

## Modelo de Programação linear inteira para o Problema da Dominação Romana 2-Forte

### Nova Definição do Problema

Seja  $G$  um grafo e  $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  uma função. Dado  $v \in V(G)$ , definimos o conjunto dos protetores de  $v$  como  $PN(v) = \{w \in N(v) : f(w) \geq 2\}$ . Dizemos que  $f$  é uma *função de dominação romana 2-forte* (FDR2F) se as seguintes condições forem satisfeitas:

- se  $f(v) = 0$ , então  $v$  tem pelo menos um vizinho  $w$  com rótulo  $f(w) \geq 2$ ;
- se  $f(v) = 2$ , então, dentre todos os vizinhos de  $v$  que possuem rótulo 0, no máximo um deles, digamos  $w$ , possui  $PN(w) = \{v\}$ .

O *peso* de  $f$  é a soma dos rótulos dos vértices sob  $f$ . O *número de dominação romana 2-forte* é o menor peso que uma FDR2F de  $G$  pode ter e é denotado por  $\gamma_{DR2F}(G)$ .

### Explicação das Variáveis do Modelo:

- Para todo vértice  $v \in V(G)$  e todo  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ , definimos as variáveis binárias  $z_{v,k} \in \{0, 1\}$  de forma que  $z_{v,k} = 1$  se e somente se  $f(v) = k$ .
- Para todo  $u \in V(G)$  e  $v \in N(u)$ , definimos as variáveis binárias  $a_{u,v} \in \{0, 1\}$  tais que  $a_{u,v} = 1$  se e somente se  $f(u) = 0$ ,  $f(v) = 2$  e  $v$  é o único protetor de  $u$ .
- Para todo  $u \in V(G)$  e todo  $k \in \{0, 1, 2\}$ , definimos a variável binária  $q_{u,k} \in \{0, 1\}$  tal que: (i)  $q_{u,0} = 1$  se e somente se  $u$  não tem vizinho protetor; (ii)  $q_{u,1} = 1$  se e somente se  $u$  tem exatamente 1 vizinho protetor; e (iii)  $q_{u,2} = 1$  se e somente se  $u$  tem 2 ou mais vizinhos protetores.

Logo a seguir, apresento o modelo:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{v \in V} (z_{v,1} + 2z_{v,2} + 3z_{v,3}) && (1) \\
\text{s.t.} \quad & z_{v,0} + z_{v,1} + z_{v,2} + z_{v,3} = 1 && \forall v \in V && (\text{R1}) \\
& \sum_{w \in N(v)} (z_{w,2} + z_{w,3}) \geq z_{v,0} && \forall v \in V && (\text{R2}) \\
& \sum_{u \in N(v)} a_{u,v} \leq z_{v,2} && \forall v \in V && (\text{R3}) \\
& q_{u,0} + q_{u,1} + q_{u,2} = 1 && \forall u \in V && (\text{R4.1}) \\
& \sum_{w \in N(u)} (z_{w,2} + z_{w,3}) \leq 0 + \deg(u)(1 - q_{u,0}) && \forall u \in V && (\text{R4.2}) \\
& \sum_{w \in N(u)} (z_{w,2} + z_{w,3}) \leq 1 + \deg(u)(1 - q_{u,1}) && \forall u \in V && (\text{R4.3}) \\
& \sum_{w \in N(u)} (z_{w,2} + z_{w,3}) \geq 1 - \deg(u)(1 - q_{u,1}) && \forall u \in V && (\text{R4.4}) \\
& \sum_{w \in N(u)} (z_{w,2} + z_{w,3}) \geq 2q_{u,2} && \forall u \in V && (\text{R4.5}) \\
& \sum_{w \in N(u)} (z_{w,2} + z_{w,3}) \leq 1 + (\deg(u) - 1) \cdot q_{u,2} && \forall u \in V && (\text{R4.6}) \\
& a_{u,v} \leq z_{u,0} && \forall u \in V, v \in N(u) && (\text{R5}) \\
& a_{u,v} \leq z_{v,2} && \forall u \in V, v \in N(u) && (\text{R6}) \\
& a_{u,v} \leq q_{u,1} && \forall u \in V, v \in N(u) && (\text{R7}) \\
& a_{u,v} \geq z_{u,0} + z_{v,2} + q_{u,1} - 2 && \forall u \in V, v \in N(u) && (\text{R8}) \\
& z_{v,k} \in \{0, 1\} && \forall v \in V, k \in \{0, 1, 2, 3\} && (\text{R9}) \\
& q_{u,k} \in \{0, 1\} && \forall u \in V, k \in \{0, 1, 2\} && (\text{R10}) \\
& a_{u,v} \in \{0, 1\} && \forall u \in V, v \in N(u) && (\text{R11})
\end{aligned}$$

A função objetivo minimiza a soma dos rótulos utilizados. A restrição [R1](#) garante que todo vértice tenha exatamente um rótulo do conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$ . A restrição [R2](#) garante que todo vértice  $v$  com rótulo 0 tenha pelo menos um vizinho  $w$  com rótulo maior do que 1. A restrição [R3](#) garante que todo vértice  $v$  com rótulo 2 tenha no máximo um vizinho  $u$  com rótulo 0 tal que  $PN(u) = \{v\}$ . As restrições [R4.1](#) a [R4.6](#) todas juntas garantem que  $q_{u,1} = 1$  se e somente se o vértice  $u$  tem exatamente um vizinho com rótulo maior ou igual a 2. As restrições [R5](#), [R6](#), [R7](#) e [R8](#) juntas garantem que  $a_{u,v} = 1$  se e somente se  $f(u) = 0$ ,  $f(v) = 2$  e  $v$  é o único vizinho de  $u$  com rótulo maior do que 1. Esse modelo tem  $7|V| + 2|E|$  variáveis e  $9|V| + 8|E|$  restrições.