Aula 15 — Coloração de Vértices

Teoria dos Grafos — QXD0152

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

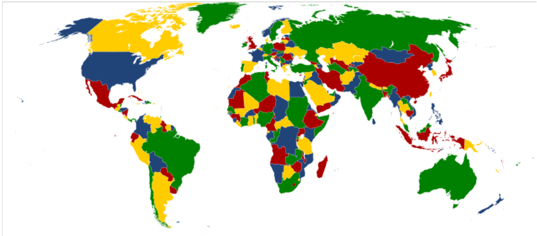
Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

1º semestre/2021

Origem da coloração de grafos

- Francis Guthrie (1852): Qualquer mapa político pode ser colorido com no máximo quatro cores?



Francis Guthrie

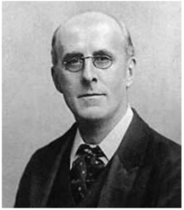
Francis Guthrie

Origem da coloração de grafos

- 1852 - Francis Guthrie propõe o problema das 4 cores.
- 1879 - Kempe apresenta uma suposta "solução".
- 1880 - Tait, na tentativa de resolver o problema, inicia o estudo da coloração de arestas.
- 1890 - Heawood apresenta uma falha na demonstração de Kempe e prova o Teorema das 5 cores.

Francis Guthrie

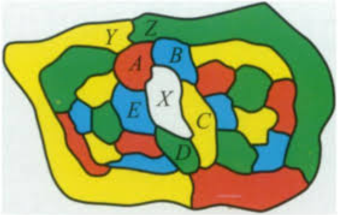
P. J. Heawood

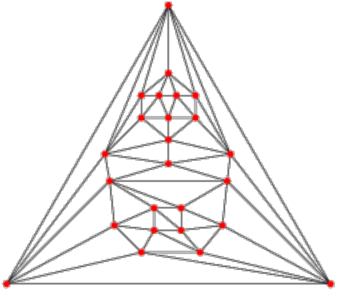


A. B. Kempe

P. G. Tait

Contraexemplo de Heawood





Origem da coloração de grafos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- 1977 - Appel e Haken resolvem o problema: **Todo mapa no plano pode ser colorido com no máximo** 4 **cores**.
- A demonstração gerou um debate na matemática por envolver uso de computadores.
- Os autores definiram 1936 configurações que deveriam ser verificadas por computador, usando aproximadamente 1200 horas de computação.

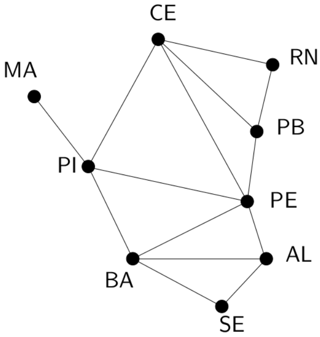
K. Appel e W. Haken

Mapas e Grafos

- Um mapa no plano determina o desenho de um grafo G no plano.
- O grafo dual de G é um grafo planar.

Mapas e Grafos

- Um mapa no plano determina o desenho de um grafo G no plano.
- O grafo dual de G é um grafo planar.

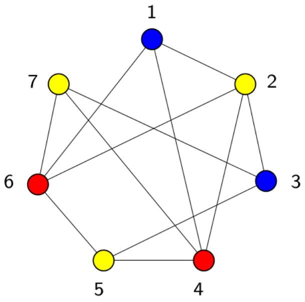


Aplicações de Coloração de Vértices

Agendamento de provas na universidade

- Queremos agendar os exames de uma universidade de modo que duas disciplinas com estudantes em comum não tenham seus exames agendados para o mesmo horário?
- Qual o número mínimo de horários necessários para agendar os exames?

	1	2	3	4	5	6	7
1	—	×	—	×	—	×	—
2		—	×	×	—	×	—
3			—	—	×	—	×
4				—	×	—	×
5					—	×	—
6						—	×
7							—



Alocação de registradores

- Sete variáveis ocorrem em um laço num programa de computador. Quantos diferentes registradores são necessários para armazenar essas variáveis durante a execução?
- O número cromático representa o número mínimo de registradores necessários para evitar o problema de **overswapping**.

r: 1 a 6

u: passo 2

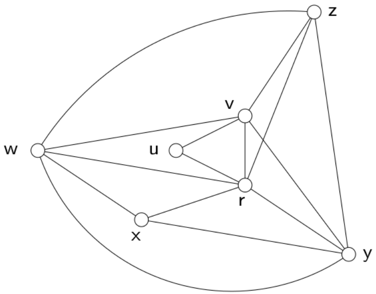
v: de 2 a 4

w: 1, 3 e 5

x: 1 e 6

y: 3 a 6

z: 4 e 5



Alocação de registradores

- Sete variáveis ocorrem em um laço num programa de computador. Quantos diferentes registradores são necessários para armazenar essas variáveis durante a execução?
- O número cromático representa o número mínimo de registradores necessários para evitar o problema de **overswapping**.

r: 1 a 6

u: passo 2

v: de 2 a 4

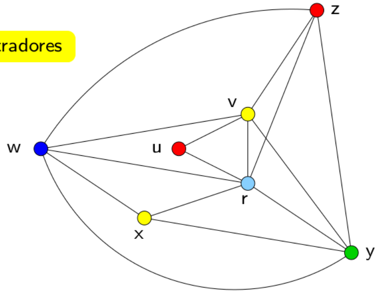
w: 1, 3 e 5

x: 1 e 6

y: 3 a 6

z: 4 e 5

5 registradores



Sudoku

	6		1		4		5	
		8	3		5	6		
								1
8			4		7			6
		6				3		
7			9		1			4
5								2
		7	2		6	9		
	4		5		8		7	

→

9	6	3	1	7	4	2	5	8
1	7	8	3	2	5	6	4	9
2	5	4	6	8	9	7	3	1
8	2	1	4	3	7	5	9	6
4	9	6	8	5	2	3	1	7
7	3	5	9	6	1	8	2	4
5	8	9	7	1	3	4	6	2
3	1	7	2	4	6	9	8	5
6	4	2	5	9	8	1	7	3

- O sudoku é uma variação da coloração de vértices.

Sudoku

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

	6		1		4		5	
		8	3		5	6		
								1
8			4		7			6
		6				3		
7			9		1			4
5								2
		7	2		6	9		
	4		5		8		7	

$\longrightarrow$

9	6	3	1	7	4	2	5	8
1	7	8	3	2	5	6	4	9
2	5	4	6	8	9	7	3	1
8	2	1	4	3	7	5	9	6
4	9	6	8	5	2	3	1	7
7	3	5	9	6	1	8	2	4
5	8	9	7	1	3	4	6	2
3	1	7	2	4	6	9	8	5
6	4	2	5	9	8	1	7	3

- O sudoku é uma variação da coloração de vértices.
- Cada célula representa um vértice e existe uma aresta entre dois vértices se eles estão em uma mesma linha, mesma coluna ou no mesmo bloco.

Coloração de vértices – Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

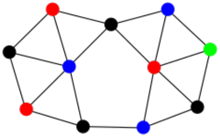
- Seja S um conjunto de cores. Uma k-coloração de vértices de um grafo G é uma função $f: V(G) \to S$, tal que $|S| = k$.
- Dizemos que uma coloração de vértices é própria se quaisquer dois vértices adjacentes recebem cores distintas.

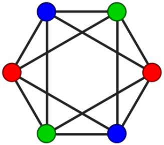
Coloração de vértices – Definição

- Seja S um conjunto de cores. Uma k-coloração de vértices de um grafo G é uma função $f: V(G) \to S$, tal que $|S| = k$.

- Dizemos que uma coloração de vértices é própria se quaisquer dois vértices adjacentes recebem cores distintas.

- Um grafo é k-colorível se ele tem uma k-coloração própria de vértices.



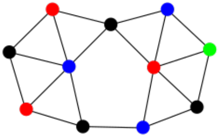


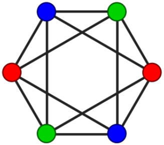
Coloração de vértices – Definição

- Seja S um conjunto de cores. Uma k-coloração de vértices de um grafo G é uma função $f: V(G) \to S$, tal que $|S| = k$.

- Dizemos que uma coloração de vértices é própria se quaisquer dois vértices adjacentes recebem cores distintas.

- Um grafo é k-colorível se ele tem uma k-coloração própria de vértices.





Observação:

- Em coloração de vértices, não consideramos grafos com laços nem arestas múltiplas. Apenas grafos simples.

Teorema das Cinco Cores

Teorema 15.3 [Heawood, 1890]: Se G é planar, então G possui uma coloração de vértices com 5 cores.

Demonstração:

Teorema das Cinco Cores

Teorema 15.3 [Heawood, 1890]: Se G é planar, então G possui uma coloração de vértices com 5 cores.

Demonstração:

- Provamos por indução em n, onde $n = |V(G)|$.

Teorema das Cinco Cores

Teorema 15.3 [Heawood, 1890]: Se G é planar, então G possui uma coloração de vértices com 5 cores.

Demonstração:

- Provamos por indução em n, onde $n = |V(G)|$.
- **Caso Base:** $n \leq 5$. Todos os grafos neste caso são 5-coloríveis.

Teorema das Cinco Cores

Teorema 15.3 [Heawood, 1890]: Se G é planar, então G possui uma coloração de vértices com 5 cores.

Demonstração:

- Provamos por indução em n, onde $n = |V(G)|$.
- **Caso Base:** $n \leq 5$. Todos os grafos neste caso são 5-coloríveis.
- **Hipótese de indução:** Suponha que todos os grafos planares com até $n-1$ vértices são 5-coloríveis.

Teorema das Cinco Cores

Teorema 15.3 [Heawood, 1890]: Se G é planar, então G possui uma coloração de vértices com 5 cores.

Demonstração:

- Provamos por indução em n, onde $n = |V(G)|$.
- **Caso Base:** $n \leq 5$. Todos os grafos neste caso são 5-coloríveis.
- **Hipótese de indução:** Suponha que todos os grafos planares com até $n - 1$ vértices são 5-coloríveis.
- **Passo da indução:** Seja G um grafo planar com $n > 5$ vértices.

Teorema das Cinco Cores

Teorema 15.3 [Heawood, 1890]: Se G é planar, então G possui uma coloração de vértices com 5 cores.

Demonstração:

- Provamos por indução em n, onde $n = |V(G)|$.
- **Caso Base:** $n \leq 5$. Todos os grafos neste caso são 5-coloríveis.
- **Hipótese de indução:** Suponha que todos os grafos planares com até $n-1$ vértices são 5-coloríveis.
- **Passo da indução:** Seja G um grafo planar com $n > 5$ vértices.
- Da aula de planaridade, sabemos que G tem um vértice v de grau no máximo 5. Pela hipótese de indução, $G - v$ é 5-colorível. Seja $f : V(G - v) \to \{0, \dots, 5\}$ uma 5-coloração de $G - v$.

Continuação da Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

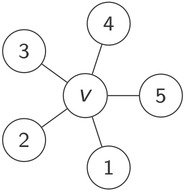
- Se todos os vértices em $N_G(v)$ forem coloridos com no máximo 4 cores, então a coloração parcial de $G - v$ pode ser estendida a fim de se obter uma 5-coloração de G, e o resultado segue.

Continuação da Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Se todos os vértices em $N_G(v)$ forem coloridos com no máximo 4 cores, então a coloração parcial de $G - v$ pode ser estendida a fim de se obter uma 5-coloração de G, e o resultado segue.

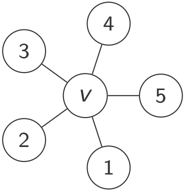
- Caso contrário, $d_G(v) = 5$ e a coloração f atribui cores distintas aos cinco vizinhos de v.



Continuação da Demonstração

- Se todos os vértices em $N_G(v)$ forem coloridos com no máximo 4 cores, então a coloração parcial de $G - v$ pode ser estendida a fim de se obter uma 5-coloração de G, e o resultado segue.

- Caso contrário, $d_G(v) = 5$ e a coloração f atribui cores distintas aos cinco vizinhos de v.



- Considere G como um grafo plano e sejam v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 os vizinhos de v em sentido horário ao redor de v. Nomeie as cores de modo que $f(v_i) = i$.

Continuação da Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Vamos usar a notação $G_{i,j}$ para denotar o subgrafo de $G - v$ induzido pelos vértices de cores i e j.
  - Note que, se trocarmos duas cores, uma pela outra, em uma componente qualquer de $G_{i,j}$, nós produzimos outra 5-coloração de $G - v$.

Temos dois casos a considerar.

Continuação da Demonstração

- Vamos usar a notação $G_{i,j}$ para denotar o subgrafo de $G - v$ induzido pelos vértices de cores i e j.
    - Note que, se trocarmos duas cores, uma pela outra, em uma componente qualquer de $G_{i,j}$, nós produzimos outra 5-coloração de $G - v$.

  Temos dois casos a considerar.

- **Caso 1:** Suponha que existam i e j, com $1 \leq i < j \leq 5$, tal que a componente de $G_{i,j}$ contendo v_i não contém v_j.

Continuação da Demonstração

- Vamos usar a notação $G_{i,j}$ para denotar o subgrafo de $G - v$ induzido pelos vértices de cores i e j.
  - Note que, se trocarmos duas cores, uma pela outra, em uma componente qualquer de $G_{i,j}$, nós produzimos outra 5-coloração de $G - v$.

  Temos dois casos a considerar.

- **Caso 1:** Suponha que existam i e j, com $1 \leq i < j \leq 5$, tal que a componente de $G_{i,j}$ contendo v_i não contém v_j.
  - Neste caso, podemos trocar as cores nesta componente a fim de remover a cor i do vértice v_i e, portanto, da vizinhança de v. Assim, podemos agora atribuir a cor i a v, produzindo uma 5-coloração própria de G.

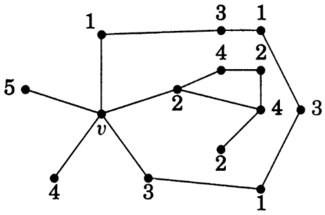
Continuação da Demonstração

- **Caso 2:** Suponha que, para cada escolha de i e j, a componente de $G_{i,j}$ que contém v_i também contém v_j.

Continuação da Demonstração

- **Caso 2:** Suponha que, para cada escolha de i e j, a componente de $G_{i,j}$ que contém v_i também contém v_j.

- Seja $P_{i,j}$ o caminho em $G_{i,j}$ de v_i até v_j, ilustrado abaixo para $(i, j) = (1, 3)$.

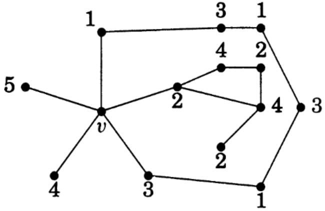


Continuação da Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Caso 2:** Suponha que, para cada escolha de i e j, a componente de $G_{i,j}$ que contém v_i também contém v_j.

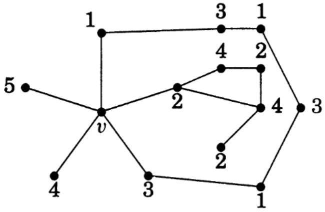
- Seja $P_{i,j}$ o caminho em $G_{i,j}$ de v_i até v_j, ilustrado abaixo para $(i,j) = (1,3)$.



- Considere o ciclo C formado por $P_{1,3} + v$.
  - Note que este ciclo separa o vértice v_2 do vértice v_4.

Continuação da Demonstração

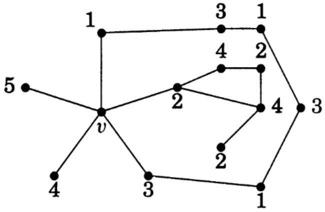
- Considere o caminho $P_{2,4}$. Pelo Teorema da Curva de Jordan, o caminho $P_{2,4}$ obrigatoriamente cruza o ciclo C.



Continuação da Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

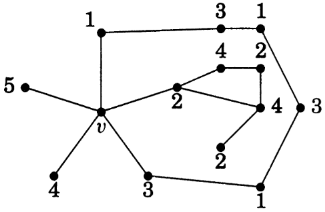
- Considere o caminho $P_{2,4}$. Pelo Teorema da Curva de Jordan, o caminho $P_{2,4}$ obrigatoriamente cruza o ciclo C.



- Como G é planar, caminhos só podem cruzar em vértices. Os vértices de $P_{1,3}$ todos têm cores 1 ou 3, e os vértices de $P_{2,4}$ todos têm cores 2 ou 4, assim, eles não possuem vértices em comum. Contradição.

Continuação da Demonstração

- Considere o caminho $P_{2,4}$. Pelo Teorema da Curva de Jordan, o caminho $P_{2,4}$ obrigatoriamente cruza o ciclo C.



- Como G é planar, caminhos só podem cruzar em vértices. Os vértices de $P_{1,3}$ todos têm cores 1 ou 3, e os vértices de $P_{2,4}$ todos têm cores 2 ou 4, assim, eles não possuem vértices em comum. Contradição.

- Logo, este Caso 2 não acontece.

- De tudo isto, concluímos que G é 5-colorível. ∎

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Número cromático de um grafo

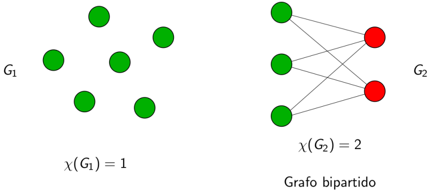
Número cromático de um grafo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Número cromático** de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro positivo k tal que G possui uma k-coloração própria de vértices. Se $\chi(G) = k$, então G é dito k-cromático.

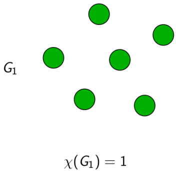
Número cromático de um grafo

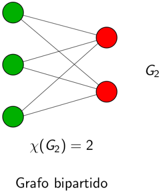
- **Número cromático** de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro positivo k tal que G possui uma k-coloração própria de vértices. Se $\chi(G) = k$, então G é dito k-cromático.



Número cromático de um grafo

- **Número cromático** de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro positivo k tal que G possui uma k-coloração própria de vértices. Se $\chi(G) = k$, então G é dito k-cromático.

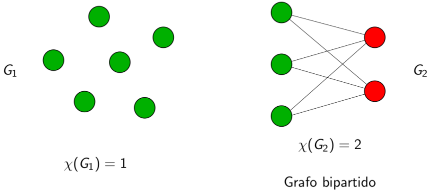




- **Proposição 15.5:** $\chi(G) = 1$ se e somente se é G vazio.

Número cromático de um grafo

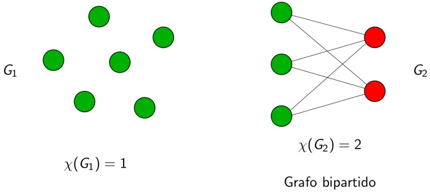
- **Número cromático** de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro positivo k tal que G possui uma k-coloração própria de vértices. Se $\chi(G) = k$, então G é dito k-cromático.



- **Proposição 15.5:** $\chi(G) = 1$ se e somente se é G vazio.
- **Proposição 15.6:** $\chi(G) = 2$ se e somente se G é bipartido e não vazio.

Número cromático de um grafo

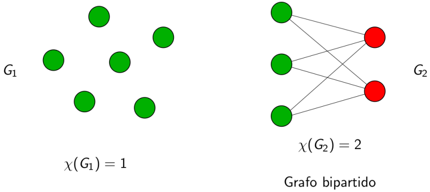
- **Número cromático** de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro positivo k tal que G possui uma k-coloração própria de vértices. Se $\chi(G) = k$, então G é dito k-cromático.



- **Proposição 15.5:** $\chi(G) = 1$ se e somente se é G vazio.
- **Proposição 15.6:** $\chi(G) = 2$ se e somente se G é bipartido e não vazio.
- **Proposição 15.7:** $1 \leq \chi(G) \leq n$.

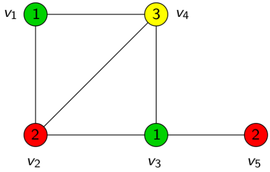
Número cromático de um grafo

- **Número cromático** de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro positivo k tal que G possui uma k-coloração própria de vértices. Se $\chi(G) = k$, então G é dito k-cromático.



- **Proposição 15.5:** $\chi(G) = 1$ se e somente se é G vazio.
- **Proposição 15.6:** $\chi(G) = 2$ se e somente se G é bipartido e não vazio.
- **Proposição 15.7:** $1 \leq \chi(G) \leq n$.
- **Proposição 15.8:** Se $H \subseteq G$, então $\chi(H) \leq \chi(G)$.

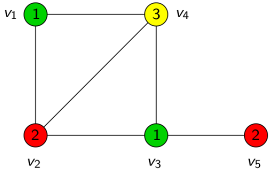
Número cromático de um grafo



Grafo H

- $\chi(H) \leq 3$.

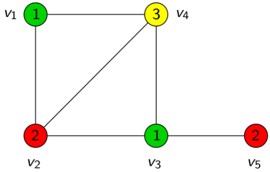
Número cromático de um grafo



Grafo H

- $\chi(H) \leq 3$.
- **É possível colorir H com menos que três cores?**

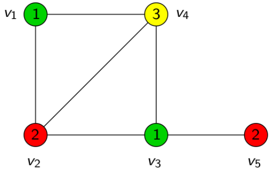
Número cromático de um grafo



Grafo H

- $\chi(H) \leq 3$.
- **É possível colorir H com menos que três cores?**
- Como H contém um triângulo, temos que $\chi(H) \geq 3$. Logo, $\chi(H) = 3$.
- Existe algoritmo polinomial para determinar se um grafo tem ciclo ímpar?

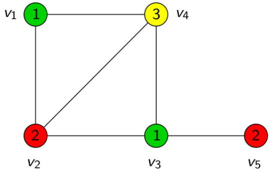
Número cromático de um grafo



Grafo H

- $\chi(H) \leq 3$.
- **É possível colorir H com menos que três cores?**
- Como H contém um triângulo, temos que $\chi(H) \geq 3$. Logo, $\chi(H) = 3$.
- Existe algoritmo polinomial para determinar se um grafo tem ciclo ímpar?
  - Resposta: Sim.

Número cromático de um grafo

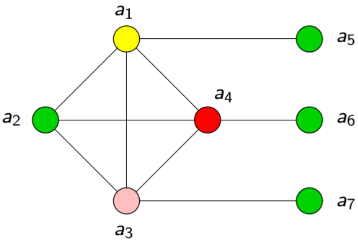


Grafo H

- $\chi(H) \leq 3$.
- **É possível colorir H com menos que três cores?**
- Como H contém um triângulo, temos que $\chi(H) \geq 3$. Logo, $\chi(H) = 3$.
- Existe algoritmo polinomial para determinar se um grafo tem ciclo ímpar?
    - Resposta: Sim.
- **Má notícia:** Até hoje, não se conhece nenhum **algoritmo polinomial** para checar se um grafo arbitrário G possui $\chi(G) = k$, para $k \geq 3$.

Clique Máxima

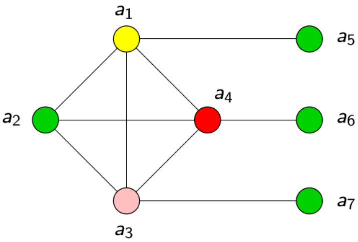
- Uma clique em um grafo G é um subconjunto de vértices dois-a-dois adjacentes.
  - $\omega(G)$: tamanho da maior clique de G.



$\chi(G) \leq 4$

Clique Máxima

- Uma clique em um grafo G é um subconjunto de vértices dois-a-dois adjacentes.
  - $\omega(G)$: tamanho da maior clique de G.



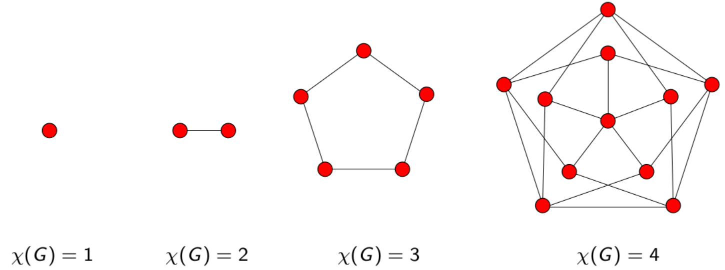
$\chi(G) \leq 4$

Proposição 15.9: Para todo grafo G, $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Grafos de Mycielski

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Má notícia: Existe um grafo G sem triângulos e com número cromático $\chi(G) = k$, para todo $k \geq 1$. [Mycielski, 1955]

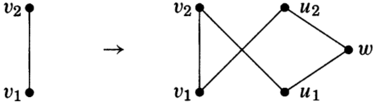


Construção de Mycielski

A partir de um grafo simples G, a construção de Mycielski produz um grafo simples G' contendo G.

- **Definição:** Começando com G tendo $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, adicione vértices $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ e um vértice a mais w. Adicione arestas a fim de fazer u_i adjacente a todos os vértices de $N_G(v_i)$, e finalmente seja $N(w) = U$.

- Exemplo: Começando com o K_2, a primeira iteração da construção de Mycielski produz o C_5.



Construção de Mycielski

Teorema: A partir de um grafo G k-cromático e livre de triângulos, a construção de Mycielski produz um grafo $(k+1)$-cromático livre de triângulos G'.

Demonstração incompleta:

Construção de Mycielski

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: A partir de um grafo G k-cromático e livre de triângulos, a construção de Mycielski produz um grafo $(k+1)$-cromático livre de triângulos G'.

Demonstração incompleta:

- Seja $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e seja G' o grafo produzido a partir de G pela construção de Mycielski. Seja $u_1, \ldots, u_n$ as cópias de $v_1, \ldots, v_n$ com w sendo o vértice adicional. Seja $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$.

Construção de Mycielski

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: A partir de um grafo G k-cromático e livre de triângulos, a construção de Mycielski produz um grafo $(k+1)$-cromático livre de triângulos G'.

Demonstração incompleta:

- Seja $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e seja G' o grafo produzido a partir de G pela construção de Mycielski. Seja $u_1, \ldots, u_n$ as cópias de $v_1, \ldots, v_n$ com w sendo o vértice adicional. Seja $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$.

- Primeiro, provamos que G' é livre de triângulos. Pela construção, U é um conjunto independente em G'. Logo, os outros vértices de qualquer triângulo contendo u_i pertencem a $V(G)$ e são vizinhos de v_i. Porém, isso completaria um triâgulo em G, o que não existe. Logo, concluímos que G' é livre de triângulos.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- A seguir, provamos que $\chi(G') \leq \chi(G) + 1 = k + 1$. Para isso, mostramos uma k-coloração própria de G pode ser estendida para uma $(k+1)$-coloração própria de G'.

Continuação da demonstração

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- A seguir, provamos que $\chi(G') \leq \chi(G) + 1 = k + 1$. Para isso, mostramos uma k-coloração própria de G pode ser estendida para uma $(k+1)$-coloração própria de G'.

- Uma k-coloração própria f de G estende para uma $(k+1)$-coloração própria de G' definindo $f(u_i) = f(v_i)$ e $f(w) = k + 1$; portanto $\chi(G') \leq k + 1 = \chi(G) + 1$, ou seja, $\chi(G') \leq \chi(G) + 1$.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- A seguir, provamos que $\chi(G') \leq \chi(G) + 1 = k + 1$. Para isso, mostramos uma k-coloração própria de G pode ser estendida para uma $(k+1)$-coloração própria de G'.

- Uma k-coloração própria f de G estende para uma $(k+1)$-coloração própria de G' definindo $f(u_i) = f(v_i)$ e $f(w) = k + 1$; portanto $\chi(G') \leq k + 1 = \chi(G) + 1$, ou seja, $\chi(G') \leq \chi(G) + 1$.

- A fim de terminar a demonstração, basta mostrar a igualdade $\chi(G') = \chi(G) + 1$.
  - Para isso, uma forma é mostrar que $\chi(G) < \chi(G')$. A fim de obter isso, basta considerar qualquer coloração própria de G' e obter a partir dela uma coloração própria de G com menos cores. (Exercício para casa).

Coloração de vértices e conjuntos independentes

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Obs. 1:** Toda classe de cor em uma coloração própria de vértices é um conjunto independente.
  - Uma k-coloração particiona $V(G)$ em k classes de cor. O número cromático é o menor número de conjuntos independentes nos quais $V(G)$ pode ser particionado.

Coloração de vértices e conjuntos independentes

- **Obs. 1:** Toda classe de cor em uma coloração própria de vértices é um conjunto independente.
    - Uma k-coloração particiona $V(G)$ em k classes de cor. O número cromático é o menor número de conjuntos independentes nos quais $V(G)$ pode ser particionado.

- **Obs. 2:** O número de independência e o tamanho da clique máxima são parâmetros complementares:

> **Proposição 15.4:** $\alpha(G) = k$ se e somente se $\omega(\overline{G}) = k$.

Outro limitante inferior para $\chi(G)$

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema 15.8: Se G é um grafo com n vértices, então $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

Demonstração:

Outro limitante inferior para $\chi(G)$

Teorema 15.8: Se G é um grafo com n vértices, então $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

Demonstração:

- Suponha $\chi(G) = k$.

Outro limitante inferior para $\chi(G)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 15.8: Se G é um grafo com n vértices, então $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

Demonstração:

- Suponha $\chi(G) = k$.
- Logo, $V(G)$ pode ser particionado em classes de cores $V_1, V_2, \ldots, V_k$.

Outro limitante inferior para $\chi(G)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 15.8: Se G é um grafo com n vértices, então $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

Demonstração:

- Suponha $\chi(G) = k$.
- Logo, $V(G)$ pode ser particionado em classes de cores $V_1, V_2, \ldots, V_k$.
- Sabemos que:

$$\begin{aligned} n = |V(G)| = |V_1| + |V_2| + \ldots + |V_k| \leq \\ \leq \alpha(G) + \alpha(G) + \ldots + \alpha(G) = k \cdot \alpha(G). \end{aligned}$$

Outro limitante inferior para $\chi(G)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 15.8: Se G é um grafo com n vértices, então $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

Demonstração:

- Suponha $\chi(G) = k$.
- Logo, $V(G)$ pode ser particionado em classes de cores $V_1, V_2, \ldots, V_k$.
- Sabemos que:

$$
\begin{aligned}
n = |V(G)| = |V_1| + |V_2| + \ldots + |V_k| \leq \\
\leq \alpha(G) + \alpha(G) + \ldots + \alpha(G) = k \cdot \alpha(G).
\end{aligned}
$$

Isso implica:

$$
n \leq k \cdot \alpha(G) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{n}{\alpha(G)} \leq k = \chi(G). \blacksquare
$$

Limitantes superiores para $\chi(G)$

Algoritmo guloso para coloração de vértices

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

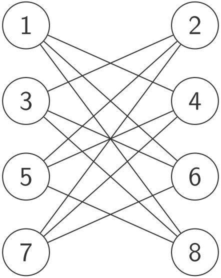
Greedy Coloring:

- Dados os vértices de um grafo G em certa ordem $\mathcal{O} = v_1, \ldots, v_n$, uma coloração gulosa com relação à ordem $\mathcal{O}$ é obtida colorindo os vértices na ordem $v_1, \ldots, v_n$, atribuindo a v_i a menor cor ainda não usada nos seus vizinhos que aparecem antes dele na ordem.

Algoritmo guloso para coloração de vértices

Greedy Coloring:

- Dados os vértices de um grafo G em certa ordem $\mathcal{O} = v_1, \ldots, v_n$, uma coloração gulosa com relação à ordem $\mathcal{O}$ é obtida colorindo os vértices na ordem $v_1, \ldots, v_n$, atribuindo a v_i a menor cor ainda não usada nos seus vizinhos que aparecem antes dele na ordem.



Limitante superior para $\chi(G)$

Teorema 15.9: Para todo grafo G, $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.

Demonstração:

Limitante superior para $\chi(G)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 15.9: Para todo grafo G, $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.

Demonstração:

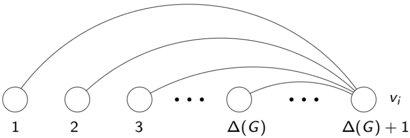
- Suponha que os vértices de G sejam listados na ordem $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e que o algoritmo guloso é aplicado.

Limitante superior para $\chi(G)$

Teorema 15.9: Para todo grafo G, $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.

Demonstração:

- Suponha que os vértices de G sejam listados na ordem $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e que o algoritmo guloso é aplicado.



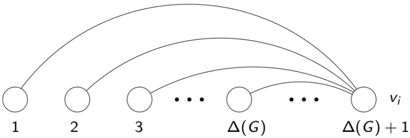
Limitante superior para $\chi(G)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 15.9: Para todo grafo G, $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.

Demonstração:

- Suponha que os vértices de G sejam listados na ordem $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e que o algoritmo guloso é aplicado.



- Na i-ésima iteração do laço, ao colorir o vértice v_i, no máximo $\Delta(G)$ cores terão sido utilizadas para colorir seus vizinhos. Se este for o caso, então escolhemos uma cor adicional para colorir v_i. Deste modo, teremos utilizados $\Delta(G) + 1$ cores para colorir G. ■

Teorema de Brooks

Teorema 15.10: Para todo grafo conexo G que não é um ciclo ímpar nem um grafo completo, $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

R. L. Brooks

Teorema de Brooks

Teorema 15.10: Para todo grafo conexo G que não é um ciclo ímpar nem um grafo completo, $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

R. L. Brooks

Conjetura de Reed

- $\omega(G)$ e $1 + \Delta(G)$ são, respectivamente, o limitante inferior e o limitante superior mais simples e conhecidos para $\chi(G)$.

Conjetura de Reed

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\omega(G)$ e $1 + \Delta(G)$ são, respectivamente, o limitante inferior e o limitante superior mais simples e conhecidos para $\chi(G)$.
- Em 1998, Bruce Reed conjeturou que $\chi(G)$ está tão perto de $\omega(G)$ quanto de $1 + \Delta(G)$.

Conjetura de Reed

- $\omega(G)$ e $1 + \Delta(G)$ são, respectivamente, o limitante inferior e o limitante superior mais simples e conhecidos para $\chi(G)$.
- Em 1998, Bruce Reed conjeturou que $\chi(G)$ está tão perto de $\omega(G)$ quanto de $1 + \Delta(G)$.

Conjetura: Para todo grafo G,

$$\chi(G) \leq \left\lceil \frac{\omega(G) + 1 + \Delta(G)}{2} \right\rceil.$$

Esta conjectura continua aberta para grafos em geral.

Bruce Reed

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Para todo grafo G, $\chi(G) \leq \dfrac{\omega(G) + n + 1 - \alpha(G)}{2}$.

Demonstração:

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Para todo grafo G, $\chi(G) \leq \dfrac{\omega(G) + n + 1 - \alpha(G)}{2}$.

Demonstração:

- Prova por indução em n.
- **Caso base:** $n = 1$. Neste caso, $G = K_1$ e $\chi(G) = \omega(G) = \alpha(G) = 1$ e, assim, $\chi(G) = \frac{\omega(G)+n+1-\alpha(G)}{2}$.

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Para todo grafo G, $\chi(G) \leq \dfrac{\omega(G) + n + 1 - \alpha(G)}{2}$.

Demonstração:

- Prova por indução em n.
- **Caso base:** $n = 1$. Neste caso, $G = K_1$ e $\chi(G) = \omega(G) = \alpha(G) = 1$ e, assim, $\chi(G) = \frac{\omega(G)+n+1-\alpha(G)}{2}$.
- **H.I.:** Suponha que a desigualdade é verdadeira para todos os grafos com menos do que n vértices, $n \geq 2$.

Teorema

Teorema: Para todo grafo G, $\chi(G) \leq \dfrac{\omega(G) + n + 1 - \alpha(G)}{2}$.

Demonstração:

- Prova por indução em n.
- **Caso base:** $n = 1$. Neste caso, $G = K_1$ e $\chi(G) = \omega(G) = \alpha(G) = 1$ e, assim, $\chi(G) = \frac{\omega(G)+n+1-\alpha(G)}{2}$.
- **H.I.:** Suponha que a desigualdade é verdadeira para todos os grafos com menos do que n vértices, $n \geq 2$.
- **Passo indutivo:** Seja G um grafo de ordem n. Se $G \cong \overline{K}_n$, então $\chi(G) = \omega(G) = 1$ e $\alpha(G) = n$. Portanto, $\chi(G) = \frac{\omega(G)+n+1-\alpha(G)}{2}$.

  Então, suponha que G não é um grafo vazio.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja G não vazio com $n \geq 2$ e seja S um conjunto independente máximo de G. Defina $H = G - S$. Consideramos dois casos.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja G não vazio com $n \geq 2$ e seja S um conjunto independente máximo de G. Defina $H = G - S$. Consideramos dois casos.
- **Caso 1:** H é um grafo completo. Assim, $V(G)$ pode ser particionado em S e $V(G-S)$, em que $S = \overline{K}_{\alpha(G)}$ e $V(G-S) = K_{n-\alpha(G)}$.

  Portanto,

  $$\chi(G) = \omega(G) = n - \alpha(G) \text{ ou } \chi(G) = \omega(G) = n - \alpha(G) + 1. \quad (1)$$

  Em ambos os casos, temos que $\chi(G) = \omega(G)$, portanto, temos

  $$\chi(G) = \omega(G) = \frac{\omega(G) + \omega(G)}{2} \leq \frac{\omega(G) + n + 1 - \alpha(G)}{2}.$$

  A última desigualdade vale devido a (1).
  Portanto, o resultado segue.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Caso 2:** H não é completo. Neste caso, $\alpha(H) \geq 2$ já que há pelo menos dois vértices não adjacentes em H.

  Como $\chi(G) \leq \chi(H) + 1$, segue da hipótese de indução que:

$$
\begin{aligned}
\chi(G) &\leq \chi(H) + 1 \\
&\leq \frac{\omega(H) + n(H) + 1 - \alpha(H)}{2} + 1 \\
&\leq \frac{\omega(H) + (n - \alpha(G)) + 1 - \alpha(H)}{2} + 1 \\
&\leq \frac{\omega(G) + (n - \alpha(G)) + 1 - \alpha(H)}{2} + 1 \\
&\leq \frac{\omega(G) + (n - \alpha(G) + 1)}{2}.
\end{aligned}
$$

  E o resultado segue. □

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Se G é um grafo de ordem n, então $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$.

Demonstração:

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Se G é um grafo de ordem n, então $\chi(G)+\chi(\overline{G}) \leq n+1$.

Demonstração:

- Aplicando o teorema anterior a G e a seu complemento $\overline{G}$, obtemos:
  - $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+n+1-\alpha(G)}{2}$ e
  - $\chi(\overline{G}) \leq \frac{\omega(\overline{G})+n+1-\alpha(\overline{G})}{2}$.
- Somando essas duas inequações, obtemos que $\chi(G)+\chi(\overline{G}) \leq n+1$. Isso se deve ao fato de que $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$ e $\alpha(\overline{G}) = \omega(G)$. $\square$

Grafos de intervalo

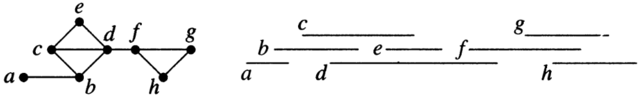
Grafos de intervalo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Um grafo de interseção é um grafo cujos vértices representam conjuntos e uma aresta liga dois conjuntos se a interseção deles é não vazia.

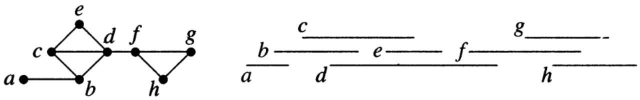
Grafos de intervalo

- Um grafo de interseção é um grafo cujos vértices representam conjuntos e uma aresta liga dois conjuntos se a interseção deles é não vazia.
- Um grafo de intervalo é o grafo de interseção de um conjunto de intervalos na reta dos reais.



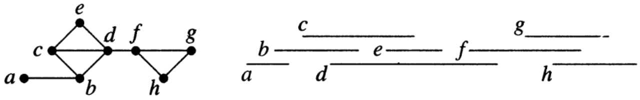
Grafos de intervalo

- Um grafo de interseção é um grafo cujos vértices representam conjuntos e uma aresta liga dois conjuntos se a interseção deles é não vazia.
- Um grafo de intervalo é o grafo de interseção de um conjunto de intervalos na reta dos reais.



- **Aplicação:** Temos 8 reuniões que devem acontecer durante certo momento do dia e gostaríamos de saber quantas salas serão necessárias para alocar os encontros sem haver choque de horários. Podemos nomear os encontros a, b, c, d, e, f, g, h e representar sua duração no tempo como na figura acima. Qual o número ótimo de salas necessárias?

Grafos de intervalo



- **Obs.:** Qualquer grafo pode ser um grafo de interseção, mas grafos de intervalo são mais restritivos. Por exemplo, o C_4 não é um grafo de intervalo.
- Note também que todo subgrafo de um grafo de intervalo é um grafo de intervalo.

Grafos de intervalo

Teorema: Se G é um grafo de intervalo, então $\chi(G) = \omega(G)$.

Demonstração:

Grafos de intervalo

Teorema: Se G é um grafo de intervalo, então $\chi(G) = \omega(G)$.

Demonstração:

- Ordene os vértices pelos extremos esquerdos dos intervalos correspondentes e aplique a coloração gulosa sobre esta ordenação.
- Suponha que um vértice x recebe a cor k, maior cor utilizada.

Grafos de intervalo

Teorema: Se G é um grafo de intervalo, então $\chi(G) = \omega(G)$.

Demonstração:

- Ordene os vértices pelos extremos esquerdos dos intervalos correspondentes e aplique a coloração gulosa sobre esta ordenação.
- Suponha que um vértice x recebe a cor k, maior cor utilizada.
- Como x não pôde receber uma cor menor, então o extremo esquerdo a do seu intervalo pertence também aos intervalos que já estão coloridos com cores de 1 a $k-1$. Todos esses intervalos compartilham o mesmo ponto a. Deste modo, temos uma k-clique em G.

Grafos de intervalo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Se G é um grafo de intervalo, então $\chi(G) = \omega(G)$.

Demonstração:

- Ordene os vértices pelos extremos esquerdos dos intervalos correspondentes e aplique a coloração gulosa sobre esta ordenação.
- Suponha que um vértice x recebe a cor k, maior cor utilizada.
- Como x não pôde receber uma cor menor, então o extremo esquerdo a do seu intervalo pertence também aos intervalos que já estão coloridos com cores de 1 a $k-1$. Todos esses intervalos compartilham o mesmo ponto a. Deste modo, temos uma k-clique em G.
- Portanto, $\omega(G) \geq k \geq \chi(G)$.

Grafos de intervalo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Se G é um grafo de intervalo, então $\chi(G) = \omega(G)$.

Demonstração:

- Ordene os vértices pelos extremos esquerdos dos intervalos correspondentes e aplique a coloração gulosa sobre esta ordenação.
- Suponha que um vértice x recebe a cor k, maior cor utilizada.
- Como x não pôde receber uma cor menor, então o extremo esquerdo a do seu intervalo pertence também aos intervalos que já estão coloridos com cores de 1 a $k-1$. Todos esses intervalos compartilham o mesmo ponto a. Deste modo, temos uma k-clique em G.
- Portanto, $\omega(G) \geq k \geq \chi(G)$.
- Como $\chi(G) \geq \omega(G)$ sempre, então esta coloração é ótima. $\square$

Grafos perfeitos

As propriedades mostradas anteriormente para grafos de intervalo são verdadeiras para uma classe de grafos maior.

Grafos perfeitos

As propriedades mostradas anteriormente para grafos de intervalo são verdadeiras para uma classe de grafos maior.

- Um grafo G é perfeito se, para todo subgrafo induzido $H \subseteq G$, $\chi(H) = \omega(H)$.
  - Equivalentemente, $\chi(G[A]) = \omega(G[A])$ para todo $A \subseteq V(G)$.

Grafos perfeitos

As propriedades mostradas anteriormente para grafos de intervalo são verdadeiras para uma classe de grafos maior.

- Um grafo G é perfeito se, para todo subgrafo induzido $H \subseteq G$, $\chi(H) = \omega(H)$.
  - Equivalentemente, $\chi(G[A]) = \omega(G[A])$ para todo $A \subseteq V(G)$.
- Uma classe de grafos $\mathbb{G}$ é dita hereditária se todo subgrafo induzido de um grafo em $\mathbb{G}$ está também em $\mathbb{G}$.

Grafos perfeitos

As propriedades mostradas anteriormente para grafos de intervalo são verdadeiras para uma classe de grafos maior.

- Um grafo G é perfeito se, para todo subgrafo induzido $H \subseteq G$, $\chi(H) = \omega(H)$.
  - Equivalentemente, $\chi(G[A]) = \omega(G[A])$ para todo $A \subseteq V(G)$.
- Uma classe de grafos $\mathbb{G}$ é dita hereditária se todo subgrafo induzido de um grafo em $\mathbb{G}$ está também em $\mathbb{G}$.
  - Exemplo: Grafos de intervalo possuem $\chi(G) = \omega(G)$ e grafos de intervalo são hereditários. Portanto, grafos de intervalo são perfeitos.
  - Exemplo: Grafos bipartidos não-vazios possuem $\chi(G) = \omega(G) = 2$ e grafos bipartidos são hereditários. Assim, grafos bipartidos são perfeitos.

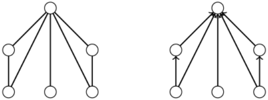
Grafos de comparabilidade

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Uma orientação transitiva de um grafo G é uma orientação D tal que quando uv e vw são arestas em D, G contém a aresta uw em D. Um grafo de comparabilidade é um grafo que possui orientação transitiva. Exemplo: Todo grafo bipartido é um grafo de comparabilidade.

Grafos de comparabilidade

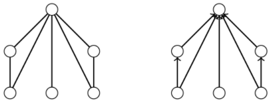
- Uma orientação transitiva de um grafo G é uma orientação D tal que quando uv e vw são arestas em D, G contém a aresta uw em D. Um grafo de comparabilidade é um grafo que possui orientação transitiva. Exemplo: Todo grafo bipartido é um grafo de comparabilidade.



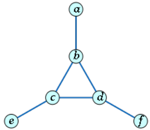
Um grafo de comparabilidade e uma orientação transitiva D sua

Grafos de comparabilidade

- Uma orientação transitiva de um grafo G é uma orientação D tal que quando uv e vw são arestas em D, G contém a aresta uw em D. Um grafo de comparabilidade é um grafo que possui orientação transitiva. Exemplo: Todo grafo bipartido é um grafo de comparabilidade.



Um grafo de comparabilidade e uma orientação transitiva D sua



Um grafo que não é de comparabilidade

Grafos de comparabilidade

Teorema [Berge 1960]: Grafos de comparabilidade são perfeitos.

Demonstração:

Grafos de comparabilidade

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema [Berge 1960]: Grafos de comparabilidade são perfeitos.

Demonstração:

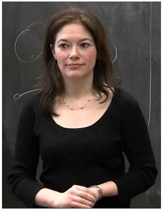
- Todo subdigrafo induzido de um digrafo transitivo é transitivo. Então esses grafos são hereditários.
- Resta provar que $\chi(G) = \omega(G)$. Seja D uma orientação transitiva de um grafo de comparabilidade G. Certamente, D não tem ciclos.
- Pinte G atribuindo a cada vértice v o número de vértices no caminho mais longo de D terminando em v em uma coloração própria.
- Se $uv \in E(D)$, então qualquer caminho terminando em u poderia ser estendido a v, de modo que eles devem ter cores distintas. Pela transitividade, os vértices de um caminho em D formam uma clique em G. Assim, G pode ser colorido com $\omega(G)$ cores.

Teoremas conjeturados por Berge

Teorema [Lovász 1972]: G é perfeito se e somente se $\overline{G}$ é perfeito.

O seguinte resultado foi conjeturado por Berge em 1960 e provado por Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour e Robin Thomas em 2002.

Teorema [CRST 2002]: Um grafo G é perfeito se e somente se ambos G e $\overline{G}$ não possuem subgrafo induzido isomorfo a um ciclo ímpar de comprimento pelo menos 5.



Maria

Neil

Paul

Robin

FIM