Percursos em Árvores Binárias Estrutura de Dados — QXD0010



Prof. Atílio Gomes Luiz gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

 2° semestre/2021



Introdução



 Muitas operações em árvores binárias envolvem o percurso de todas as subárvores, com execução de alguma ação de tratamento em cada nó.



- Muitas operações em árvores binárias envolvem o percurso de todas as subárvores, com execução de alguma ação de tratamento em cada nó.
- É comum percorrer uma árvore em uma das seguintes ordens:
 - o pré-ordem:
 - trata raiz, percorre r->left, percorre r->right



- Muitas operações em árvores binárias envolvem o percurso de todas as subárvores, com execução de alguma ação de tratamento em cada nó.
- É comum percorrer uma árvore em uma das seguintes ordens:
 - o pré-ordem:
 - trata raiz, percorre r->left, percorre r->right
 - o ordem simétrica:
 - percorre r->left, trata raiz, percorre r->right



- Muitas operações em árvores binárias envolvem o percurso de todas as subárvores, com execução de alguma ação de tratamento em cada nó.
- É comum percorrer uma árvore em uma das seguintes ordens:
 - o pré-ordem:
 - trata raiz, percorre r->left, percorre r->right
 - o ordem simétrica:
 - percorre r->left, trata raiz, percorre r->right
 - o pós-ordem:
 - percorre r->left, percorre r->right, trata raiz



A pré-ordem



A pré-ordem

• primeiro visita (processa) a raiz



A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda



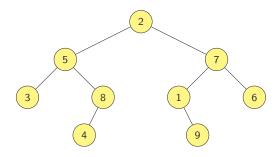
A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita



A pré-ordem

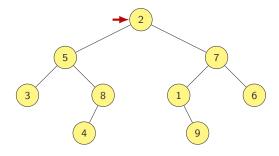
- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita





A pré-ordem

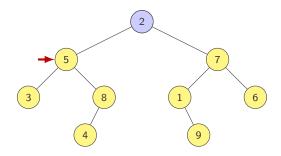
- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita





A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

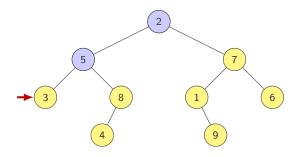


Ex: 2,



A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

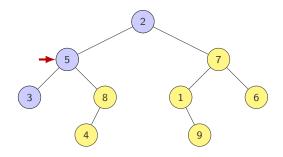


Ex: 2, 5,



A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

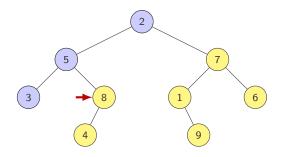


Ex: 2, 5, 3,



A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

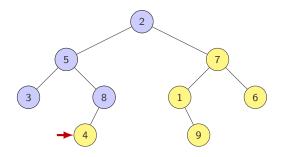


Ex: 2, 5, 3,



A pré-ordem

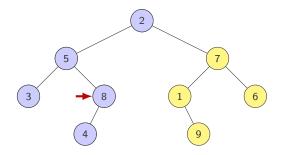
- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita





A pré-ordem

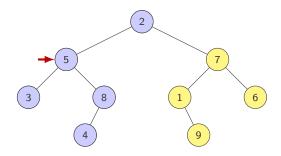
- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita





A pré-ordem

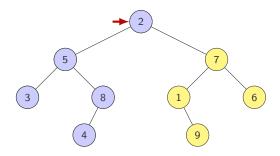
- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita





A pré-ordem

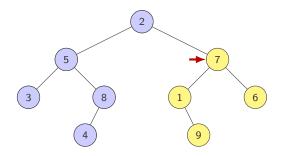
- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita





A pré-ordem

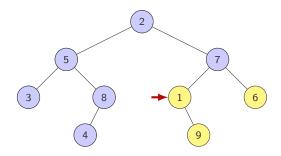
- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita





A pré-ordem

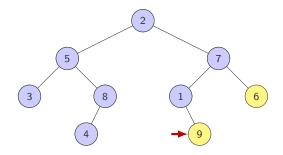
- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita





A pré-ordem

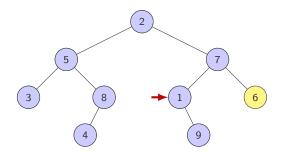
- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita





A pré-ordem

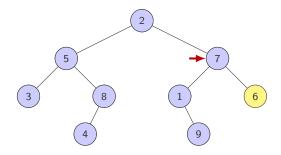
- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita





A pré-ordem

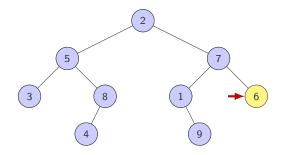
- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita





A pré-ordem

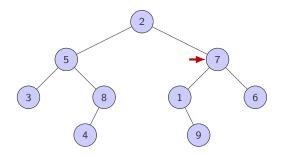
- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita





A pré-ordem

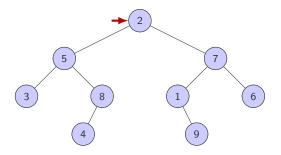
- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita





A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita





A pós-ordem



A pós-ordem

• primeiro visita a subárvore esquerda



A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita



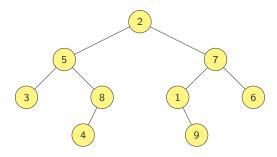
A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz



A pós-ordem

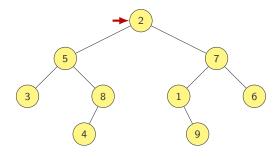
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz





A pós-ordem

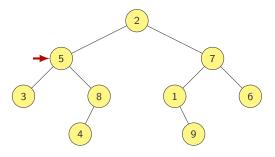
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz





A pós-ordem

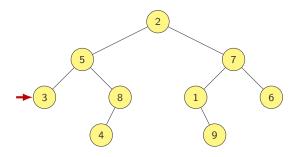
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz





A pós-ordem

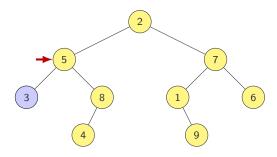
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz





A pós-ordem

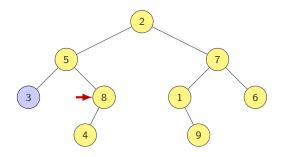
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz





A pós-ordem

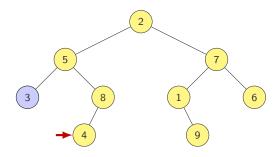
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz





A pós-ordem

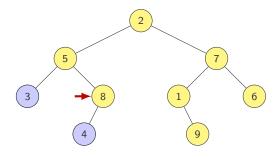
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz





A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

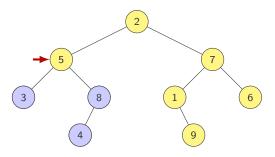


Ex: 3, 4,



A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

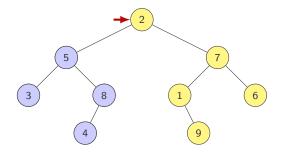


Ex: 3, 4, 8,



A pós-ordem

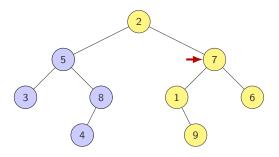
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz





A pós-ordem

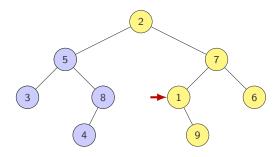
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz





A pós-ordem

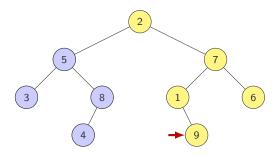
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz





A pós-ordem

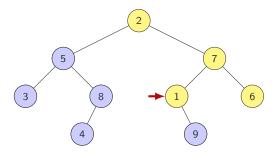
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz





A pós-ordem

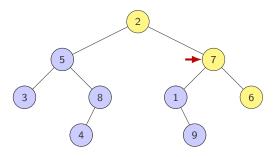
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz





A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

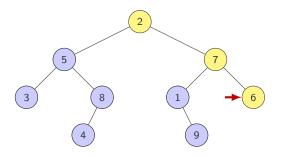


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1,



A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

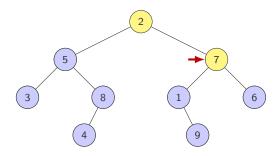


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1,



A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

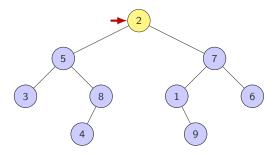


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1, 6,



A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

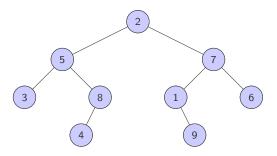


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1, 6, 7,



A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz



Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1, 6, 7, 2



A ordem simétrica



A ordem simétrica

• primeiro visita a subárvore esquerda



A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz



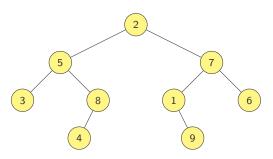
A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita



A ordem simétrica

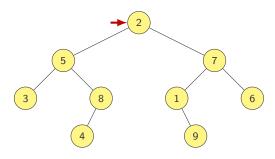
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita





A ordem simétrica

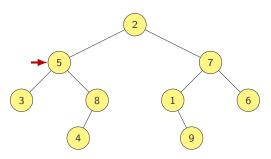
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita





A ordem simétrica

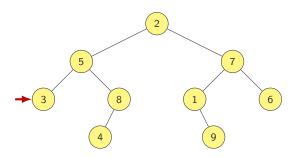
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita





A ordem simétrica

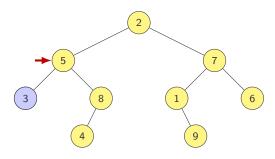
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita





A ordem simétrica

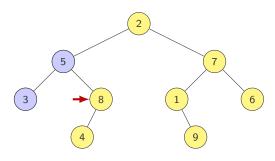
- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita





A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

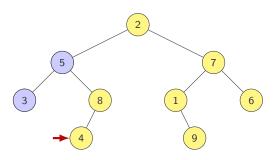


Ex: 3, 5,



A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

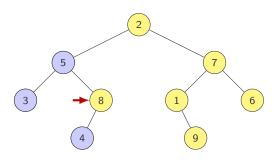


Ex: 3, 5,



A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

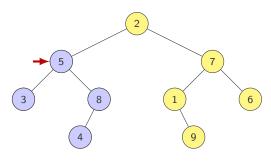


Ex: 3, 5, 4,



A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

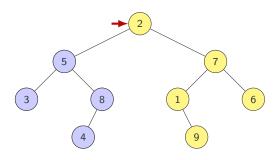


Ex: 3, 5, 4, 8,



A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

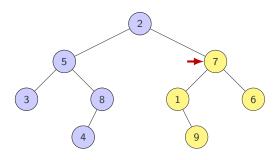


Ex: 3, 5, 4, 8,



A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

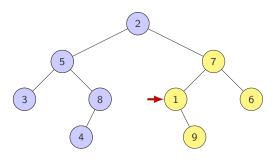


Ex: 3, 5, 4, 8, 2,



A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

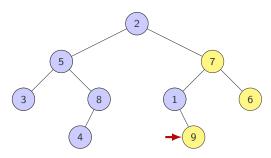


Ex: 3, 5, 4, 8, 2,



A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

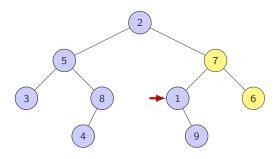


Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1,



A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

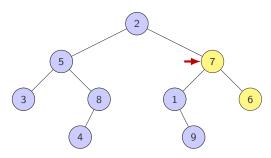


Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9,



A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

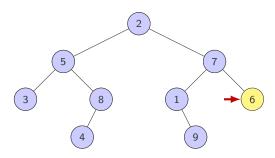


Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9,



A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

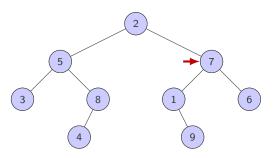


Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9, 7,



A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita



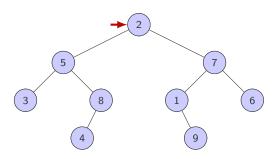
Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9, 7, 6

Percorrendo os nós — Ordem Simétrica



A ordem simétrica

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita



Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9, 7, 6





```
void Tree::preOrdem(Node *node) {
      if(node != nullptr) {
           std::cout << node->key << " "; // visita a raiz
           preOrdem(node->left);
           preOrdem(node->right);
5
7
  void Tree::ordemSimetrica(Node *node) {
      if(node != nullptr) {
10
           ordemSimetrica(node->left):
11
           std::cout << node->key << " "; // visita a raiz
12
           ordemSimetrica(node->right);
13
14
15 }
16
  void Tree::posOrdem(Node *node) {
      if(node != nullptr) {
18
           posOrdem(node->left);
19
           posOrdem(node->right);
20
           std::cout << node->key << " "; // visita a raiz
21
22
23 }
```



Percursos Iterativos em Árvore

Percurso em pré-ordem — Recursivo



Vimos em slides anteriores que o percurso em pré-ordem recursivo é implementado pela seguinte função:

```
void Tree::preOrdem(Node *node) {
   if(node != nullptr) {
       std::cout << node->key << " "; // visita a raiz
       preOrdem(node->left);
       preOrdem(node->right);
}
```

Como implementar a pré-ordem sem usar recursão?

Percurso em pré-ordem — Iterativo



Vamos usar a class stack da biblioteca STL do C++

```
void Tree::preOrdemIterativa() {
      std::stack<Node*> pilha; // cria pilha vazia
      pilha.push(root); // empilha raiz
      while(!pilha.empty()) {
          Node *node = pilha.top();
6
           pilha.pop();
           if(node != nullptr) {
               std::cout << node->key << " "; // visita raiz
9
               pilha.push(node->right);
10
               pilha.push(node->left);
11
12
13
14 }
```

Percurso em pré-ordem — Iterativo



Vamos usar a class stack da biblioteca STL do C++

```
void Tree::preOrdemIterativa() {
      std::stack<Node*> pilha; // cria pilha vazia
      pilha.push(root); // empilha raiz
      while(!pilha.empty()) {
          Node *node = pilha.top();
          pilha.pop();
          if(node != nullptr) {
               std::cout << node->key << " "; // visita raiz
9
               pilha.push(node->right);
10
               pilha.push(node->left);
11
12
13
14 }
```

Por que empilhamos node->right primeiro?

Percurso em pré-ordem — Iterativo



Vamos usar a class stack da biblioteca STL do C++

```
void Tree::preOrdemIterativa() {
      std::stack<Node*> pilha; // cria pilha vazia
      pilha.push(root); // empilha raiz
      while(!pilha.empty()) {
          Node *node = pilha.top();
          pilha.pop();
          if(node != nullptr) {
               std::cout << node->key << " "; // visita raiz
9
               pilha.push(node->right);
10
               pilha.push(node->left);
11
12
13
14 }
```

Por que empilhamos node->right primeiro?

• E se fosse o contrário?

Percurso em ordem simétrica — Recursivo



O percurso em ordem simétrica (inordem) recursivo é implementado pela seguinte função:

```
void Tree::ordemSimetrica(Node *node) {
   if(node != nullptr) {
        ordemSimetrica(node->left);
        std::cout << node->key << " "; // visita a raiz
        ordemSimetrica(node->right);
   }
}
```

Como percorrer em ordem simétrica sem usar recursão?





Vamos usar a class stack da biblioteca STL do C++

```
void Tree::ordemSimetricaIterativa() {
       std::stack < Node *> pilha;
       Node *node = root:
       while(!pilha.empty() || node != nullptr) {
           if(node != nullptr) {
               pilha.push(node);
               node = node->left;
8
9
           else {
10
               node = pilha.top();
11
               pilha.pop();
12
               std::cout << node->key << " ";
13
               node = node->right;
14
15
16
17 }
```

Percurso em ordem simétrica — Iterativo



 Exercício para casa: Implementar o percurso em pós-ordem iterativo. (Este percurso é um pouco mais complexo do que os anteriores)







O percurso em largura

• visita os nós por níveis

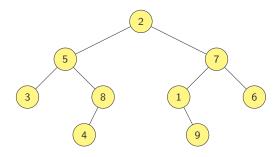


- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita



O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita

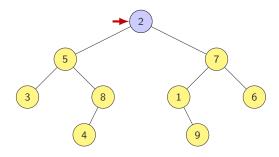


Ex:



O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita

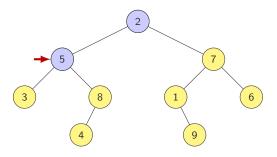


Ex: 2,



O percurso em largura

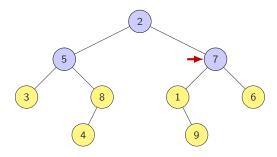
- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita



Ex: 2, 5,



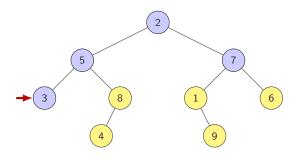
- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita



Ex: 2, 5, 7,



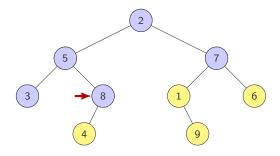
- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita



Ex: 2, 5, 7, 3,



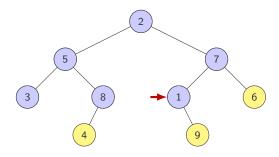
- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita



Ex: 2, 5, 7, 3, 8,



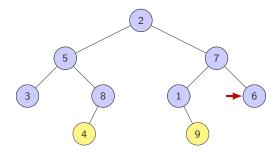
- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita



Ex: 2, 5, 7, 3, 8, 1,



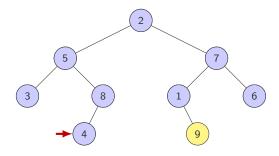
- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita



Ex: 2, 5, 7, 3, 8, 1, 6,



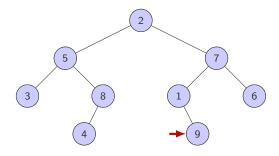
- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita



Ex: 2, 5, 7, 3, 8, 1, 6, 4,



- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita



Ex: 2, 5, 7, 3, 8, 1, 6, 4, 9



Como implementar a busca em largura?



Como implementar a busca em largura?

Usamos uma fila



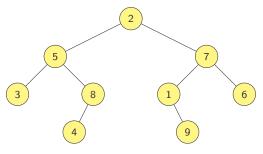
Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois



Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos

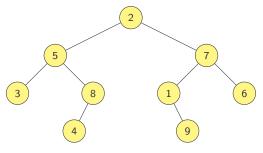


Fila



Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos

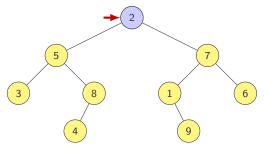


Fila 2



Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos

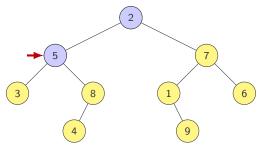


Fila 2 5 7



Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos

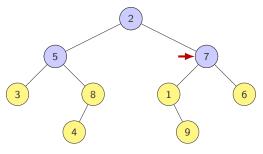


Fila 2 5 7 3 8



Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos

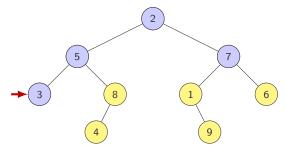


Fila 2 5 7 3 8 1 6



Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos

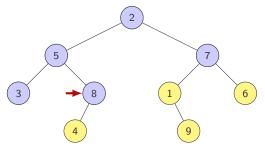


Fila 2 5 7 3 8 1 6



Como implementar a busca em largura?

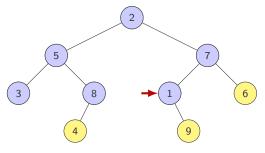
- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos





Como implementar a busca em largura?

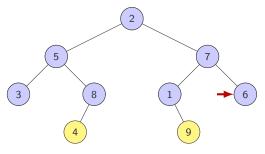
- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos





Como implementar a busca em largura?

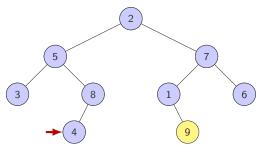
- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos





Como implementar a busca em largura?

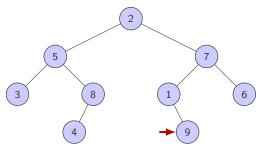
- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos





Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos





Vamos usar a class queue da biblioteca STL do C++

```
void Tree::levelTraversal() {
      std::queue<Node*> fila; // cria fila vazia
      fila.push(root); // enfileira a raiz na fila
3
      while (!fila.empty()) {
          Node *node = fila.front();
6
          fila.pop();
           if (node != nullptr) {
               fila.push(node->left);
               fila.push(node->right);
10
11
               std::cout << node->key << " "; // visita raiz
12
13
14 }
```



Vamos usar a class queue da biblioteca STL do C++

```
void Tree::levelTraversal() {
      std::queue<Node*> fila; // cria fila vazia
      fila.push(root); // enfileira a raiz na fila
      while (!fila.empty()) {
          Node *node = fila.front();
6
          fila.pop();
           if (node != nullptr) {
               fila.push(node->left);
               fila.push(node->right);
10
11
               std::cout << node->key << " "; // visita raiz
12
13
14 }
```

Agora enfileiramos node->left primeiro



Vamos usar a class queue da biblioteca STL do C++

```
void Tree::levelTraversal() {
      std::queue<Node*> fila; // cria fila vazia
      fila.push(root); // enfileira a raiz na fila
      while (!fila.empty()) {
          Node *node = fila.front();
6
          fila.pop();
           if (node != nullptr) {
               fila.push(node->left);
               fila.push(node->right);
10
11
               std::cout << node->key << " "; // visita raiz
12
13
14 }
```

Agora enfileiramos node->left primeiro

• E se fosse o contrário?



Exercícios

Exercício



Exercício: Escreva uma função iterativa que calcula o número de nós de uma árvore. A função deve obedecer o seguinte protótipo: int bt_size_iterative(Node* node);

• Dica: você vai precisar de uma pilha.

Exercício



Exercício: Escreva uma função iterativa que calcula a altura de uma árvore. A função deve obedecer o seguinte protótipo: int bt_height_iterative(Node* node);

• Dica: Você pode usar uma fila.



FIM