UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Avaliação Continuada 07

QXD0152 — Teoria dos Grafos — 2021.1

Emparelhamentos, Conjuntos Independentes e Coberturas

Professor: Atílio Gomes Luiz
Universidade Federal do Ceará - Campus Quixadá

Data: 28 de julho de 2021

Este documento traz o enunciado da Avaliação Continuada 07.

1 Instruções Preliminares

Em qualquer exercício desta disciplina, tenha em mente que "prove", "demonstre" e "mostre" são sinônimos. Nos exercícios abaixo, em cada um dos casos, você deve oferecer um demonstração do que estiver sendo afirmado.

É muito importante que você suplemente esta lista com exercícios da lista de exercícios complementares ou dos livros conforme sua necessidade. Se tiver facilidade com os tópicos, poucos exercícios bastarão para compreendê-los; se tiver dificuldades, o caminho será reforçar a leitura dos capítulos e resolver mais exercícios.

2 Exercícios

1. (2 points) Prove que toda árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito.

2. (3 points) (a) Seja G um grafo cujos vértices são todos de grau ímpar e M um emparelhamento perfeito em G. Mostre que M inclui todas as arestas de corte de G.
   (b) Mostre que o grafo 3-regular exibido na Figura 2 não tem emparelhamento perfeito.
   (c) Para todo $k \geq 2$, encontre um grafo simples $(2k+1)$-regular sem emparelhamento perfeito.

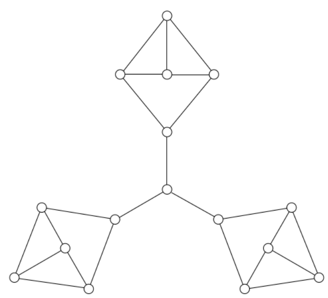

Figura 1: Grafo de Sylvester

3. (2.5 points) Para todo inteiro i com $1 \leq i \leq 4$, dê um exemplo de um grafo conexo G_i com a menor ordem que você conseguir tal que $\alpha(G_i) + \alpha'(G_i) = 5$ e $\alpha(G_i) = i$.

4. (2.5 points) Dois jogadores, Alice e Bob, jogam um jogo em um grafo G selecionando alternadamente vértices distintos $v_0, v_1, v_2, \ldots$ tal que, para $i > 0$, v_i é adjacente a v_{i-1}. Alice é a primeira jogadora e ela pode iniciar escolhendo qualquer vértice do grafo e Bob é o segundo jogador. O último jogador capaz de selecionar um vértice ganha o jogo. Prove que se G tem um emparelhamento perfeito, então Bob tem uma estratégia vencedora.

   Definição: Uma *estratégia vencedora* é um plano bem definido para alcançar o sucesso numa determinada situação.

5. (2 points) **[Bônus]** Seja $G[X,Y]$ um grafo bipartido, seja M^* um emparelhamento máximo em G e seja U o conjunto de vértices em X não cobertos por M^*. Denote por Z o conjunto de todos os vértices em G que são alcançados a partir de algum vértice em U por meio de caminhos M^*-alternantes. Além disso, defina $R = X \cap Z$ e $B = Y \cap Z$. Prove que:
   (a) O conjunto $K^* = (X \backslash R) \cup B$ é uma cobertura por vértices de G,
   (b) $|K^*| = |M^*|$.