Aula 12 — Emparelhamentos em grafos bipartidos

Teoria dos Grafos — QXD0152

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

1º semestre/2021

Tópicos desta aula

- Emparelhamentos máximos
- Emparelhamentos máximos em grafos bipartidos
- Emparelhamentos $\times$ coberturas
- Algoritmo para emparelhamento máximo em grafos bipartidos

Referências para esta aula

- Capítulo 5 do livro: Graph Theory with Applications.
  Autores: Bondy e Murty

- Capítulo 3 do livro: Introduction to Graph Theory.
  Autor: Douglas B. West

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Introdução

Grafos bipartidos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Professor $\times$ Disciplinas
  - A = professores
  - B = disciplinas

  Cada aresta liga um professor a uma das disciplinas que ele pode ministrar

Grafos bipartidos

- Professor $\times$ Disciplinas
    - A = professores
    - B = disciplinas

  Cada aresta liga um professor a uma das disciplinas que ele pode ministrar

- Alunos $\times$ cadeiras
    - A = alunos
    - B = cadeiras em sala de aula

  Cada aresta liga um aluno a uma das cadeiras na qual ele gostaria de sentar

Grafos bipartidos

- Professor $\times$ Disciplinas
  - A = professores
  - B = disciplinas

  Cada aresta liga um professor a uma das disciplinas que ele pode ministrar

- Alunos $\times$ cadeiras
  - A = alunos
  - B = cadeiras em sala de aula

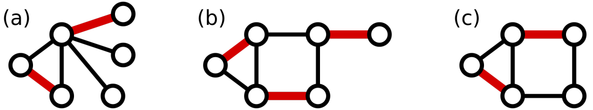
  Cada aresta liga um aluno a uma das cadeiras na qual ele gostaria de sentar

- Trabalhador $\times$ tarefa
  - A = trabalhadores
  - B = tarefas

  Cada aresta liga um trabalhador a uma das tarefas que ele pode realizar

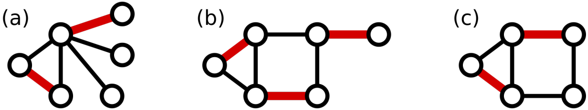
Emparelhamentos

- Seja G um grafo sem laços.
- Um emparelhamento M em G é um subconjunto de arestas de $E(G)$ duas a duas não adjacentes.



Emparelhamentos

- Seja G um grafo sem laços.
- Um emparelhamento M em G é um subconjunto de arestas de $E(G)$ duas a duas não adjacentes.

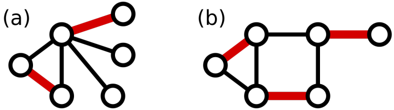


- Se M é um emparelhamento, dizemos que os dois extremos u e v de cada aresta $uv \in M$ estão emparelhados sob M. Dizemos também que cada vértice incidente em uma aresta de M é saturado por M ou que é M-saturado.

Emparelhamentos

- Seja G um grafo sem laços.

- Um emparelhamento M em G é um subconjunto de arestas de $E(G)$ duas a duas não adjacentes.



- Se M é um emparelhamento, dizemos que os dois extremos u e v de cada aresta $uv \in M$ estão emparelhados sob M. Dizemos também que cada vértice incidente em uma aresta de M é saturado por M ou que é M-saturado.

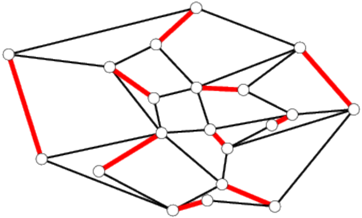
- Se um vértice $u \in V(G)$ não é saturado por nenhuma aresta de M, dizemos que u é M-exposto.

Emparelhamentos

- Um emparelhamento perfeito em G é um emparelhamento que satura todos os vértices de G.

Emparelhamentos

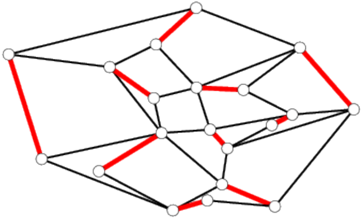
- Um emparelhamento perfeito em G é um emparelhamento que satura todos os vértices de G.



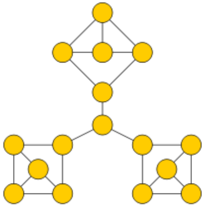
G com emparelhamento perfeito

Emparelhamentos

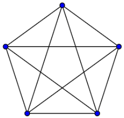
- Um emparelhamento perfeito em G é um emparelhamento que satura todos os vértices de G.



G com emparelhamento perfeito



Tem emparelhamento perfeito?



Tem emparelhamento perfeito?

Emparelhamento máximo $\times$ maximal

Máximo $\times$ maximal

- Um emparelhamento maximal em um grafo é um emparelhamento que não pode ser aumentado pela adição de uma nova aresta.
  - Um emparelhamento M é maximal se toda aresta que não está em M é incidente a uma aresta em M.

Máximo × maximal

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um emparelhamento maximal em um grafo é um emparelhamento que não pode ser aumentado pela adição de uma nova aresta.
  - Um emparelhamento M é maximal se toda aresta que não está em M é incidente a uma aresta em M.

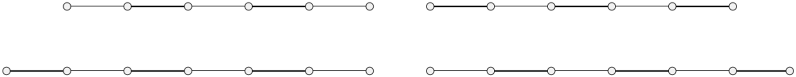
Máximo $\times$ maximal

- Um emparelhamento maximal em um grafo é um emparelhamento que não pode ser aumentado pela adição de uma nova aresta.
    - Um emparelhamento M é maximal se toda aresta que não está em M é incidente a uma aresta em M.

- Um emparelhamento máximo é um emparelhamento de tamanho máximo dentre todos os emparelhamentos no grafo.
    - O tamanho de um emparelhamento máximo de um grafo G é denotado pelo símbolo $\alpha'(G)$.
    - Todo emparelhamento máximo é maximal, mas o inverso não é verdadeiro.
    - Como obter um emparelhamento máximo nos caminhos P_4 e P_6 ilustrados acima?

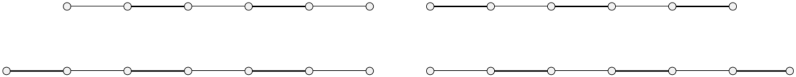
Caminhos aumentantes

- Dado um emparelhamento M, um caminho M-alternante é um caminho que alterna entre arestas em M e arestas que não estão em M.



Caminhos aumentantes

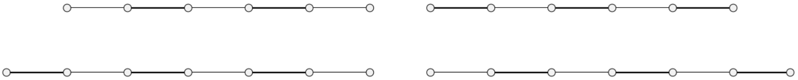
- Dado um emparelhamento M, um caminho M-alternante é um caminho que alterna entre arestas em M e arestas que não estão em M.



- Um caminho M-alternante cujos extremos não são saturados por arestas de M é um caminho M-aumentante.

Caminhos aumentantes

- Dado um emparelhamento M, um caminho M-alternante é um caminho que alterna entre arestas em M e arestas que não estão em M.



- Um caminho M-alternante cujos extremos não são saturados por arestas de M é um caminho M-aumentante.
- Dado um caminho M-aumentante P, podemos substituir as arestas de M em P pelas outras arestas de P a fim de obter um novo emparelhamento M' com uma aresta a mais que M.
  - Assim, quando M é um emparelhamento máximo, não existe nenhum caminho M-aumentante.

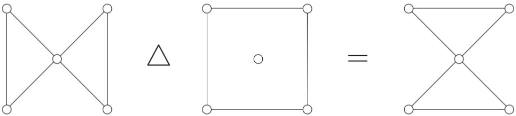
Diferença simétrica

- Sejam G e H dois grafos com o mesmo conjunto de vértices V.

Diferença simétrica

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

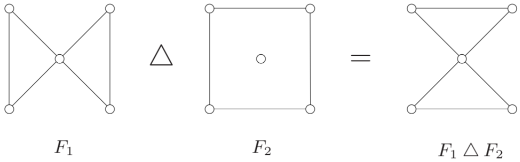
- Sejam G e H dois grafos com o mesmo conjunto de vértices V.
- A diferença simétrica $G \triangle H$ é o grafo com conjunto de vértices V e cujas arestas são dadas pelo conjunto $(E(G) - E(H)) \cup (E(H) - E(G))$.



F_1 $\quad$ F_2 $\quad$ $F_1 \triangle F_2$

Diferença simétrica

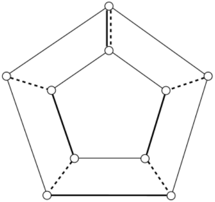
- Sejam G e H dois grafos com o mesmo conjunto de vértices V.
- A diferença simétrica $G \triangle H$ é o grafo com conjunto de vértices V e cujas arestas são dadas pelo conjunto $(E(G) - E(H)) \cup (E(H) - E(G))$.



- Também definimos a diferença simétrica para conjuntos de arestas. Em particular, se M e M' são dois emparelhamentos, então $M \triangle M' = (M - M') \cup (M' - M)$.

Diferença simétrica — Exemplo 1

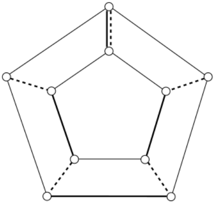
- Um grafo G com dois emparelhamentos, um emparelhamento maximal M (arestas em negrito) e um emparelhamento máximo M' (arestas tracejadas).
- Quem é o grafo induzido por $M \triangle M'$?

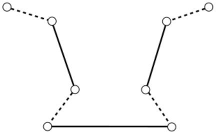


Diferença simétrica — Exemplo 1

- Um grafo G com dois emparelhamentos, um emparelhamento maximal M (arestas em negrito) e um emparelhamento máximo M' (arestas tracejadas).

- Quem é o grafo induzido por $M \triangle M'$?



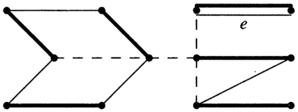


- As arestas de $M \triangle M'$ formam um caminho de comprimento ímpar.

Diferença simétrica — Exemplo 2

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

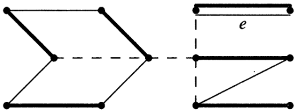
- No grafo abaixo, M é o emparelhamento com 5 arestas contínuas, M' é o emparelhamento com 6 arestas em negrito, e as arestas tracejadas não pertencem nem a M nem a M'. Os dois emparelhamentos possuem uma aresta em comum e.



- Quem é o grafo induzido por $M \triangle M'$?

Diferença simétrica — Exemplo 2

- No grafo abaixo, M é o emparelhamento com 5 arestas contínuas, M' é o emparelhamento com 6 arestas em negrito, e as arestas tracejadas não pertencem nem a M nem a M'. Os dois emparelhamentos possuem uma aresta em comum e.



- Quem é o grafo induzido por $M \triangle M'$?

- As arestas de $M \triangle M'$ formam um ciclo de comprimento 6 e um caminho de comprimento 3.

Lema

Lema 12.1: Seja G um grafo e M, M' dois emparelhamentos distintos em G. Então, toda componente do grafo induzido pela diferença simétrica $M \triangle M'$ é um caminho ou um ciclo par.

Demonstração:

Lema

Lema 12.1: Seja G um grafo e M, M' dois emparelhamentos distintos em G. Então, toda componente do grafo induzido pela diferença simétrica $M \triangle M'$ é um caminho ou um ciclo par.

Demonstração:

- Sejam M e M' emparelhamentos como descritos no enunciado e seja $F = G[M \triangle M']$.

Lema

Lema 12.1: Seja G um grafo e M, M' dois emparelhamentos distintos em G. Então, toda componente do grafo induzido pela diferença simétrica $M \triangle M'$ é um caminho ou um ciclo par.

Demonstração:

- Sejam M e M' emparelhamentos como descritos no enunciado e seja $F = G[M \triangle M']$.
- Como M e M' são emparelhamentos, todo vértice em F é incidente a no máximo uma aresta de cada emparelhamento. Então $\Delta(F) \leq 2$.

Lema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Lema 12.1: Seja G um grafo e M, M' dois emparelhamentos distintos em G. Então, toda componente do grafo induzido pela diferença simétrica $M \triangle M'$ é um caminho ou um ciclo par.

Demonstração:

- Sejam M e M' emparelhamentos como descritos no enunciado e seja $F = G[M \triangle M']$.
- Como M e M' são emparelhamentos, todo vértice em F é incidente a no máximo uma aresta de cada emparelhamento. Então $\Delta(F) \leq 2$.
- Como $\Delta(F) \leq 2$, toda componente de F é um caminho ou um ciclo. Além disso, todo caminho e ciclo em F alterna entre arestas de $M - M'$ e arestas de $M' - M$.

Lema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Lema 12.1: Seja G um grafo e M, M' dois emparelhamentos distintos em G. Então, toda componente do grafo induzido pela diferença simétrica $M \triangle M'$ é um caminho ou um ciclo par.

Demonstração:

- Sejam M e M' emparelhamentos como descritos no enunciado e seja $F = G[M \triangle M']$.
- Como M e M' são emparelhamentos, todo vértice em F é incidente a no máximo uma aresta de cada emparelhamento. Então $\Delta(F) \leq 2$.
- Como $\Delta(F) \leq 2$, toda componente de F é um caminho ou um ciclo. Além disso, todo caminho e ciclo em F alterna entre arestas de $M - M'$ e arestas de $M' - M$.
- Assim, todo ciclo tem comprimento par, com um número igual de arestas de M e M'. ∎

Caracterização - Emparelhamento Máximo

Teorema 12.2 [Berge, 1957]:
Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se G não tem nenhum caminho M-aumentante.


Claude Berge

Demonstração:

Caracterização - Emparelhamento Máximo

> **Teorema 12.2 [Berge, 1957]:**
> Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se G não tem nenhum caminho M-aumentante.


Claude Berge

Demonstração:

- Vamos provar a contrapositiva da ida e da volta:

> G tem um emparelhamento maior que M se e somente se G tem um caminho M-aumentante.

Continuação da demonstração

G tem um emparelhamento maior que M se e somente se G tem um caminho M-aumentante.

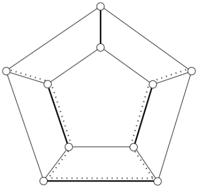
- ($\Longleftarrow$) Seja M um emparelhamento em G e suponha que G contém um caminho M-aumentante P.

Continuação da demonstração

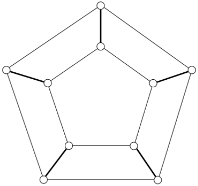
G tem um emparelhamento maior que M se e somente se G tem um caminho M-aumentante.

- ($\Longleftarrow$) Seja M um emparelhamento em G e suponha que G contém um caminho M-aumentante P.

- Então, $M' = M \triangle E(P)$ é um emparelhamento em G e $|M'| = |M| + 1$. Assim, M não é um emparelhamento máximo. Exemplo:



Caminho M-aumentante P



Emparelhamento $M \triangle E(P)$

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

G tem um emparelhamento maior que M se e somente se G tem um caminho M-aumentante.

- ($\Longrightarrow$) Seja M' um emparelhamento em G maior que M. Vamos construir um caminho M-aumentante.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

G tem um emparelhamento maior que M se e somente se G tem um caminho M-aumentante.

- ($\Longrightarrow$) Seja M' um emparelhamento em G maior que M. Vamos construir um caminho M-aumentante.
- Seja $F = M \triangle M'$. Pelo Lema 12.1, F consiste em caminhos e ciclos pares. Além disso, os ciclos possuem o mesmo número de arestas de M e M'.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

G tem um emparelhamento maior que M se e somente se G tem um caminho M-aumentante.

- ($\Longrightarrow$) Seja M' um emparelhamento em G maior que M. Vamos construir um caminho M-aumentante.

- Seja $F = M \triangle M'$. Pelo Lema 12.1, F consiste em caminhos e ciclos pares. Além disso, os ciclos possuem o mesmo número de arestas de M e M'.

- Como $|M'| > |M|$, F deve ter uma componente com mais arestas de M' do que de M.

Continuação da demonstração

G tem um emparelhamento maior que M se e somente se G tem um caminho M-aumentante.

- $(\Longrightarrow)$ Seja M' um emparelhamento em G maior que M. Vamos construir um caminho M-aumentante.
- Seja $F = M \triangle M'$. Pelo Lema 12.1, F consiste em caminhos e ciclos pares. Além disso, os ciclos possuem o mesmo número de arestas de M e M'.
- Como $|M'| > |M|$, F deve ter uma componente com mais arestas de M' do que de M.
- Tal componente só pode ser um caminho que começa e termina com uma aresta de M'. Assim, este caminho é um caminho M-aumentante em G. ■

Emparelhamentos em grafos bipartidos

Problema da alocação de pessoal

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- O problema da alocação de pessoal tem como dados n funcionários e n posições numa empresa. Cada funcionário está qualificado para uma ou mais posições.

- É possível fazer uma atribuição de modo que cada funcionário ocupe exatamente uma posição na empresa?

Uma instância do problema

- Sete pessoas, Bia, Dudu, Félix, João, Kaká, Lia e Maria, estão em busca de uma vaga de emprego.

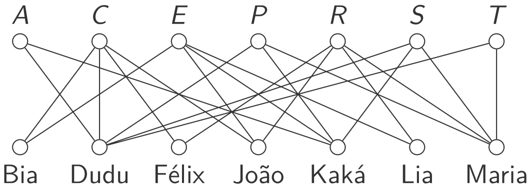
- Um site de empregos está oferecendo sete vagas: Analista de sistemas (A), consultor(C), editor (E), programador (P), repórter (R), secretária(o) (S) e tradutor (T).

Uma instância do problema

- Sete pessoas, Bia, Dudu, Félix, João, Kaká, Lia e Maria, estão em busca de uma vaga de emprego.

- Um site de empregos está oferecendo sete vagas: Analista de sistemas (A), consultor(C), editor (E), programador (P), repórter (R), secretária(o) (S) e tradutor (T).

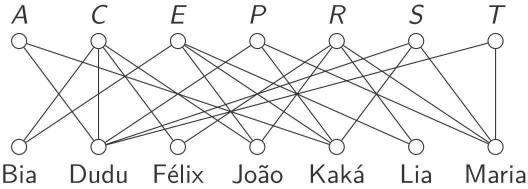
- Os sete candidatos aplicaram para as vagas da seguinte forma:
  Bia: C, E; Dudu: A, C, P, S, T; Félix: C, R; João: C, E, R;
  Kaká: A, E, P, S; Lia: E, R; Maria: P, R, S, T.



Uma instância do problema

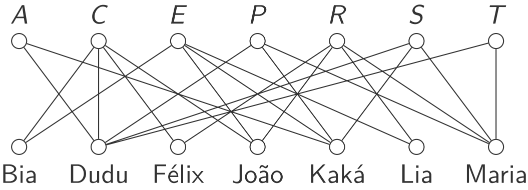
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- É possível obter um emparelhamento M de cardinalidade igual a 7 neste grafo bipartido?



Uma instância do problema

- É possível obter um emparelhamento M de cardinalidade igual a 7 neste grafo bipartido?



- Não. Pois o subconjunto $\{$Bia, Félix, João, Lia$\}$ contém quatro vértices cujos vizinhos pertencem ao conjunto $\{c, e, r\}$ de somente três vértices.

Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja $G[A, B]$ um grafo bipartido com $|A| \leq |B|$.
- Dado um subconjunto $S \subseteq A$, a vizinhança de S, denotada por $N(S)$, é a união de todas as vizinhanças $N(v)$, para todo $v \in S$.
- Dizemos que um grafo G satisfaz a condição de Hall se $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq A$.

Philip Hall

Teorema de Hall

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 12.3 [Hall, 1935]: Seja $G[A, B]$ um grafo bipartido com $|A| \leq |B|$. Então, G contém um emparelhamento que satura todos os vértices de A se e somente se $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq A$.

Demonstração:

Teorema de Hall

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 12.3 [Hall, 1935]: Seja $G[A, B]$ um grafo bipartido com $|A| \leq |B|$. Então, G contém um emparelhamento que satura todos os vértices de A se e somente se $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq A$.

Demonstração:

- $(\Longrightarrow)$ A prova da condição necessária decorre imediatamente das hipóteses.

- Note que, para qualquer subconjunto $S \subseteq A$, existem exatamente $|S|$ vértices de B emparelhados com os vértices de S e eles com certeza pertencem ao conjunto $|N(S)|$. Logo, $|N(S)| \geq |S|$.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 12.3 [Hall, 1935]: Seja $G[A, B]$ um grafo bipartido com $|A| \leq |B|$. Então, G contém um emparelhamento que satura todos os vértices de A se e somente se $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq A$.

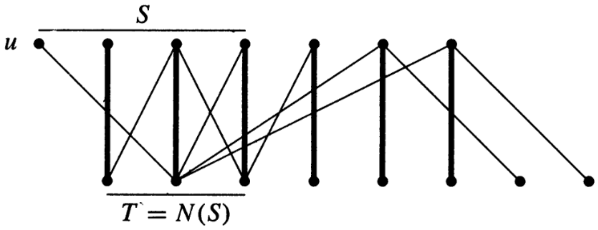
- ($\Longleftarrow$) Para provar que a Condição de Hall é suficiente, vamos provar a contrapositiva:

> Se M é um emparelhamento máximo em G e M não satura A, então obtemos um conjunto $S \subseteq A$ tal que $|N(S)| < |S|$.

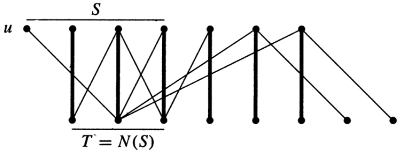
Continuação da demonstração

Se M é um emparelhamento máximo em G e M não satura A, então obtemos um conjunto $S \subseteq A$ tal que $|N(S)| < |S|$.

- Seja $u \in A$ um vértice não saturado por M.
- Dentre todos os vértices alcançáveis pelo vértice u por meio de caminhos M-alternantes em G, seja S o conjunto daqueles que pertencem a A e seja T o conjunto daqueles que pertencem a B. Note que $u \in S$.

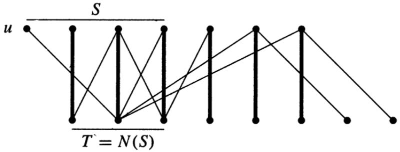


Continuação da demonstração



Afirmação 1: M emparelha os vértices de T com os vértices de $S - \{u\}$.

Continuação da demonstração

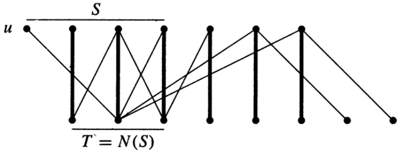


Afirmação 1: M emparelha os vértices de T com os vértices de $S - \{u\}$.

- Os caminhos M-alternantes saindo de u alcançam B por meio de arestas que não estão em M e retornam para A por meio de arestas em M. Então, todo vértice de $S - \{u\}$ é alcançado por uma aresta em M que tem como outro extremo um vértice de T.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

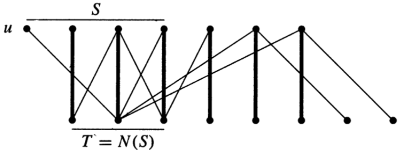


Afirmação 1: M emparelha os vértices de T com os vértices de $S - \{u\}$.

- Os caminhos M-alternantes saindo de u alcançam B por meio de arestas que não estão em M e retornam para A por meio de arestas em M. Então, todo vértice de $S - \{u\}$ é alcançado por uma aresta em M que tem como outro extremo um vértice de T.

- Como não existe caminho M-aumentante, todo vértice de T é saturado. Assim, um caminho M-alternante alcançando $y \in T$ estende via M para um vértice de S. Portanto, estas arestas de M produzem uma bijeção de T para $S - \{u\}$. Logo, concluímos que $|T| = |S - \{u\}|$.

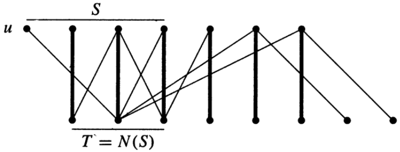
Continuação da demonstração



O emparelhamento entre T e $S - \{u\}$ implica que $T \subseteq N(S)$.

Afirmação 2: De fato, $T = N(S)$.

Continuação da demonstração

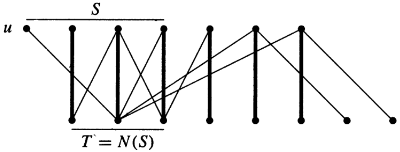


O emparelhamento entre T e $S - \{u\}$ implica que $T \subseteq N(S)$.

Afirmação 2: De fato, $T = N(S)$.

- Suponha, por absurdo, que existe $y \in B - T$ com um vizinho $v \in S$. A aresta vy não pode estar em M, dado que u é não saturado e os demais vértices de S estão emparelhados aos vértices de T por meio de M.

Continuação da demonstração



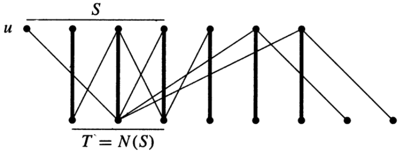
O emparelhamento entre T e $S - \{u\}$ implica que $T \subseteq N(S)$.

Afirmação 2: De fato, $T = N(S)$.

- Suponha, por absurdo, que existe $y \in B - T$ com um vizinho $v \in S$. A aresta vy não pode estar em M, dado que u é não saturado e os demais vértices de S estão emparelhados aos vértices de T por meio de M.

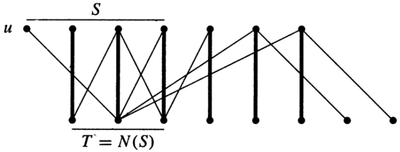
- Assim, podemos concatenar vy a um caminho M-alternante que sai de u e alcança v, gerando assim um caminho M-alternante que alcança y. Isso contradiz o fato de que $y \notin T$. Portanto, a aresta vy não existe.

Continuação da demonstração



- Como $T = N(S)$, provamos que $|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$ para esta escolha de S. Isso completa a prova da contrapositiva e o resultado segue. ■

Continuação da demonstração

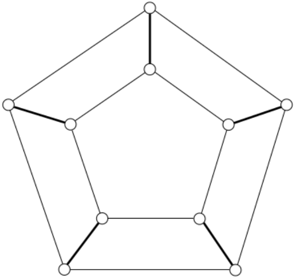


- Como $T = N(S)$, provamos que $|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$ para esta escolha de S. Isso completa a prova da contrapositiva e o resultado segue. ■

Observação: O Teorema de Hall implica que quando um grafo bipartido $G[A, B]$ com $|A| \leq |B|$ não tem um emparelhamento que satura A, podemos verificar isto exibindo um subconjunto $S \subseteq A$ com $|N(S)| < |S|$.

Emparelhamento Perfeito

- Seja M um emparelhamento em um grafo G.
- Lembre que M é um emparelhamento perfeito se todos os vértices de G são saturados por uma aresta de M.



Um grafo com emparelhamento perfeito

Grafos bipartidos regulares

Teorema 12.4: Para $k > 0$, todo grafo bipartido k-regular tem um emparelhamento perfeito.

Demonstração:

Grafos bipartidos regulares

Teorema 12.4: Para $k > 0$, todo grafo bipartido k-regular tem um emparelhamento perfeito.

Demonstração:

- Seja G um grafo bipartido k-regular com bipartição (X, Y). Como G é k-regular, temos que $k|X| = |E| = k|Y|$ e, como $k > 0$, $|X| = |Y|$.

Grafos bipartidos regulares

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 12.4: Para $k > 0$, todo grafo bipartido k-regular tem um emparelhamento perfeito.

Demonstração:

- Seja G um grafo bipartido k-regular com bipartição (X, Y). Como G é k-regular, temos que $k|X| = |E| = k|Y|$ e, como $k > 0$, $|X| = |Y|$.
- Seja S um subconjunto de X e denote por E_S e $E_{N(S)}$ os conjuntos de arestas incidentes em S e $N(S)$, respectivamente.

Grafos bipartidos regulares

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 12.4: Para $k > 0$, todo grafo bipartido k-regular tem um emparelhamento perfeito.

Demonstração:

- Seja G um grafo bipartido k-regular com bipartição (X, Y). Como G é k-regular, temos que $k|X| = |E| = k|Y|$ e, como $k > 0$, $|X| = |Y|$.

- Seja S um subconjunto de X e denote por E_S e $E_{N(S)}$ os conjuntos de arestas incidentes em S e $N(S)$, respectivamente.

- Pela definição de $N(S)$, temos que $E_S \subseteq E_{N(S)}$ e, portanto,

$$k|N(S)| = |E_{N(S)}| \geq |E_S| = k|S|.$$

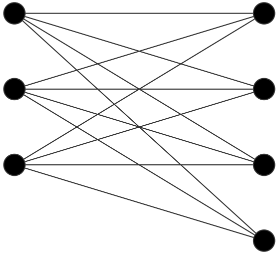
- Segue que $|N(S)| \geq |S|$. Pelo Teorema 12.3, G tem um emparelhamento M saturando todos os vértices de X. Como $|X| = |Y|$, M é um emparelhamento perfeito. ■

Emparelhamentos $\times$ Coberturas

Coberturas

- Uma cobertura por vértices em um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices $C \subseteq V(G)$ tal que cada aresta de G é incidente a pelo menos um vértice de C. Dizemos que os vértices em C cobrem $E(G)$.

- Apresente uma cobertura no grafo abaixo.



Coberturas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Note que $V(G)$ é sempre uma cobertura de G.
  - Portanto, buscamos uma cobertura com o menor número de vértices.
- Uma cobertura por vértices C de G é mínima se não há cobertura C' de G menor que C. O tamanho de uma cobertura mínima de um grafo G é denotada pelo símbolo $\beta(G)$.

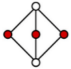
Coberturas

- Note que $V(G)$ é sempre uma cobertura de G.
  - Portanto, buscamos uma cobertura com o menor número de vértices.
- Uma cobertura por vértices C de G é mínima se não há cobertura C' de G menor que C. O tamanho de uma cobertura mínima de um grafo G é denotada pelo símbolo $\beta(G)$.
- **Minimal** $\times$ **Mínimo**
  - Uma cobertura C em um grafo G é minimal se não existe uma cobertura D tal que $D \subset C$.

Coberturas

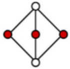
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Note que $V(G)$ é sempre uma cobertura de G.
  - Portanto, buscamos uma cobertura com o menor número de vértices.
- Uma cobertura por vértices C de G é mínima se não há cobertura C' de G menor que C. O tamanho de uma cobertura mínima de um grafo G é denotada pelo símbolo $\beta(G)$.
- **Minimal** $\times$ **Mínimo**
  - Uma cobertura C em um grafo G é minimal se não existe uma cobertura D tal que $D \subset C$.
  - Toda cobertura mínima é minimal, mas a recíproca não é verdadeira.



Coberturas

- Note que $V(G)$ é sempre uma cobertura de G.
  - Portanto, buscamos uma cobertura com o menor número de vértices.
- Uma cobertura por vértices C de G é mínima se não há cobertura C' de G menor que C. O tamanho de uma cobertura mínima de um grafo G é denotada pelo símbolo $\beta(G)$.
- **Minimal** $\times$ **Mínimo**
  - Uma cobertura C em um grafo G é minimal se não existe uma cobertura D tal que $D \subset C$.
  - Toda cobertura mínima é minimal, mas a recíproca não é verdadeira.



- Dado um grafo e um número k, decidir se o grafo tem uma cobertura com k ou menos vértices é um problema NP-completo.

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Note que nenhum vértice pode cobrir mais do que duas arestas em um emparelhamento. Logo, a cardinalidade de toda cobertura é maior ou igual à cardinalidade de um emparelhamento do grafo.

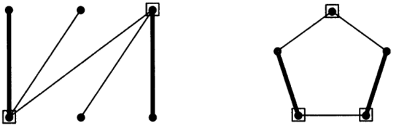
> **Proposição 12.5:** Seja C uma cobertura e M um emparelhamento em um grafo G. Então, $|C| \geq |M|$.

Coberturas × Emparelhamentos

- Note que nenhum vértice pode cobrir mais do que duas arestas em um emparelhamento. Logo, a cardinalidade de toda cobertura é maior ou igual à cardinalidade de um emparelhamento do grafo.

> **Proposição 12.5:** Seja C uma cobertura e M um emparelhamento em um grafo G. Então, $|C| \geq |M|$.

- Portanto, se obtivermos um emparelhamento e uma cobertura de vértices de mesma cardinalidade, então PROVAMOS que cada um é ótimo.



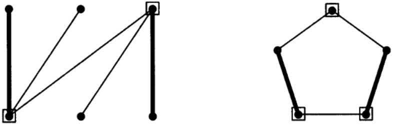
Coberturas × Emparelhamentos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Note que nenhum vértice pode cobrir mais do que duas arestas em um emparelhamento. Logo, a cardinalidade de toda cobertura é maior ou igual à cardinalidade de um emparelhamento do grafo.

> **Proposição 12.5:** Seja C uma cobertura e M um emparelhamento em um grafo G. Então, $|C| \geq |M|$.

- Portanto, se obtivermos um emparelhamento e uma cobertura de vértices de mesma cardinalidade, então PROVAMOS que cada um é ótimo.



> **Corolário 12.6:** Para todo grafo G, temos que $\beta(G) \geq \alpha'(G)$.

Coberturas × Emparelhamentos

Teorema 12.7 [König e Egerváry, 1931]:
Se G é um grafo bipartido, então $\beta(G) = \alpha'(G)$.

Demonstração:

Coberturas × Emparelhamentos

Teorema 12.7 [König e Egerváry, 1931]:
Se G é um grafo bipartido, então $\beta(G) = \alpha'(G)$.

Demonstração:

- Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y). Dada uma cobertura C e um emparelhamento M em G, pela Proposição 12.5, temos que $|C| \geq |M|$.

Coberturas × Emparelhamentos

Teorema 12.7 [König e Egerváry, 1931]:
Se G é um grafo bipartido, então $\beta(G) = \alpha'(G)$.

Demonstração:

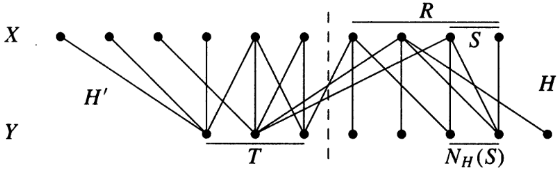
- Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y). Dada uma cobertura C e um emparelhamento M em G, pela Proposição 12.5, temos que $|C| \geq |M|$.

- Seja C uma cobertura mínima de G. A seguir, construímos um emparelhamento máximo M em G tal que $|C| = |M|$.

- Com isso, concluiremos que $\beta(G) = \alpha'(G)$.

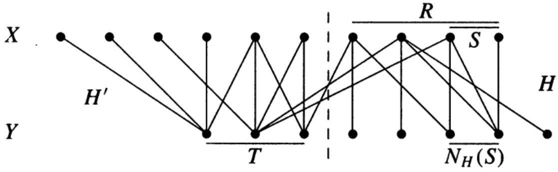
Continuação da demonstração

- Particione C em dois conjuntos R e T tais que $R = C \cap X$ e $T = C \cap Y$. Além disso, seja H o subgrafo induzido por $R \cup (Y - T)$ e H' o subgrafo induzido por $T \cup (X - R)$.



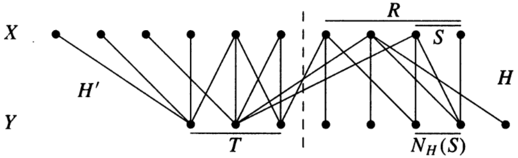
Continuação da demonstração

- Particione C em dois conjuntos R e T tais que $R = C \cap X$ e $T = C \cap Y$. Além disso, seja H o subgrafo induzido por $R \cup (Y - T)$ e H' o subgrafo induzido por $T \cup (X - R)$.



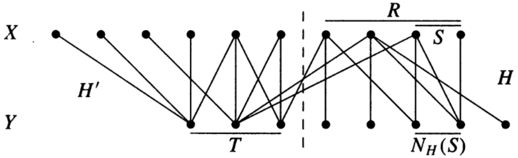
- Vamos usar o Teorema de Hall para mostrar que H tem um emparelhamento que satura R e que H' tem um emparelhamento que satura T.
    - Como H e H' são disjuntos, os dois emparelhamentos juntos formam um emparelhamento de tamanho $|C|$ em G.

Continuação da demonstração



- Como $R \cup T$ é uma cobertura, G não tem arestas de $Y - T$ para $X - R$.

Continuação da demonstração

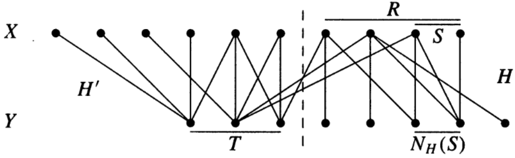


- Como $R \cup T$ é uma cobertura, G não tem arestas de $Y - T$ para $X - R$.

- Para cada subconjunto $S \subseteq R$, considere o conjunto $N_H(S)$. Note que $N_H(S)$ está contido em $Y - T$.

- Se $|N_H(S)| < |S|$, então podemos substituir $N_H(S)$ por S em C a fim de obter uma cobertura menor, dado que $N_H(S)$ cobre todas as arestas incidentes em S que não são cobertas por T.
  - Porém, como C já é mínimo, isso não é possível. Logo, concluímos que $|N_H(S)| \geq |S|$.

Continuação da demonstração



- Assim, concluímos que a minimalidade do conjunto C implica a Condição de Hall em H e, portanto, H tem um emparelhamento que satura R.

- Aplicando o mesmo argumento no subgrafo H', obtemos que H' tem um emparelhamento que satura T, e o resultado segue. ■

Algoritmo – Emparelhamento máximo em grafos bipartidos

Algoritmo

- A partir do Teorema de Berge obtemos um algoritmo guloso para determinar um emparelhamento máximo M em um grafo bipartido:

Algoritmo

- A partir do Teorema de Berge obtemos um algoritmo guloso para determinar um emparelhamento máximo M em um grafo bipartido:
    - Iniciar com um emparelhamento M vazio e, repetidamente, aumentar a cardinalidade do emparelhamento M corrente através do uso sucessivo de caminhos M-aumentantes.

Algoritmo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- A partir do Teorema de Berge obtemos um algoritmo guloso para determinar um emparelhamento máximo M em um grafo bipartido:
  - Iniciar com um emparelhamento M vazio e, repetidamente, aumentar a cardinalidade do emparelhamento M corrente através do uso sucessivo de caminhos M-aumentantes.
  - Lembre que a existência de um caminho M-aumentante P define, através da operação de diferença simétrica, um novo emparelhamento $M' = M \triangle E(P)$ tal que $|M'| = |M| + 1$.

Algoritmo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- A partir do Teorema de Berge obtemos um algoritmo guloso para determinar um emparelhamento máximo M em um grafo bipartido:
  - Iniciar com um emparelhamento M vazio e, repetidamente, aumentar a cardinalidade do emparelhamento M corrente através do uso sucessivo de caminhos M-aumentantes.
  - Lembre que a existência de um caminho M-aumentante P define, através da operação de diferença simétrica, um novo emparelhamento $M' = M \triangle E(P)$ tal que $|M'| = |M| + 1$.
  - Este processo de obter sucessivos caminhos aumentantes termina com um emparelhamento máximo porque:
    (i) A cardinalidade do emparelhamento máximo é finita.
    (ii) Cada iteração aumenta de uma unidade a cardinalidade do emparelhamento corrente.

Algoritmo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- A partir do Teorema de Berge obtemos um algoritmo guloso para determinar um emparelhamento máximo M em um grafo bipartido:
  - Iniciar com um emparelhamento M vazio e, repetidamente, aumentar a cardinalidade do emparelhamento M corrente através do uso sucessivo de caminhos M-aumentantes.
  - Lembre que a existência de um caminho M-aumentante P define, através da operação de diferença simétrica, um novo emparelhamento $M' = M \triangle E(P)$ tal que $|M'| = |M| + 1$.
  - Este processo de obter sucessivos caminhos aumentantes termina com um emparelhamento máximo porque:
    (i) A cardinalidade do emparelhamento máximo é finita.
    (ii) Cada iteração aumenta de uma unidade a cardinalidade do emparelhamento corrente.
  - Se G não admitir caminhos M-aumentantes, então o Teorema de Berge garante que M é máximo.

Encontrando caminhos M-aumentantes

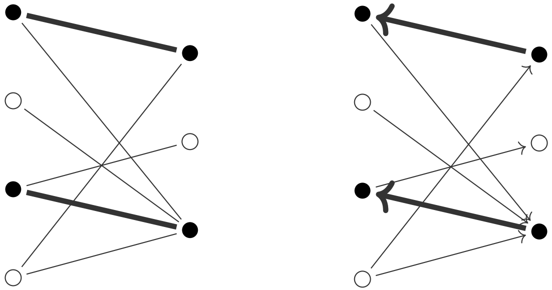
- Como encontrar caminhos M-aumentantes no grafo $G[X, Y]$?

Encontrando caminhos M-aumentantes

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Como encontrar caminhos M-aumentantes no grafo $G[X, Y]$?

- Construímos um grafo orientado $M(G)$, obtido a partir de G, da seguinte maneira:
  - Para cada aresta $xy \in E(G)$, com $x \in X$ e $y \in Y$, se $xy \in M$, então orientar xy de x para y; caso contrário, orientar de y para x.



Encontrando caminhos M-alternantes

Lema 11.7: Existe um caminho M-aumentante em $G[X, Y]$ se e somente se existir um caminho direcionado em $M(G)$, entre dois vértices M-expostos $x, y \in V(G)$, iniciado por $y \in Y$ e terminado por $x \in X$.

Demonstração:

Encontrando caminhos M-alternantes

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Lema 11.7: Existe um caminho M-aumentante em $G[X, Y]$ se e somente se existir um caminho direcionado em $M(G)$, entre dois vértices M-expostos $x, y \in V(G)$, iniciado por $y \in Y$ e terminado por $x \in X$.

Demonstração:

- ($\Longrightarrow$) Suponha que $G[X, Y]$ admite um caminho M-aumentante $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Então v_1 e v_k são vértices M-expostos pelo emparelhamento M de G.
- Denote $v_1 = y$ e $v_k = x$. Como G é bipartido, v_i e v_{i+1} pertencem a partes distintas, para $1 \leq i < k$.
- Como P é um caminho M-aumentante, k é par. Consequentemente, y e x pertencem a partes distintas da bipartição. Além disso, todos os vértices M-expostos de X possuem grau de saída 0. Logo, $y \in Y$ e $x \in X$.
- ($\Longleftarrow$) A prova da volta é direta. ■

Algoritmo

Entrada: Grafo bipartido $G = (V, E)$ com bipartição (X, Y).
Saída: Emparelhamento máximo M.

1 **Faça** $M = \emptyset$.
2 **Construir** o grafo orientado $M(G)$.
3 **while** existir caminho P em $M(G)$ de um vértice M-exposto $y \in Y$ para outro vértice M-exposto $x \in X$ **efetuar**
4 $\quad\quad M = M \triangle E(P)$
5 $\quad\quad$ **Construir** $M(G)$.
6 **Retornar** M

Algoritmo – Complexidade

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O algoritmo pode ser implementado em $O(nm)$.

- A procura dos caminhos M-aumentantes através do grafo direcionado $M(G)$ pode ser feita usando uma busca em profundidade.
- A construção de $M(G)$ e a procura do caminho M-aumentante P ambos requerem $O(m)$ passos.
- A computação da diferença simétrica pode ser realizada em tempo $O(|M| + |E(P)|) = O(n)$.
- Assim, cada iteração do algoritmo requer $O(m)$ passos. Como a cardinalidade máxima de um emparelhamento é $\lfloor n/2 \rfloor$, o número de iterações do algoritmo é $O(n)$. Logo a complexidade final é $O(nm)$.

Hopcroft e Karp(1973) melhoraram esse algoritmo obtendo um de complexidade $O(\sqrt{n}m)$.

Conjuntos independentes e coberturas

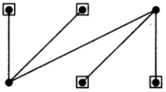
Conjuntos independentes

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Dado um grafo G, um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é um conjunto independente se quaisquer dois vértices de S são não adjacentes.

Conjuntos independentes

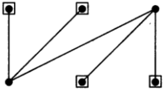
- Dado um grafo G, um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é um conjunto independente se quaisquer dois vértices de S são não adjacentes.
- O número de independência de G é o tamanho de um conjunto independente máximo de G e é denotado por $\alpha(G)$.



$\alpha(G) = 4$

Conjuntos independentes

- Dado um grafo G, um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é um conjunto independente se quaisquer dois vértices de S são não adjacentes.
- O número de independência de G é o tamanho de um conjunto independente máximo de G e é denotado por $\alpha(G)$.



$\alpha(G) = 4$

Note que nenhum vértice incide em duas arestas de um emparelhamento. Similarmente, nenhuma aresta incide em dois vértices de um conjunto independente.

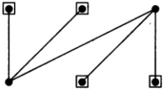
Esta observação produz um outro par de problemas duais.

Cobertura por arestas

- Uma cobertura por arestas de G é um conjunto L de arestas de G tal que todo vértice de G é incidente a alguma aresta de L.
- Dizemos que os vértices de G estão cobertos pelas arestas de L.

Cobertura por arestas

- Uma cobertura por arestas de G é um conjunto L de arestas de G tal que todo vértice de G é incidente a alguma aresta de L.
- Dizemos que os vértices de G estão cobertos pelas arestas de L.
- O tamanho de uma cobertura por arestas mínima é denotado pelo símbolo $\beta'(G)$.

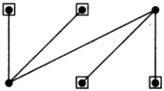


$$\beta'(G) = 4$$

Cobertura por arestas

Universidade
Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Uma cobertura por arestas de G é um conjunto L de arestas de G tal que todo vértice de G é incidente a alguma aresta de L.
- Dizemos que os vértices de G estão cobertos pelas arestas de L.
- O tamanho de uma cobertura por arestas mínima é denotado pelo símbolo $\beta'(G)$.



$$\beta'(G) = 4$$

- **Obs. 1:** Somente grafos sem vértices isolados possuem coberturas por arestas.
- **Obs. 2:** Um emparelhamento perfeito forma uma cobertura por arestas com $n/2$ arestas.

Parâmetros

Incidências e coberturas

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- $\alpha(G)$: conjunto independente máximo
- $\alpha'(G)$: emparelhamento máximo
- $\beta(G)$: cobertura por vértices mínima
- $\beta'(G)$: cobertura por arestas mínima

Parâmetros

Incidências e coberturas

- $\alpha(G)$: conjunto independente máximo
- $\alpha'(G)$: emparelhamento máximo
- $\beta(G)$: cobertura por vértices mínima
- $\beta'(G)$: cobertura por arestas mínima

Exemplo de relação entre α e β

- Considerando $n \geq 3$ e $1 \leq r \leq s$, temos:
  - $\alpha(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$, $\alpha(K_n) = 1$ e $\alpha(K_{r,s}) = s$.
  - $\beta(C_n) = \lceil n/2 \rceil$, $\beta(K_n) = n - 1$ e $\beta(K_{r,s}) = r$.

Parâmetros

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Incidências e coberturas

- $\alpha(G)$: conjunto independente máximo
- $\alpha'(G)$: emparelhamento máximo
- $\beta(G)$: cobertura por vértices mínima
- $\beta'(G)$: cobertura por arestas mínima

Exemplo de relação entre α e β

- Considerando $n \geq 3$ e $1 \leq r \leq s$, temos:
  - $\alpha(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$, $\alpha(K_n) = 1$ e $\alpha(K_{r,s}) = s$.
  - $\beta(C_n) = \lceil n/2 \rceil$, $\beta(K_n) = n - 1$ e $\beta(K_{r,s}) = r$.
  - Note que $\alpha(C_n) + \beta(C_n) = n$, $\alpha(K_n) + \beta(K_n) = n$ e $\alpha(K_{r,s}) + \beta(K_{r,s}) = r + s$.

Lema $\alpha + \beta$

Teorema [Gallai 1959]: Em um grafo G com n vértices, $S \subseteq V(G)$ é um conjunto independente se e somente se $\overline{S} = V(G) \backslash S$ é uma cobertura por vértices. Além disso, $\alpha(G) + \beta(G) = n$.

Demonstração:

- $(\Rightarrow)$ Se $S \subseteq V(G)$ é um conjunto independente, então toda aresta de G é incidente a pelo menos um vértice de $\overline{S}$.

Lema $\alpha + \beta$

Teorema [Gallai 1959]: Em um grafo G com n vértices, $S \subseteq V(G)$ é um conjunto independente se e somente se $\overline{S} = V(G) \backslash S$ é uma cobertura por vértices. Além disso, $\alpha(G) + \beta(G) = n$.

Demonstração:

- ($\Rightarrow$) Se $S \subseteq V(G)$ é um conjunto independente, então toda aresta de G é incidente a pelo menos um vértice de $\overline{S}$. Portanto, $\overline{S}$ é uma cobertura por vértices.

Lema $\alpha + \beta$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema [Gallai 1959]: Em um grafo G com n vértices, $S \subseteq V(G)$ é um conjunto independente se e somente se $\overline{S} = V(G) \setminus S$ é uma cobertura por vértices. Além disso, $\alpha(G) + \beta(G) = n$.

Demonstração:

- ($\Rightarrow$) Se $S \subseteq V(G)$ é um conjunto independente, então toda aresta de G é incidente a pelo menos um vértice de $\overline{S}$. Portanto, $\overline{S}$ é uma cobertura por vértices.
- ($\Leftarrow$) Se $\overline{S}$ cobre todas as arestas de G, então não existem arestas ligando dois vértices de S. Logo, S é um conjunto independente.

Lema $\alpha + \beta$

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema [Gallai 1959]: Em um grafo G com n vértices, $S \subseteq V(G)$ é um conjunto independente se e somente se $\overline{S} = V(G) \backslash S$ é uma cobertura por vértices. Além disso, $\alpha(G) + \beta(G) = n$.

Demonstração:

- $(\Rightarrow)$ Se $S \subseteq V(G)$ é um conjunto independente, então toda aresta de G é incidente a pelo menos um vértice de $\overline{S}$. Portanto, $\overline{S}$ é uma cobertura por vértices.
- $(\Leftarrow)$ Se $\overline{S}$ cobre todas as arestas de G, então não existem arestas ligando dois vértices de S. Logo, S é um conjunto independente.
- Portanto, todo conjunto independente máximo é o complemento de uma cobertura por vértices mínima e $\alpha(G) + \beta(G) = n$. $\square$

Parâmetros

Incidências e coberturas

- $\alpha(G)$: conjunto independente máximo
- $\alpha'(G)$: emparelhamento máximo
- $\beta(G)$: cobertura por vértices mínima
- $\beta'(G)$: cobertura por arestas mínima

Parâmetros

Incidências e coberturas

- $\alpha(G)$: conjunto independente máximo
- $\alpha'(G)$: emparelhamento máximo
- $\beta(G)$: cobertura por vértices mínima
- $\beta'(G)$: cobertura por arestas mínima

Exemplo de relação entre α' e β'

- Considerando $n \geq 3$ e $1 \leq r \leq s$, temos:
  - $\alpha'(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$, $\alpha'(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ e $\alpha(K_{r,s}) = r$.
  - $\beta'(C_n) = \lceil n/2 \rceil$, $\beta'(K_n) = \lceil n/2 \rceil$ e $\beta(K_{r,s}) = s$.

Parâmetros

Incidências e coberturas

- $\alpha(G)$: conjunto independente máximo
- $\alpha'(G)$: emparelhamento máximo
- $\beta(G)$: cobertura por vértices mínima
- $\beta'(G)$: cobertura por arestas mínima

Exemplo de relação entre α' e β'

- Considerando $n \geq 3$ e $1 \leq r \leq s$, temos:
  - $\alpha'(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$, $\alpha'(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ e $\alpha(K_{r,s}) = r$.
  - $\beta'(C_n) = \lceil n/2 \rceil$, $\beta'(K_n) = \lceil n/2 \rceil$ e $\beta(K_{r,s}) = s$.
  - Note que $\alpha'(C_n) + \beta'(C_n) = n$, $\alpha'(K_n) + \beta'(K_n) = n$ e $\alpha'(K_{r,s}) + \beta'(K_{r,s}) = r + s$.

Teorema $\alpha' + \beta'$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema [Gallai 1959]: Se G é um grafo sem vértices isolados, então $\alpha'(G) + \beta'(G) = |V(G)|$.

Tibor Gallai

Demonstração:

Teorema $\alpha' + \beta'$

Teorema [Gallai 1959]: Se G é um grafo sem vértices isolados, então $\alpha'(G) + \beta'(G) = |V(G)|$.


Tibor Gallai

Demonstração:

- Seja G um grafo sem vértices isolados. Defina $n = |V(G)|$. Vamos mostrar primeiro que $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq n$.

Teorema $\alpha' + \beta'$

Teorema [Gallai 1959]: Se G é um grafo sem vértices isolados, então $\alpha'(G) + \beta'(G) = |V(G)|$.

Tibor Gallai

Demonstração:

- Seja G um grafo sem vértices isolados. Defina $n = |V(G)|$. Vamos mostrar primeiro que $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq n$.
- Defina $k = \alpha'(G)$. Então, um emparelhamento máximo de G consiste em k arestas que cobrem $2k$ vértices.
- Os $n - 2k$ vértices restantes de G podem ser cobertos por $n - 2k$ arestas.

Teorema $\alpha' + \beta'$

Teorema [Gallai 1959]: Se G é um grafo sem vértices isolados, então $\alpha'(G) + \beta'(G) = |V(G)|$.

Tibor Gallai

Demonstração:

- Seja G um grafo sem vértices isolados. Defina $n = |V(G)|$. Vamos mostrar primeiro que $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq n$.
- Defina $k = \alpha'(G)$. Então, um emparelhamento máximo de G consiste em k arestas que cobrem $2k$ vértices.
- Os $n - 2k$ vértices restantes de G podem ser cobertos por $n - 2k$ arestas.
- Assim, $\beta'(G) \leq k + (n - 2k) = n - k$. Portanto,

$$\alpha'(G) + \beta'(G) \leq k + (n - k) = n.$$

- Resta mostrar que $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq n$

Continuação da demonstração

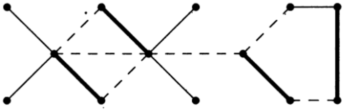
- Seja E uma cobertura por arestas mínima de G.
  Considere o subgrafo $G[E]$, induzido por E.
- **Alegação:** $G[E]$ não contém nenhuma trilha de comprimento 3.
  - **Prova:** se $G[E]$ contém uma trilha de comprimento 3 e e é a aresta do meio desta trilha, então $E - e$ também cobre todos os vértices de G, o que é impossível. Portanto, $G[E]$ não contém ciclos nem caminhos de comprimento maior ou igual a 3, implicando que toda componente de $G[E]$ é uma estrela.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja E uma cobertura por arestas mínima de G.
  Considere o subgrafo $G[E]$, induzido por E.
- **Alegação:** $G[E]$ não contém nenhuma trilha de comprimento 3.
  - **Prova:** se $G[E]$ contém uma trilha de comprimento 3 e e é a aresta do meio desta trilha, então $E - e$ também cobre todos os vértices de G, o que é impossível. Portanto, $G[E]$ não contém ciclos nem caminhos de comprimento maior ou igual a 3, implicando que toda componente de $G[E]$ é uma estrela.
- $G[E]$ é uma floresta de estrelas. Se existirem k componentes em $G[E]$, então $|E| = n - k$. Reescrevendo, temos $k = n - |E|$.
- Escolhendo uma aresta de cada componente forma um emparelhamento de tamanho k. Logo, $\alpha'(G) \geq k = n - |E| = n - \beta'(G)$.
- Portanto, $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq n$. $\square$

Exemplo



Grafo com um emparelhamento de tamanho 4 em negrito. Este emparelhamento juntamente com as arestas sólidas forma uma cobertura de arestas de tamanho 9. As arestas tracejadas não estão na cobertura.

A cobertura de arestas induz quatro estrelas. Para cada uma delas, extraímos uma aresta em negrito para formar o emparelhamento.

Parâmetros

Incidências e coberturas

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- $\alpha(G)$: conjunto independente máximo
- $\alpha'(G)$: emparelhamento máximo
- $\beta(G)$: cobertura por vértices mínima
- $\beta'(G)$: cobertura por arestas mínima

- Vimos que $\beta(G) \geq \alpha'(G)$ para todo grafo simples G.
  - $\beta(G) = \alpha'(G)$ para G bipartido.

Parâmetros

Incidências e coberturas

- $\alpha(G)$: conjunto independente máximo
- $\alpha'(G)$: emparelhamento máximo
- $\beta(G)$: cobertura por vértices mínima
- $\beta'(G)$: cobertura por arestas mínima

- Vimos que $\beta(G) \geq \alpha'(G)$ para todo grafo simples G.
  - $\beta(G) = \alpha'(G)$ para G bipartido.

- Vamos provar que $\beta'(G) = \alpha(G)$ para G bipartido sem vértices isolados.

- **Obs.:** Note que nenhuma aresta pode cobrir dois vértices de um conjunto independente. Portanto, $\beta'(G) \geq \alpha(G)$ para todo G sem vértices isolados.

Teorema – Bipartidos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema [König 1916]: Se G é um grafo bipartido sem vértices isolados, então $\alpha(G) = \beta'(G)$.

Demonstração:

Teorema – Bipartidos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema [König 1916]: Se G é um grafo bipartido sem vértices isolados, então $\alpha(G) = \beta'(G)$.

Demonstração:

- Seja G um grafo bipartido sem vértices isolados.
- Vimos que $\alpha(G) + \beta(G) = n$ e $\alpha'(G) + \beta'(G) = n$. Isso implica que:

$$\alpha(G) + \beta(G) = \alpha'(G) + \beta'(G).$$

- Além disso, o Teorema de König-Egerváry diz que $\alpha'(G) = \beta(G)$. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha(G) + \beta(G) &= \alpha'(G) + \beta'(G) \\ \alpha(G) + \beta(G) &= \beta(G) + \beta'(G) \\ \alpha(G) &= \beta'(G) \end{aligned}$$

$\square$

Exercícios

Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

(1) Prove que todo grafo hipercubo Q_n tem um emparelhamento perfeito, para $n \geq 2$.

(2) Mostre que uma árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito.

(3) Duas pessoas jogam um jogo em um grafo G selecionando alternadamente vértices distintos $v_0, v_1, v_2, \ldots$ tal que, para $i > 0$, v_i é adjacente a v_{i-1}. O último jogador capaz de selecionar um vértice ganha o jogo. Prove que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora se e somente se G não tem emparelhamento perfeito.

(4) Para cada $k > 1$, encontre um exemplo de grafo simples k-regular que não tem emparelhamento perfeito.

FIM