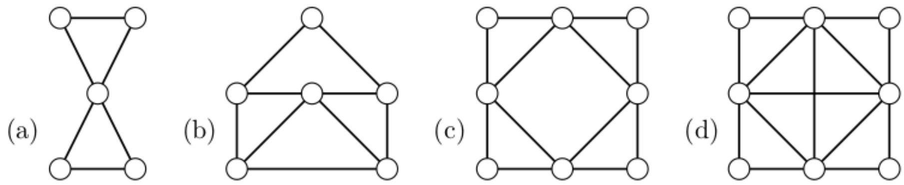
Universidade Federal do Ceará - Campus Quixadá
QXD0152 – Teoria dos Grafos
Cursos de Ciência da Computação e Engenharia de Computação
Prof. Atílio Luiz

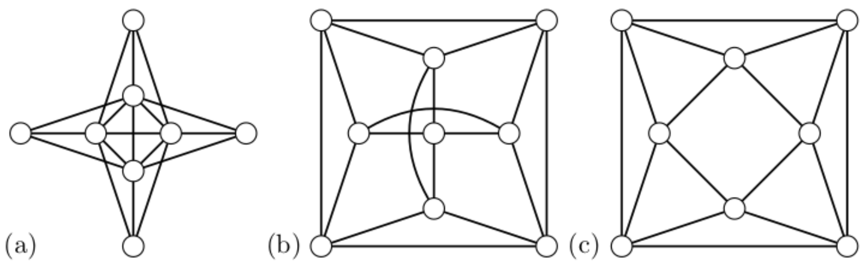
Coloração de Grafos

1. Determine o número cromático de cada um desses grafos:
   (a) Grafo de Petersen
   (b) n-cubo Q_n
   (c) roda $W_n = C_n + K_1$

2. Determine $\omega(G)$, $\alpha(G)$ e $\chi(G)$ para os seguintes grafos:



3. Determine $\omega(G)$, $\alpha(G)$ e $\chi(G)$ para os seguintes grafos:



4. Qual o número cromático de uma árvore?

5. Prove ou disprove:
   (a) Se um grafo planar G contém um triângulo, então o seu número cromático é 3.
   (b) Se existe uma 4-coloração de um grafo G, então $\chi(G) = 4$.
   (c) Se G é um grafo com $\chi(G) \leq 4$, então G é planar.

6. Prove que todo grafo de ordem 6 com número cromático 3 tem no máximo 12 arestas.

7. Prove ou disprove:
   (a) Se um grafo G contém um subgrafo isomorfo a um grafo completo K_r, então $\chi(G) \geq r$.
   (b) Se G é um grafo com $\chi(G) \geq r$, então G contém um subgrafo isomorfo ao grafo completo K_r.

8. Mostre que não existe nenhum grafo G com $\chi(G) = 6$ cujos vértices possuem graus $3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5$.

9. Dê um exemplo ou explique por quê tal exemplo não existe:
   (a) um grafo planar com número cromático 5
   (b) um grafo não planar com número cromático 3
   (c) um grafo G com $\Delta(G) = 2\chi(G)$
   (d) um grafo G com $\chi(G) = 2\Delta(G)$
   (e) um grafo não-completo de ordem n com número cromático n.

10. Prove ou disprove:
    (a) Existe um grafo não-planar G tal que $G - v$ é planar e $\chi(G) = \chi(G - v) + 1$ para todo vértice v de G.
    (b) Existe um grfo não planar G tal que $G - v$ é planar e $\chi(G) = \chi(G - v)$ para todo vértice v de G.

11. Um grafo G de ordem n tem $\chi(G) = \alpha(G) = k$, onde $\alpha(G)$ é o tamanho de um conjunto independente máximo de G. Além disso, para toda k-coloração de G, existe uma única partição de $V(G)$ em classes de cores tais que quaisquer duas classes de cores distintas possuem cardinalidades diferentes. Prove que $\Delta(G) = n - 1$.

12. Caracterize todos os grafos com $\chi(G) = n - 1$.

13. Caracterize todos os grafos com $\chi(G) = n - 2$.

14. A **Conjetura de Reed** afirma que $\chi(G) \leq \left\lceil \frac{\omega(G)+1+\Delta(G)}{2} \right\rceil$. Encontre uma família infinita de grafos, além dos grafos completos e ciclos ímapres, para os quais a igualdade na fórmula acima vale.

15. Seja G um grafo no qual quaisquer dois ciclos ímpares compartilham um vértice. Mostre que $\chi(G) \leq 5$.

16. Um grafo é **k-degenerado** se e somente se todo subgrafo de G tem um vértice de grau no máximo k.
    (a) Caracterize os grafos 1-degenerados
    (b) Prove que todo grafo k-degenerado é $(k + 1)$-colorível.

17. Escreva um algoritmo de tempo polinomial que recebe um grafo planar como entrada e produz uma 5-coloração própria do grafo.

18. Mostre que se G é um grafo de intervalo, então $\overline{G}$ é um grafo de comparabilidade.

19. Um **caterpillar** T é uma árvore que possui a seguinte propriedade: se você remover todas as folhas de T, você obtém um caminho P_n com $n \geq 1$. Prove que uma árvore é um grafo de intervalo se e somente se ela é um caterpillar. (*Dica:* use um subgrafo proibido.)

20. Mostre que, para qualquer grafo, existe uma ordem dos vértices para a qual a coloração gulosa produz uma coloração mínima.