Aula 06 — Grafos Eulerianos

Teoria dos Grafos — QXD0152

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

1º semestre/2021

Tópicos desta aula

- Circuitos Eulerianos
- Trilhas Eulerianas
- Algoritmo de Hierholzer
- Algoritmo de Fleury

Referências para esta aula

- Capítulo 1 do livro: Introduction to Graph Theory.
  Autor: Douglas B. West

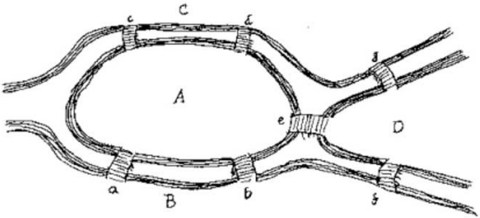
- Capítulo 3 do livro: Pearls in Graph Theory.
  Autores: Nora Hartsfield e Gerhard Ringel

- Capítulo 4 do livro: Grafos: conceitos algoritmos e aplicações
  Autores: Marco Goldbarg e Elizabeth Goldbarg

Introdução

As sete pontes de Königsberg (1736)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

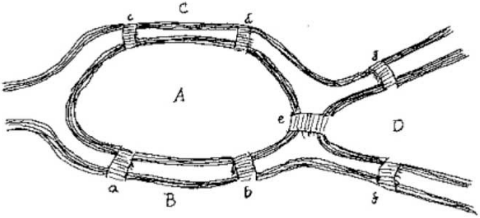


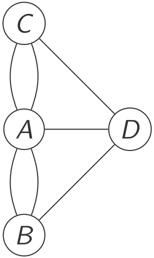
Leonhard Euler

- Na cidade de Königsberg (hoje chamada Kaliningrado), Alemanha, um rio passava pela cidade e a dividia em quatro partes. Para interligar estas partes, haviam sete pontes.
- **Os cidadãos de Konigsberg se perguntavam:** é possível partir de um ponto da cidade e caminhar por todas as pontes sem repetí-las?

As sete pontes de Königsberg

- A fim de tratar o problema, Euler abstraiu o problema e se baseou em um modelo do mapa, que hoje chamamos de grafo.
- Esta é a primeira aparição documentada deste conceito matemático.





- Euler provou que tal percurso era impossível, dado que o mapa continha propriedades que impediam o percurso.

Introdução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Passeios que usam todos os vértices ou todas as arestas de um grafo são geralmente chamados percursos.
- Uma grande variedade de problemas práticos podem ser vistos como um percurso num grafo.
- Uma categoria importante de percurso que vamos considerar nesta aula é um passeio que visita todas as arestas do grafo sem repetí-las.

Trilhas eulerianas – Definições

- Uma trilha em um grafo G é um passeio em G que não repete arestas.

Trilhas eulerianas – Definições

- Uma trilha em um grafo G é um passeio em G que não repete arestas.
- Uma trilha euleriana de um grafo G é uma trilha que contém todas as arestas de G.

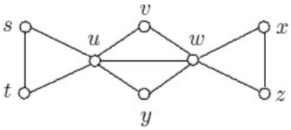
Trilhas eulerianas – Definições

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Uma trilha em um grafo G é um passeio em G que não repete arestas.

- Uma trilha euleriana de um grafo G é uma trilha que contém todas as arestas de G.

- Exemplo: Encontre uma trilha euleriana no grafo abaixo:



Circuitos eulerianos – Definições

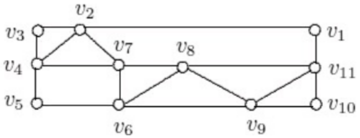
- Um circuito ou tour é uma trilha fechada.

Circuitos eulerianos – Definições

- Um circuito ou tour é uma trilha fechada.
- Um circuito euleriano de um grafo G é uma trilha fechada que contém todas as arestas de G.

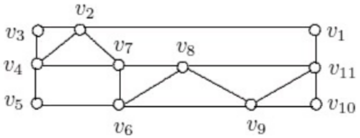
Circuitos eulerianos – Definições

- Um circuito ou tour é uma trilha fechada.
- Um circuito euleriano de um grafo G é uma trilha fechada que contém todas as arestas de G.
- Exemplo: Encontre uma trilha euleriana no grafo abaixo:



Circuitos eulerianos – Definições

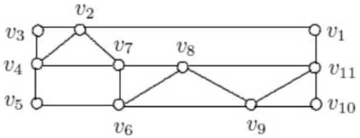
- Um circuito ou tour é uma trilha fechada.
- Um circuito euleriano de um grafo G é uma trilha fechada que contém todas as arestas de G.
- Exemplo: Encontre uma trilha euleriana no grafo abaixo:



- Dizemos que um grafo G é euleriano se ele contém um circuito euleriano.
- Um grafo G não euleriano é disto semi-euleriano se ele possui uma trilha euleriana.

Circuitos eulerianos – Definições

- Um circuito ou tour é uma trilha fechada.
- Um circuito euleriano de um grafo G é uma trilha fechada que contém todas as arestas de G.
- Exemplo: Encontre uma trilha euleriana no grafo abaixo:



- Dizemos que um grafo G é euleriano se ele contém um circuito euleriano.
- Um grafo G não euleriano é disto semi-euleriano se ele possui uma trilha euleriana.
- Dizemos que um vértice é par se seu grau é par e dizemos que ele é ímpar se seu grau é ímpar.

Teorema

Teorema 10.1 [Euler, 1736]: Se um grafo G tem um circuito euleriano, então G é conexo e todo vértice de G tem grau par.

Demonstração:

Teorema

Teorema 10.1 [Euler, 1736]: Se um grafo G tem um circuito euleriano, então G é conexo e todo vértice de G tem grau par.

Demonstração:

- Seja G um grafo e suponha que G contém um circuito euleriano C com início (e término) em um vértice $u \in V(G)$.

Teorema

Teorema 10.1 [Euler, 1736]: Se um grafo G tem um circuito euleriano, então G é conexo e todo vértice de G tem grau par.

Demonstração:

- Seja G um grafo e suponha que G contém um circuito euleriano C com início (e término) em um vértice $u \in V(G)$.

- Duas arestas só podem estar na mesma trilha se elas estiverem na mesma componente. Como G possui uma única trilha euleriana fechada, isso implica que G é conexo.

Teorema

Teorema 10.1 [Euler, 1736]: Se um grafo G tem um circuito euleriano, então G é conexo e todo vértice de G tem grau par.

Demonstração:

- Seja G um grafo e suponha que G contém um circuito euleriano C com início (e término) em um vértice $u \in V(G)$.
- Duas arestas só podem estar na mesma trilha se elas estiverem na mesma componente. Como G possui uma única trilha euleriana fechada, isso implica que G é conexo.
- A cada vez que um vértice $v \in V(G)$ ocorre como um vértice interno de C, duas das arestas incidentes em v são contabilizadas: uma aresta para entrar no vértice e outra para sair do vértice. Deste modo, $d_G(v)$ é par, para todo vértice interno v.

Continuação da demonstração

Teorema 10.1 [Euler, 1736]: Se um grafo G tem um circuito euleriano, então G é conexo e todo vértice de G tem grau par.

- Similarmente, como C começa e termina no vértice u, duas arestas são contabilizadas. Se u ocorre outras vezes como vértice interno de C, já vimos que um número par de arestas são contabilizadas. Logo, $d_G(u)$ também é par.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 10.1 [Euler, 1736]: Se um grafo G tem um circuito euleriano, então G é conexo e todo vértice de G tem grau par.

- Similarmente, como C começa e termina no vértice u, duas arestas são contabilizadas. Se u ocorre outras vezes como vértice interno de C, já vimos que um número par de arestas são contabilizadas. Logo, $d_G(u)$ também é par.

- Assim, todos os vértices de G têm grau par. $\blacksquare$

Teorema

Teorema 10.2 [Carl Hierholzer, 1873]: Se G é um grafo conexo e todos os seus vértices são pares, então G contém um circuito euleriano.

Demonstração:

Teorema

Teorema 10.2 [Carl Hierholzer, 1873]: Se G é um grafo conexo e todos os seus vértices são pares, então G contém um circuito euleriano.

Demonstração:

- Seja G um grafo conexo e suponha que todos os vértices de G têm grau par. Vamos mostrar que G contém um circuito euleriano.
  - Para esta prova, vamos usar a técnica de extremalidade.

Teorema

Teorema 10.2 [Carl Hierholzer, 1873]: Se G é um grafo conexo e todos os seus vértices são pares, então G contém um circuito euleriano.

Demonstração:

- Seja G um grafo conexo e suponha que todos os vértices de G têm grau par. Vamos mostrar que G contém um circuito euleriano.
  - Para esta prova, vamos usar a técnica de extremalidade.
- Seja C uma trilha de G de comprimento máximo (C existe pois G é conexo). Seja u o vértice em que C começa e w o vértice em que C termina.

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 10.2 [Carl Hierholzer, 1873]: Se G é um grafo conexo e todos os seus vértices são pares, então G contém um circuito euleriano.

Demonstração:

- Seja G um grafo conexo e suponha que todos os vértices de G têm grau par. Vamos mostrar que G contém um circuito euleriano.
  - Para esta prova, vamos usar a técnica de extremalidade.
- Seja C uma trilha de G de comprimento máximo (C existe pois G é conexo). Seja u o vértice em que C começa e w o vértice em que C termina.
- Se $v \neq w$, então claramente existe uma aresta a mais entrando em w do que saindo de w. Logo, $d_G(w)$ é ímpar. Como isso contradiz nossa hipótese de que todo vértice é par, na verdade, concluímos que $v = w$ e, portanto, C é uma trilha fechada de comprimento máximo, ou seja, um circuito mais longo de G.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Se o circuito C contém todas as arestas de G, então C é um circuito euleriano e o teorema é verdadeiro.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Se o circuito C contém todas as arestas de G, então C é um circuito euleriano e o teorema é verdadeiro.

- Então, considere que C **não contém** todas as arestas de G.

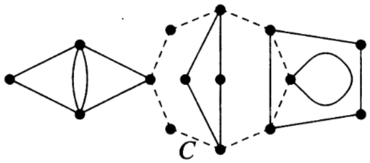
Continuação da demonstração

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

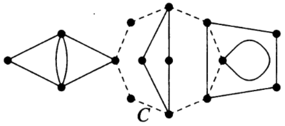
- Se o circuito C contém todas as arestas de G, então C é um circuito euleriano e o teorema é verdadeiro.
- Então, considere que C **não contém** todas as arestas de G.
- Como G é conexo, existe algum vértice x de C com arestas incidentes que não pertencem a C.

Continuação da demonstração

- Se o circuito C contém todas as arestas de G, então C é um circuito euleriano e o teorema é verdadeiro.
- Então, considere que C **não contém** todas as arestas de G.
- Como G é conexo, existe algum vértice x de C com arestas incidentes que não pertencem a C.
- Seja $H = G - E(C)$ o grafo obtido removendo-se de G todas as arestas de C. Note que H pode não ser conexo.

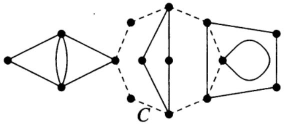


Continuação da demonstração



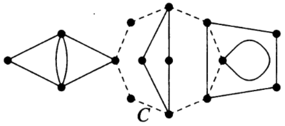
- Como todo vértice de G tem grau par e todo vértice do circuito C tem grau par, temos que todos os vértices de H têm grau par. (Por quê?)

Continuação da demonstração



- Como todo vértice de G tem grau par e todo vértice do circuito C tem grau par, temos que todos os vértices de H têm grau par. (Por quê?)
- Seja H^* a componente de H que contém x.

Continuação da demonstração



- Como todo vértice de G tem grau par e todo vértice do circuito C tem grau par, temos que todos os vértices de H têm grau par. (Por quê?)

- Seja H^* a componente de H que contém x.

- Similarmente ao que fizemos para encontrar C, seja C' uma trilha de H^* de comprimento máximo começando no vértice x. Analogamente ao caso anterior, concluímos que C' é um circuito mais longo de H^* que começa e termina no vértice x.

Término da demonstração

- Como $|E(C')| > 0$, podemos usar C e C' para gerar um novo circuito $C'' = xCxC'x$ mais longo do que C em G.

Término da demonstração

- Como $|E(C')| > 0$, podemos usar C e C' para gerar um novo circuito $C'' = xCxC'x$ mais longo do que C em G.

- Isso contradiz a nossa escolha de C como circuito mais longo de G.

Término da demonstração

- Como $|E(C')| > 0$, podemos usar C e C' para gerar um novo circuito $C'' = xCxC'x$ mais longo do que C em G.
- Isso contradiz a nossa escolha de C como circuito mais longo de G.
- Logo, C contém todas as arestas de G e é, portanto, um ciclo euleriano. $\blacksquare$

Término da demonstração

- Como $|E(C')| > 0$, podemos usar C e C' para gerar um novo circuito $C'' = xCxC'x$ mais longo do que C em G.

- Isso contradiz a nossa escolha de C como circuito mais longo de G.

- Logo, C contém todas as arestas de G e é, portanto, um ciclo euleriano. $\blacksquare$

A partir dos Teoremas 10.1 e 10.2, obtemos a seguinte caracterização de grafos eulerianos:

Teorema 10.3: Um grafo G é euleriano se e somente se G é conexo e todo vértice de G tem grau par.

Exercício

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Provar o teorema abaixo usando indução no número de arestas:

Teorema 10.2 [Carl Hierholzer, 1873]: Se G é um grafo conexo e todos os seus vértices são pares, então G contém um circuito euleriano.

Sugestão:
Use o seguinte lema:

Lema: Se todo vértice de um grafo G possui grau pelo menos 2, então G contém um ciclo.

Caracterização – Trilhas eulerianas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Com a ajuda do Teorema 10.3, agora é fácil caracterizar grafos que possuem trilhas eulerianas:

Teorema 10.4: Um grafo conexo não-trivial G contém uma trilha euleriana se e somente se exatamente dois vértices de G têm grau ímpar. Além disso, a trilha começa e termina nos vértices de grau ímpar.

Caracterização – Trilhas eulerianas

Teorema 10.4: Um grafo conexo não-trivial G contém uma trilha euleriana se e somente se exatamente dois vértices de G têm grau ímpar. Além disso, a trilha começa e termina nos vértices de grau ímpar.

Demonstração:

Caracterização – Trilhas eulerianas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 10.4: Um grafo conexo não-trivial G contém uma trilha euleriana se e somente se exatamente dois vértices de G têm grau ímpar. Além disso, a trilha começa e termina nos vértices de grau ímpar.

Demonstração:

- ($\Longrightarrow$) Suponha que um grafo conexo não-trivial G contém uma trilha euleriana T. Assim, T é uma (u, v)-trilha, onde u, v são vértices distintos.

Caracterização – Trilhas eulerianas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 10.4: Um grafo conexo não-trivial G contém uma trilha euleriana se e somente se exatamente dois vértices de G têm grau ímpar. Além disso, a trilha começa e termina nos vértices de grau ímpar.

Demonstração:

- ($\Longrightarrow$) Suponha que um grafo conexo não-trivial G contém uma trilha euleriana T. Assim, T é uma (u, v)-trilha, onde u, v são vértices distintos.

- Construímos um novo grafo conexo H a partir de G adicionando um novo vértice x de grau 2, ligando x a u e v.

Caracterização – Trilhas eulerianas

Teorema 10.4: Um grafo conexo não-trivial G contém uma trilha euleriana se e somente se exatamente dois vértices de G têm grau ímpar. Além disso, a trilha começa e termina nos vértices de grau ímpar.

Demonstração:

- ($\Longrightarrow$) Suponha que um grafo conexo não-trivial G contém uma trilha euleriana T. Assim, T é uma (u, v)-trilha, onde u, v são vértices distintos.
- Construímos um novo grafo conexo H a partir de G adicionando um novo vértice x de grau 2, ligando x a u e v.
- Então, $C = uTvxu$ é um circuito euleriano em H. Pelo Teorema 10.3, todo vértice de H tem grau par e, assim, u e v têm grau ímpar em G.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 10.4: Um grafo conexo não-trivial G contém uma trilha euleriana se e somente se exatamente dois vértices de G têm grau ímpar. Além disso, a trilha começa e termina nos vértices de grau ímpar.

- ($\Longleftarrow$) Seja G um grafo conexo não-trivial contendo exatamente dois vértices u e v de grau ímpar. Vamos mostrar que G contém uma trilha euleriana T com extremos u e v.

Continuação da demonstração

Teorema 10.4: Um grafo conexo não-trivial G contém uma trilha euleriana se e somente se exatamente dois vértices de G têm grau ímpar. Além disso, a trilha começa e termina nos vértices de grau ímpar.

- ($\Longleftarrow$) Seja G um grafo conexo não-trivial contendo exatamente dois vértices u e v de grau ímpar. Vamos mostrar que G contém uma trilha euleriana T com extremos u e v.

- Adicione um vértice x de grau 2 em G e ligue-o aos vértices u e v. Chame o grafo resultante de H.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 10.4: Um grafo conexo não-trivial G contém uma trilha euleriana se e somente se exatamente dois vértices de G têm grau ímpar. Além disso, a trilha começa e termina nos vértices de grau ímpar.

- ($\Longleftarrow$) Seja G um grafo conexo não-trivial contendo exatamente dois vértices u e v de grau ímpar. Vamos mostrar que G contém uma trilha euleriana T com extremos u e v.
- Adicione um vértice x de grau 2 em G e ligue-o aos vértices u e v. Chame o grafo resultante de H.
- Portanto, H é um grafo conexo em que todos os vértices são pares. Pelo Teorema 10.3, H é um grafo euleriano contendo um circuito euleriano C.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Dado que é irrelevante em que vértice C começa, sem perda de generalidade, supomos que C é um (x, x)-circuito.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Dado que é irrelevante em que vértice C começa, sem perda de generalidade, supomos que C é um (x, x)-circuito.

- Como x é incidente somente às arestas xu e xv, uma destas arestas é a primeira aresta do (x, x)-circuito C e a outra é a última aresta de C.

Continuação da demonstração

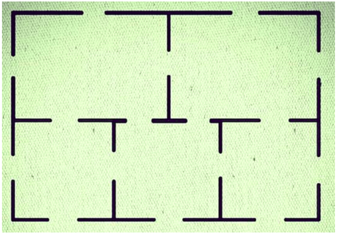
- Dado que é irrelevante em que vértice C começa, sem perda de generalidade, supomos que C é um (x, x)-circuito.

- Como x é incidente somente às arestas xu e xv, uma destas arestas é a primeira aresta do (x, x)-circuito C e a outra é a última aresta de C.

- Removendo o vértice x de C, obtemos uma trilha euleriana T de G que inicia em u e termina em v ou vice versa. $\blacksquare$

Um problema semelhante

- Abaixo está a planta simplificada de uma casa mostrando as paredes e entradas.

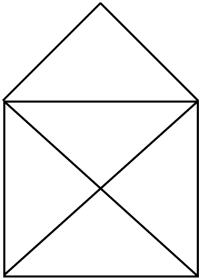


- É possível iniciar em algum lugar da casa e passar por todas as portas uma única vez?

Outro problema semelhante

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

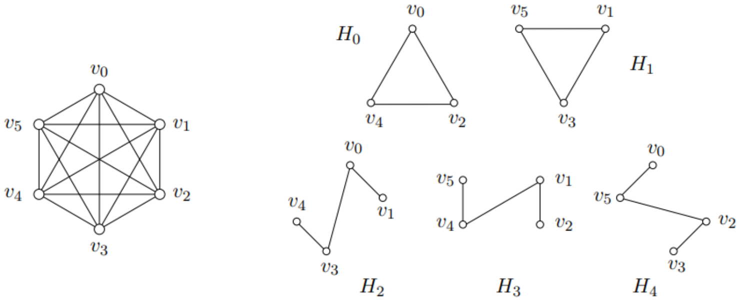
- É possível desenhar a figura abaixo sem tirar o lápis do papel e sem repetir os caminhos?



Decomposição de Grafos — Definição

- Uma decomposição de um grafo G é um conjunto de subgrafos $H_0, \ldots, H_{t-1}$ de G, disjuntos nas arestas, tal que

$$E(H_0) \cup E(H_1) \cup \cdots \cup E(H_{t-1}) = E(G)$$

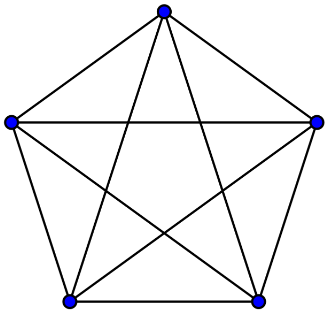


Uma decomposição do grafo completo K_6

Decomposição de grafos 4-regulares em ciclos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 10.5: Se G é um grafo 4-regular, então G pode ser decomposto em dois subgrafos 2-regulares.



Decomposição de grafos 4-regulares em ciclos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema 10.5: Se G é um grafo 4-regular, então G pode ser decomposto em dois subgrafos 2-regulares.

Demonstração:

Decomposição de grafos 4-regulares em ciclos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 10.5: Se G é um grafo 4-regular, então G pode ser decomposto em dois subgrafos 2-regulares.

Demonstração:

- Seja G um grafo 4-regular. Supomos que G é conexo. Caso contrário, aplicamos a demonstração em cada componente.

Decomposição de grafos 4-regulares em ciclos

Teorema 10.5: Se G é um grafo 4-regular, então G pode ser decomposto em dois subgrafos 2-regulares.

Demonstração:

- Seja G um grafo 4-regular. Supomos que G é conexo. Caso contrário, aplicamos a demonstração em cada componente.

- Como cada vértice de G tem grau par, G tem um circuito euleriano. O comprimento desse circuito é igual a $m = |E(G)|$.

Decomposição de grafos 4-regulares em ciclos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 10.5: Se G é um grafo 4-regular, então G pode ser decomposto em dois subgrafos 2-regulares.

Demonstração:

- Seja G um grafo 4-regular. Supomos que G é conexo. Caso contrário, aplicamos a demonstração em cada componente.

- Como cada vértice de G tem grau par, G tem um circuito euleriano. O comprimento desse circuito é igual a $m = |E(G)|$.

- Pelo Handshaking Lemma, temos que $m = \frac{4n}{2} = 2n$.

Decomposição de grafos 4-regulares em ciclos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema 10.5: Se G é um grafo 4-regular, então G pode ser decomposto em dois subgrafos 2-regulares.

Demonstração:

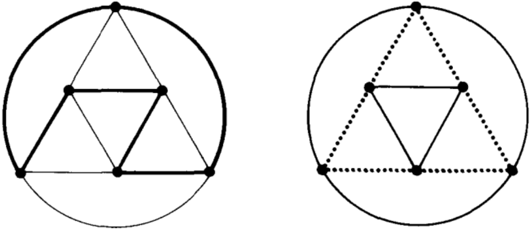
- Seja G um grafo 4-regular. Supomos que G é conexo. Caso contrário, aplicamos a demonstração em cada componente.
- Como cada vértice de G tem grau par, G tem um circuito euleriano. O comprimento desse circuito é igual a $m = |E(G)|$.
- Pelo Handshaking Lemma, temos que $m = \frac{4n}{2} = 2n$.
- Isso implica que existe um número par de arestas no circuito. Então, colorimos as arestas do circuito alternadamente com as cores vermelho e azul.

Continuação da demonstração

- Assim, todo vértice de G é incidente a duas arestas vermelhas e duas arestas azuis, a menos que o vértice seja incidente a um laço, em cujo caso o laço forma um ciclo de comprimento 1.

Continuação da demonstração

- Assim, todo vértice de G é incidente a duas arestas vermelhas e duas arestas azuis, a menos que o vértice seja incidente a um laço, em cujo caso o laço forma um ciclo de comprimento 1.
- Note que as arestas azuis induzem um subgrafo 2-regular de G, assim como as arestas vermelhas também induzem um subgrafo 2-regular de G. ■



Algoritmos para determinar circuitos eulerianos

Algoritmo de Hierholzer

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- A partir da demonstração de Hierholzer, é possível derivarmos um algoritmo de construção de circuito euleriano.

Algoritmo de Hierholzer

- A partir da demonstração de Hierholzer, é possível derivarmos um algoritmo de construção de circuito euleriano.

- A ideia é, a partir de um vértice qualquer, percorrer arestas até retornar ao vértice inicial. Porém, desta forma, pode ser obtido um ciclo que não inclua todas as arestas do grafo.

- Enquanto houver um vértice que possui arestas ainda não exploradas, comece um caminho neste vértice e tente voltar a ele, usando somente arestas ainda não percorridas.
    - Exercício: Provar que em um grafo par, toda trilha maximal é fechada.

Algoritmo de Hierholzer

- A partir da demonstração de Hierholzer, é possível derivarmos um algoritmo de construção de circuito euleriano.

- A ideia é, a partir de um vértice qualquer, percorrer arestas até retornar ao vértice inicial. Porém, desta forma, pode ser obtido um ciclo que não inclua todas as arestas do grafo.

- Enquanto houver um vértice que possui arestas ainda não exploradas, comece um caminho neste vértice e tente voltar a ele, usando somente arestas ainda não percorridas.
    - Exercício: Provar que em um grafo par, toda trilha maximal é fechada.

- Utiliza o conceito de grafo reduzido, ou seja, remove arestas e vértices do grafo original à medida em que os insere na solução.

Algoritmo de Hierholzer

Terminologia:

- C: conjunto das arestas que definem um circuito euleriano no grafo;
- E_1: conjunto de arestas do grafo G ainda não percorridas;
- K: grafo reduzido criado a partir de G, porém, $K = (V, E_1)$;
- H: conjunto de arestas que definem um circuito no grafo K;
- $\setminus$: subtração de conjuntos;
- $\cup$: união de conjuntos.

Algoritmo de Hierholzer

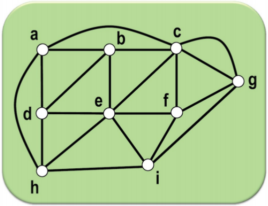
Entrada: Grafo $G = (V, E)$.
Saída: Circuito euleriano C.

Escolha qualquer vértice $v \in V$.
Construa um circuito C a partir do vértice v, percorrendo as arestas de G de maneira aleatória.
$E_1 \leftarrow E \backslash C$
$K \leftarrow (V, E_1)$
while $E_1 \neq \emptyset$
    Escolha um vértice v tal que $d_K(v) > 0$ e $v \in C$.
    Construa um circuito H a partir do vértice v, percorrendo as arestas de K de maneira aleatória.
    $E_1 \leftarrow E_1 \backslash H$
    $C \leftarrow H \cup C$
    $H \leftarrow \emptyset$
Imprimir C

Algoritmo de Hierholzer – Complexidade

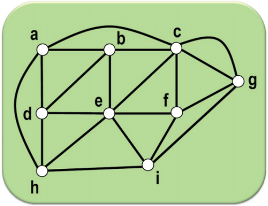
- O algoritmo de Hierholzer pode ser implementado em $O(|E(G)|)$ caso sejam utilizadas listas duplamente encadeadas para:
  - Implementar a lista de adjacências de cada vértice;
  - Implementar os ciclos C e H;
  - Implementar uma lista L que contém os vértices de C com grau maior que zero no grafo reduzido.

Algoritmo de Hierholzer – Exemplo

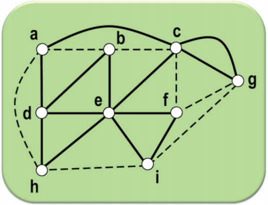


Grafo G

Algoritmo de Hierholzer – Exemplo

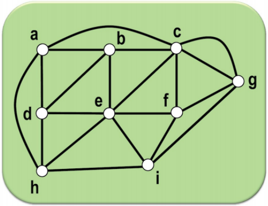


Grafo G

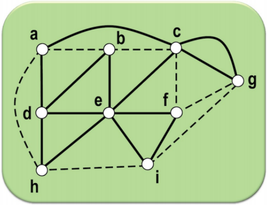


$C = \{c, f, g, i, h, a, b\}$

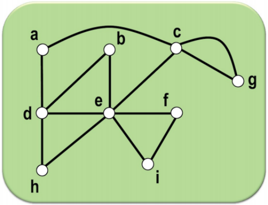
Algoritmo de Hierholzer – Exemplo



Grafo G



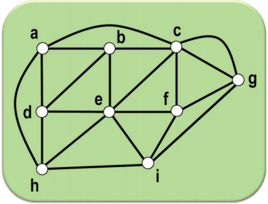
$C = \{c, f, g, i, h, a, b\}$



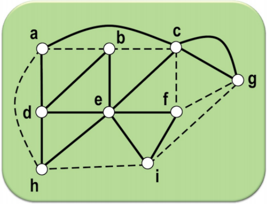
Grafo K na primeira iteração

Algoritmo de Hierholzer – Exemplo

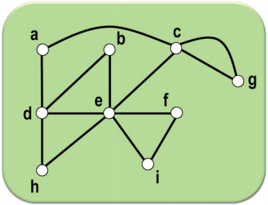
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



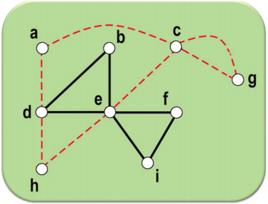
Grafo G



$C = \{c, f, g, i, h, a, b\}$

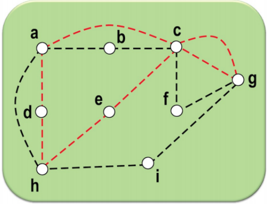


Grafo K na primeira iteração



$H = \{a, c, g, c, e, h, d\}$

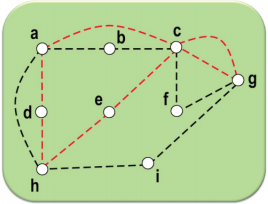
Algoritmo de Hierholzer – Exemplo



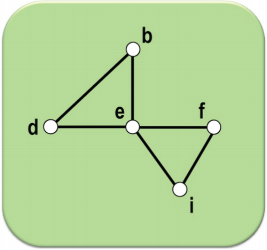
$C = \{c, f, g, i, h, a, c, g, c, e, h, d, a, b\}$

Algoritmo de Hierholzer – Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

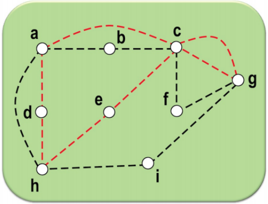


$C = \{c, f, g, i, h, a, c, g, c, e, h, d, a, b\}$

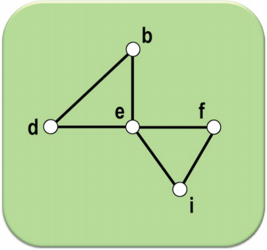


Grafo K na segunda iteração

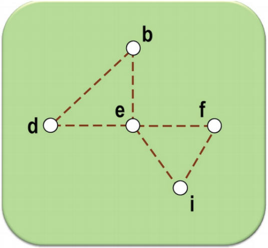
Algoritmo de Hierholzer – Exemplo



$C = \{c, f, g, i, h, a, c, g, c, e, h, d, a, b\}$



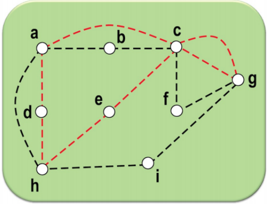
Grafo K na segunda iteração



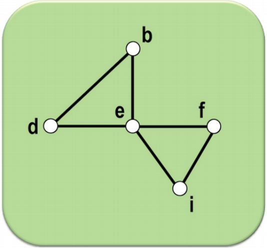
$H = \{d, b, e, f, i, e\}$

Algoritmo de Hierholzer – Exemplo

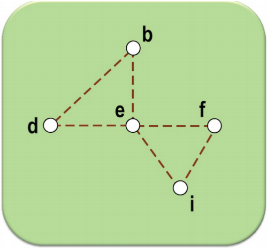
Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá



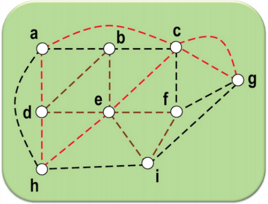
$C = \{c, f, g, i, h, a, c, g, c, e, h, d, a, b\}$



Grafo K na segunda iteração



$H = \{d, b, e, f, i, e\}$



$C = \{c, f, g, i, h, a, c, g, c, e, h, d, b, e, f, i, e, d, a, b\}$

Algoritmo de Fleury

Algoritmo de Fleury

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Princípio:

- O algoritmo de Fleury, proposto em 1883, também utiliza um grafo reduzido induzido pelas arestas ainda não marcadas pelo algoritmo.

- Inicialmente todas as arestas estão não marcadas, e, a partir de um vértice aleatório, uma aresta que obedeça a regra da ponte é escolhida para ser percorrida e inserida no ciclo.

Algoritmo de Fleury

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Princípio:

- O algoritmo de Fleury, proposto em 1883, também utiliza um grafo reduzido induzido pelas arestas ainda não marcadas pelo algoritmo.
- Inicialmente todas as arestas estão não marcadas, e, a partir de um vértice aleatório, uma aresta que obedeça a regra da ponte é escolhida para ser percorrida e inserida no ciclo.

> **Regra da ponte:** Se uma aresta uv é uma ponte no grafo reduzido, então uv só deve ser escolhida pelo algoritmo de Fleury caso não haja outra opção.

Algoritmo de Fleury

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Princípio:

- O algoritmo de Fleury, proposto em 1883, também utiliza um grafo reduzido induzido pelas arestas ainda não marcadas pelo algoritmo.

- Inicialmente todas as arestas estão não marcadas, e, a partir de um vértice aleatório, uma aresta que obedeça a regra da ponte é escolhida para ser percorrida e inserida no ciclo.

> **Regra da ponte:** Se uma aresta uv é uma ponte no grafo reduzido, então uv só deve ser escolhida pelo algoritmo de Fleury caso não haja outra opção.

Terminologia:

- C: conjunto das arestas que definem um ciclo euleriano no grafo.

Algoritmo de Fleury

Entrada: Grafo $G = (V, E)$.
Saída: Circuito euleriano C.

Escolha qualquer vértice $v \in V$;
$C \leftarrow \{v\}$;
faça
    Escolha uma aresta vw não marcada usando a regra da ponte;
    Atravessar vw;
    $C \leftarrow C \cup \{w\}$;
    Marcar vw;
    $v \leftarrow w$;

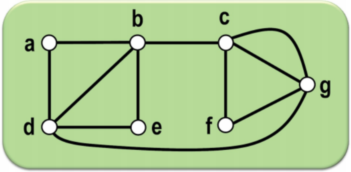
até que todas as arestas estejam marcadas;
$C \leftarrow C \cup \{v\}$;

Algoritmo de Fleury – Complexidade

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

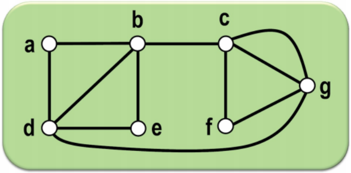
- $O(m)$ remoções de arestas;
- $O(m)$ para detecção de pontes (usando um algoritmo ingênuo);
- Resultando em complexidade $O(m^2)$.

Algoritmo de Fleury – Exemplo

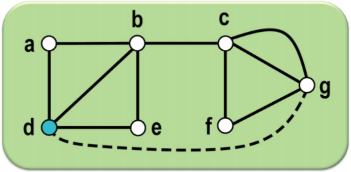


Grafo G

Algoritmo de Fleury – Exemplo



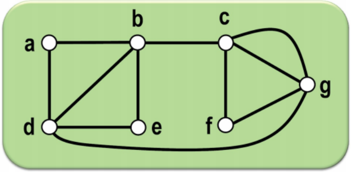
Grafo G



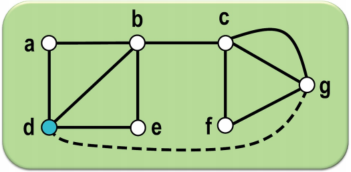
$vw = dg$

Algoritmo de Fleury – Exemplo

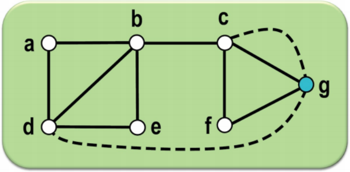
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



Grafo G

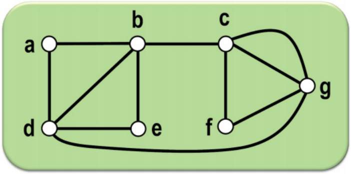


$vw = dg$

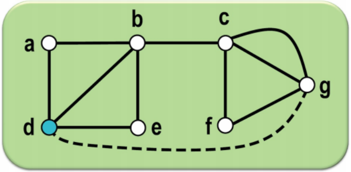


$vw = gc$

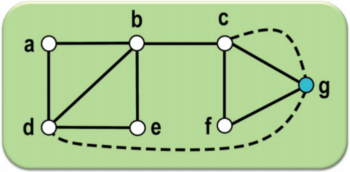
Algoritmo de Fleury – Exemplo



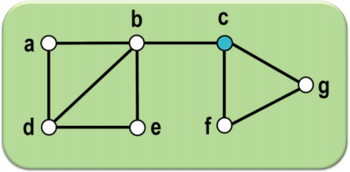
Grafo G



$vw = dg$

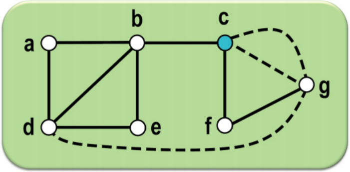


$vw = gc$



Grafo reduzido na terceira iteração

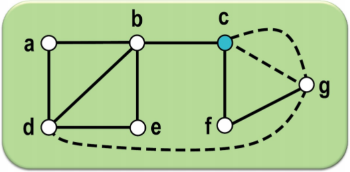
Algoritmo de Fleury – Exemplo



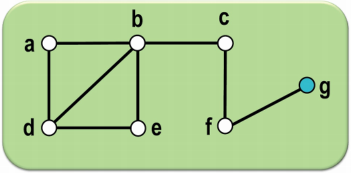
$$vw = cg$$

Algoritmo de Fleury – Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

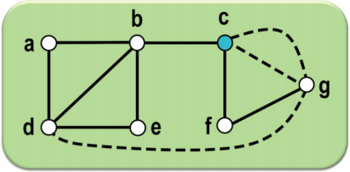


$vw = cg$

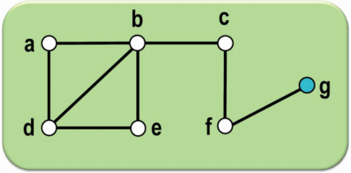


Grafo reduzido na quarta iteração

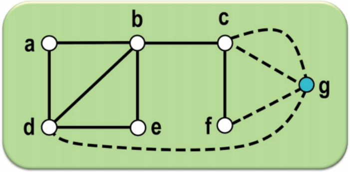
Algoritmo de Fleury – Exemplo



$vw = cg$

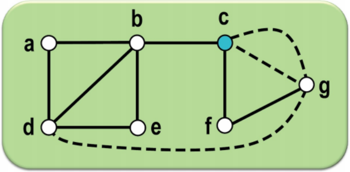


Grafo reduzido na quarta iteração

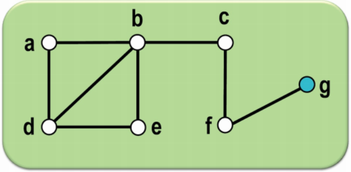


$vw = gf$

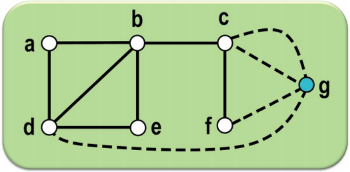
Algoritmo de Fleury – Exemplo



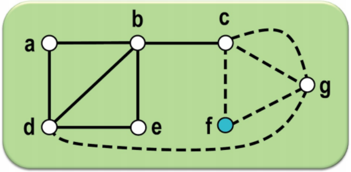
$vw = cg$



Grafo reduzido na quarta iteração

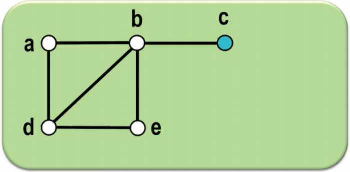


$vw = gf$



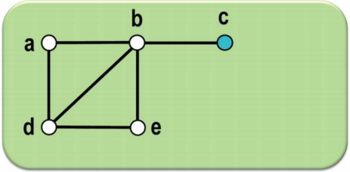
$vw = fc$

Algoritmo de Fleury – Exemplo

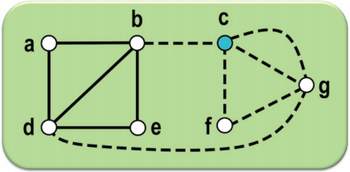


Grafo reduzido na sexta iteração

Algoritmo de Fleury – Exemplo



Grafo reduzido na sexta iteração

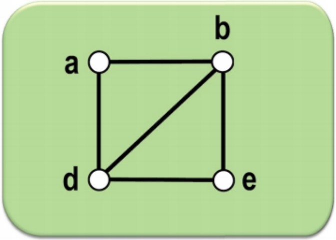


$vw = cb$

Algoritmo de Fleury – Exemplo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

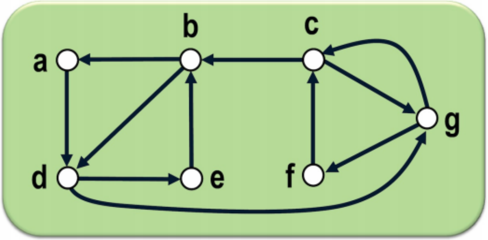
Dado o grafo reduzido, termine a execução do algoritmo.



Grafo reduzido.

$C = \{d, g, c, g, f, c, b\}$

Algoritmo de Fleury – Exemplo



$$C = \{d, g, c, g, f, c, b, a, d, e, b, d\}$$

Digrafos Eulerianos

Digrafos

- **Observação:** As definições de passeio, trilha, circuito e conexidade são as mesmas em grafos e digrafos quando listamos as arestas como pares ordenados de vértices.
- Em um passeio $v_0 e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$, a aresta e_i tem cauda v_{i-1} e cabeça v_i.

Digrafos

- **Observação:** As definições de passeio, trilha, circuito e conexidade são as mesmas em grafos e digrafos quando listamos as arestas como pares ordenados de vértices.
- Em um passeio $v_0 e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$, a aresta e_i tem cauda v_{i-1} e cabeça v_i.

Definições:

- Uma trilha orientada que inclua todas as arestas de um dado digrafo $G(V, A)$ é chamada de trilha euleriana.

Digrafos

- **Observação:** As definições de passeio, trilha, circuito e conexidade são as mesmas em grafos e digrafos quando listamos as arestas como pares ordenados de vértices.
- Em um passeio $v_0 e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$, a aresta e_i tem cauda v_{i-1} e cabeça v_i.

Definições:

- Uma trilha orientada que inclua todas as arestas de um dado digrafo $G(V, A)$ é chamada de trilha euleriana.
- Seja G um digrafo conexo (fortemente ou fracamente). Dizemos que G é euleriano se possui um circuito euleriano.

Digrafos

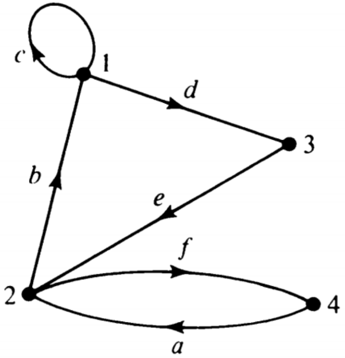
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

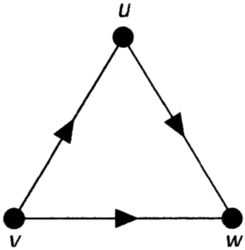
- **Observação:** As definições de passeio, trilha, circuito e conexidade são as mesmas em grafos e digrafos quando listamos as arestas como pares ordenados de vértices.
- Em um passeio $v_0 e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$, a aresta e_i tem cauda v_{i-1} e cabeça v_i.

Definições:

- Uma trilha orientada que inclua todas as arestas de um dado digrafo $G(V, A)$ é chamada de trilha euleriana.
- Seja G um digrafo conexo (fortemente ou fracamente). Dizemos que G é euleriano se possui um circuito euleriano.
- Um digrafo G não-euleriano é dito ser semi-euleriano se possui uma trilha euleriano.

Exemplos

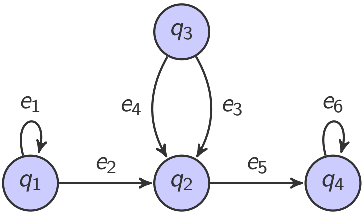




Digrafo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

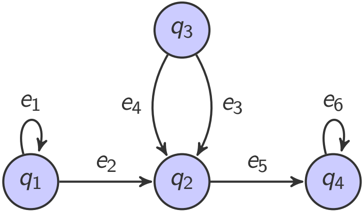
- **Definição:** Um grafo direcionado ou digrafo G é um objeto matemático que consiste em um conjunto finito e não vazio $V(G)$ de objetos chamados vértices e um conjunto $A(G)$ de arcos, junto com uma função de incidência ψ_G que associa a cada arco de G um par ordenado de vértices de G (não necessariamente distintos).



$G = (V(G), A(G))$

- $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_4, e_5, e_6\}$
- $\psi(e_1) = (q_1, q_1), \psi(e_2) = (q_1, q_2), \psi(e_3) = (q_3, q_2),$
  $\psi(e_4) = (q_3, q_2), \psi(e_5) = (q_2, q_4), \psi(e_6) = (q_4, q_4)$

Digrafo



- Se e é um arco e $\psi(e) = (u, v)$, então dizemos que e liga u a v. Também dizemos que u domina v. O vértice u é a cauda e v é a cabeça do arco.
- Os vértices que dominam um vértice v são seus vizinhos de entrada. Esse conjunto é denotado por $N_D^-(v)$.
  - Exemplo: $N_D^-(q_2) = \{q_1, q_3\}$
- Os vértices que são dominados por v são seus vizinhos de saída. Esse conjunto é denotado por $N_D^+(v)$.
  - Exemplo: $N_D^+(q_2) = \{q_4\}$

Digrafo – Graus dos vértices

Dado um vértice v de um digrafo $G = (V, A)$:

Digrafo – Graus dos vértices

Dado um vértice v de um digrafo $G = (V, A)$:

- O grau de saída $d^{+}(v)$ é o número de arestas com cauda v.
- O grau de entrada $d^{-}(v)$ é o número de arestas com cabeça v.

Digrafo – Graus dos vértices

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Dado um vértice v de um digrafo $G = (V, A)$:

- O grau de saída $d^+(v)$ é o número de arestas com cauda v.
- O grau de entrada $d^-(v)$ é o número de arestas com cabeça v.
- O grau de saída mínimo é denotado por $\delta^+(G)$ e o grau de saída máximo é denotado por $\Delta^+(G)$.
- O grau de entrada mínimo é denotado por $\delta^-(G)$ e o grau de saída máximo é denotado por $\Delta^-(G)$.

Exercício

Provar os seguintes resultados:

Lema: Se G é um digrafo com $\delta^+(G) \geq 1$, então G contém um ciclo. A mesma conclusão é verdadeira quando $\delta^-(G) \geq 1$.

Teorema: Um digrafo é Euleriano se e somente se G é conexo e $d^+(v) = d^-(v)$ para todo vértice v de G.

Sugestão:
Use indução no número de arestas do digrafo e o lema acima.

Exercícios

Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

(1) Prove que se G não tem vértices de grau ímpar, então existem ciclos disjuntos nas arestas $C_1, C_2, \ldots, C_m$ tais que $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \cdots \cup E(C_m)$.

(2) Prove que se um grafo conexo G tem $2k > 0$ vértices de grau ímpar, então existem k trilhas disjuntas nas arestas $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ em G tais que $E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \cdots \cup E(Q_k)$.

(3) Prove: Se todos os vértices de um grafo G são pares, então toda trilha maximal em G é fechada.

(4) Prove que se G é euleriano, então todo bloco de G é euleriano.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

FIM