Passeios, Trilhas, Caminhos e Ciclos em Grafos

Teoria dos Grafos — QXD0152

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

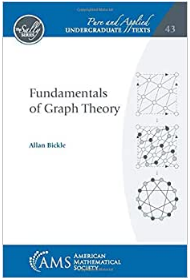
Universidade Federal do Ceará

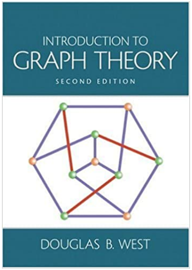
1º semestre/2021

Leituras para esta aula

Estes slides foram baseados nos seguintes materiais:

- **Seção 1.6 e Seção 1.7** do livro *Fundamentals of Graph Theory* do Allan Bickle.
- **Seção 1.2** do livro *Introduction to Graph Theory* do Douglas West.





Tópicos desta aula

- Passeios, trilhas, caminhos, circuitos e ciclos
- Existência de passeio implica na existência de caminho
- Caracterização de grafo conexo
- Componentes conexas
- Distância
- Desigualdade triangular
- Excentricidade, raio e diâmetro
- Ciclos e Passeios
- Grafos bipartidos e ciclos

Passeios

Passeando em um grafo

- Um passeio em um grafo G é uma sequência finita e não-vazia

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$$

cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G tais que os extremos da aresta e_i são v_{i-1} e v_i, para $1 \leq i \leq k$.

Passeando em um grafo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um passeio em um grafo G é uma sequência finita e não-vazia

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$$

  cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G tais que os extremos da aresta e_i são v_{i-1} e v_i, para $1 \leq i \leq k$.

- Dizemos que W é um passeio de v_0 a v_k ou um (v_0, v_k)-passeio.
  - v_0 e v_k são os extremos do passeio.
  - v_0 é o vértice inicial e v_k o vértice final.
  - Os demais vértices são vértices internos.

Passeando em um grafo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um passeio em um grafo G é uma sequência finita e não-vazia

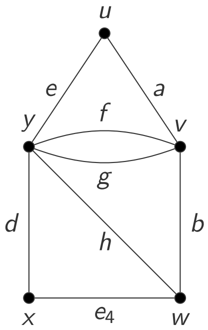
$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$$

  cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G tais que os extremos da aresta e_i são v_{i-1} e v_i, para $1 \leq i \leq k$.

- Dizemos que W é um passeio de v_0 a v_k ou um (v_0, v_k)-passeio.
  - v_0 e v_k são os extremos do passeio.
  - v_0 é o vértice inicial e v_k o vértice final.
  - Os demais vértices são vértices internos.

- O comprimento do passeio é o número de arestas no passeio, ou seja, k.

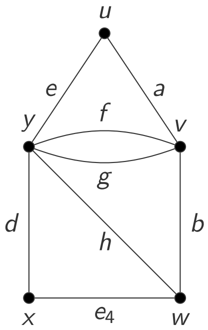
Exemplo de passeio



Grafo G

Passeio: $W = u\ a\ v\ f\ y\ f\ v\ g\ y\ h\ w\ b\ v$

Exemplo de passeio



Grafo G

Passeio: $W = u\ a\ v\ f\ y\ f\ v\ g\ y\ h\ w\ b\ v$

Vértice inicial: u

Vértice final: v

Comprimento de W é 6

Definição - Passeio reverso

- Também representamos um (v_0, v_k)-passeio W usando a notação $v_0 W v_k$.

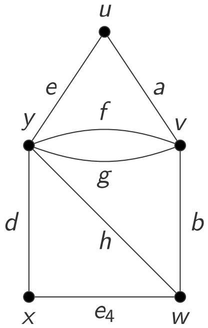
Definição - Passeio reverso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Também representamos um (v_0, v_k)-passeio W usando a notação $v_0 W v_k$.
- Denotamos por $\overleftarrow{W}$ o passeio $v_k e_k v_{k-1} \dots e_1 v_0$, obtido revertendo-se o passeio W.

Definição - Passeio reverso

- Também representamos um (v_0, v_k)-passeio W usando a notação $v_0 W v_k$.
- Denotamos por $\overleftarrow{W}$ o passeio $v_k e_k v_{k-1} \ldots e_1 v_0$, obtido revertendo-se o passeio W.



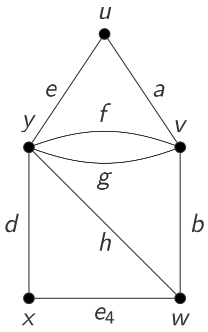
Grafo G

Passeio: $W = u\ a\ v\ f\ y\ f\ v\ g\ y\ h\ w\ b\ v$

$\overleftarrow{W} = v\ b\ w\ h\ y\ g\ v\ f\ y\ f\ v\ a\ u$

Definição - Passeio fechado

- Um passeio em um grafo é fechado se seus vértices inicial e final são idênticos.



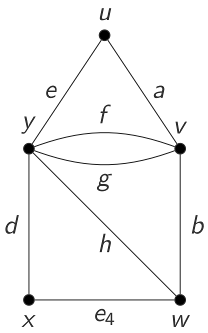
Grafo G

Passeio fechado:
$W = u\ a\ v\ f\ y\ f\ v\ a\ u$

Trilhas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Uma trilha é um passeio que não repete arestas.

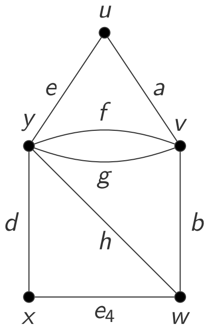


Grafo G

Exemplo de Trilha:
$W = y\ e\ u\ a\ v\ f\ y\ g\ v\ b\ w$

Caminhos

- Uma trilha em que todos os vértices são distintos é chamada de caminho.

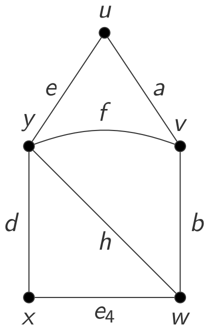


Grafo G

Exemplo de Caminho:
$W = y\ e\ u\ a\ v\ b\ w\ e_4\ x$

Caminhos em grafos simples

Observação: Em um grafo simples, um caminho $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ é completamente determinado pela sequência de vértices $v_0 v_1 \dots v_k$. (Porquê?)



Grafo G

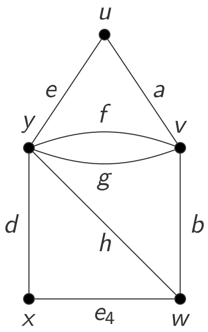
$$W = u\ a\ v\ f\ y\ d\ x\ e_4\ w$$

ou

$$W = u\ v\ y\ x\ w$$

Circuito (Tour)

- Uma trilha fechada é chamada de circuito ou tour.



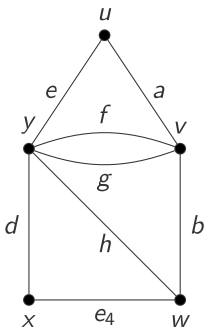
Grafo G

Exemplo de Tour:

$W = y\ e\ u\ a\ v\ f\ y\ g\ v\ b\ w\ h\ y$

Ciclos

- Uma trilha fechada que não repete vértices internos é um ciclo.



Grafo G

Exemplo de Ciclo:

$W = y\ e\ u\ a\ v\ f\ y$

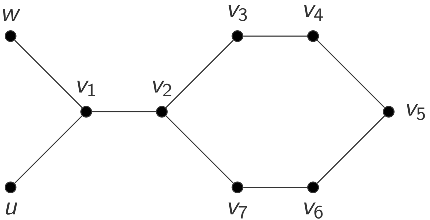
Relação entre passeios e caminhos

Definição

- Dizemos que um passeio W contém um caminho P quando os vértices e arestas de P ocorrem como uma sublista de vértices e arestas de W, em ordem mas não necessariamente consecutivos.

Definição

- Dizemos que um passeio W contém um caminho P quando os vértices e arestas de P ocorrem como uma sublista de vértices e arestas de W, em ordem mas não necessariamente consecutivos.



O passeio $W = w\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6\ v_7\ v_2\ v_1\ u$ contém o caminho $P = w\ v_1\ u$

Teorema — Demonstração

Teorema: Todo (u, v)-passeio contém um (u, v)-caminho.

Teorema — Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Todo (u, v)-passeio contém um (u, v)-caminho.

Demonstração:

- Prova por **indução forte no comprimento** k de um (u, v)-passeio W.

Teorema — Demonstração

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema: Todo (u, v)-passeio contém um (u, v)-caminho.

Demonstração:

- Prova por **indução forte no comprimento** k de um (u, v)-passeio W.
- **Caso Base:** $k = 0$. Neste caso, W não tem arestas e consiste em um único vértice $(u = v)$.

Teorema — Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Todo (u, v)-passeio contém um (u, v)-caminho.

Demonstração:

- Prova por **indução forte no comprimento** k de um (u, v)-passeio W.
- **Caso Base:** $k = 0$. Neste caso, W não tem arestas e consiste em um único vértice ($u = v$).
- **Hipótese da indução (H.I.):** Suponha que o teorema é válido para todo (u, v)-passeio de comprimento menor que k.

Demonstração (Continuação)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Passo indutivo:** Seja W um passeio de comprimento $k \geq 1$.

Demonstração (Continuação)

- **Passo indutivo:** Seja W um passeio de comprimento $k \geq 1$.
- Se W não tem vértices repetidos, então seus vértices e arestas formam um (u, v)-caminho, e o resultado segue.

Demonstração (Continuação)

- **Passo indutivo:** Seja W um passeio de comprimento $k \geq 1$.
- Se W não tem vértices repetidos, então seus vértices e arestas formam um (u, v)-caminho, e o resultado segue.
- Se W possui pelo menos um vértice repetido w, então temos que

$$W = u\ e_1\ \ldots\ \mathbf{w}\ \mathbf{e_i}\ \mathbf{v_i}\ \mathbf{e_{i+1}}\ \mathbf{v_{i+1}}\ \ldots\ \mathbf{v_j}\ \mathbf{w}\ \ldots\ e_k\ v.$$

Demonstração (Continuação)

- **Passo indutivo:** Seja W um passeio de comprimento $k \geq 1$.
- Se W não tem vértices repetidos, então seus vértices e arestas formam um (u, v)-caminho, e o resultado segue.
- Se W possui pelo menos um vértice repetido w, então temos que

$$W = u \ e_1 \ \ldots \ \mathbf{w} \ \mathbf{e_i} \ \mathbf{v_i} \ \mathbf{e_{i+1}} \ \mathbf{v_{i+1}} \ \ldots \ \mathbf{v_j} \ \mathbf{w} \ \ldots \ e_k \ v.$$

- Deste modo, removemos a sequência de vértices e arestas que começam no primeiro w e terminam no segundo w, deixando apenas um dos w.

Demonstração (Continuação)

- **Passo indutivo:** Seja W um passeio de comprimento $k \geq 1$.
- Se W não tem vértices repetidos, então seus vértices e arestas formam um (u, v)-caminho, e o resultado segue.
- Se W possui pelo menos um vértice repetido w, então temos que

$$W = u \; e_1 \; \ldots \; \mathbf{w} \; \mathbf{e_i} \; \mathbf{v_i} \; \mathbf{e_{i+1}} \; \mathbf{v_{i+1}} \; \ldots \; \mathbf{v_j} \; \mathbf{w} \; \ldots \; e_k \; v.$$

- Deste modo, removemos a sequência de vértices e arestas que começam no primeiro w e terminam no segundo w, deixando apenas um dos w.
- Assim, obtemos um (u, v)-passeio mais curto W', contido em W.

Demonstração (Continuação)

- **Passo indutivo:** Seja W um passeio de comprimento $k \geq 1$.
- Se W não tem vértices repetidos, então seus vértices e arestas formam um (u, v)-caminho, e o resultado segue.
- Se W possui pelo menos um vértice repetido w, então temos que

$$W = u\ e_1\ \ldots\ \mathbf{w}\ \mathbf{e_i}\ \mathbf{v_i}\ \mathbf{e_{i+1}}\ \mathbf{v_{i+1}}\ \ldots\ \mathbf{v_j}\ \mathbf{w}\ \ldots\ e_k\ v.$$

- Deste modo, removemos a sequência de vértices e arestas que começam no primeiro w e terminam no segundo w, deixando apenas um dos w.
- Assim, obtemos um (u, v)-passeio mais curto W', contido em W.
- Pela hipótese de indução, W' contém um (u, v)-caminho P e este caminho também está contido em W. ■

Exercício

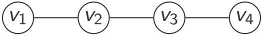
Existem outras formas de provar que todo (u, v)-passeio contém um (u, v)-caminho.

Para cada um dos raciocínios a seguir, escreva uma demonstração:

- (Extremalidade) Dentre todos os (u, v)-passeios em G, comece a prova pegando um (u, v)-passeio mais curto contido em G.

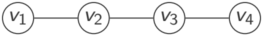
- (Indução fraca) Dado que todo passeio de comprimento $k - 1$ contém um caminho ligando o seu vértice inicial ao seu vértice final, prove que todo passeio de comprimento k também satisfaz essa propriedade.

Contando o número de passeios



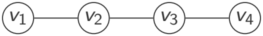
- Para cada vértice v_i do P_4, determine o número de passeios de comprimento 1 que começa no vértice v_i.

Contando o número de passeios



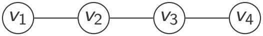
- Para cada vértice v_i do P_4, determine o número de passeios de comprimento 1 que começa no vértice v_i.
- Como esses números se relacionam com as células da matriz de adjacência $A(P_4)$ do grafo P_4?

Contando o número de passeios



- Para cada vértice v_i do P_4, determine o número de passeios de comprimento 1 que começa no vértice v_i.
- Como esses números se relacionam com as células da matriz de adjacência $A(P_4)$ do grafo P_4?
- **Fato:** A célula $a_{i,j}$ da matriz de adjacência $A(G)$ do grafo G dá o número de (v_i, v_j)-passeios de comprimento 1 contidos no grafo G.

Contando o número de passeios



- Para cada vértice v_i do P_4, determine o número de passeios de comprimento 1 que começa no vértice v_i.
- Como esses números se relacionam com as células da matriz de adjacência $A(P_4)$ do grafo P_4?
- **Fato:** A célula $a_{i,j}$ da matriz de adjacência $A(G)$ do grafo G dá o número de (v_i, v_j)-passeios de comprimento 1 contidos no grafo G.
- O que significa a matriz A^2 obtida multiplicando $A(G)$ por ela mesma?

Contando o número de passeios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Seja G um grafo sem laços com vértices $v_1, \ldots, v_n$ e matriz de adjacência $A(G)$. Então, a célula i, j da matriz A^k é o número de (v_i, v_j)-passeios de comprimento k em G.

Demonstração:

Contando o número de passeios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Seja G um grafo sem laços com vértices $v_1, \ldots, v_n$ e matriz de adjacência $A(G)$. Então, a célula i, j da matriz A^k é o número de (v_i, v_j)-passeios de comprimento k em G.

Demonstração:

- Prova por indução em k.

Contando o número de passeios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Seja G um grafo sem laços com vértices $v_1, \ldots, v_n$ e matriz de adjacência $A(G)$. Então, a célula i, j da matriz A^k é o número de (v_i, v_j)-passeios de comprimento k em G.

Demonstração:

- Prova por indução em k.
- Considere $k = 1$. Neste caso, o resultado é imediato dado que $A^1 = A(G)$ e dado que um passeio de comprimento 1 contém uma única aresta.

Contando o número de passeios

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema: Seja G um grafo sem laços com vértices $v_1, \ldots, v_n$ e matriz de adjacência $A(G)$. Então, a célula i, j da matriz A^k é o número de (v_i, v_j)-passeios de comprimento k em G.

Demonstração:

- Prova por indução em k.
- Considere $k = 1$. Neste caso, o resultado é imediato dado que $A^1 = A(G)$ e dado que um passeio de comprimento 1 contém uma única aresta.
- Suponha que, para algum k, a célula i, j da matriz A^k, denotada por $a_{i,j}^{(k)}$, é o número de (v_i, v_j)-passeios de comprimento k em G.

Continuação da prova

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Seja G um grafo sem laços com vértices $v_1, \ldots, v_n$ e matriz de adjacência $A(G)$. Então, a célula i, j da matriz A^k é o número de (v_i, v_j)-passeios de comprimento k em G.

Continuação da demonstração:

- Agora, considere a matriz A^{k+1}.

Continuação da prova

Teorema: Seja G um grafo sem laços com vértices $v_1, \ldots, v_n$ e matriz de adjacência $A(G)$. Então, a célula i, j da matriz A^k é o número de (v_i, v_j)-passeios de comprimento k em G.

Continuação da demonstração:

- Agora, considere a matriz A^{k+1}.
- Por definição, $A^{k+1} = A^k A$. Assim, $a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} a_{tj}$.

Continuação da prova

Teorema: Seja G um grafo sem laços com vértices $v_1, \ldots, v_n$ e matriz de adjacência $A(G)$. Então, a célula i, j da matriz A^k é o número de (v_i, v_j)-passeios de comprimento k em G.

Continuação da demonstração:

- Agora, considere a matriz A^{k+1}.
- Por definição, $A^{k+1} = A^k A$. Assim, $a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} a_{tj}$.
- Note que todo (v_i, v_j)-passeio de comprimento $k+1$ contém um (v_i, v_t)-passeio de comprimento k e uma aresta de v_t para v_j.

Continuação da prova

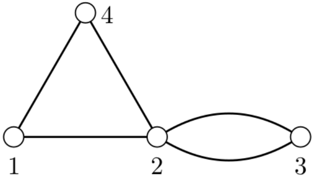
Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema: Seja G um grafo sem laços com vértices $v_1, \ldots, v_n$ e matriz de adjacência $A(G)$. Então, a célula i, j da matriz A^k é o número de (v_i, v_j)-passeios de comprimento k em G.

Continuação da demonstração:

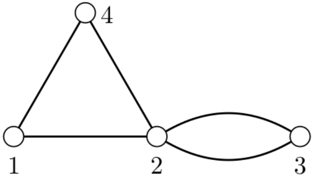
- Agora, considere a matriz A^{k+1}.
- Por definição, $A^{k+1} = A^k A$. Assim, $a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} a_{tj}$.
- Note que todo (v_i, v_j)-passeio de comprimento $k+1$ contém um (v_i, v_t)-passeio de comprimento k e uma aresta de v_t para v_j.
- Deste modo, o somatório conta o número de (v_i, v_j)-passeios de comprimento $k+1$. ■

Exemplo



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 12 & 7 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

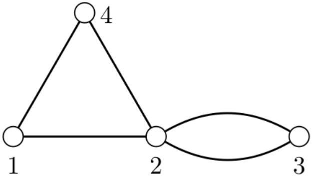
Exemplo



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 12 & 7 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- O que significa cada entrada da diagonal principal da matriz A^3?

Exemplo



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 12 & 7 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- O que significa cada entrada da diagonal principal da matriz A^3?
- **Definição:** O traço de uma matriz A, denotado por $\mathrm{tr}(A)$, é a soma das entradas na sua diagonal principal.

Contando o número de triângulos

Teorema: Seja G um grafo sem laços com matriz de adjacência A. O número de triângulos em G é $\frac{1}{6}\mathrm{tr}(A^3)$.

Demonstração:

Contando o número de triângulos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Seja G um grafo sem laços com matriz de adjacência A. O número de triângulos em G é $\frac{1}{6}\mathrm{tr}(A^3)$.

Demonstração:

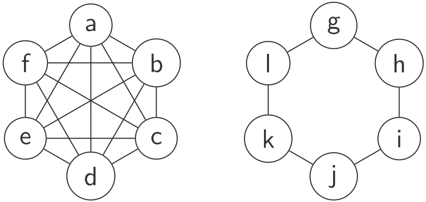
- Um triângulo é um passeio fechado de comprimento 3.
- Esses passeios são contados na diagonal principal da matriz A^3.
- Cada triângulo é contado seis vezes, dado que existem 3 possíveis vértices para iniciar o triângulo e existem duas possíveis direções.
- Assim, $\frac{1}{6}\mathrm{tr}(A^3)$ é o número de triângulos em G. ■

Conexidade

Conexidade

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Dizemos que dois vértices u e v de um grafo G estão conectados se existe um (u, v)-caminho em G.



Um grafo G com 12 vértices

Exercício para Casa

Provar o teorema abaixo:

Teorema: Prove que um grafo G é conexo se e somente se para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$ existe um (u, v)-caminho em G.

- **Lembrete:** Um grafo G é conexo se e somente se existe uma partição (X, Y) de $V(G)$ tal que não existe nenhuma aresta com um extremo em X e o outro extremo em Y.

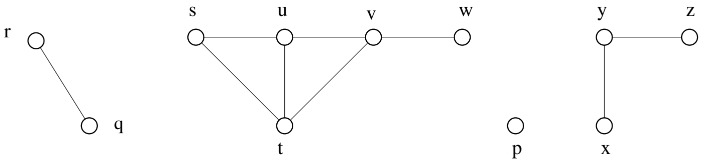
Note que, após provar o teorema acima, obtemos a seguinte definição alternativa para grafos conexos:

- Um grafo G é conexo se e somente se quaisquer dois de seus vértices estão conectados.

Componentes conexas

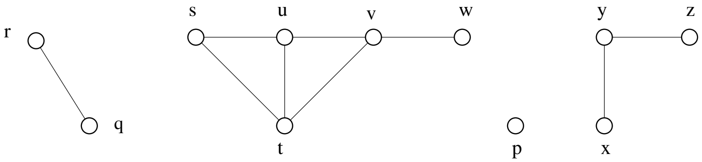
Componentes conexas

- Um subgrafo conexo maximal de G é um subgrafo que é conexo e que não está contido em nenhum outro subgrafo conexo de G.
- Uma componente conexa (ou simplesmente componente) de G é um subgrafo conexo maximal de G.



Componentes conexas

- Um subgrafo conexo maximal de G é um subgrafo que é conexo e que não está contido em nenhum outro subgrafo conexo de G.
- Uma componente conexa (ou simplesmente componente) de G é um subgrafo conexo maximal de G.



- Uma componente é trivial se ela não tem arestas, caso contrário ela é não trivial.
- Um vértice isolado é um vértice de grau 0.

Componentes conexas

- **Observação 1:** Remover uma aresta do grafo aumenta o número de componentes em 0 ou 1.

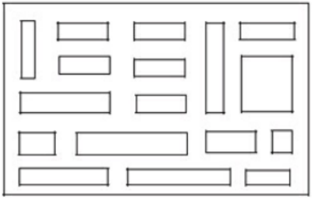
- **Observação 2:** Remover um vértice aumenta o número de componentes em até $\Delta(G)$. Por exemplo, considere os grafos estrela $K_{1,q}$.

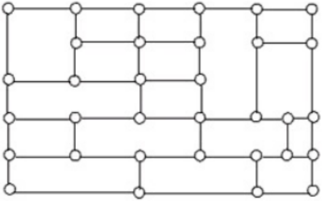
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Distância

Problema do quartel de bombeiros

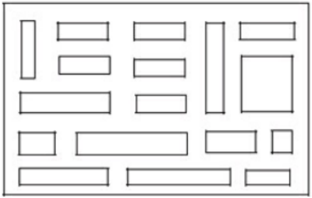
O prefeito de uma cidade deseja construir um quartel de bombeiros na cidade. Em que parte da cidade ele deveria construir?

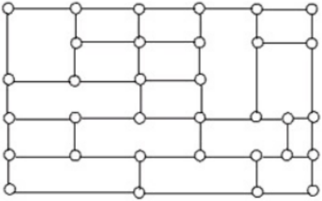




Problema do quartel de bombeiros

O prefeito de uma cidade deseja construir um quartel de bombeiros na cidade. Em que parte da cidade ele deveria construir?





- O motivo principal para a construção é que todos os cidadãos da cidade sejam prontamente socorridos na ocorrência de um incêndio.
- Logo, nenhuma casa deveria estar tão longe do quartel.

Distância

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Dados dois vértices u e v em um grafo G, a distância $d_G(u, v)$ entre u e v em G é o comprimento de um caminho mais curto conectando u a v em G.

- Se não existe caminho entre u e v em G, então $d_G(u, v) = \infty$.

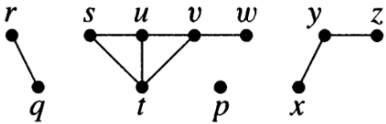
- Um (u, v)-caminho de comprimento $d_G(u, v)$ é chamado (u, v)-geodésica.

Distância

- **Definição:** Dados dois vértices u e v em um grafo G, a distância $d_G(u, v)$ entre u e v em G é o comprimento de um caminho mais curto conectando u a v em G.

- Se não existe caminho entre u e v em G, então $d_G(u, v) = \infty$.

- Um (u, v)-caminho de comprimento $d_G(u, v)$ é chamado (u, v)-geodésica.



Quais os valores de $d(s, w)$ e $d(q, y)$?

Espaço métrico

Dado um grafo conexo G, a função de distância $d_G(u, v)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $d_G(u, v) \geq 0$ para quaisquer $u, v \in V(G)$;

(2) $d_G(u, v) = 0$ se e somente se $u = v$;

(3) $d_G(u, v) = d_G(v, u)$ para quaiser $u, v \in V(G)$;

(4) $d_G(u, w) \leq d_G(uv) + d_G(v, w)$ para quaisquer $u, v, w \in V(G)$.
(desigualdade triangular)

Espaço métrico

Dado um grafo conexo G, a função de distância $d_G(u, v)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $d_G(u, v) \geq 0$ para quaisquer $u, v \in V(G)$;

(2) $d_G(u, v) = 0$ se e somente se $u = v$;

(3) $d_G(u, v) = d_G(v, u)$ para quaiser $u, v \in V(G)$;

(4) $d_G(u, w) \leq d_G(uv) + d_G(v, w)$ para quaisquer $u, v, w \in V(G)$.
(desigualdade triangular)

Como a função de distância $d_G(x, y)$ satisfaz as 4 propriedades acima, isso implica que ela é uma métrica e que $(V(G), d_G(x, y))$ é um espaço métrico.

Demonstração da desigualdade triangular

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ para quaisquer $u, v, w \in V(G)$.

Demonstração:

- Seja P_1 uma (u, v)-geodésica e P_2 uma (v, w)-geodésica no grafo G.

Demonstração da desigualdade triangular

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ para quaisquer $u, v, w \in V(G)$.

Demonstração:

- Seja P_1 uma (u, v)-geodésica e P_2 uma (v, w)-geodésica no grafo G.
- A concatenação $P_1 P_2$ produz um (u, w)-passeio em G de comprimento $d(u, v) + d(v, w)$.

Demonstração da desigualdade triangular

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ para quaisquer $u, v, w \in V(G)$.

Demonstração:

- Seja P_1 uma (u, v)-geodésica e P_2 uma (v, w)-geodésica no grafo G.
- A concatenação P_1P_2 produz um (u, w)-passeio em G de comprimento $d(u, v) + d(v, w)$.
- Pelo lema visto anteriormente, G contém um (u, w)-caminho cujo comprimento é, no máximo, $d(u, v) + d(v, w)$.

Demonstração da desigualdade triangular

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

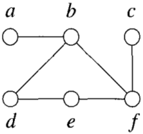
$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ para quaisquer $u, v, w \in V(G)$.

Demonstração:

- Seja P_1 uma (u, v)-geodésica e P_2 uma (v, w)-geodésica no grafo G.
- A concatenação $P_1 P_2$ produz um (u, w)-passeio em G de comprimento $d(u, v) + d(v, w)$.
- Pelo lema visto anteriormente, G contém um (u, w)-caminho cujo comprimento é, no máximo, $d(u, v) + d(v, w)$.
- Portanto, $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$. $\blacksquare$

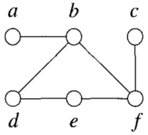
Excentricidade, raio e diâmetro

- **Definição:** Dado um grafo conexo G, a excentricidade de um vértice $v \in V(G)$, denotada por $\epsilon(v)$, é o maior comprimento de uma geodésica começando em v.



Excentricidade, raio e diâmetro

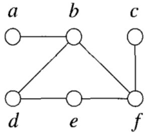
- **Definição:** Dado um grafo conexo G, a excentricidade de um vértice $v \in V(G)$, denotada por $\epsilon(v)$, é o maior comprimento de uma geodésica começando em v.



- **Definição:** O raio de G é a menor excentricidade dentre todas as excentricidades de vértices de G, e é denotado por $\mathrm{rad}(G)$.

Excentricidade, raio e diâmetro

- **Definição:** Dado um grafo conexo G, a excentricidade de um vértice $v \in V(G)$, denotada por $\epsilon(v)$, é o maior comprimento de uma geodésica começando em v.

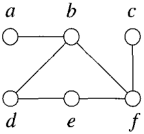


- **Definição:** O raio de G é a menor excentricidade dentre todas as excentricidades de vértices de G, e é denotado por $\mathrm{rad}(G)$.

- **Definição:** Um vértice $v \in V(G)$ é central se $\epsilon(v) = \mathrm{rad}(G)$. O centro de G é o subgrafo induzido pelos vértices centrais de G.

Excentricidade, raio e diâmetro

- **Definição:** Dado um grafo conexo G, a excentricidade de um vértice $v \in V(G)$, denotada por $\epsilon(v)$, é o maior comprimento de uma geodésica começando em v.



- **Definição:** O raio de G é a menor excentricidade dentre todas as excentricidades de vértices de G, e é denotado por $\mathrm{rad}(G)$.

- **Definição:** Um vértice $v \in V(G)$ é central se $\epsilon(v) = \mathrm{rad}(G)$. O centro de G é o subgrafo induzido pelos vértices centrais de G.

- **Definição:** O diâmetro de G é a maior excentricidade dentre todas as excentricidades de vértices de G.

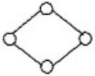
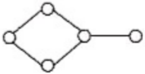
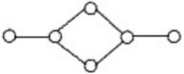
Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Os termos raio e diâmetro foram tomados emprestados da geometria e são familiares por causa dos círculos.
- Sabemos que, em um círculo, o diâmetro é sempre duas vezes o raio.

Exemplo

- Os termos raio e diâmetro foram tomados emprestados da geometria e são familiares por causa dos círculos.
- Sabemos que, em um círculo, o diâmetro é sempre duas vezes o raio.
- No entanto, em grafos isso não procede.

G_2 :  G_3 :  G_4 : 

Calcule rad e diam para os grafos acima.

Relação entre $\mathrm{rad}(G)$ e $\mathrm{diam}(G)$

Teorema: Se G é um grafo simples e conexo, então

$$\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2 \cdot \mathrm{rad}(G)$$

Demonstração:

Relação entre $\mathrm{rad}(G)$ e $\mathrm{diam}(G)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Se G é um grafo simples e conexo, então

$$\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2 \cdot \mathrm{rad}(G)$$

Demonstração:

- A desigualdade $\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G)$ é imediata dado que a menor excentricidade não pode exceder a maior excentricidade.

Relação entre $\mathrm{rad}(G)$ e $\mathrm{diam}(G)$

Teorema: Se G é um grafo simples e conexo, então

$$\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2 \cdot \mathrm{rad}(G)$$

Demonstração:

- A desigualdade $\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G)$ é imediata dado que a menor excentricidade não pode exceder a maior excentricidade.
- Sejam $u, v \in V(G)$ tais que $d(u, v) = \mathrm{diam}(G)$ e seja w um vértice central de G.

Relação entre $\mathrm{rad}(G)$ e $\mathrm{diam}(G)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Se G é um grafo simples e conexo, então

$$\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2 \cdot \mathrm{rad}(G)$$

Demonstração:

- A desigualdade $\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G)$ é imediata dado que a menor excentricidade não pode exceder a maior excentricidade.
- Sejam $u, v \in V(G)$ tais que $d(u, v) = \mathrm{diam}(G)$ e seja w um vértice central de G.
- Então, $\epsilon(w) = \mathrm{rad}(G)$ e a distância entre w e qualquer outro vértice de G é no máximo $\mathrm{rad}(G)$.

Relação entre $\mathrm{rad}(G)$ e $\mathrm{diam}(G)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Se G é um grafo simples e conexo, então

$$\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2 \cdot \mathrm{rad}(G)$$

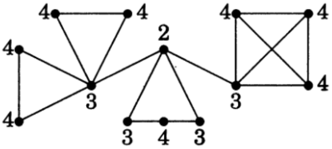
Demonstração:

- A desigualdade $\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G)$ é imediata dado que a menor excentricidade não pode exceder a maior excentricidade.
- Sejam $u, v \in V(G)$ tais que $d(u, v) = \mathrm{diam}(G)$ e seja w um vértice central de G.
- Então, $\epsilon(w) = \mathrm{rad}(G)$ e a distância entre w e qualquer outro vértice de G é no máximo $\mathrm{rad}(G)$.
- Pela desigualdade triangular, $\mathrm{diam}(G) = d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \leq \mathrm{rad}(G) + \mathrm{rad}(G) = 2 \cdot \mathrm{rad}(G)$. ■

Excentricidade de vértices adjacentes

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

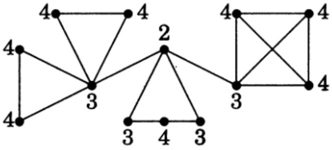
No grafo abaixo, cada vértice está rotulado com sua excentricidade.
O raio é 2 e o diâmetro é 4. O comprimento do maior caminho é 7.



Observe que as excentricidades de quaisquer dois vértices adjacentes diferem de no máximo 1.

Excentricidade de vértices adjacentes

No grafo abaixo, cada vértice está rotulado com sua excentricidade.
O raio é 2 e o diâmetro é 4. O comprimento do maior caminho é 7.



Observe que as excentricidades de quaisquer dois vértices adjacentes diferem de no máximo 1.

De fato, essa constatação é verdadeira para todos os grafos conexos.

> **Teorema:** Para quaisquer dois vértices adjacentes u e v em um grafo conexo, $|\epsilon(u) - \epsilon(v)| \leq 1$.

Teorema

Teorema: Para quaisquer dois vértices adjacentes u e v em um grafo conexo, $|\epsilon(u) - \epsilon(v)| \leq 1$.

Demonstração:

Sem perda de generalidade, considere que $\epsilon(u) \geq \epsilon(v)$.

Seja x um vértice que é o mais distante de u. Logo, $d(u, x) = \epsilon(u)$.

Pela desigualdade triangular, $\epsilon(u) = d(u, x) \leq d(u, v) + d(v, x) \leq 1 + \epsilon(v)$.

Portanto, $\epsilon(u) \leq 1 + \epsilon(v)$, o que implica que $0 \leq \epsilon(u) - \epsilon(v) \leq 1$.

Logo, concluímos que $|\epsilon(u) - \epsilon(v)| \leq 1$. ■

Observação

- **Observação:** Para que um grafo tenha diâmetro grande, muitas arestas devem estar faltando.
- Logo, esperamos que o complemento de um grafo que tem diâmetro grande, tenha muitas arestas e um diâmetro pequeno.

Por exemplo:

Teorema: Se $\mathrm{diam}(G) \leq 4$, então $\mathrm{diam}(\overline{G}) \leq 2$.

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Se $\mathrm{diam}(G) \geq 4$, então $\mathrm{diam}(\overline{G}) \leq 2$.

Demonstração:

- Seja $\mathrm{diam}(G) \geq 4$ e sejam $x, y \in V(G)$ tais que $d(x, y) = 4$.
- Sejam $u, v \in V(G)$. Queremos provar que $d_{\overline{G}}(u, v) \leq 2$.

Teorema

Teorema: Se $\operatorname{diam}(G) \geq 4$, então $\operatorname{diam}(\overline{G}) \leq 2$.

Demonstração:

- Seja $\operatorname{diam}(G) \geq 4$ e sejam $x, y \in V(G)$ tais que $d(x, y) = 4$.
- Sejam $u, v \in V(G)$. Queremos provar que $d_{\overline{G}}(u, v) \leq 2$.
- Se u e v são não adjacentes em G, então eles são adjacentes em $\overline{G}$ e o resultado segue.

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Se $\operatorname{diam}(G) \geq 4$, então $\operatorname{diam}(\overline{G}) \leq 2$.

Demonstração:

- Seja $\operatorname{diam}(G) \geq 4$ e sejam $x, y \in V(G)$ tais que $d(x, y) = 4$.
- Sejam $u, v \in V(G)$. Queremos provar que $d_{\overline{G}}(u, v) \leq 2$.
- Se u e v são não adjacentes em G, então eles são adjacentes em $\overline{G}$ e o resultado segue.
- Se u e v são adjacentes em G, então x e y não podem ambos serem vizinhos de u e v, pois isso implicaria que existe um (x, y)-caminho de comprimento no máximo 3.

Teorema

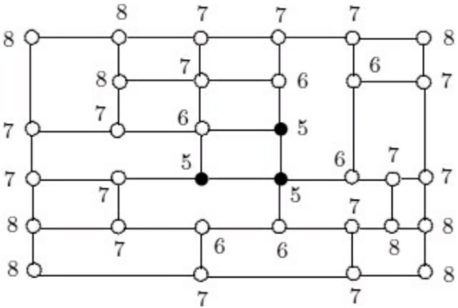
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Se $\mathrm{diam}(G) \geq 4$, então $\mathrm{diam}(\overline{G}) \leq 2$.

Demonstração:

- Seja $\mathrm{diam}(G) \geq 4$ e sejam $x, y \in V(G)$ tais que $d(x, y) = 4$.
- Sejam $u, v \in V(G)$. Queremos provar que $d_{\overline{G}}(u, v) \leq 2$.
- Se u e v são não adjacentes em G, então eles são adjacentes em $\overline{G}$ e o resultado segue.
- Se u e v são adjacentes em G, então x e y não podem ambos serem vizinhos de u e v, pois isso implicaria que existe um (x, y)-caminho de comprimento no máximo 3.
- Portanto, u e v são ambos não adjacentes a x ou a y (ou a ambos).
- Então, $d_{\overline{G}}(u, v) = 2$. $\blacksquare$

Solução do problema do quartel de bombeiros



Cada vértice está rotulado com sua excentricidade. Os vértices com menor excentricidade são os vértices centrais do grafo.

Caracterização de grafos bipartidos

Grafos bipartidos

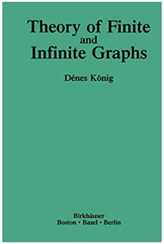
Usando o conceito de ciclo, podemos agora caracterizar a família dos grafos bipartidos.

Grafos bipartidos

Usando o conceito de ciclo, podemos agora caracterizar a família dos grafos bipartidos.

> **Teorema (Dénes König 1936):** Um grafo é bipartido se e somente se ele não contém ciclos ímpares.

Dénes König



Primeiro livro de
Teoria dos Grafos

Teorema — Demonstração

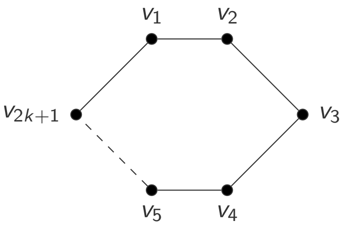
Teorema (Dénes König 1936): Um grafo é bipartido se e somente se ele não contém ciclos ímpares.

($\Longrightarrow$) Demonstração da condição necessária:

- Seja G bipartido com bipartição (X, Y). Por definição de bipartição, temos que $X \cap Y = \emptyset$ e $X \cup Y = V(G)$.

- Por contradição, suponha que G contém um ciclo ímpar, com $2k+1$ vértices $v_1 v_2 v_3 \cdots v_{2k+1} v_1$ tal que v_i é adjacente a v_{i+1}, para $i = 1, 2, \ldots, 2k$, e v_{2k+1} é adjacente a v_1.

Demonstração (Continuação)



- Sem perda de generalidade, podemos assumir que $v_1 \in X$.
- Como $v_1 v_2 \in E(G)$ e G é bipartido, temos que $v_2 \in Y$. Similarmente, $v_3 \in X$ e, em geral, $v_{2i+1} \in X$ e $v_{2i} \in Y$. Logo, $v_{2k+1} \in X$.
- Como $v_{2k+1} \in X$ implica $v_1 \in Y$, temos que $v_1 \in Y$ e $v_1 \in X$, o que contradiz o fato de que $X \cap Y = \emptyset$.
- Portanto, G não contém ciclo ímpar.

Demonstração (Continuação)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

($\Longleftarrow$) Demonstração da condição suficiente: Se G não contém ciclo ímpar, então G é bipartido.

- Seja G um grafo que não contém ciclo ímpar. Sem perda de generalidade, podemos supor que G é conexo.

- Escolha um vértice arbitrário $u \in V(G)$ e defina uma partição (X, Y) de $V(G)$ como a seguir:
  - $X = \{x \in V(G)\colon d(u, x) \text{ é par } \}$
  - $Y = \{y \in V(G)\colon d(u, y) \text{ é ímpar } \}$

- Como $d(u, u) = 0$, o próprio u pertence a X.

- Devemos mostrar que (X, Y) é uma bipartição de G.

Demonstração (Continuação)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Repetindo a definição da partição (X, Y):
  - $X = \{x \in V(G) \colon d(u,x) \text{ é par } \}$
  - $Y = \{y \in V(G) \colon d(u,y) \text{ é ímpar } \}$
- Claramente, temos que $X \cap Y = \emptyset$ e $X \cup Y = V(G)$.
- Resta provar que toda aresta em G liga um vértice de X a um vértice de Y.

Demonstração (Continuação)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Sejam x_1 e x_2 dois vértices de X. Seja P um caminho mais curto de u a x_1 e Q um caminho mais curto de u a x_2.
- Seja u_1 o vértice mais próximo de x_1 e x_2 que é comum a ambos P e Q.
- Como P e Q são caminhos mais curtos, os comprimentos das suas seções $uP'u_1$ e $uQ'u_1$ também são caminhos mais curtos. Mais do que isso, têm o mesmo comprimento.
- Note que os compimentos de P e Q são pares.
- Como os comprimentos de P e Q são pares, os comprimentos do subcaminho $P_1 = u_1 \ldots x_1$ e do subcaminho $P_2 = u_1 \ldots x_2$ têm a mesma paridade.

Demonstração (Continuação)

- Como os comprimentos de P e Q são pares, os comprimentos do subcaminho $P_1 = u_1 \ldots x_1$ e do subcaminho $P_2 = u_1 \ldots x_2$ têm a mesma paridade.

- Com isso, obtemos que o (x_1, x_2)-caminho $\overleftarrow{P_1}P_2$ possui comprimento par.

- Se x_1 e x_2 são adjacentes, então o (x_1, x_2)-caminho $\overleftarrow{P_1}P_2$, juntamente com a aresta x_1x_2 formam um ciclo ímpar, uma contradição.

- Logo, nenhum par de vértices de X é adjacente. Analogamente, nenhum par de vértices de Y é adjacente.

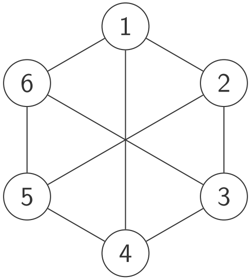
- Portanto, G é um grafo bipartido. $\blacksquare$

Cintura

- A cintura de um grafo G é o comprimento de um ciclo mais curto em G.
- Se G não tem ciclos, definimos a cintura de G como infinita.

Cintura

- A cintura de um grafo G é o comprimento de um ciclo mais curto em G.
- Se G não tem ciclos, definimos a cintura de G como infinita.

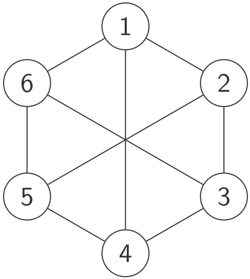


Qual a cintura deste grafo?

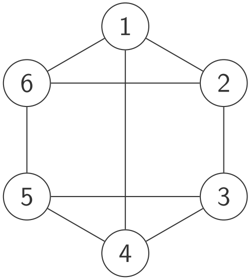
Cintura

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- A cintura de um grafo G é o comprimento de um ciclo mais curto em G.
- Se G não tem ciclos, definimos a cintura de G como infinita.



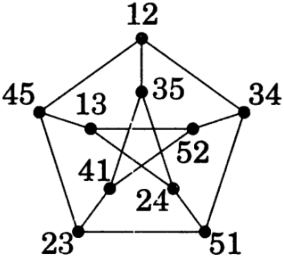
Qual a cintura deste grafo?



Qual a cintura deste grafo?

Cintura do Grafo de Petersen

Proposição: O grafo de Petersen tem cintura 5.



Definição: Dado um conjunto S de 5 elementos, o grafo de Petersen é o grafo cujos vértices são os subconjuntos de S com 2 elementos, tais que dois vértices são adjacentes se e somente se os conjuntos que os definem são disjuntos.

Cintura do Grafo de Petersen

Proposição: O grafo de Petersen tem cintura 5.

Demonstração:

Cintura do Grafo de Petersen

Proposição: O grafo de Petersen tem cintura 5.

Demonstração:

- Como o grafo de Petersen, P, é simples, então ele não contém ciclos de comprimento 1 ou 2.

Cintura do Grafo de Petersen

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Proposição: O grafo de Petersen tem cintura 5.

Demonstração:

- Como o grafo de Petersen, P, é simples, então ele não contém ciclos de comprimento 1 ou 2.
- Para que P contivesse um ciclo de comprimento 3, seria necessário 3 subconjuntos de dois elementos mutuamente disjuntos, o que implicaria que o conjunto original S tem pelo menos 6 elementos, o que é uma contradição.

Continuação da demonstração

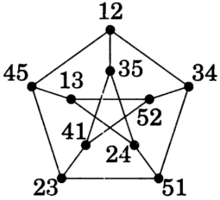
- Para que P contivesse um ciclo de comprimento 4, seria necessário pelo menos dois vértices não adjacentes com vizinhos em comum.

Continuação da demonstração

- Para que P contivesse um ciclo de comprimento 4, seria necessário pelo menos dois vértices não adjacentes com vizinhos em comum.
- Mas isso não é possível pois, como provado anteriormente, se dois vértices são não-adjacentes em P, então eles têm **exatamente um** vizinho em comum.

Continuação da demonstração

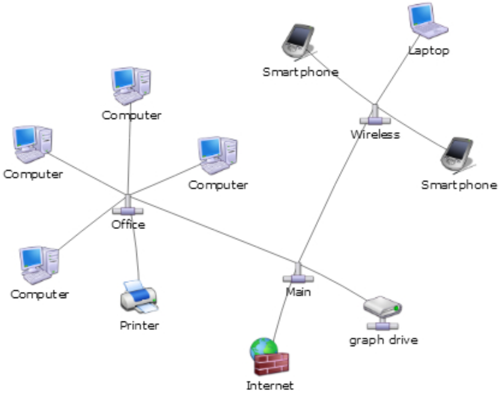
- Para que P contivesse um ciclo de comprimento 4, seria necessário pelo menos dois vértices não adjacentes com vizinhos em comum.
- Mas isso não é possível pois, como provado anteriormente, se dois vértices são não-adjacentes em P, então eles têm **exatamente um** vizinho em comum.
- Para concluir, basta mostrar um ciclo de tamanho 5 em P. Este ciclo é formado pela sequência de vértices $12, 34, 51, 23, 45$. Logo, a cintura de P é 5. ■



Pontes

Pontes (arestas de corte)

- Em certas redes, danificação em alguns links podem tornar toda a rede ou parte dela inoperante.

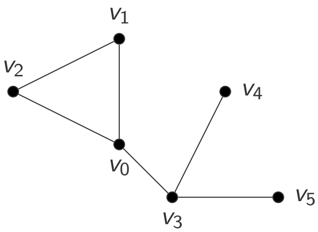


Pontes

- Dizemos que uma aresta e de um grafo G é uma ponte ou aresta de corte se a sua remoção aumenta o número de componentes conexas do grafo, ou seja, $c(G - e) = c(G) + 1$.

Pontes

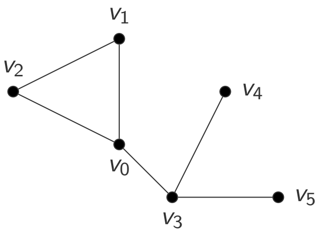
- Dizemos que uma aresta e de um grafo G é uma ponte ou aresta de corte se a sua remoção aumenta o número de componentes conexas do grafo, ou seja, $c(G - e) = c(G) + 1$.



Um grafo com 3 pontes

Pontes

- Dizemos que uma aresta e de um grafo G é uma ponte ou aresta de corte se a sua remoção aumenta o número de componentes conexas do grafo, ou seja, $c(G - e) = c(G) + 1$.



Um grafo com 3 pontes

- A seguir caracterizamos pontes em termos de ciclos.

Pontes

Teorema: Uma aresta e de um grafo G é uma ponte se, e somente se, a aresta e não está contida em um ciclo de G.

Demonstração:

Pontes

Teorema: Uma aresta e de um grafo G é uma ponte se, e somente se, a aresta e não está contida em um ciclo de G.

Demonstração:

- ($\Longleftarrow$) Pela contrapositiva. Suponha que $e = xy$ é uma aresta de G que não é uma ponte e que e está contida em uma componente H de G. (Note que $H = G$ quando G é conexo.)

Pontes

Teorema: Uma aresta e de um grafo G é uma ponte se, e somente se, a aresta e não está contida em um ciclo de G.

Demonstração:

- ($\Longleftarrow$) Pela contrapositiva. Suponha que $e = xy$ é uma aresta de G que não é uma ponte e que e está contida em uma componente H de G. (Note que $H = G$ quando G é conexo.)

- Pela definição de e, temos que $H - e$ é conexo.

Pontes

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Uma aresta e de um grafo G é uma ponte se, e somente se, a aresta e não está contida em um ciclo de G.

Demonstração:

- ($\Longleftarrow$) Pela contrapositiva. Suponha que $e = xy$ é uma aresta de G que não é uma ponte e que e está contida em uma componente H de G. (Note que $H = G$ quando G é conexo.)

- Pela definição de e, temos que $H - e$ é conexo.

- Então, existe um (x, y)-caminho P em $H - e$.

Pontes

Teorema: Uma aresta e de um grafo G é uma ponte se, e somente se, a aresta e não está contida em um ciclo de G.

Demonstração:

- ($\Longleftarrow$) Pela contrapositiva. Suponha que $e = xy$ é uma aresta de G que não é uma ponte e que e está contida em uma componente H de G. (Note que $H = G$ quando G é conexo.)
- Pela definição de e, temos que $H - e$ é conexo.
- Então, existe um (x, y)-caminho P em $H - e$.
- Porém, $P + e$ formam um ciclo em H que passa pela aresta e. Logo, e pertence a um ciclo, e o resultado segue.

Continuação da demonstração

Teorema: Uma aresta e de um grafo G é uma ponte se e somente se e não está contida em um ciclo de G.

- ($\Longrightarrow$) Pela contrapositiva. Suponha que $e = xy$ pertence a um ciclo C de G e que e pertence a uma componente H de G.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

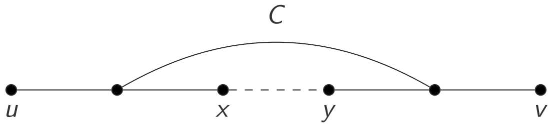
Teorema: Uma aresta e de um grafo G é uma ponte se e somente se e não está contida em um ciclo de G.

- ($\Longrightarrow$) Pela contrapositiva. Suponha que $e = xy$ pertence a um ciclo C de G e que e pertence a uma componente H de G.

- Sejam $u, v \in V(H)$ vértices arbitrários. Como H é uma componente conexa, H contém um (u, v)-caminho P. Se P não contém e, então P existe em $H - e$, e o resultado segue.

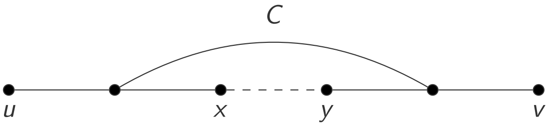
Continuação da demonstração

- Considere, então, que P contém $e = xy$. Neste caso, suponha, por simetria que x está entre u e y no caminho P.



Continuação da demonstração

- Considere, então, que P contém $e = xy$. Neste caso, suponha, por simetria que x está entre u e y no caminho P.

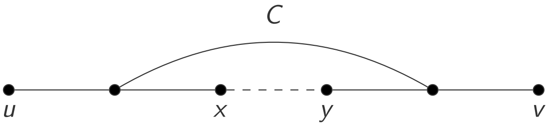


- Note que $H - e$ contém um (u, x)-caminho P_1 e um (y, v)-caminho P_2 ao longo de P.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

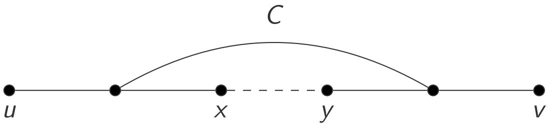
- Considere, então, que P contém $e = xy$. Neste caso, suponha, por simetria que x está entre u e y no caminho P.



- Note que $H - e$ contém um (u, x)-caminho P_1 e um (y, v)-caminho P_2 ao longo de P.

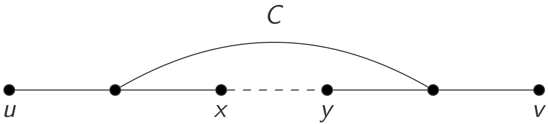
- Além disso, como a aresta e está contida em um ciclo C, existe um (x, y)-caminho P_3 ao longo de C.

Continuação da demonstração



- Deste modo, a concatenação de caminhos $P_1 P_2 P_3$ forma um (u, v)-passeio em $H - e$. Por um lema visto em sala, concluímos que $H - e$ contém um (u, v)-caminho.

Continuação da demonstração



- Deste modo, a concatenação de caminhos $P_1P_2P_3$ forma um (u, v)-passeio em $H - e$. Por um lema visto em sala, concluímos que $H - e$ contém um (u, v)-caminho.
- Como u e v são arbitrários, concluímos que $H - e$ é conexo. ■

Exercícios

Exercícios

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Prove as seguintes afirmações:

Teorema: Seja G um grafo simples. Se G é não-conexo, então $\overline{G}$ é conexo.

Teorema: Todo grafo com n vértices e m arestas tem pelo menos $n - m$ componentes.
Dica: Use indução no número de arestas.

Exercícios

- Prove que um grafo é conexo se e somente se existe um (u, v)-caminho em G para todo par de vértices $u, v \in V(G)$.
- Prove que dois caminhos mais longos em um grafo conexo G devem ter um vértice em comum.
- Prove que se $d(u) + d(v) \geq n - 1$ para quaisquer dois vértices não adjacentes u e v de um grafo G com ordem n, então $diam(G) \leq 2$.
- Prove que todo passeio de comprimento ímpar contém um ciclo ímpar.

Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Prove que se uma aresta e_1 está em uma trilha fechada de G, então e_1 está em um ciclo de G.

- Prove que se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo.

- Prove que se G é simples e $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo de comprimento pelo menos $\delta(G) + 1$.

- Prove que se $|E(G)| \geq |V(G)|$, então G contém um ciclo.

- Prove que se G é um grafo simples com diâmetro 2 e com $\Delta(G) = n - 2$, então $m \geq 2n - 4$.

Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Prove que um grafo k-regular com cintura 4 tem pelo menos $2k$ vértices.

- Prove que um grafo k-regular com cintura 5 tem pelo menos $k^2 + 1$ vértices.

- Prove que um grafo k-regular com cintura 5 e diâmetro 2 tem exatamante $k^2 + 1$ vértices e encontre tal grafo para $k = 2, 3$.