Prova do Teorema de Tutte

Theorem 1. *Um grafo G contém um 1-fator se e somente se $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) **Prova da condição necessária.** Seja G um grafo que contém um 1-fator F. Seja $S \subseteq V(G)$. Se $G - S$ não tem componentes ímpares, então $o(G - S) = 0$ e certamente $o(G - S) \leq |S|$.

Suponha que $o(G - S) = k \geq 1$ e sejam $G_1, G_2, \ldots, G_k$ as componentes ímpares de $G - S$. Como G contém o 1-fator F e a ordem de cada subgrafo G_i é ímpar, alguma aresta de F deve ser incidente a um vértice de G_i e a um vértice de S e, além disso, duas componentes ímpares distintas devem ser pareadas com vértices distintos de S. Portanto, $o(G - S) \leq |S|$.

($\Longleftarrow$) **Prova da condição suficiente.** Seja G um grafo e suponha que $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.

> **Observação 1:** G tem um número par de vértices. Fazendo $S = \emptyset$, obtemos que $o(G - S) \leq |S| = 0$, isto é, todas as componentes de G são pares e, portanto, G tem um número par de vértices.

> **Observação 2:** Quando nós adicionamos uma nova aresta ligando duas componentes de $G - S$, o número de componentes ímpares não aumenta (uma componente ímpar e uma par juntas tornam-se uma componente ímpar; adicionalmente, duas componentes de mesma paridade tornam-se uma componente par). Portanto, a Condição de Tutte é preservada pela adição de arestas: se $G' = G + e$ e $S \subseteq V(G)$, então $o(G' - S) \leq o(G - S) \leq |S|$. Além disso, se $G' = G + e$ não tem nenhum 1-fator, então G não tem nenhum 1-fator.

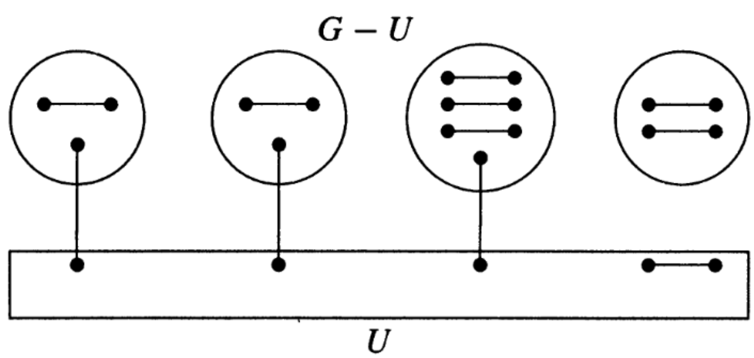
Portanto, o teorema é verdadeiro a menos que exista um grafo simples G tal que G satisfaz a Condição de Tutte, G não tem 1-fator e, adicionando qualquer aresta não existente em G, obtemos um grafo com um 1-fator. Suponha que exista um grafo G com essas propriedades. A seguir, obtemos uma contradição mostrando que G, de fato, contém um 1-fator.

Seja U o conjunto de vértices em G que possuem grau $n-1$, com $n = |V(G)|$. Vamos considerar dois casos.

Caso 1: $G - U$ consiste em grafos completos disjuntos.

Neste caso, os vértices em cada componente de $G - U$ podem ser emparelhados de qualquer modo, sendo que, em cada componente ímpar, restará um vértice não saturado. Como $o(G - S) \leq |U|$ e cada vértice de U é adjacente a todos os vértices de $G - U$, é possível emparelhar o vértice que sobra em cada componente ímpar com um vértice distinto de U.

Os vértices restantes estão em U, que é uma clique (lembre que cada vértice em U tem grau $n-1$ logo U é uma clique). A fim de completar o 1-fator, devemos mostrar apenas que um número par de vértices sobra em U. Até este ponto da demonstração, emparelhamos um número par de vértices de G. Então, a fim de emparelhar os vértices não-saturados de U, basta mostrar que $|V(G)|$ é par, mas isso segue da Observação 1.



Caso 2: $G - U$ não é a união disjunta de grafos completos.

Neste caso, $G - U$ tem dois vértices à distância 2; estes são vértices não adjacentes x e z com um vizinho em comum $y \notin U$. Além disso, $G - U$ tem outro vértice w não adjacente a y, dado que $y \notin U$.

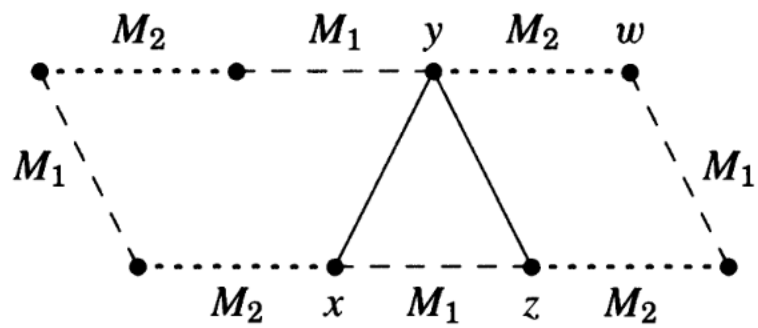
Pela escolha de G, adicionando uma aresta a G criamos um 1-fator. Sejam M_1 e M_2 1-fatores em $G + xz$ e $G + yw$, respectivamente. Basta mostrar que

$M_1 \triangle M_2$ contém um 1-fator que não contém nenhuma das arestas xz e yw, dado que estas arestas não estão originariamente contidas em G.

Seja $F = M_1 \triangle M_2$. Como $xz \in M_1 - M_2$ e $yw \in M_2 - M_1$, ambos xz e yw estão em F. Como todo vértice de G tem grau 1 tanto em M_1 quanto em M_2, todo vértice de G tem grau 0 ou 2 em F. Portanto, as componentes de F são ciclos pares e vértices isolados. Seja C o ciclo de F contendo xz.

Se C não contém yw, então o 1-fator desejado consiste nas arestas de M_2 que estão em C e todas as arestas de M_1 que não estão em C.

Se C contém ambas as arestas yw e xz, como mostrado abaixo, então a fim de evitá-las nós usamos yx ou yz (lembre que y é vizinho de x e z).



Na porção de C começando a partir de y ao longo de yw, nós usamos arestas de M_1 a fim de evitar yw. Quando nós alcançamos $\{x, z\}$, nós usamos zy se nós chegarmos em z (como mostrado acima); caso contrário, nós usamos xy. No restante de C nós usamos as arestas de M_2. Assim, nós produzimos um 1-fator de C que não usa xz ou yw. Combinado com a parte de M_1 e M_2 fora de C, nós temos um 1-fator de G. $\square$