Subgrafos e Operações em Grafos

Teoria dos Grafos — QXD0152

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

1º semestre/2021

Tópicos desta aula

- Remoção e adição de vértices e arestas
- Subgrafos
- União e Interseção de grafos
- Complemento de um grafo
- Subdivisão de arestas
- Identificação de vértices
- Contração de arestas

Introdução

Introdução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Geralmente, quando estamos tentando provar uma propriedade para um grafo, sentimos a necessidade de olhar apenas para uma parte do grafo.
  - Muitos objetos matemáticos contém sub-objetos: conjuntos contém subconjuntos, espaços vetoriais contém subespaços, e grafos contém subgrafos.

Introdução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Geralmente, quando estamos tentando provar uma propriedade para um grafo, sentimos a necessidade de olhar apenas para uma parte do grafo.
    - Muitos objetos matemáticos contém sub-objetos: conjuntos contém subconjuntos, espaços vetoriais contém subespaços, e grafos contém subgrafos.
- Outras vezes, desejamos realizar uma operação no grafo a fim de momentaneamente tranformá-lo em outro grafo.

Introdução

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Geralmente, quando estamos tentando provar uma propriedade para um grafo, sentimos a necessidade de olhar apenas para uma parte do grafo.
  - Muitos objetos matemáticos contém sub-objetos: conjuntos contém subconjuntos, espaços vetoriais contém subespaços, e grafos contém subgrafos.

- Outras vezes, desejamos realizar uma operação no grafo a fim de momentaneamente tranformá-lo em outro grafo.

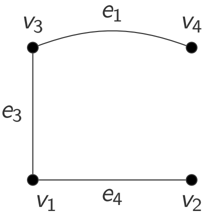
- A seguir, apresentamos algumas das operações que podem ser realizadas em grafos.

Remoção e adição de vértices e arestas

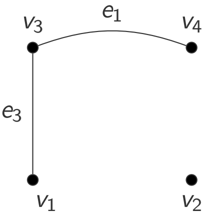
Remoção e adição de uma aresta

Dado um grafo G com m arestas:

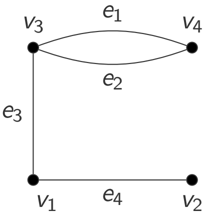
- remover uma aresta e de G consiste em remover e do conjunto $E(G)$. O grafo resultante é denotado por $G - e$.
- adicionar uma nova aresta e a G consiste em adicionar e ao conjunto $E(G)$ e ajustar a função ψ_G adequadamente. O grafo resultante é denotado por $G + e$.



Grafo G



Grafo $G - e_4$

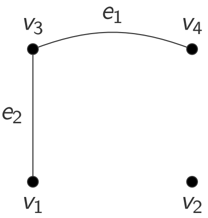


Grafo $G + e_2$

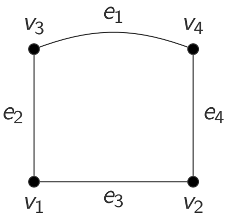
Remoção e adição de várias arestas

- Similarmente, o grafo obtido a partir de G pela adição de um conjunto de arestas $E' \not\subseteq E(G)$ é denotado por $G + E'$.

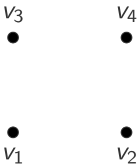
- Já o grafo obtido pela remoção de um conjunto de arestas $E' \subseteq E(G)$ é denotado por $G - E'$.



Grafo G



$G + \{e_3, e_4\}$



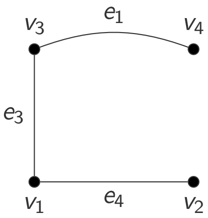
$G - \{e_1, e_2\}$

Remoção e adição de um vértice

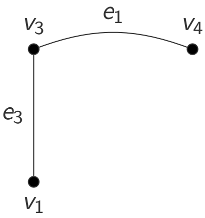
Dado um grafo G com n vértices:

- remover um vértice $v \in V(G)$ consiste em remover v de $V(G)$ e remover de $E(G)$ todas as arestas incidente em v.
  O grafo resultante é denotado por $G - v$.

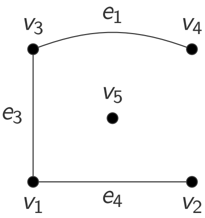
- adicionar um novo vértice v em G consiste em adicionar v ao conjunto $V(G)$. O grafo resultante é denotado por $G + v$.



Grafo G



Grafo $G - v_2$

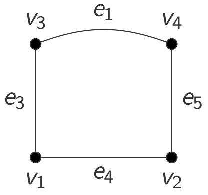


Grafo $G + v_5$

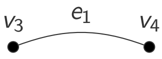
Remoção e adição de vários vértices

- Similarmente, o grafo obtido a partir de G pela adição de um conjunto de vértices $V' \not\subseteq V(G)$ é denotado por $G + V'$.

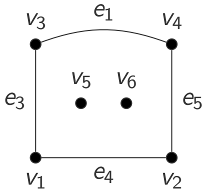
- Já o grafo obtido pela remoção de um conjunto de vértices $V' \subseteq V(G)$ é denotado por $G - V'$.



Grafo G



Grafo $G - \{v_1, v_2\}$



Grafo $G + \{v_5, v_6\}$

Subgrafo

Subgrafo

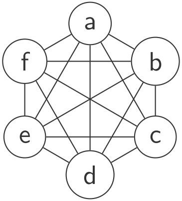
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um grafo H é um subgrafo de um grafo G se:
  - $V(H) \subseteq V(G)$,
  - $E(H) \subseteq E(G)$ e
  - ψ_H é uma restrição de ψ_G a $E(H)$.

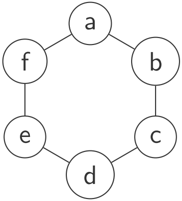
Subgrafo

- Um grafo H é um subgrafo de um grafo G se:
  - $V(H) \subseteq V(G)$,
  - $E(H) \subseteq E(G)$ e
  - ψ_H é uma restrição de ψ_G a $E(H)$.

- Se H é subgrafo de G, então representamos isso por $H \subseteq G$. Dizemos também que G contém H como subgrafo.



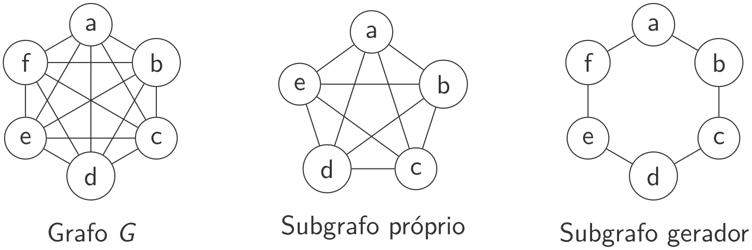
Grafo G



Subgrafo H

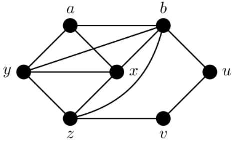
Subgrafo próprio e Subgrafo gerador

- Quando $H \subseteq G$ mas $H \neq G$, nós escrevemos $H \subset G$ e dizemos que H é um subgrafo próprio de G.
- Se H é um subgrafo de G, então G é um supergrafo de H.
- Um subgrafo gerador de G é um subgrafo $H \subseteq G$ com $V(H) = V(G)$.

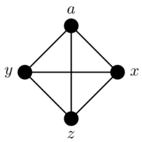


Exemplo

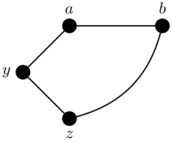
- O grafo H_1 é um subgrafo de G?
- H_2 e H_3 são subgrafos de G?
- Quais são subgrafos geradores de G?



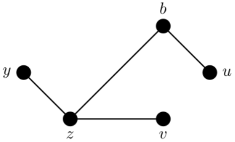
G



H_1



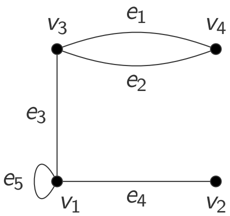
H_2



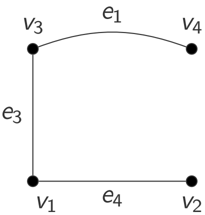
H_2

Grafo subjacente

- Dado um grafo G, seu grafo subjacente é o grafo simples obtido a partir de G pela remoção de todos os laços e arestas múltiplas.



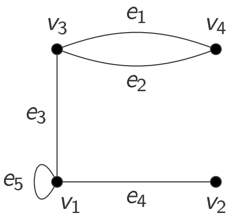
Grafo G



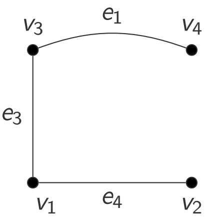
Grafo subjacente de G

Grafo subjacente

- Dado um grafo G, seu grafo subjacente é o grafo simples obtido a partir de G pela remoção de todos os laços e arestas múltiplas.



Grafo G

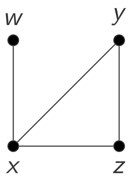


Grafo subjacente de G

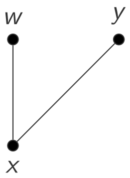
- **Obs.:** Note que o grafo subjacente de um grafo G é um subgrafo gerador de G e é simples.

Subgrafo induzido

- Seja G um grafo e $V' \subset V(G)$ tal que $V' \neq \emptyset$.
- O subgrafo de G induzido por V' é o subgrafo de G que tem V' como conjunto de vértices e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de G que têm ambos os extremos em V'.
- Esse subgrafo é denotado por $G[V']$.
- Dizemos também que $G[V']$ é um subgrafo induzido de G.



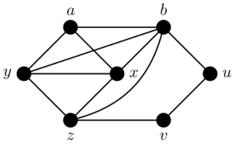
Grafo H



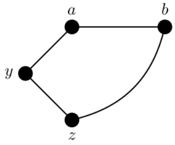
Grafo induzido por $V' = \{w, x, y\}$
Denotado por $H[V']$

Exemplo

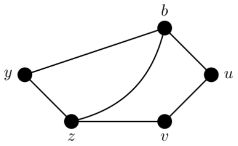
- Quais dos subgrafos abaixo são subgrafos induzidos do grafo G?



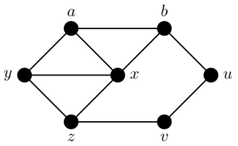
G



H_1



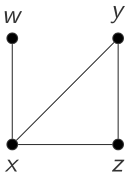
H_2



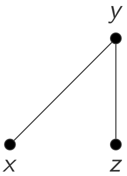
H_2

Subgrafo aresta-induzido

- Seja G um grafo e $E' \subseteq E(G)$, com $E' \neq \emptyset$.
- O subgrafo induzido por E' é o subgrafo cujo conjunto de vértices é o conjunto dos extremos das arestas em E' e cujo conjunto de arestas é o próprio E'.
- Esse subgrafo é denotado por $G[E']$ e é chamado subgrafo aresta-induzido.



Grafo H

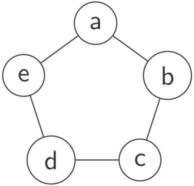


Grafo induzido por $E' = \{xy, yz\}$
Denotado por $H[E']$

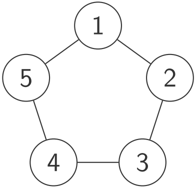
União e interseção de grafos

Grafos disjuntos

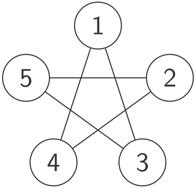
- Sejam G e H dois grafos simples.
- Dizemos que G e H são disjuntos se $V(G) \cap V(H) = \emptyset$.
- G e H são aresta-disjuntos se não possuem arestas em comum.



G_1



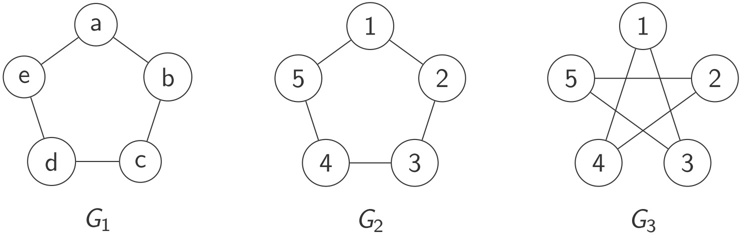
G_2



G_3

Grafos disjuntos

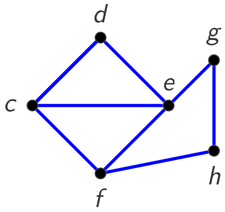
- Sejam G e H dois grafos simples.
- Dizemos que G e H são disjuntos se $V(G) \cap V(H) = \emptyset$.
- G e H são aresta-disjuntos se não possuem arestas em comum.



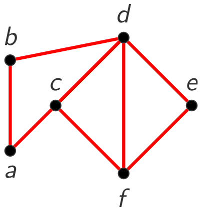
- G_1 e G_2 são disjuntos, mas G_2 e G_3 não são disjuntos
- G_1 e G_2 são aresta-disjuntos, assim como G_2 e G_3

União de grafos

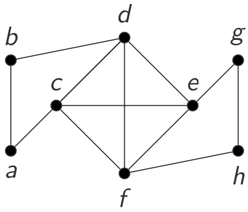
- Sejam G_1 e G_2 dois grafos simples.
- A união de G_1 e G_2, denotada por $G_1 \cup G_2$, é o grafo cujo conjunto de vértices é $V(G_1) \cup V(G_2)$ e cujo conjunto de arestas é $E(G_1) \cup E(G_2)$.



Grafo G_1



Grafo G_2

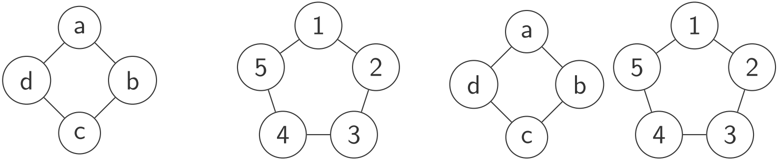


Grafo $G_1 \cup G_2$

União disjunta de grafos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

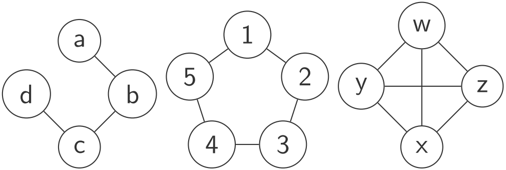
- Sejam G_1 e G_2 dois grafos simples.
- Quando G_1 e G_2 são disjuntos, também denotamos sua união por $G_1 + G_2$ e dizemos que é uma união disjunta.



G_1 G_2 $G_1 + G_2$

União disjunta e conexidade

- **Note que:** um grafo é não-conexo se e somente se ele é a união disjunta de dois outros grafos.



Grafo não-conexo G

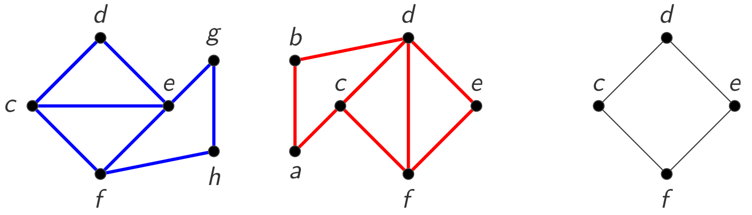
Prop.: Todo grafo G pode ser expresso unicamente como a união disjunta de grafos conexos. (Exercício: provar usando indução.)

- Esses subgrafos conexos são chamados de componentes conexas de G.
- O número de componentes conexas de G é denotado por $c(G)$.

Interseção de grafos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Sejam G_1 e G_2 dois grafos simples.
- A interseção de G_1 e G_2, denotada por $G_1 \cap G_2$, é o grafo cujo conjunto de vértices é $V(G_1) \cap V(G_2)$ e cujo conjunto de arestas é $E(G_1) \cap E(G_2)$.
  - mas, neste caso, G_1 e G_2 devem ter pelo menos um vértice em comum (não admitimos grafos sem vértices).

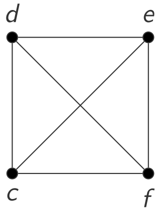


Grafo G_1 Grafo G_2 Grafo $G_1 \cap G_2$

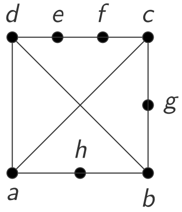
Subdivisão de arestas

Subdivisão de arestas

- Subdividir uma aresta uv de um grafo G é a operação que consiste em remover a aresta uv e adicionar um novo vértice w e duas novas arestas uw e wv em G.
- Um grafo G' é uma subdivisão de um grafo G se G' pode ser obtido a partir de G por meio de sucessivas operações de subdivisão de algumas arestas de G.



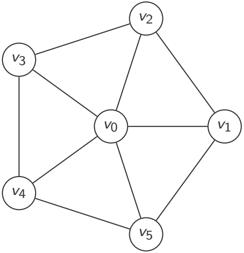
Grafo G



Subdivisão G' de G

Subdivisão de arestas - Atividade 1

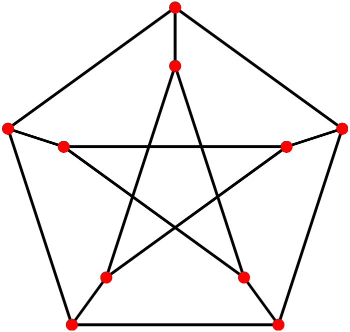
- Prove que todo grafo roda W_n contém como subgrafo uma subdivisão do grafo completo K_4.



Roda W_5

Subdivisão de arestas - Atividade 2

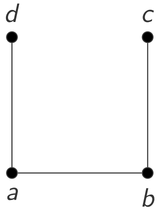
- Prove que o grafo de Petersen contém um subgrafo H que é uma subdivisão do grafo bipartido $K_{3,3}$



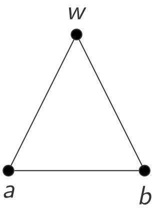
Identificação de vértices

Identificação de vértices

- Seja G um grafo e dois vértices **não adjacentes** $u, v \in V(G)$.
- Identificar os vértices u e v consiste em removê-los do grafo G e adicionar um novo vértice w em G tal que todas as arestas que antes eram incidentes nos vértices u e v agora são incidentes no vértice w.



Grafo G

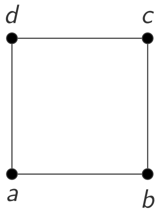


Após identificar os vértices d e c

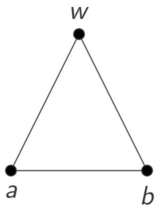
Contração de arestas

Contração de arestas

- A contração de uma aresta uv de um grafo G é a operação de remover a aresta uv e identificar os dois vértices u e v.



Grafo G

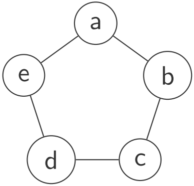


Após contrair a aresta cd

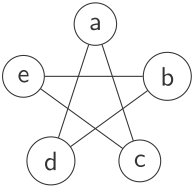
Complemento de um grafo

Complemento de um grafo simples

- O complemento de um grafo simples G é o grafo simples $\overline{G}$ com conjunto de vértices $V(\overline{G}) = V(G)$ e tal que, para todo par de vértices $u, v \in V(G)$, $uv \in E(\overline{G})$ se e somente se $uv \notin E(G)$.
- Exemplo 1: O grafo vazio com n vértices, O_n, é o complemento do grafo completo K_n.
- Exemplo 2:



Grafo G

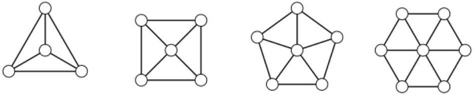


Grafo $\overline{G}$

Junção de dois grafos

Junção de dois grafos

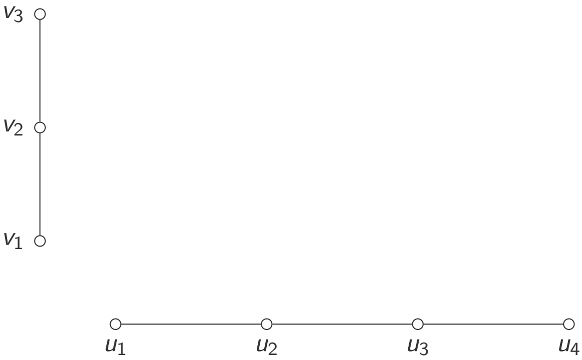
- A junção de dois grafos G e H é o grafo $G + H$ obtido a partir da união disjunta $G \cup H$ adicionando as arestas $\{uv\colon u \in V(G), v \in V(H)\}$.
- Observe que uma roda W_n com $n \geq 4$ é a junção de um ciclo C_n com o grafo completo K_1, ou seja, $W_n = C_n + K_1$.



Produto Cartesiano de dois grafos

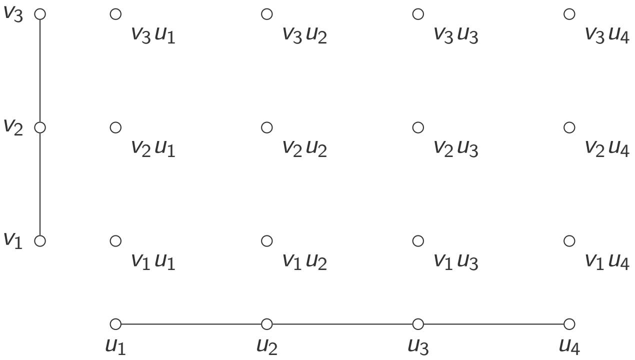
Produto Cartesiano

- O produto Cartesiano de dois grafos G e H é o grafo $G \square H$ que possui conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ e tal que (u, v) é adjacente a (u', v') se e somente se $u = u'$ e $vv' \in E(H)$ ou $v = v'$ e $uu' \in E(G)$.



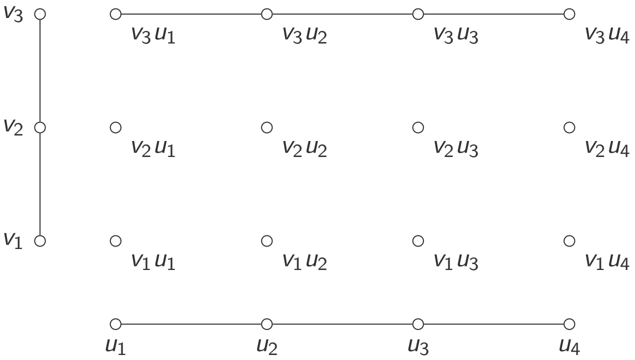
Produto Cartesiano

- O produto Cartesiano de dois grafos G e H é o grafo $G\square H$ que possui conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ e tal que (u, v) é adjacente a (u', v') se e somente se $u = u'$ e $vv' \in E(H)$ ou $v = v'$ e $uu' \in E(G)$.



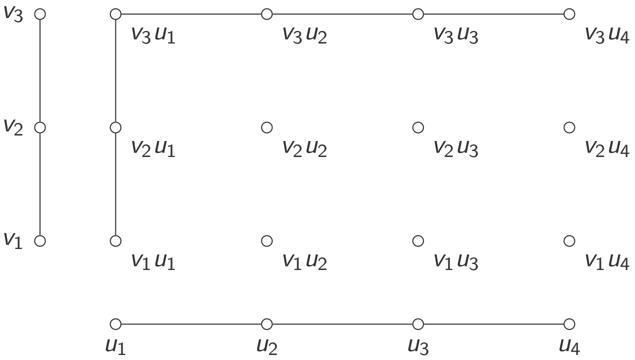
Produto Cartesiano

- O produto Cartesiano de dois grafos G e H é o grafo $G \square H$ que possui conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ e tal que (u, v) é adjacente a (u', v') se e somente se $u = u'$ e $vv' \in E(H)$ ou $v = v'$ e $uu' \in E(G)$.



Produto Cartesiano

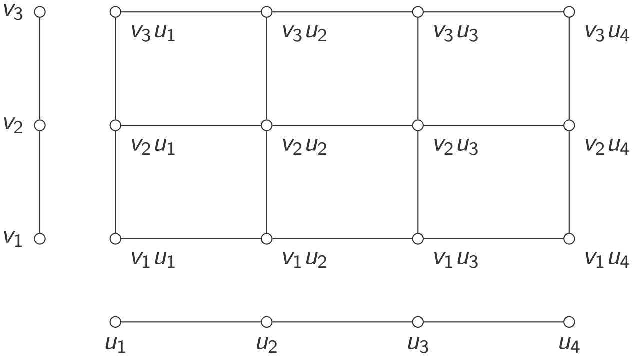
- O produto Cartesiano de dois grafos G e H é o grafo $G \square H$ que possui conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ e tal que (u, v) é adjacente a (u', v') se e somente se $u = u'$ e $vv' \in E(H)$ ou $v = v'$ e $uu' \in E(G)$.



Produto Cartesiano

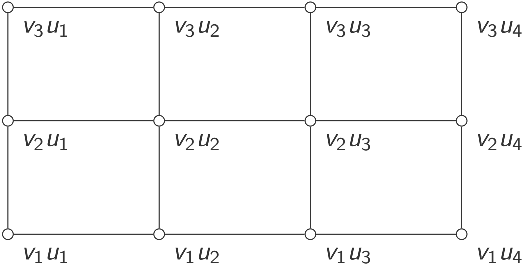
Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- O produto Cartesiano de dois grafos G e H é o grafo $G \square H$ que possui conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ e tal que (u, v) é adjacente a (u', v') se e somente se $u = u'$ e $vv' \in E(H)$ ou $v = v'$ e $uu' \in E(G)$.



Grades $P_r \square P_s$

- Uma grade $G_{r,s}$ é o produto cartesiano de dois caminhos P_r e P_s, $G_{r,s} = P_r \square P_s$.

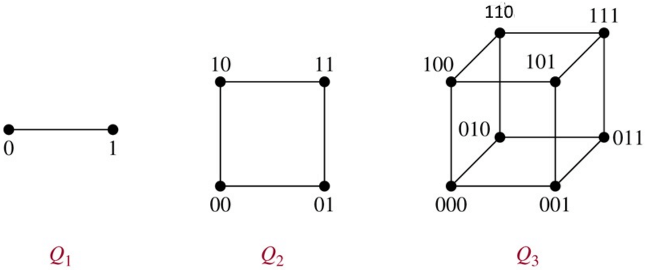


Grafo $P_3 \square P_4$

Hipercubos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Um hipercubo Q_k é definido recursivamente como: $Q_1 = K_2$ e $Q_k = Q_{k-1} \square K_2$.



Os três menores hipercubos

Exercícios

Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

(1) Mostre que o complemento de um caminho de comprimento 3 é um caminho de comprimento 3. Mostre que o complemento de um ciclo de comprimento 5 é um circuito de comprimento 5.

(2) O grafo leque é o grafo $P_{n-1} + K_1$. Determine o tamanho de todos os grafos leques.

(3) Prove que $\overline{G + H} = \overline{G} \cup \overline{H}$.

(4) Determine $m(G + H)$ em termos das ordens e tamanhos de G e H.

(5) Mostre que $m(Q_k) = k \cdot 2^{k-1}$ usando indução.

(6) Mostre que um grafo k-regular com cintura 4 tem pelo menos $2k$ vértices. Quais grafos k-regulares possuem exatamente $2k$ vértices?

Seis pessoas em uma festa

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Atividade: Provar a seguinte afirmação:

> Em qualquer festa com exatamante seis pessoas, ou existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou existem três pessoas que não se conhecem mutuamente.

Fonte: https://pt.vecteezy.com

FIM