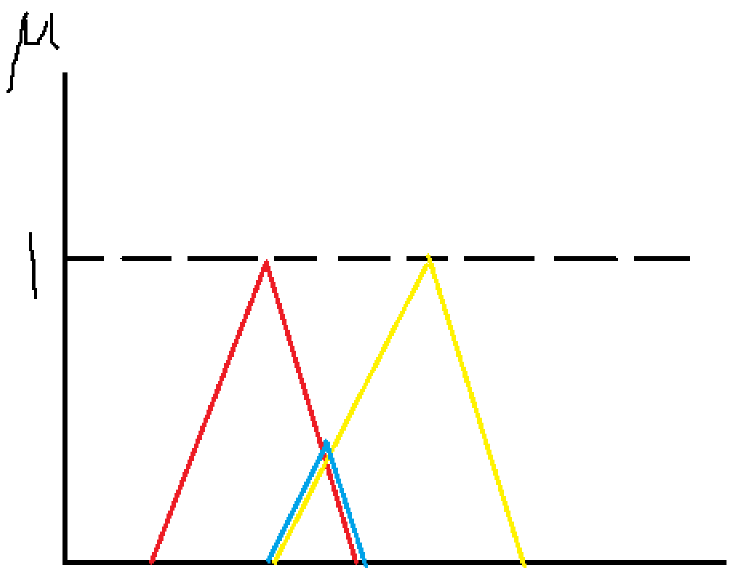


Fig 1.2 a) convex fuzzy set b) non convex fuzzy set

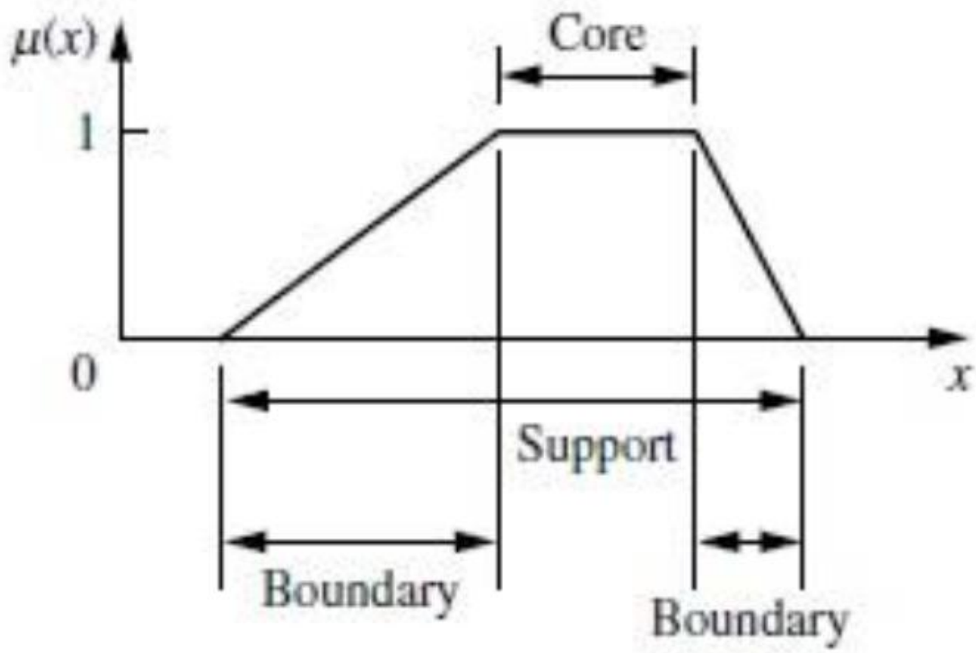
ب) اشتراک دو مجموعه convex نیز convex خواهد بود ولی اجتماع دو مجموعه convex ممکن است convex نباشد. اجتماع دو مجموعه مشکی و قرمز زیر مجموعه‌ی آبی میشود که convex نیست.



اجتماع دو مجموعه normal نرمال خواهد بود چون بین دو مقدار max گرفته میشود که چون ۱ بزرگترین مقدار است قطعا در اجتماع خواهد بود ولی اشتراک چون min است ممکن است اشتراک دو مجموعه normal نرمال نشود. به طور مثال اشتراک دو مجموعه زرد و قرمز که نرمال هستند مجموعه آبی خواهد بود که نرمال نیست.



ج) Core قسمتی است که همه‌ی تعلقات یک است.



Support قسمتی است که تعلقات بزرگتر از صفر دارد.

Boundary قسمتی است که تعلق یک و صفر ندارد.

سوال ۸

الف) $B^* = A^{*\text{o}}R = (A^*)^{\text{o}}(A * B)$

تعداد نقاط زیاد (A)، درجه بیماری بالا(B):

$$high = \{\frac{0.3}{20}, \frac{0.7}{30}, \frac{0.9}{40}, \frac{1}{50}\}$$

$$A * B = \left\{\frac{0.3}{20,3}, \frac{0.3}{20,4}, \frac{0.3}{20,5}, \frac{0.3}{20,6}, \frac{0.3}{20,7}, \frac{0.6}{30,3}, \dots, \frac{0.6}{50,3}, \dots\right\}$$

ورودی مشاهده شده $A^* = \{\frac{1}{20}\}$

و باتوجه به max-min جواب آخر میشود:

$$B^* = \{\frac{0.3}{3}, \frac{0.3}{4}, \frac{0.3}{5}, \frac{0.3}{6}, \frac{0.3}{7}\}$$

ب) $B^* = A^{*o}R = (A^*)^o(A * B)$

شکل نقاط بیضوی (A)، درجه بیماری پایین(B):

$$Oval = \{\frac{0.1}{R_1}, \frac{0.35}{R_2}, \frac{0.7}{R_3}, \frac{0.9}{R_4}\}$$

$$A * B = \left\{\frac{0.1}{R_1, 1}, \frac{0.35}{R_2, 1}, \frac{0.7}{R_3, 1}, \frac{0.9}{R_4, 1}, \dots, \frac{0.35}{R_2, 2}, \frac{0.3}{R_2, 3}, \frac{0.2}{R_2, 4}, \frac{0.2}{R_2, 5}, \dots\right\}$$

ورودی مشاهده شده $A^* = \{\frac{1}{R_2}\}$

و باتوجه به max-product جواب آخر میشود:

$$B^* = \{\frac{0.35}{1}, \frac{0.35}{2}, \frac{0.3}{3}, \frac{0.2}{4}, \frac{0.2}{5}\}$$

ج) $B^* = A^{*o}R = ({A_1}^* * {A_2}^*)^o(A_1 * A_2 * B)$

تعداد نقاط متوسط (A_1) شکل نقاط دایروی (A_2):

$$A_1 * A_2 = \left\{\frac{0.7}{R_1, 10}, \frac{0.6}{R_2, 10}, \dots, \frac{0.6}{R_2, 20}, \dots\right\}$$

$$A_1 * A_2 * B = \left\{\frac{0.6}{R_1, 10,3}, \frac{0.6}{R_2, 10,3}, \dots, \frac{0.6}{R_2, 20,3}, \frac{0.6}{R_2, 20,4}, \frac{0.6}{R_2, 20,5}, \frac{0.6}{R_2, 20,6}, \frac{0.6}{R_2, 20,7}, \dots\right\}$$

ورودی مشاهده شده ${A_2}^* = \{\frac{1}{R_2}\}$ و ${A_1}^* = \{\frac{1}{20}\}$

و با توجه به max-min جواب آخر میشود:

$$B^* = \{\frac{0.6}{3}, \frac{0.6}{4}, \frac{0.6}{5}, \frac{0.6}{6}, \frac{0.6}{7}\}$$

سوال ۹

الف)

Max membership principle: جایی که بیشترین تعلق را دارد به عنوان مقدار غیرفازی در نظر بگیریم. این روش ممکن است دقت خوبی نداشته باشد ولی سرعت و سادگی خوبی دارد.

Centroid method: مرکز ثقل مجموعه را به عنوان مقدار غیرفازی انتخاب کنیم. دقت خوبی دارد ولی هزینه‌ی محاسباتی آن زیاد است.

Mean max membership: متوسط ماکزیمم ها را به عنوان مقدار غیرفازی در نظر بگیریم. در این روش سعی شده که ضمن حفظ سادگی محاسبات، دقت را بیشتر کند.

Weighted average method: این روش مختص خروجی های متقارن است. در این روش، مجموعه از چند زیرمجموعه تشکیل شده است که خروجی برابر است با: $x^* = \frac{\sum \mu(x).x}{\sum \mu(x)}$

مثال زیر به خوبی توضیح میدهد:

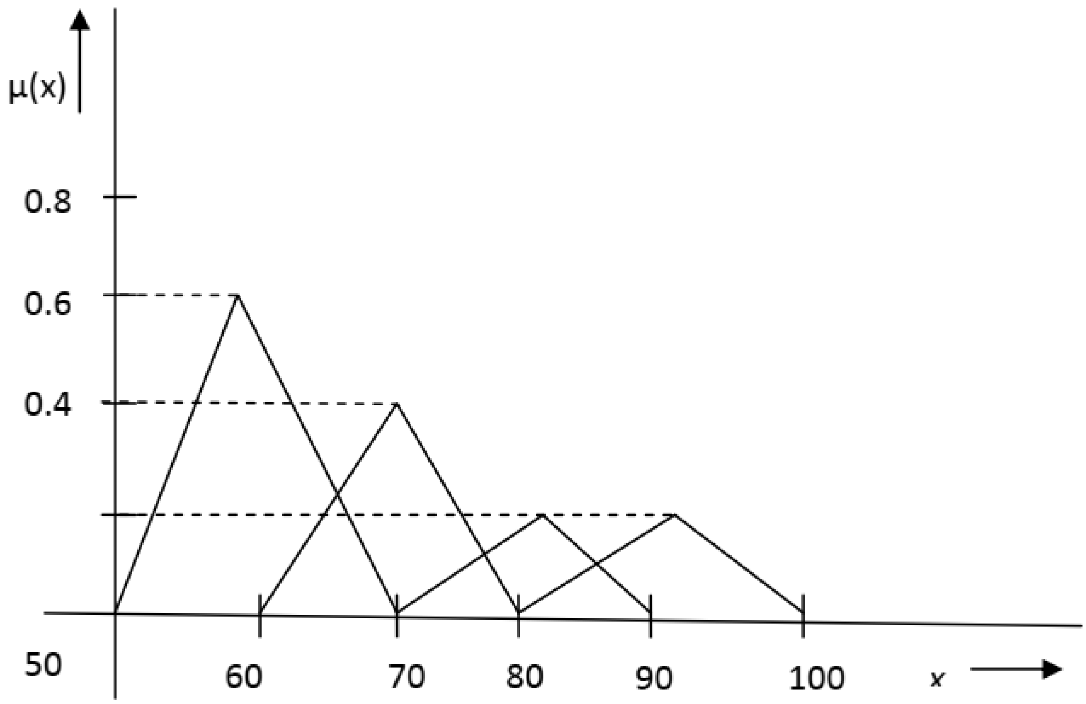


Figure 3: Fuzzy set A

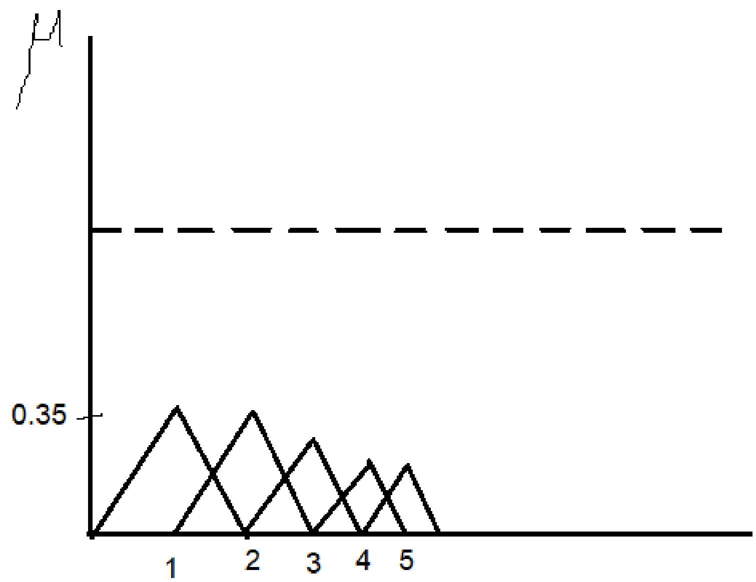
A = {(P, 0.6), (F, 0.4),(G, 0.2),(VG, 0.2), (E, 0)}

$$x^* = \frac{(60*0.6+70*0.4+80*0.2+90*0.2+100*0)}{0.6+0.4+0.2+0.2+0}$$

= 98/1.4=70

ب)

جواب به دست آمده از قسمت ب سوال ۸ را رسم میکنم.



Max membership principle: ۱ دارای بیشترین ماکزیمم است بنابراین ۱ به عنوان مقدار غیرفازی تعیین میشود.

Centroid method: چون هر زیرمجموعه تقارن دارد بنابراین مرکز ثقل هر زیرمجموعه مقدار ماکزیمم آن است و مرکز ثقل کل مجموعه، میانگین این مراکز ثقل است که میشود:

$$\frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

3 به عنوان مقدار غیرفازی تعیین شد.

Mean max membership: نقاط ۱و۲و۳و۴و۵ دارای ماکزیمم هستند بنابراین میانگین آنها مقدار غیر فازی میشود که ۳ است.

:Weighted average method

$$\frac{0.35 * 1 + 2 * 0.35 + 3 * 0.3 + 4 * 0.2 + 5 * 0.2}{0.35 + 0.35 + 0.3 + 0.2 + 0.2} = 2.67$$