Aula 16 — Coloração de arestas

Teoria dos Grafos — QXD0152

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

1º semestre/2021

Introdução

Origem da coloração de arestas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- O interesse em coloração de arestas de grafos foi inspirado no Problema das 4 cores.
  - Coloração de mapas $\iff$ coloração de vértices do grafo dual do mapa

Origem da coloração de arestas

- O interesse em coloração de arestas de grafos foi inspirado no Problema das 4 cores.
    - Coloração de mapas $\Longleftrightarrow$ coloração de vértices do grafo dual do mapa

- Peter Guthrie Tait foi um dos matemáticos que apresentaram "provas" incorretas para o Teorema das 4 Cores.
    - No entanto, ele desenvolveu ideias importantes que deram origem a novas áreas de estudo.

Peter Tait

Origem da coloração de arestas

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- **Definição:** Um mapa cúbico é um grafo plano, conexo, 3-regular e sem pontes.

Origem da coloração de arestas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Um mapa cúbico é um grafo plano, conexo, 3-regular e sem pontes.

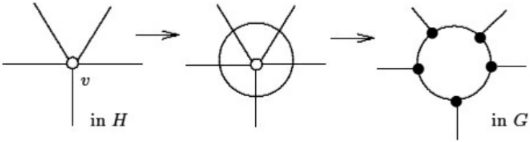
- Tait observou que, se as faces de todos os mapas cúbicos pudessem ser coloridas com no máximo 4 cores, então as faces de todos os grafos planos poderiam ser coloridas com no máximo 4 cores.
  - Inicialmente, podemos desconsiderar mapas (grafos planos) com vértices de grau 1 ou 2, já que esses vértices podem ser coloridos.

Origem da coloração de arestas

- **Definição:** Um mapa cúbico é um grafo plano, conexo, 3-regular e sem pontes.

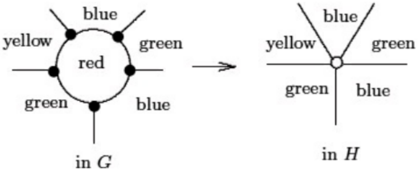
- Tait observou que, se as faces de todos os mapas cúbicos pudessem ser coloridas com no máximo 4 cores, então as faces de todos os grafos planos poderiam ser coloridas com no máximo 4 cores.
  - Inicialmente, podemos desconsiderar mapas (grafos planos) com vértices de grau 1 ou 2, já que esses vértices podem ser coloridos.

- Se um grafo plano H contém vértices de grau 4 ou mais, então um mapa cúbico G pode ser construído a partir de H:



Origem da coloração de arestas

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá



- Agora, se as faces do mapa cúbico resultante G podem ser coloridas com no máximo 4 cores, então tal coloração pode ser usada para produzir uma coloração das regiões do mapa original H.

Origem da coloração de arestas

- Desta forma, a fim de provar o Teorema das 4 Cores, bastaria nos concentrarmos em mapas cúbicos. A fim de provar que mapas cúbicos podem ter suas faces coloridas com 4 cores, Tait provou o seguinte resultado:

Teorema 16.1 [Tait 1878]: As faces de um mapa cúbico G podem ser coloridas com no máximo 4 cores se e somente se as arestas de G podem ser coloridas com no máximo 3 cores de modo que arestas adjacentes recebam cores distintas.

Origem da coloração de arestas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Desta forma, a fim de provar o Teorema das 4 Cores, bastaria nos concentrarmos em mapas cúbicos. A fim de provar que mapas cúbicos podem ter suas faces coloridas com 4 cores, Tait provou o seguinte resultado:

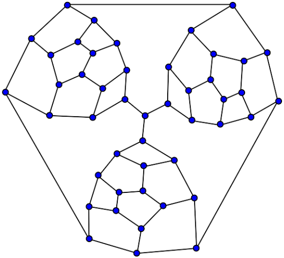
Teorema 16.1 [Tait 1878]: As faces de um mapa cúbico G podem ser coloridas com no máximo 4 cores se e somente se as arestas de G podem ser coloridas com no máximo 3 cores de modo que arestas adjacentes recebam cores distintas.

- Mas será que todo mapa cúbico tem uma **coloração de arestas de Tait**?

- Certamente, todo grafo planar conexo e 3-regular G tem ordem par e, se G for hamiltoniano, então podemos facilmente dar uma coloração de arestas de Tait para G. (Como?)

Origem da coloração de arestas

- Se todo grafo planar conexo e 3-regular G fosse hamiltoniano, então a prova do Teorema das 4 Cores estaria completa.
- Tait acreditava que estes grafos eram hamiltonianos e, com base nisso, ele se convenceu de que tinha provado o Teorema das 4 Cores.
- No entanto, Tait estava enganado. Em 1946, William Tutte apresentou um exemplo de grafo planar 3-conexo e 3-regular que não é hamiltoniano.



Coloração de arestas

Coloração de arestas

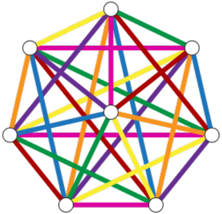
- Assim como queremos pintar as faces de um grafo plano e pintar os vértices de um grafo qualquer, também é de interesse colorir as arestas de um grafo.

Coloração de arestas

- Assim como queremos pintar as faces de um grafo plano e pintar os vértices de um grafo qualquer, também é de interesse colorir as arestas de um grafo.
- Uma k-coloração de arestas de um grafo sem laços G é uma função $f : E(G) \to S$, onde $|S| = k$. Os rótulos do conjunto S são chamados cores e, usualmente, escolhe-se S como o conjunto dos inteiros não negativos.

Coloração de arestas

- Assim como queremos pintar as faces de um grafo plano e pintar os vértices de um grafo qualquer, também é de interesse colorir as arestas de um grafo.
- Uma k-coloração de arestas de um grafo sem laços G é uma função $f \colon E(G) \to S$, onde $|S| = k$. Os rótulos do conjunto S são chamados cores e, usualmente, escolhe-se S como o conjunto dos inteiros não negativos.
- Uma k-coloração de arestas é própria se arestas adjacentes possuem cores diferentes; ou seja, cada classe de cor forma um emparelhamento.



Uma 7-coloração de arestas própria do K_8.

Índice cromático

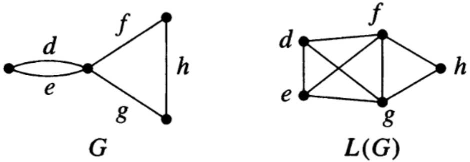
- O menor inteiro k para o qual um grafo sem laços G possui uma k-coloração de arestas própria é denominado índice cromático e denotado por $\chi'(G)$.

- Dado que todas as arestas que incidem em um mesmo vértice devem ter cores distintas em um coloração própria de arestas, imediatamente temos os seguinte limitante inferior:

Lema 16.2: Para todo grafo G sem laços, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

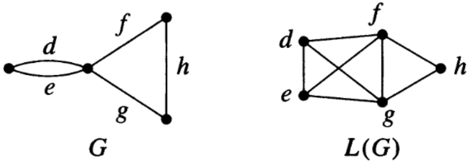
Relembrando os Grafos linha

- O **grafo linha** de um grafo G é o grafo $L(G) = (E(G), A)$ em que A é o conjunto de todos os pares de arestas adjacentes de G.



Relembrando os Grafos linha

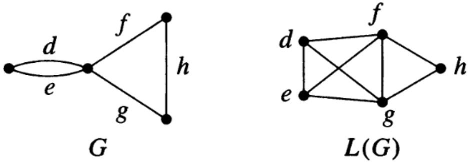
- O **grafo linha** de um grafo G é o grafo $L(G) = (E(G), A)$ em que A é o conjunto de todos os pares de arestas adjacentes de G.



- Algumas questões sobre arestas em G podem ser refraseadas como questões sobre vértices em $L(G)$.

Relembrando os Grafos linha

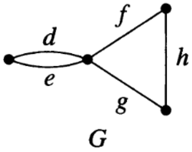
- O **grafo linha** de um grafo G é o grafo $L(G) = (E(G), A)$ em que A é o conjunto de todos os pares de arestas adjacentes de G.

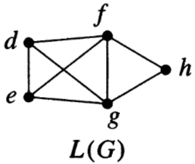


- Algumas questões sobre arestas em G podem ser refraseadas como questões sobre vértices em $L(G)$.
- Por exemplo, um emparelhamento em G torna-se um conjunto independente em $L(G)$. Assim, $\alpha'(G) = \alpha(L(G))$, e o estudo de emparelhamentos máximos em G é o estudo de conjuntos independentes máximos em grafos linha.
- Um circuito Euleriano em G produz um ciclo Hamiltoniano em $L(G)$.

Grafos linha e coloração de arestas

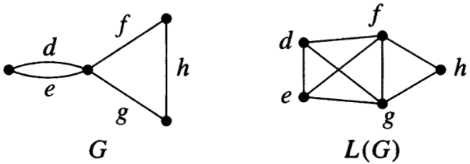
- Colorir as arestas de um grafo G de modo que cada classe de cor seja um emparelhamento é o mesmo que dar uma coloração própria de vértices para o grafo linha $L(G)$ correspondente.





Grafos linha e coloração de arestas

- Colorir as arestas de um grafo G de modo que cada classe de cor seja um emparelhamento é o mesmo que dar uma coloração própria de vértices para o grafo linha $L(G)$ correspondente.



- Assim, a coloração de arestas é um caso especial da coloração de vértices.

Um limite superior para $\chi'(G)$

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema 16.3: Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.

Demonstração:

Um limite superior para $\chi'(G)$

Teorema 16.3: Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.

Demonstração:

- Considere as arestas de G em qualquer ordem $e_1, e_2, \ldots, e_m$.

Um limite superior para $\chi'(G)$

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema 16.3: Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.

Demonstração:

- Considere as arestas de G em qualquer ordem $e_1, e_2, \ldots, e_m$.
- Pinte as arestas de G em ordem atribuindo a cada aresta e_i a menor cor possível que não tenha sido atribuída às arestas adjacentes a e_i e que pertençam ao conjunto $\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$.

Um limite superior para $\chi'(G)$

Teorema 16.3: Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.

Demonstração:

- Considere as arestas de G em qualquer ordem $e_1, e_2, \ldots, e_m$.
- Pinte as arestas de G em ordem atribuindo a cada aresta e_i a menor cor possível que não tenha sido atribuída às arestas adjacentes a e_i e que pertençam ao conjunto $\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$.
- Como nenhuma aresta é incidente a mais do que $2(\Delta(G) - 1)$ outras arestas, esta coloração gulosa nunca usa mais do que $2\Delta(G) - 1$ cores.

Um limite superior para $\chi'(G)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 16.3: Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.

Demonstração:

- Considere as arestas de G em qualquer ordem $e_1, e_2, \ldots, e_m$.
- Pinte as arestas de G em ordem atribuindo a cada aresta e_i a menor cor possível que não tenha sido atribuída às arestas adjacentes a e_i e que pertençam ao conjunto $\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$.
- Como nenhuma aresta é incidente a mais do que $2(\Delta(G) - 1)$ outras arestas, esta coloração gulosa nunca usa mais do que $2\Delta(G) - 1$ cores.
- O procedimento acima é uma coloração gulosa para os vértices do grafo linha $L(G)$.

$$\chi'(G) = \chi(L(G)) \leq \Delta(L(G)) + 1 \leq 2\Delta(G) - 1. \quad \blacksquare$$

Índice cromático de ciclos e grafos completos

Índice cromático dos grafos ciclos

Demonstre o resultado abaixo:

Teorema 16.4: Para todo grafo $n \geq 3$,

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é par;} \\ 3 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Observações

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Em uma coloração de arestas própria de um grafo G, quaisquer duas arestas com a mesma cor são não adjacentes. Isso implica que não podemos nunca ter mais do que $n/2$ arestas de G na mesma classe de cor.

- Se n é ímpar, então o número máximo de arestas que podem ser coloridas com a mesma cor é $(n-1)/2$.

Observações

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Em uma coloração de arestas própria de um grafo G, quaisquer duas arestas com a mesma cor são não adjacentes. Isso implica que não podemos nunca ter mais do que $n/2$ arestas de G na mesma classe de cor.

- Se n é ímpar, então o número máximo de arestas que podem ser coloridas com a mesma cor é $(n-1)/2$.

- Em particular, para o grafo C_n, com n ímpar e $n \geq 3$, não mais do que $(n-1)/2$ arestas possuem a mesma cor e não mais do que $\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = n-1$ arestas podem ser coloridas com duas cores.
    - Esta observação diz que $\chi'(C_n) \geq 3$ se n é ímpar e $n \geq 3$.
    - Ela também nos leva ao seguinte resultado mais geral:

Observações

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Em uma coloração de arestas própria de um grafo G, quaisquer duas arestas com a mesma cor são não adjacentes. Isso implica que não podemos nunca ter mais do que $n/2$ arestas de G na mesma classe de cor.
- Se n é ímpar, então o número máximo de arestas que podem ser coloridas com a mesma cor é $(n-1)/2$.
- Em particular, para o grafo C_n, com n ímpar e $n \geq 3$, não mais do que $(n-1)/2$ arestas possuem a mesma cor e não mais do que $\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = n - 1$ arestas podem ser coloridas com duas cores.
    - Esta observação diz que $\chi'(C_n) \geq 3$ se n é ímpar e $n \geq 3$.
    - Ela também nos leva ao seguinte resultado mais geral:

Lema 16.5: Seja G um grafo de ordem ímpar n e tamanho m.
Se $m > \frac{(n-1)\Delta(G)}{2}$, então $\chi'(G) > \Delta(G)$.

Lema

Lema 16.5: Seja G um grafo de ordem ímpar n e tamanho m.
Se $m > \frac{(n-1)\Delta(G)}{2}$, então $\chi'(G) > \Delta(G)$.

Demonstração:

Lema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Lema 16.5: Seja G um grafo de ordem ímpar n e tamanho m. Se $m > \frac{(n-1)\Delta(G)}{2}$, então $\chi'(G) > \Delta(G)$.

Demonstração:

- Seja G um grafo de ordem ímpar n e tamanho $m > \frac{(n-1)\Delta(G)}{2}$.
- Em qualquer coloração de arestas de G, não mais do que $\frac{n-1}{2}$ arestas de G podem ser coloridas com a mesma cor.
- Portanto, não mais do que $\frac{n-1}{2} \cdot \Delta(G)$ arestas podem ser coloridas com $\Delta(G)$ cores.
- Como $m > \frac{(n-1)\Delta(G)}{2}$, temos que $\chi'(G) > \Delta(G)$. ■

Grafos Completos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 13.5: Todo grafo completo de ordem n par possui uma coloração de arestas com $\Delta = n - 1$ cores.

Ideia da prova:

Grafos Completos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 13.5: Todo grafo completo de ordem n par possui uma coloração de arestas com $\Delta = n - 1$ cores.

Ideia da prova:

- Seja $G = K_{2k}$, com $k \geq 1$ e $V(G) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{2k-1}\}$. Como o resultado é facilmente verificável para $k = 1$ e $k = 2$, supomos $k \geq 3$.

Grafos Completos

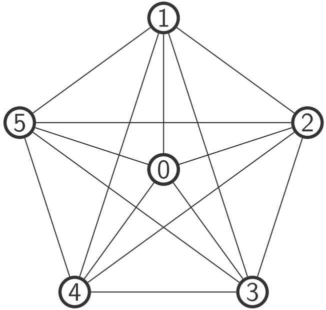
Teorema 13.5: Todo grafo completo de ordem n par possui uma coloração de arestas com $\Delta = n - 1$ cores.

Ideia da prova:

- Seja $G = K_{2k}$, com $k \geq 1$ e $V(G) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{2k-1}\}$. Como o resultado é facilmente verificável para $k = 1$ e $k = 2$, supomos $k \geq 3$.
- A fim de construir uma coloração de arestas própria para K_{2k} com $2k - 1$ cores, nós vamos construir uma 1-fatorização de G.
- Para isso, vamos usar um desenho especial de G no plano.

Grafos Completos

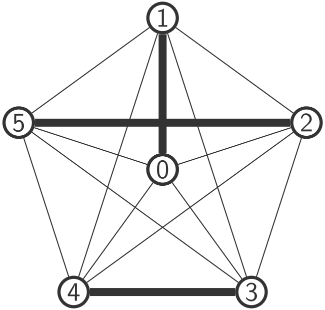
- Seja $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}$ os vértices de um polígono $(2k-1)$-regular e coloque v_0 no centro do polígono $(2k-1)$-regular. Desenhe cada aresta de G como uma linha reta.



Grafos Completos

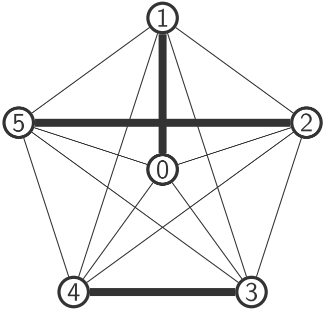
- Seja $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}$ os vértices de um polígono $(2k-1)$-regular e coloque v_0 no centro do polígono $(2k-1)$-regular. Desenhe cada aresta de G como uma linha reta.

- Seja F_1 o 1-fator de G consistindo na aresta v_0v_1 e todas as arestas de G perpendiculares a v_0v_1, a saber, $v_2v_{2k-1}, v_3v_{2k-2}, \ldots, v_kv_{k+1}$.



Grafos Completos

- Seja $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}$ os vértices de um polígono $(2k-1)$-regular e coloque v_0 no centro do polígono $(2k-1)$-regular. Desenhe cada aresta de G como uma linha reta.



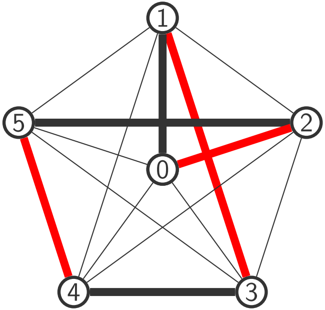
- Seja F_1 o 1-fator de G consistindo na aresta $v_0 v_1$ e todas as arestas de G perpendiculares a $v_0 v_1$, a saber, $v_2 v_{2k-1}, v_3 v_{2k-2}, \ldots, v_k v_{k+1}$.

- Para $1 \leq i \leq 2k-1$, seja F_i o 1-fator consistindo na aresta $v_0 v_i$ e todas as arestas de G perpendiculares a $v_0 v_i$.

Grafos Completos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}$ os vértices de um polígono $(2k-1)$-regular e coloque v_0 no centro do polígono $(2k-1)$-regular. Desenhe cada aresta de G como uma linha reta.



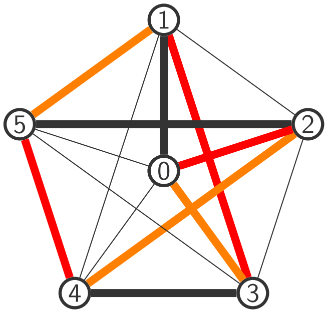
- Seja F_1 o 1-fator de G consistindo na aresta v_0v_1 e todas as arestas de G perpendiculares a v_0v_1, a saber, $v_2v_{2k-1}, v_3v_{2k-2}, \ldots, v_kv_{k+1}$.

- Para $1 \leq i \leq 2k-1$, seja F_i o 1-fator consistindo na aresta v_0v_i e todas as arestas de G perpendiculares a v_0v_i.

Grafos Completos

- Seja $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}$ os vértices de um polígono $(2k-1)$-regular e coloque v_0 no centro do polígono $(2k-1)$-regular. Desenhe cada aresta de G como uma linha reta.

- Seja F_1 o 1-fator de G consistindo na aresta $v_0 v_1$ e todas as arestas de G perpendiculares a $v_0 v_1$, a saber, $v_2 v_{2k-1}, v_3 v_{2k-2}, \ldots, v_k v_{k+1}$.

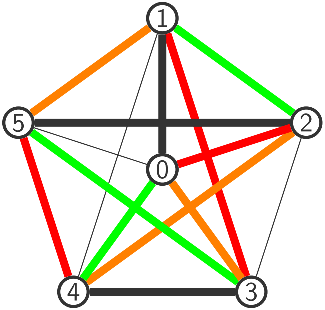


- Para $1 \leq i \leq 2k-1$, seja F_i o 1-fator consistindo na aresta $v_0 v_i$ e todas as arestas de G perpendiculares a $v_0 v_i$.

Grafos Completos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Seja $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}$ os vértices de um polígono $(2k-1)$-regular e coloque v_0 no centro do polígono $(2k-1)$-regular. Desenhe cada aresta de G como uma linha reta.



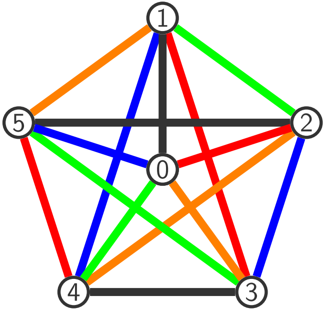
- Seja F_1 o 1-fator de G consistindo na aresta v_0v_1 e todas as arestas de G perpendiculares a v_0v_1, a saber, $v_2v_{2k-1}, v_3v_{2k-2}, \ldots, v_kv_{k+1}$.

- Para $1 \leq i \leq 2k-1$, seja F_i o 1-fator consistindo na aresta v_0v_i e todas as arestas de G perpendiculares a v_0v_i.

Grafos Completos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}$ os vértices de um polígono $(2k-1)$-regular e coloque v_0 no centro do polígono $(2k-1)$-regular. Desenhe cada aresta de G como uma linha reta.



- Seja F_1 o 1-fator de G consistindo na aresta v_0v_1 e todas as arestas de G perpendiculares a v_0v_1, a saber, $v_2v_{2k-1}, v_3v_{2k-2}, \ldots, v_kv_{k+1}$.

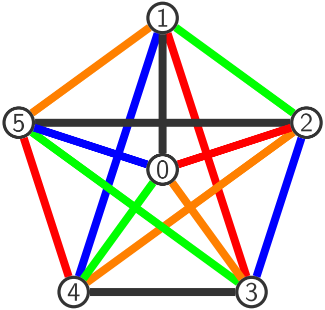
- Para $1 \leq i \leq 2k-1$, seja F_i o 1-fator consistindo na aresta v_0v_i e todas as arestas de G perpendiculares a v_0v_i.

Grafos Completos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Seja $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}$ os vértices de um polígono $(2k-1)$-regular e coloque v_0 no centro do polígono $(2k-1)$-regular. Desenhe cada aresta de G como uma linha reta.

- Seja F_1 o 1-fator de G consistindo na aresta v_0v_1 e todas as arestas de G perpendiculares a v_0v_1, a saber, $v_2v_{2k-1}, v_3v_{2k-2}, \ldots, v_kv_{k+1}$.



- Para $1 \leq i \leq 2k-1$, seja F_i o 1-fator consistindo na aresta v_0v_i e todas as arestas de G perpendiculares a v_0v_i.

- Isto nos dá uma 1-fatorização $F_1, F_2, \ldots, F_{2k-1}$ de G. ■

Grafos regulares

- **Observação:** Dado um grafo k-regular G, uma coloração própria de arestas de G com $\Delta(G)$ cores é equivalente a decompor G em k 1-fatores.

> **Teorema 16.6:** Um grafo k-regular G, $k \geq 1$, tem índice cromático k se e somente se G é 1-fatorável.

Grafos regulares

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Observação:** Dado um grafo k-regular G, uma coloração própria de arestas de G com $\Delta(G)$ cores é equivalente a decompor G em k 1-fatores.

> **Teorema 16.6:** Um grafo k-regular G, $k \geq 1$, tem índice cromático k se e somente se G é 1-fatorável.

- Exemplo 1: Vimos que os ciclos pares e os grafos completos pares são 1-fatoráveis e, portanto, possuem $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Grafos regulares

- **Observação:** Dado um grafo k-regular G, uma coloração própria de arestas de G com $\Delta(G)$ cores é equivalente a decompor G em k 1-fatores.

> **Teorema 16.6:** Um grafo k-regular G, $k \geq 1$, tem índice cromático k se e somente se G é 1-fatorável.

- Exemplo 1: Vimos que os ciclos pares e os grafos completos pares são 1-fatoráveis e, portanto, possuem $\chi'(G) = \Delta(G)$.

- Exemplo 2: Por outro lado, os ciclos ímpares e os grafos completos ímpares não são 1-fatoráveis e possuem $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Grafos regulares

- **Observação:** Dado um grafo k-regular G, uma coloração própria de arestas de G com $\Delta(G)$ cores é equivalente a decompor G em k 1-fatores.

> **Teorema 16.6:** Um grafo k-regular G, $k \geq 1$, tem índice cromático k se e somente se G é 1-fatorável.

- Exemplo 1: Vimos que os ciclos pares e os grafos completos pares são 1-fatoráveis e, portanto, possuem $\chi'(G) = \Delta(G)$.

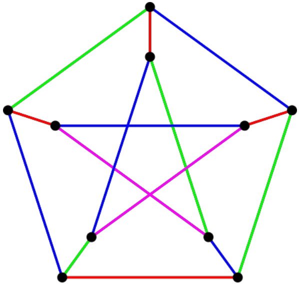
- Exemplo 2: Por outro lado, os ciclos ímpares e os grafos completos ímpares não são 1-fatoráveis e possuem $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

- Um outro grafo regular que também provamos que não é 1-fatorável é o grafo de Petersen P. Logo, $\chi'(P) > 3$.

- No entanto, P possui $\chi'(P) = 4$.

Grafo de Petersen

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



Grafo de Petersen com uma 4-coloração própria de arestas

Julius Petersen

Índice cromático dos grafos completos

Teorema 16.7: Para todo grafo $n \geq 2$,

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ é par;} \\ n & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração:

Índice cromático dos grafos completos

Teorema 16.7: Para todo grafo $n \geq 2$,

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ é par;} \\ n & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração:

- De tudo o que vimos anteriormente, sabemos que se n é par, então $\chi'(K_n) = n - 1$.

Índice cromático dos grafos completos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 16.7: Para todo grafo $n \geq 2$,

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ é par;} \\ n & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração:

- De tudo o que vimos anteriormente, sabemos que se n é par, então $\chi'(K_n) = n - 1$.

- Quando n é ímpar, já sabemos também que $\chi'(K_n) \geq \Delta(K_n) + 1 = n$, pois ele não é 1-fatorável (tem número ímpar de vértices). Resta apenas mostrar que $\chi'(K_n) \leq n$ neste caso.

Índice cromático dos grafos completos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 16.7: Para todo grafo $n \geq 2$,

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ é par;} \\ n & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração:

- De tudo o que vimos anteriormente, sabemos que se n é par, então $\chi'(K_n) = n - 1$.

- Quando n é ímpar, já sabemos também que $\chi'(K_n) \geq \Delta(K_n) + 1 = n$, pois ele não é 1-fatorável (tem número ímpar de vértices). Resta apenas mostrar que $\chi'(K_n) \leq n$ neste caso.

  Fazemos isso do seguinte modo: para cada vértice $v_i \in V(K_n)$, seja F_i o 1-fator no K_n com cardinalidade $(n-1)/2$ que evita o vértice v_i. Cada um dos n 1-fatores $F_1, F_2, \ldots, F_n$ forma uma classe de cor. ∎

UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Índice cromático de grafos bipartidos

Índice cromático dos grafos bipartidos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 16.8 [König, 1916]:
Se G é bipartido, então

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Dénes König

Demonstração:

Índice cromático dos grafos bipartidos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 16.8 [König, 1916]:
Se G é bipartido, então

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Dénes König

Demonstração:

- Seja $G[X, Y]$ um grafo bipartido. Seja $\Delta(G) = k \geq 1$.

Índice cromático dos grafos bipartidos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 16.8 [König, 1916]:
Se G é bipartido, então

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Dénes König

Demonstração:

- Seja $G[X, Y]$ um grafo bipartido. Seja $\Delta(G) = k \geq 1$.
- Inicialmente, vamos mostrar que existe um grafo bipartido k-regular H contendo G como subgrafo.

Índice cromático dos grafos bipartidos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 16.8 [König, 1916]:
Se G é bipartido, então

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Dénes König

Demonstração:

- Seja $G[X, Y]$ um grafo bipartido. Seja $\Delta(G) = k \geq 1$.
- Inicialmente, vamos mostrar que existe um grafo bipartido k-regular H contendo G como subgrafo.
- Se G for regular, não há o que fazer. Neste caso, $H = G$.

Índice cromático dos grafos bipartidos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 16.8 [König, 1916]:
Se G é bipartido, então

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Dénes König

Demonstração:

- Seja $G[X, Y]$ um grafo bipartido. Seja $\Delta(G) = k \geq 1$.
- Inicialmente, vamos mostrar que existe um grafo bipartido k-regular H contendo G como subgrafo.
- Se G for regular, não há o que fazer. Neste caso, $H = G$.
- Suponha, então, que G não é k-regular. Isso implica que $\delta(G) < k$. A seguir, construímos o grafo k-regular H.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Sejam X e Y as partes de G. Seja G' uma cópia de G onde a parte X é denotada por X' e a parte Y é denotada por Y' em G'.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Sejam X e Y as partes de G. Seja G' uma cópia de G onde a parte X é denotada por X' e a parte Y é denotada por Y' em G'.

- Ligue cada vértice de G cujo grau é menor que k ao vértice correspondente em G', produzindo um grafo bipartido G_1 com partes $X_1 = X \cup Y'$ e $Y_1 = X' \cup Y$ tal que $\delta(G_1) = \delta(G) + 1$.

Continuação da demonstração

- Sejam X e Y as partes de G. Seja G' uma cópia de G onde a parte X é denotada por X' e a parte Y é denotada por Y' em G'.

- Ligue cada vértice de G cujo grau é menor que k ao vértice correspondente em G', produzindo um grafo bipartido G_1 com partes $X_1 = X \cup Y'$ e $Y_1 = X' \cup Y$ tal que $\delta(G_1) = \delta(G) + 1$.

- Se G_1 é k-regular, então $H = G_1$ é o grafo que estamos procurando. Caso contrário, se $\delta(G_1) < k$, então repetimos a operação acima até chegar em um grafo bipartido k-regular G_s, com $s = k - \delta(G)$, contendo G como um subgrafo. Neste caso, temos que $H = G_s$.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Sejam X e Y as partes de G. Seja G' uma cópia de G onde a parte X é denotada por X' e a parte Y é denotada por Y' em G'.

- Ligue cada vértice de G cujo grau é menor que k ao vértice correspondente em G', produzindo um grafo bipartido G_1 com partes $X_1 = X \cup Y'$ e $Y_1 = X' \cup Y$ tal que $\delta(G_1) = \delta(G) + 1$.

- Se G_1 é k-regular, então $H = G_1$ é o grafo que estamos procurando. Caso contrário, se $\delta(G_1) < k$, então repetimos a operação acima até chegar em um grafo bipartido k-regular G_s, com $s = k - \delta(G)$, contendo G como um subgrafo. Neste caso, temos que $H = G_s$.

- Na aula de Fatorização, provamos o seguinte resultado:
  Teorema 13.6: Todo grafo bipartido k-regular com $k \geq 1$ é 1-fatorável.

- Logo, H é 1-fatorável.

Conclusão da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Sejam $F'_1, F'_2, \ldots, F'_k$ os k 1-fatores contidos em H.

Conclusão da demonstração

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Sejam $F'_1, F'_2, \ldots, F'_k$ os k 1-fatores contidos em H.
- Para $1 \leq i \leq k$, seja F_i o subgrafo 1-regular de G onde $E(F_i) = E(F'_i) \cap E(G)$.

Conclusão da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Sejam $F'_1, F'_2, \ldots, F'_k$ os k 1-fatores contidos em H.
- Para $1 \leq i \leq k$, seja F_i o subgrafo 1-regular de G onde $E(F_i) = E(F'_i) \cap E(G)$.
- Então $E(F_1), E(F_2), \ldots, E(F_k)$ são classes de cores de arestas de G e, portanto, $\chi'(G) \leq k$. Como $\Delta(G) = k$, segue que $\chi'(G) \geq k$ e, assim, $\chi'(G) = k = \Delta(G)$. $\blacksquare$

Resultados vistos até agora

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Apesar de termos provado que todo grafo simples G possui $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$, vimos que algumas classes precisam de menos cores.
  - $\Delta(G) \leq \chi'(C_n) \leq \Delta(G) + 1 = 2\Delta(G) - 1$.
  - $\Delta(G) \leq \chi'(K_n) \leq \Delta(G) + 1$.
  - Grafo de Petersen possui $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.
  - Bipartidos completos possuem $\chi'(G) = \Delta(G)$.
  - Grafos regulares 1-fatoráveis possuem $\chi'(G) = \Delta(G)$

De fato, muitas classes parecem ter índice cromático no máximo $\Delta(G) + 1$.

Teorema de Vizing

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema de Vizing [1964]: Se G é um grafo simples, então

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Vadim G. Vizing

Teorema de Vizing

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema de Vizing [1964]: Se G é um grafo simples, então

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Vadim G. Vizing

Corolário 16.9: Se G é um grafo simples, então

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Classe 1 e Classe 2

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Um grafo simples é Classe 1 se $\chi'(G) = \Delta(G)$. Ele é Classe 2 se $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Classe 1 e Classe 2

- **Definição:** Um grafo simples é Classe 1 se $\chi'(G) = \Delta(G)$. Ele é Classe 2 se $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.
- Determinar se um grafo simples é Classe 1 ou Classe 2 é um problema NP-Completo.

Classe 1 e Classe 2

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Um grafo simples é Classe 1 se $\chi'(G) = \Delta(G)$. Ele é Classe 2 se $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

- Determinar se um grafo simples é Classe 1 ou Classe 2 é um problema NP-Completo.

- Vimos que se um grafo G de ordem ímpar n com m arestas possui $m > \frac{(n-1)\Delta(G)}{2}$, então $\chi'(G) > \Delta(G)$, ou seja, G é Classe 2.

Classe 1 e Classe 2

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Um grafo simples é Classe 1 se $\chi'(G) = \Delta(G)$. Ele é Classe 2 se $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

- Determinar se um grafo simples é Classe 1 ou Classe 2 é um problema NP-Completo.

- Vimos que se um grafo G de ordem ímpar n com m arestas possui $m > \frac{(n-1)\Delta(G)}{2}$, então $\chi'(G) > \Delta(G)$, ou seja, G é Classe 2.

- Isso nos dá uma condição necessária para que um grafo seja Classe 1:

Lema 16.10: Se um grafo simples G com n vértices e m arestas é Classe 1, então

$$m \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Delta(G).$$

Classe 1 – Condição necessária

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Lema 16.10: Se um grafo simples G com n vértices e m arestas é Classe 1, então

$$m \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Delta(G).$$

Demonstração:

- Seja G um grafo simples com n vértices e m arestas.
- Primeiro, suponha que n é par. Como G é Classe 1, $\chi'(G) = \Delta(G)$. Por contradição, suponha que $m > (n/2)\Delta(G)$.
- Como n é par, cada classe de cor tem cardinalidade no máximo $n/2$. Como exatamente $\Delta(G)$ cores foram usadas, temos que no máximo $(n/2)\Delta(G)$ arestas de G foram coloridas. Contradição.
- Logo, $m \leq (n/2)\Delta(G)$.

Classe 1 – Condição necessária

- Agora, suponha que n é ímpar. Como G é Classe 1, $\chi'(G) = \Delta(G)$. Por contradição, suponha que $m > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Delta(G) = \left(\frac{n-1}{2}\right) \Delta(G)$.

- Como n é ímpar, cada classe de cor tem cardinalidade no máximo $(n-1)/2$. Como exatamente $\Delta(G)$ cores foram usadas, temos que no máximo $((n-1)/2)\Delta(G)$ arestas de G foram coloridas. Contradição.

- Logo, $m \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Delta(G)$. ■

Subgrafos sobrecarregados

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Seja H um subgrafo de um grafo simples G. Dizemos que H é um subgrafo sobrecarregado (overfull) se e somente se $|V(H)|$ é ímpar e

$$|E(H)| > \frac{(|V(H)| - 1)\Delta(G)}{2}.$$

Subgrafos sobrecarregados

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Seja H um subgrafo de um grafo simples G. Dizemos que H é um subgrafo sobrecarregado (overfull) se e somente se $|V(H)|$ é ímpar e

$$|E(H)| > \frac{(|V(H)| - 1)\Delta(G)}{2}.$$

> **Lema 16.11:** Se G é um grafo simples com um subgrafo sobrecarregado H, tal que $\Delta(G) = \Delta(H)$, então G é Classe 2.

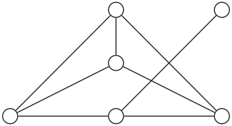
Subgrafos sobrecarregados

- **Definição:** Seja H um subgrafo de um grafo simples G. Dizemos que H é um subgrafo sobrecarregado (overfull) se e somente se $|V(H)|$ é ímpar e

$$|E(H)| > \frac{(|V(H)| - 1)\Delta(G)}{2}.$$

> **Lema 16.11:** Se G é um grafo simples com um subgrafo sobrecarregado H, tal que $\Delta(G) = \Delta(H)$, então G é Classe 2.

- O grafo abaixo possui subgrafos sobrecarregados?



Overfull Conjecture

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Conjetura 16.12 [Chetwynd e Hilton 1986]: Seja G um grafo simples com n vértices e com $\Delta(G) > n/3$. O grafo G é Classe 2 se e somente se G ele tem um subgrafo sobrecarregado H tal que $\Delta(G) = \Delta(H)$.

Amanda Chetwynd

Anthony Hilton

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

FIM