Isomorfismo Entre Grafos

Teoria dos Grafos — QXD0152

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

1º semestre/2021

Tópicos desta aula

- Igualdade entre grafos
- Isomorfismo entre grafos
- Condições necessárias para o isomorfismo

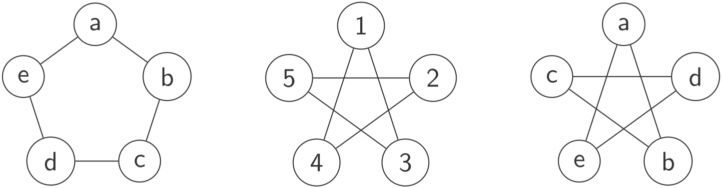
Introdução

Introdução

- Muitas vezes, após investigarmos dois ou mais grafos, temos a intuição de que eles são basicamente o mesmo grafo, ou seja, possuem a mesma estrutura.
    - Basicamente, toda propriedade que for provada para um deles será verdadeira para todos os demais que estiverem no mesmo grupo.

Igualdade entre grafos — Definição

- Dois grafos G e H são iguais, denotado por $G = H$, se:
  - $V(G) = V(H)$;
  - $E(G) = E(H)$; e
  - $\psi_G = \psi_H$
- **Quais entre os grafos abaixo são iguais?**



Isomorfismo entre grafos

Isomorfismo — Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Um isomorfismo entre dois grafos simples G e H é uma função bijetora $\theta\colon V(G) \to V(H)$ tal que:
    - $uv \in E(G)$ se e somente se $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

Isomorfismo — Definição

- **Definição:** Um isomorfismo entre dois grafos simples G e H é uma função bijetora $\theta\colon V(G) \to V(H)$ tal que:
  - $uv \in E(G)$ se e somente se $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

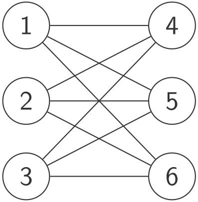
- Dizemos que dois grafos simples G e H são isomorfos se existe um isomorfismo entre G e H e denotamos isso por $G \cong H$.
  Se G e H não são isomorfos, representamos isso por $G \ncong H$.

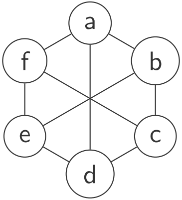
Isomorfismo — Definição

- **Definição:** Um isomorfismo entre dois grafos simples G e H é uma função bijetora $\theta\colon V(G) \to V(H)$ tal que:
  - $uv \in E(G)$ se e somente se $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

- Dizemos que dois grafos simples G e H são isomorfos se existe um isomorfismo entre G e H e denotamos isso por $G \cong H$.
  Se G e H não são isomorfos, representamos isso por $G \ncong H$.

Exemplo: Os dois grafos abaixo são isomorfos?





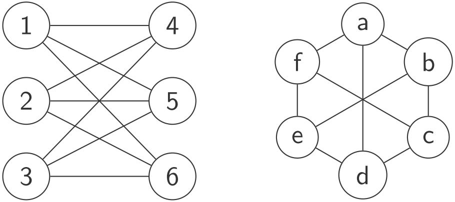
Isomorfismo — Definição

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- **Definição:** Um isomorfismo entre dois grafos simples G e H é uma função bijetora $\theta\colon V(G) \to V(H)$ tal que:
  - $uv \in E(G)$ se e somente se $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

- Dizemos que dois grafos simples G e H são isomorfos se existe um isomorfismo entre G e H e denotamos isso por $G \cong H$.
  Se G e H não são isomorfos, representamos isso por $G \ncong H$.

Exemplo: Os dois grafos abaixo são isomorfos?

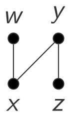


$$\theta(1) = b \quad \theta(2) = d$$
$$\theta(3) = f \quad \theta(4) = c$$
$$\theta(5) = e \quad \theta(6) = a$$

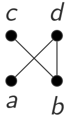
Condições necessárias para o Isomorfismo

Como descobrir se dois grafos são isomorfos?

- Intuitivamente, dois grafos são isomorfos se eles podem ser desenhados no plano do mesmo modo.



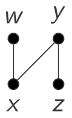
Grafo G



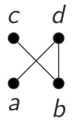
Grafo H

Como descobrir se dois grafos são isomorfos?

- Intuitivamente, dois grafos são isomorfos se eles podem ser desenhados no plano do mesmo modo.



Grafo G

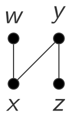


Grafo H

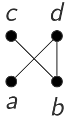
- Uma abordagem trivial para decidir se dois grafos G e H são isomorfos seria considerar todas as possíveis permutações de vértices de H e checar se alguma delas induz um isomorfismo.
  - Esta abordagem leva tempo $O(n!)$.

Como descobrir se dois grafos são isomorfos?

- Intuitivamente, dois grafos são isomorfos se eles podem ser desenhados no plano do mesmo modo.



Grafo G



Grafo H

- Uma abordagem trivial para decidir se dois grafos G e H são isomorfos seria considerar todas as possíveis permutações de vértices de H e checar se alguma delas induz um isomorfismo.
  - Esta abordagem leva tempo $O(n!)$.
- Infelizmente ainda não conhecemos um algoritmo rápido (polinomial) para determinar se dois grafos são ou não isomorfos.
- Ninguém ainda provou que não existe tal algoritmo.
  - É um problema em aberto!

Invariante de grafos

- **Definição:** Uma invariante de grafos é uma propriedade de um grafo que é preservada pelo isomorfismo.

- A fim de mostrar que dois grafos não são isomorfos, uma abordagem melhor que checar todas os possíveis isomorfismos consiste em encontrar uma invariante de grafos que varia nos dois.

- Quais propriedades são invariantes?
  - ordem e tamanho
  - grau máximo
  - presença de ciclos
  - presença de subgrafo específico
  - ...

Algumas condições necessárias para o isomorfismo

Segue da definição de isomorfismo:

Condição 1: Se dois grafos G e H são isomorfos, então $|V(G)| = |V(H)|$ e $|E(G)| = |E(H)|$. (Por quê?)

- Essa condição é necessária mas não é suficiente. Dois grafos podem ter mesma ordem e tamanho mas não serem isomorfos.

Algumas condições necessárias para o isomorfismo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Segue da definição de isomorfismo:

Condição 1: Se dois grafos G e H são isomorfos, então $|V(G)| = |V(H)|$ e $|E(G)| = |E(H)|$. (Por quê?)

- Essa condição é necessária mas não é suficiente. Dois grafos podem ter mesma ordem e tamanho mas não serem isomorfos.
  - Exemplo: C_6 e $C_3 \cup C_3$

Algumas condições necessárias para o isomorfismo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Segue da definição de isomorfismo:

Condição 1: Se dois grafos G e H são isomorfos, então $|V(G)| = |V(H)|$ e $|E(G)| = |E(H)|$. (Por quê?)

- Essa condição é necessária mas não é suficiente. Dois grafos podem ter mesma ordem e tamanho mas não serem isomorfos.
  - Exemplo: C_6 e $C_3 \cup C_3$
- Para qual outra característica do grafo podemos olhar em busca de determinar a existência ou não do isomorfismo?

Algumas condições necessárias para o isomorfismo

Segue da definição de isomorfismo:

> **Condição 1:** Se dois grafos G e H são isomorfos, então $|V(G)| = |V(H)|$ e $|E(G)| = |E(H)|$. (Por quê?)

- Essa condição é necessária mas não é suficiente. Dois grafos podem ter mesma ordem e tamanho mas não serem isomorfos.
  - Exemplo: C_6 e $C_3 \cup C_3$
- Para qual outra característica do grafo podemos olhar em busca de determinar a existência ou não do isomorfismo?
  - Note que: todos os vértices no primeiro grafo possuem grau 2, mas isso não acontece no segundo grafo.

Algumas condições necessárias para o isomorfismo

Da discussão do slide anterior, chegamos na seguinte condição:

Condição 2. Se dois grafos G e H são isomorfos, então as suas sequências de graus são iguais.

Demonstração.

- Como G e H são isomorfos, existe um isomorfismo $\theta\colon V(G) \to V(H)$.

Algumas condições necessárias para o isomorfismo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Da discussão do slide anterior, chegamos na seguinte condição:

Condição 2. Se dois grafos G e H são isomorfos, então as suas sequências de graus são iguais.

Demonstração.

- Como G e H são isomorfos, existe um isomorfismo $\theta\colon V(G) \to V(H)$.
- Seja $u \in V(G)$ e suponha $\theta(u) = v$, $v \in V(H)$. Vamos mostrar que $d_G(u) = d_H(v)$.

Algumas condições necessárias para o isomorfismo

Da discussão do slide anterior, chegamos na seguinte condição:

Condição 2. Se dois grafos G e H são isomorfos, então as suas sequências de graus são iguais.

Demonstração.

- Como G e H são isomorfos, existe um isomorfismo $\theta\colon V(G) \to V(H)$.
- Seja $u \in V(G)$ e suponha $\theta(u) = v$, $v \in V(H)$. Vamos mostrar que $d_G(u) = d_H(v)$.
- Suponha que u é adjacente a $x_1, x_2, \ldots, x_k$ em G e não adjacente a $w_1, w_2, \ldots, w_\ell$ em G. Assim, $|V(G)| = k + \ell + 1$.

Algumas condições necessárias para o isomorfismo

Da discussão do slide anterior, chegamos na seguinte condição:

Condição 2. Se dois grafos G e H são isomorfos, então as suas sequências de graus são iguais.

Demonstração.

- Como G e H são isomorfos, existe um isomorfismo $\theta\colon V(G) \to V(H)$.
- Seja $u \in V(G)$ e suponha $\theta(u) = v$, $v \in V(H)$. Vamos mostrar que $d_G(u) = d_H(v)$.
- Suponha que u é adjacente a $x_1, x_2, \ldots, x_k$ em G e não adjacente a $w_1, w_2, \ldots, w_\ell$ em G. Assim, $|V(G)| = k + \ell + 1$.
- Então, $\theta(u) = v$ é adjacente a $\theta(x_1), \ldots, \theta(x_k)$ em H e não adjacente a $\theta(w_1), \ldots, \theta(w_\ell)$. Portanto, $d_G(k) = k = d_H(u)$. ■

Algumas condições necessárias para o isomorfismo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Da discussão do slide anterior, chegamos na seguinte condição:

Condição 2. Se dois grafos G e H são isomorfos, então as suas sequências de graus são iguais.

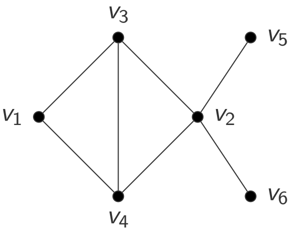
Demonstração.

- Como G e H são isomorfos, existe um isomorfismo $\theta \colon V(G) \to V(H)$.
- Seja $u \in V(G)$ e suponha $\theta(u) = v$, $v \in V(H)$. Vamos mostrar que $d_G(u) = d_H(v)$.
- Suponha que u é adjacente a $x_1, x_2, \ldots, x_k$ em G e não adjacente a $w_1, w_2, \ldots, w_\ell$ em G. Assim, $|V(G)| = k + \ell + 1$.
- Então, $\theta(u) = v$ é adjacente a $\theta(x_1), \ldots, \theta(x_k)$ em H e não adjacente a $\theta(w_1), \ldots, \theta(w_\ell)$. Portanto, $d_G(k) = k = d_H(u)$. ■

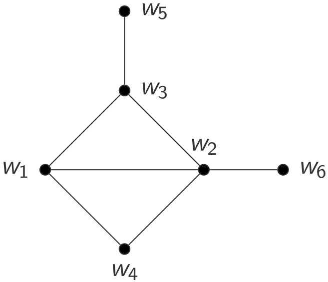
Obs.: Ter a mesma sequência de graus também não é condição suficiente para o isomorfismo. Exemplo: $C_3 \cup C_3$.

Exercício 1

- Determine se os grafos F_1 e F_2 abaixo são isomorfos.



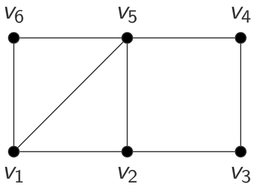
Grafo F_1



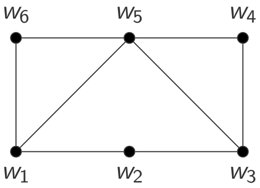
Grafo F_2

Exercício 2

- Determine se os grafos H_1 e H_2 abaixo são isomorfos.



Grafo H_1



Grafo H_2

Isomorfismo e Complementos

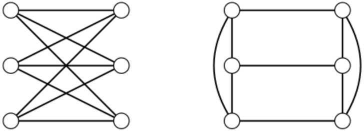
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O isomorfismo preserva tanto adjacências quanto não adjacências.
Esta observação prova o seguinte resultado:

Proposição: Sejam G e H grafos simples. Então, $G \cong H$ se e somente se $\overline{G} \cong \overline{H}$.

Esta proposição pode ser útil ao se analisar grafos densos. Pois, quando um grafo é denso, pode ser mais fácil analisar o seu complemento.

Exemplo: Os grafos abaixo são isomorfos?



Dois grafos cúbicos G e H

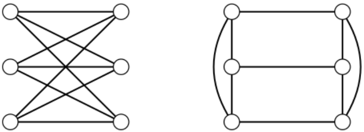
Isomorfismo e Complementos

O isomorfismo preserva tanto adjacências quanto não adjacências.
Esta observação prova o seguinte resultado:

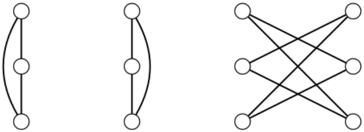
Proposição: Sejam G e H grafos simples. Então, $G \cong H$ se e somente se $\overline{G} \cong \overline{H}$.

Esta proposição pode ser útil ao se analisar grafos densos. Pois, quando um grafo é denso, pode ser mais fácil analisar o seu complemento.

Exemplo: Os grafos abaixo são isomorfos?



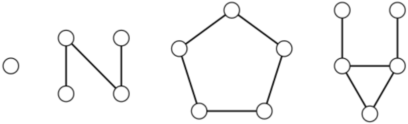
Dois grafos cúbicos G e H



Complementos de G e H

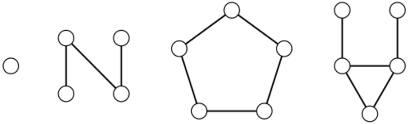
Grafos auto-complementares

- Encontre os complementos dos grafos abaixo. Qual a relação existente entre cada grafo acima e o seu complemento?



Grafos auto-complementares

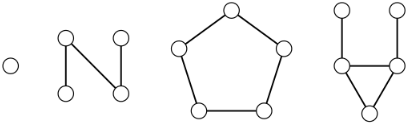
- Encontre os complementos dos grafos abaixo. Qual a relação existente entre cada grafo acima e o seu complemento?



- **Definição:** Um grafo simples G é auto-complementar se $G \cong \overline{G}$.

Grafos auto-complementares

- Encontre os complementos dos grafos abaixo. Qual a relação existente entre cada grafo acima e o seu complemento?



- **Definição:** Um grafo simples G é auto-complementar se $G \cong \overline{G}$.
- Os grafos acima são todos os grafos auto-complementares com no máximo 5 vértices.
- O número de grafos auto-complementares com n vértices já foi computado para os primeiros valores de n e pode ser consultado online (`https://oeis.org/A000171`)
  - $1, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 10, 36, 0, 0, 720, 5600, 0, 0, 703760, 11220000, \ldots$

Exercício

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Exercício: Prove o teorema abaixo:

Teorema: Se G é um grafo auto-complementar com n vértices e m arestas, então $m = \frac{n(n-1)}{4}$ e $n \equiv 0, 1 \pmod 4$.

Exercício

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Exercício: Quantos grafos com 4 vértices existem?

Material Adicional

Material Adicional

Links na internet:

- Uma apresentação descontraída: https://medium.com/@jackson.barreto/isomorfismo-em-grafos-43d34c220c66
- Wikipedia (pt-br): https://pt.wikipedia.org/wiki/Isomorfismo_de_grafos

O algoritmo mais eficiente conhecido atualmente para o problema de isomorfismo entre grafos foi desenvolvido por um teórico da computação, chamado László Babai. Alguns links (em inglês) sobre essa descoberta:

- Revista Quanta Magazine: https://www.quantamagazine.org/algorithm-solves-graph-isomorphism-in-record-time-20151214
- Artigo do Laszlo Babai no ICM 2018: https://eta.impa.br/dl/109.pdf

Exercícios

Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

(1) Dê exemplo de três grafos que possuam a mesma ordem, o mesmo tamanho, a mesma sequência de graus, mas que não sejam isomorfos.

(2) Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas e prove sua resposta:

(a) quaisquer dois grafos isomorfos possuem a mesma sequência de graus.
(b) quaisquer dois grafos com a mesma sequência de graus são isomorfos.

(3) Prove que dois grafos simples são isomorfos se e somente se os seus complementos são isomorfos.

FIM