Modelo de Programação linear inteira para o Problema da Dominação Romana 2-Forte

Nova Definição do Problema

Seja G um grafo e $f\colon V(G) \to \{0,1,2,3\}$ uma função. Dado $v \in V(G)$, definimos o conjunto dos protetores de v como $PN(v) = \{w \in N(v) : f(w) \geq 2\}$. Dizemos que f é uma *função de dominação romana 2-forte* (FDR2F) se as seguintes condições forem satisfeitas:

(a) se $f(v) = 0$, então v tem pelo menos um vizinho w com rótulo $f(w) \geq 2$;

(b) se $f(v) = 2$, então, dentre todos os vizinhos de v que possuem rótulo 0, no máximo um deles, digamos w, possui $PN(w) = \{v\}$.

O *peso* de f é a soma dos rótulos dos vértices sob f. O *número de dominação romana 2-forte* é o menor peso que uma FDR2F de G pode ter e é denotado por $\gamma_{DR2F}(G)$.

Explicação das Variáveis do Modelo:

- Para todo vértice $v \in V(G)$ e todo $k \in \{0,1,2,3\}$, definimos as variáveis binárias $z_{v,k} \in \{0,1\}$ de forma que $z_{v,k} = 1$ se e somente se $f(v) = k$.
- Para todo $u \in V(G)$ e $v \in N(u)$, definimos as variáveis binárias $a_{u,v} \in \{0,1\}$ tais que $a_{u,v} = 1$ se e somente se $f(u) = 0$, $f(v) = 2$ e v é o único protetor de u.
- Para todo $u \in V(G)$ e todo $k \in \{0,1,2\}$, definimos a variável binária $q_{u,k} \in \{0,1\}$ tal que: (i) $q_{u,0} = 1$ se e somente se u não tem vizinho protetor; (ii) $q_{u,1} = 1$ se e somente se u tem exatamente 1 vizinho protetor; e (iii) $q_{u,2} = 1$ se e somente se u tem 2 ou mais vizinhos protetores.

Logo a seguir, apresento o modelo:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{u \in V} (z_{u,1} + 2z_{u,2} + 3z_{u,3}) && && (1) \\
\text{s.t.} \quad & z_{u,0} + z_{u,1} + z_{u,2} + z_{u,3} = 1 && \forall u \in V && \text{(R1)} \\
& z_{u,0} = 0 && \forall u \in V, deg(u) = 0 && \text{(R1.1)} \\
& \sum_{w \in N(u)} (z_{w,2} + z_{w,3}) \geq z_{u,0} && \forall u \in V, deg(u) > 0 && \text{(R2)} \\
& \sum_{w \in N(u)} a_{w,u} \leq z_{u,2} && \forall u \in V, deg(u) > 0 && \text{(R3)} \\
& q_{u,0} + q_{u,1} + q_{u,2} = 1 && \forall u \in V, deg(u) > 0 && \text{(R4.1)} \\
& \sum_{w \in N(u)} (z_{w,2} + z_{w,3}) \leq 0 + deg(u)(1 - q_{u,0}) && \forall u \in V, deg(u) > 0 && \text{(R4.2)} \\
& \sum_{w \in N(u)} (z_{w,2} + z_{w,3}) \leq 1 + deg(u)(1 - q_{u,1}) && \forall u \in V, deg(u) > 0 && \text{(R4.3)} \\
& \sum_{w \in N(u)} (z_{w,2} + z_{w,3}) \geq 1 - deg(u)(1 - q_{u,1}) && \forall u \in V, deg(u) > 0 && \text{(R4.4)} \\
& \sum_{w \in N(u)} (z_{w,2} + z_{w,3}) \geq 2q_{u,2} && \forall u \in V, deg(u) > 0 && \text{(R4.5)} \\
& \sum_{w \in N(u)} (z_{w,2} + z_{w,3}) \leq 1 + (deg(u) - 1) \cdot q_{u,2} && \forall u \in V, deg(u) > 0 && \text{(R4.6)} \\
& a_{u,w} \leq z_{u,0} && \forall u \in V, w \in N(u), deg(u) > 0 && \text{(R5)} \\
& a_{u,w} \leq z_{w,2} && \forall u \in V, w \in N(u), deg(u) > 0 && \text{(R6)} \\
& a_{u,w} \leq q_{u,1} && \forall u \in V, w \in N(u), deg(u) > 0 && \text{(R7)} \\
& a_{u,w} \geq z_{u,0} + z_{w,2} + q_{u,1} - 2 && \forall u \in V, w \in N(u), deg(u) > 0 && \text{(R8)} \\
& z_{u,k} \in \{0, 1\} && \forall u \in V, k \in \{0, 1, 2, 3\} && \text{(R9)} \\
& q_{u,k} \in \{0, 1\} && \forall u \in V, k \in \{0, 1, 2\} && \text{(R10)} \\
& a_{u,w} \in \{0, 1\} && \forall u \in V, w \in N(u) && \text{(R11)}
\end{aligned}
$$

A função objetivo minimiza a soma dos rótulos utilizados. A restrição R1 garante que todo vértice tenha exatamente um rótulo do conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$. A restrição R1.1 garante que todo vértice isolado receba um rótulo maior que zero. A restrição R2 garante que todo vértice não isolado v com rótulo 0 tenha pelo menos um vizinho w com rótulo maior do que 1. A restrição R3 garante que todo vértice v não isolado com rótulo 2 tenha no máximo um vizinho u com rótulo 0 tal que $PN(u) = \{v\}$. As restrições R4.1 a R4.6 todas juntas garantem que $q_{u,1} = 1$ se e somente se o vértice não isolado u tem exatamente um vizinho com rótulo maior ou igual a 2. As restrições R5, R6, R7 e R8 juntas garantem que $a_{u,v} = 1$ se e somente se $f(u) = 0$, $f(v) = 2$ e v é o único vizinho de u com rótulo maior do que 1. Esse modelo tem $7|V| + 2|E|$ variáveis e, no máximo, $9|V| + 8|E|$ restrições.