# Graus dos vértices

## Teoria dos Grafos — QXD0152

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

1º semestre/2021

# Leituras para esta aula

- **Seção 3.3 do Capítulo 3** do livro *Fundamentals of Graph Theory* do Allan Bickle.

# Tópicos desta aula



- Sequência de graus de um grafo
- Sequência gráfica
- Construção recursiva para determinar se uma sequência é gráfica

# Relembrando...

**Proposição:** Se $G$ é um grafo simples de ordem $n$ e $v \in V(G)$, então

$$0 \leq \delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1.$$

# Relembrando...

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

**Proposição:** Se $G$ é um grafo simples de ordem $n$ e $v \in V(G)$, então

$$0 \leq \delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G) \leq n-1.$$

**Teorema [Euler 1735]:** Se $G$ é um grafo de tamanho $m$, então

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

# Relembrando...



**Proposição:** Se $G$ é um grafo simples de ordem $n$ e $v \in V(G)$, então

$$0 \leq \delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1.$$

**Teorema [Euler 1735]:** Se $G$ é um grafo de tamanho $m$, então

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

**Corolário:** Em qualquer grafo, o número de vértices ímpares é sempre par.

# Relembrando...



**Proposição:** Se $G$ é um grafo simples de ordem $n$ e $v \in V(G)$, então

$$0 \leq \delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1.$$

**Teorema [Euler 1735]:** Se $G$ é um grafo de tamanho $m$, então

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

**Corolário:** Em qualquer grafo, o número de vértices ímpares é sempre par.

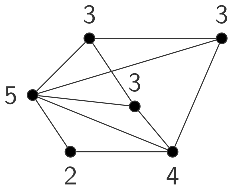
**Proposição:** Se $G$ é um grafo simples com pelo menos dois vértices, então $G$ contém pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

# Sequência de graus

# Sequência de graus



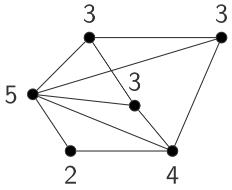
- **Definição:** A sequência de graus de um grafo $G$ é a lista dos graus dos vértices de $G$, $d_1, d_2, \ldots, d_n$, escrita em ordem decrescente, $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$.




Grafo $G$ com sequência de graus $d = 5, 4, 3, 3, 3, 2$

# Sequência de graus

- **Definição:** A sequência de graus de um grafo $G$ é a lista dos graus dos vértices de $G$, $d_1, d_2, \ldots, d_n$, escrita em ordem decrescente, $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$.




Grafo $G$ com sequência de graus $d = 5, 4, 3, 3, 3, 2$

- Todo grafo tem uma sequência de graus; mas será que para toda sequência decrescente de inteiros não-negativos existe um grafo associado?

# Condição necessária



- Considere por exemplo a sequência: $3, 1, 1$.
  - É possível construir um grafo com esta sequência de graus?

# Condição necessária

- Considere por exemplo a sequência: $3, 1, 1$.
  - É possível construir um grafo com esta sequência de graus?
    - Resposta: Não.

# Condição necessária

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Considere por exemplo a sequência: $3, 1, 1$.
    - É possível construir um grafo com esta sequência de graus?
        - Resposta: Não.

- A partir do Handshaking Lemma obtemos uma condição necessária trivial para que exista um grafo para uma sequência de inteiros não negativos:

> **Lema:** Se uma sequência de inteiros não-negativos $d_1, \ldots, d_n$ é **sequência de graus**, então $\sum d_i$ é par. $\square$

# Condição necessária

- Considere por exemplo a sequência: $3, 1, 1$.
  - É possível construir um grafo com esta sequência de graus?
    - Resposta: Não.

- A partir do Handshaking Lemma obtemos uma condição necessária trivial para que exista um grafo para uma sequência de inteiros não negativos:

> **Lema:** Se uma sequência de inteiros não-negativos $d_1, \ldots, d_n$ é **sequência de graus**, então $\sum d_i$ é par. $\square$

- Será que esta condição necessária é também suficiente?

# Condição necessária

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Considere por exemplo a sequência: $3, 1, 1$.
  - É possível construir um grafo com esta sequência de graus?
    - Resposta: Não.

- A partir do Handshaking Lemma obtemos uma condição necessária trivial para que exista um grafo para uma sequência de inteiros não negativos:

> **Lema:** Se uma sequência de inteiros não-negativos $d_1, \ldots, d_n$ é **sequência de graus**, então $\sum d_i$ é par. $\square$

- Será que esta condição necessária é também suficiente?
  - Resposta: SIM!

# Exemplos

- Por exemplo, as sequências $d_1 = (4, 3, 2, 1)$ e $d_2 = (5, 4, 3, 2, 1, 1)$ satisfazem a condição necessária para que elas sejam sequências de graus de algum grafo.
  - Que estratégia usar para construir o tais grafos?

# Proposição

**Proposição.** Os inteiros não negativos $d_1, \dots, d_n$ são a sequência de graus de algum grafo se e somente se $\sum_{i=1}^{n} d_i$ é par.

**Demonstração.**

- ($\Rightarrow$) Seja $d_1, \dots, d_n$ a sequência de graus de um grafo $G$ com $m$ arestas. Pelo Handshaking Lemma, temos que $\sum d_i = 2m$, que é um número par.

# Proposição



**Proposição.** Os inteiros não negativos $d_1, \ldots, d_n$ são a sequência de graus de algum grafo se e somente se $\sum_{i=1}^{n} d_i$ é par.

**Demonstração.**

- ($\Rightarrow$) Seja $d_1, \ldots, d_n$ a sequência de graus de um grafo $G$ com $m$ arestas. Pelo Handshaking Lemma, temos que $\sum d_i = 2m$, que é um número par.
- ($\Leftarrow$) Suponha $\sum d_i$ par. Vamos construir um grafo com $n$ vértices $v_1, \ldots, v_n$ tal que $d(v_i) = d_i$ para todo $i$.

# Proposição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Proposição.** Os inteiros não negativos $d_1, \ldots, d_n$ são a sequência de graus de algum grafo se e somente se $\sum_{i=1}^{n} d_i$ é par.

**Demonstração.**

- ($\Rightarrow$) Seja $d_1, \ldots, d_n$ a sequência de graus de um grafo $G$ com $m$ arestas. Pelo Handshaking Lemma, temos que $\sum d_i = 2m$, que é um número par.
- ($\Leftarrow$) Suponha $\sum d_i$ par. Vamos construir um grafo com $n$ vértices $v_1, \ldots, v_n$ tal que $d(v_i) = d_i$ para todo $i$.
- Como $\sum d_i$ é par, o número de vértices de grau ímpar é par.

# Proposição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Proposição.** Os inteiros não negativos $d_1, \ldots, d_n$ são a sequência de graus de algum grafo se e somente se $\sum_{i=1}^{n} d_i$ é par.

**Demonstração.**

- ($\Rightarrow$) Seja $d_1, \ldots, d_n$ a sequência de graus de um grafo $G$ com $m$ arestas. Pelo Handshaking Lemma, temos que $\sum d_i = 2m$, que é um número par.
- ($\Leftarrow$) Suponha $\sum d_i$ par. Vamos construir um grafo com $n$ vértices $v_1, \ldots, v_n$ tal que $d(v_i) = d_i$ para todo $i$.
- Como $\sum d_i$ é par, o número de vértices de grau ímpar é par.
- Então, inicialmente pareamos os vértices de grau ímpar. Para cada par, ligamos os vértices no par por meio de uma aresta.
- Assim o número de arestas que faltam para completar o grau em cada vértice do grafo é um número par e não-negativo.
- Deste modo, para cada vértice $v_i$, adicionamos exatamente $\lfloor d_i/2 \rfloor$ laços a fim de completar os graus requeridos para cada vértice do grafo. $\blacksquare$

# Observações



- Note que a possibilidade de adicionar laços tornou a solução do problema anterior fácil.

- Sem laços não podemos construir um grafo para a sequência $d = 2, 0, 0$.

# Observações



- Note que a possibilidade de adicionar laços tornou a solução do problema anterior fácil.

- Sem laços não podemos construir um grafo para a sequência $d = 2, 0, 0$.

- Sem laços nem arestas múltiplas, também não é possível construir um grafo para a sequência $d = 2, 0, 0$.

# Observações

- Note que a possibilidade de adicionar laços tornou a solução do problema anterior fácil.

- Sem laços não podemos construir um grafo para a sequência $d = 2, 0, 0$.

- Sem laços nem arestas múltiplas, também não é possível construir um grafo para a sequência $d = 2, 0, 0$.

- Logo, o problema fica mais interessante (desafiador ou complexo) quando nos restringimos apenas aos grafos simples.

# Sequência gráfica

# Sequência gráfica

- **Definição:** Uma sequência gráfica é uma lista de inteiros não-negativos que é a sequência de graus de algum grafo simples.
  - Dizemos um grafo com sequência de graus $S$ concretiza $S$.

# Sequência gráfica



- **Definição:** Uma sequência gráfica é uma lista de inteiros não-negativos que é a sequência de graus de algum grafo simples.
  - Dizemos um grafo com sequência de graus $S$ concretiza $S$.

- Três condições necessárias para uma sequência ser gráfica:

I. O grau máximo da sequência é no máximo $n - 1$.
II. A soma dos graus $\sum d_i$ é par. (pelo Handshaking Lemma)
III. A sequência deve ter pelo menos dois números repetidos (pelo Exercício da AC01)

# Sequência gráfica



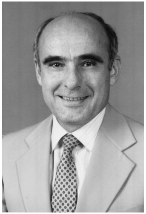
- **Definição:** Uma sequência gráfica é uma lista de inteiros não-negativos que é a sequência de graus de algum grafo simples.
  - Dizemos um grafo com sequência de graus $S$ concretiza $S$.
- Três condições necessárias para uma sequência ser gráfica:
  I. O grau máximo da sequência é no máximo $n-1$.
  II. A soma dos graus $\sum d_i$ é par. (pelo Handshaking Lemma)
  III. A sequência deve ter pelo menos dois números repetidos (pelo Exercício da AC01)
- Quais das seguintes sequências são gráficas?
  a) $5, 3, 3, 2, 1$
  b) $2, 2, 2, 2, 1, 1$
  c) $3, 3, 2, 2, 2, 2, 1$
  d) $3, 3, 1, 1$

# Uma ideia algorítmica para caracterização de sequências gráficas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Ideia: podemos dizer que uma sequência é gráfica se pudermos transformá-la em uma sequência mais simples, que seja gráfica.
- Suponha que temos uma sequência de graus $d = d_1, d_2, \ldots, d_n$
- Obtemos uma sequência mais simples $d'$ a partir de $d$ removendo $d_1$ e subtraindo 1 de cada um dos termos $d_2, \ldots, d_{d_1+1}$.
- Claramente, se $d'$ é uma sequência gráfica, então $d$ é gráfica. (Por quê?)

O inverso da implicação acima também é verdadeiro e foi provado por Havel (1955) e Hakimi (1962).



S. L. Hakimi

# Teorema de Havel-Hakimi



**Teorema de Havel-Hakimi:** A sequência $S : d_1 \geq \ldots \geq d_n$ é gráfica se e somente se a sequência $S_1$, formada removendo $d_1$ e subtraindo 1 dos $d_1$ próximos maiores termos, é gráfica.

# Teorema de Havel-Hakimi

**Teorema de Havel-Hakimi:** A sequência $S : d_1 \geq \ldots \geq d_n$ é gráfica se e somente se a sequência $S_1$, formada removendo $d_1$ e subtraindo 1 dos $d_1$ próximos maiores termos, é gráfica.

Demonstração da volta:

($\Leftarrow$) Suponha que existe um grafo $G_1$ com sequência de graus $S_1$ formada como dito no enunciado do teorema. A partir de $G_1$, construa o grafo $G$ adicionando um novo vértice e tornando-o adjacente aos $d_1$ vértices que tiveram seus graus reduzidos. Portanto, $G$ concretiza $S$, que é gráfica.

# Teorema de Havel-Hakimi

Demonstração da ida:

($\Rightarrow$) Seja $G$ um grafo com vértices $v_1, \ldots, v_n$ que concretiza a sequência $S$, com $d(v_i) = d_i$.

Se $v_1$ for adjacente aos vértices com graus $d_2, \ldots, d_{d_1+1}$, então não há mais o que provar e o resultado segue.

# Teorema de Havel-Hakimi

Demonstração da ida:

($\Rightarrow$) Seja $G$ um grafo com vértices $v_1, \ldots, v_n$ que concretiza a sequência $S$, com $d(v_i) = d_i$.

Se $v_1$ for adjacente aos vértices com graus $d_2, \ldots, d_{d_1+1}$, então não há mais o que provar e o resultado segue.

Então, suponha que $v_1$ não é adjacente aos vértices com graus $d_2, \ldots, d_{d_1+1}$. Neste caso, vamos modificar o grafo de modo que ele seja.

# Teorema de Havel-Hakimi



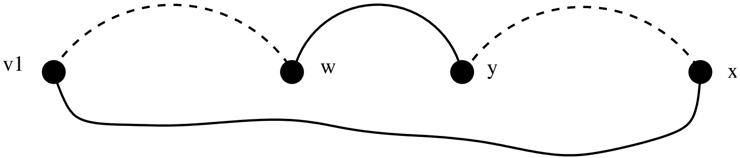
Demonstração da ida:

($\Rightarrow$) Seja $G$ um grafo com vértices $v_1, \ldots, v_n$ que concretiza a sequência $S$, com $d(v_i) = d_i$.

Se $v_1$ for adjacente aos vértices com graus $d_2, \ldots, d_{d_1+1}$, então não há mais o que provar e o resultado segue.

Então, suponha que $v_1$ não é adjacente aos vértices com graus $d_2, \ldots, d_{d_1+1}$. Neste caso, vamos modificar o grafo de modo que ele seja.

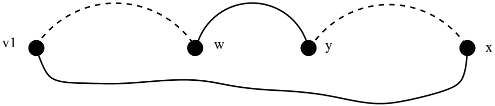
Suponha que existam vértices $w$ e $x$ com $d(w) > d(x)$ tal que $v_1 \leftrightarrow x$ e $v_1 \not\leftrightarrow w$. Então, existe algum vértice $y$ que é adjacente a $w$ mas não a $x$, pois $d(w) > d(x)$.



# Teorema de Havel-Hakimi

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

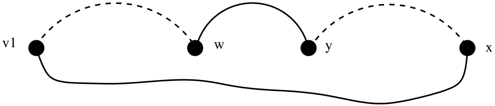
## Continuação da demonstração da ida:



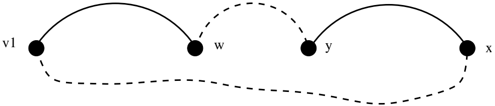
# Teorema de Havel-Hakimi

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

## Continuação da demonstração da ida:



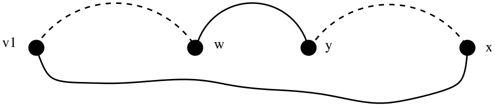

Delete as arestas $v_1x$ e $yw$ e adicione arestas $v_1w$ e $yx$. Isso mantém os graus dos vértices e **aumenta a soma dos graus dos vizinhos de** $v_1$.



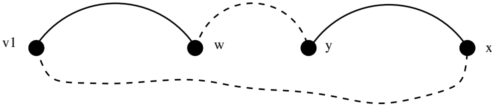
# Teorema de Havel-Hakimi



Continuação da demonstração da ida:




Delete as arestas $v_1x$ e $yw$ e adicione arestas $v_1w$ e $yx$. Isso mantém os graus dos vértices e **aumenta a soma dos graus dos vizinhos de** $v_1$.




Esta operação aumenta o número de vizinhos de $v_1$ com os graus desejados. Assim, repetindo essa operação, eventualmente produz um grafo $G'$ com a propriedade desejada.

Portanto, deletando $v_1$, produzimos um grafo que concretiza $S_1$. $\square$

# Algoritmo



**Algoritmo Havel-Hakimi:** Dada uma sequência $S$ de inteiros decrescentes, iterativamente remova o primeiro elemento $\Delta$ e subtraia 1 dos demais $\Delta$ maiores elementos restantes. Pare quando a sequência for formada somente por zeros (neste caso ela é gráfica) ou contém um número negativo (neste caso, $S$ não é gráfica).

**Exemplo 1:** A sequência $S$: $8, 8, 7, 6, 6, 4, 4, 3, 2$ é gráfica?

# Algoritmo



**Algoritmo Havel-Hakimi:** Dada uma sequência $S$ de inteiros decrescentes, iterativamente remova o primeiro elemento $\Delta$ e subtraia 1 dos demais $\Delta$ maiores elementos restantes. Pare quando a sequência for formada somente por zeros (neste caso ela é gráfica) ou contém um número negativo (neste caso, $S$ não é gráfica).

**Exemplo 1:** A sequência $S$: $8, 8, 7, 6, 6, 4, 4, 3, 2$ é gráfica?

- $S$: $8, 8, 7, 6, 6, 4, 4, 3, 2$

# Algoritmo



**Algoritmo Havel-Hakimi:** Dada uma sequência $S$ de inteiros decrescentes, iterativamente remova o primeiro elemento $\Delta$ e subtraia 1 dos demais $\Delta$ maiores elementos restantes. Pare quando a sequência for formada somente por zeros (neste caso ela é gráfica) ou contém um número negativo (neste caso, $S$ não é gráfica).

**Exemplo 1:** A sequência $S$: $8, 8, 7, 6, 6, 4, 4, 3, 2$ é gráfica?

- $S$: $8, 8, 7, 6, 6, 4, 4, 3, 2$
- $S_1$: $7, 6, 5, 5, 3, 3, 2, 1$

# Algoritmo



**Algoritmo Havel-Hakimi:** Dada uma sequência $S$ de inteiros decrescentes, iterativamente remova o primeiro elemento $\Delta$ e subtraia 1 dos demais $\Delta$ maiores elementos restantes. Pare quando a sequência for formada somente por zeros (neste caso ela é gráfica) ou contém um número negativo (neste caso, $S$ não é gráfica).

**Exemplo 1:** A sequência $S$: $8, 8, 7, 6, 6, 4, 4, 3, 2$ é gráfica?

- $S$: $8, 8, 7, 6, 6, 4, 4, 3, 2$
- $S_1$: $7, 6, 5, 5, 3, 3, 2, 1$
- $S_2$: $5, 4, 4, 2, 2, 1, 0$

# Algoritmo



**Algoritmo Havel-Hakimi:** Dada uma sequência $S$ de inteiros decrescentes, iterativamente remova o primeiro elemento $\Delta$ e subtraia 1 dos demais $\Delta$ maiores elementos restantes. Pare quando a sequência for formada somente por zeros (neste caso ela é gráfica) ou contém um número negativo (neste caso, $S$ não é gráfica).

**Exemplo 1:** A sequência $S$: $8, 8, 7, 6, 6, 4, 4, 3, 2$ é gráfica?

- $S$: $8, 8, 7, 6, 6, 4, 4, 3, 2$
- $S_1$: $7, 6, 5, 5, 3, 3, 2, 1$
- $S_2$: $5, 4, 4, 2, 2, 1, 0$
- $S_3$: $3, 3, 1, 1, 0, 0$

# Algoritmo

**Algoritmo Havel-Hakimi:** Dada uma sequência $S$ de inteiros decrescentes, iterativamente remova o primeiro elemento $\Delta$ e subtraia 1 dos demais $\Delta$ maiores elementos restantes. Pare quando a sequência for formada somente por zeros (neste caso ela é gráfica) ou contém um número negativo (neste caso, $S$ não é gráfica).

**Exemplo 1:** A sequência $S$: $8, 8, 7, 6, 6, 4, 4, 3, 2$ é gráfica?

- $S$: $8, 8, 7, 6, 6, 4, 4, 3, 2$
- $S_1$: $7, 6, 5, 5, 3, 3, 2, 1$
- $S_2$: $5, 4, 4, 2, 2, 1, 0$
- $S_3$: $3, 3, 1, 1, 0, 0$
- $S_4$: $2, 0, 0, 0, 0$

# Algoritmo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Algoritmo Havel-Hakimi:** Dada uma sequência $S$ de inteiros decrescentes, iterativamente remova o primeiro elemento $\Delta$ e subtraia 1 dos demais $\Delta$ maiores elementos restantes. Pare quando a sequência for formada somente por zeros (neste caso ela é gráfica) ou contém um número negativo (neste caso, $S$ não é gráfica).

**Exemplo 1:** A sequência $S$: $8, 8, 7, 6, 6, 4, 4, 3, 2$ é gráfica?

- $S$: $8, 8, 7, 6, 6, 4, 4, 3, 2$
- $S_1$: $7, 6, 5, 5, 3, 3, 2, 1$
- $S_2$: $5, 4, 4, 2, 2, 1, 0$
- $S_3$: $3, 3, 1, 1, 0, 0$
- $S_4$: $2, 0, 0, 0, 0$
- $S_5$: $0, 0, -1, -1$ Não é gráfica

# Algoritmo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Algoritmo Havel-Hakimi:** Dada uma sequência $S$ de inteiros decrescentes, iterativamente remova o primeiro elemento $\Delta$ e subtraia 1 dos demais $\Delta$ maiores elementos restantes. Pare quando a sequência for formada somente por zeros (neste caso ela é gráfica) ou contém um número negativo (neste caso, $S$ não é gráfica).

**Exemplo 2:** A sequência $S$: $4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 1$ é gráfica?

# Algoritmo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Algoritmo Havel-Hakimi:** Dada uma sequência $S$ de inteiros decrescentes, iterativamente remova o primeiro elemento $\Delta$ e subtraia 1 dos demais $\Delta$ maiores elementos restantes. Pare quando a sequência for formada somente por zeros (neste caso ela é gráfica) ou contém um número negativo (neste caso, $S$ não é gráfica).

**Exemplo 2:** A sequência $S$: $4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 1$ é gráfica?

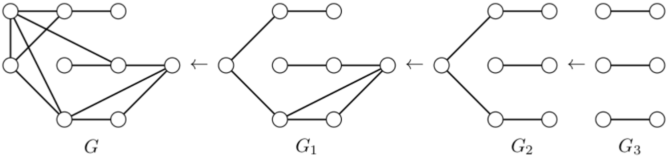
$$S\colon 443333211 \Rightarrow S_1\colon 33222211 \Rightarrow S_2\colon 2221111 \Rightarrow S_3\colon 111111$$

# Algoritmo

**Algoritmo Havel-Hakimi:** Dada uma sequência $S$ de inteiros decrescentes, iterativamente remova o primeiro elemento $\Delta$ e subtraia 1 dos demais $\Delta$ maiores elementos restantes. Pare quando a sequência for formada somente por zeros (neste caso ela é gráfica) ou contém um número negativo (neste caso, $S$ não é gráfica).

**Exemplo 2:** A sequência $S$: $4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 1$ é gráfica?

$$S\text{: } 443333211 \Rightarrow S_1\text{: } 33222211 \Rightarrow S_2\text{: } 2221111 \Rightarrow S_3\text{: } 111111$$



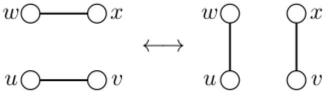
# Observações

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Uma ideia fundamental usada na prova do Teorema de Havel-Hakimi é a operação que troca duas arestas mantendo os graus dos seus extremos.
  - Essas trocas foram usadas para transformar um grafo arbitrário com sequência de graus $d$ em um grafo satisfazendo a condição desejada.

# Observações

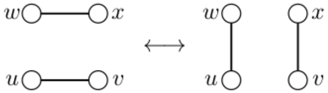
- Uma ideia fundamental usada na prova do Teorema de Havel-Hakimi é a operação que troca duas arestas mantendo os graus dos seus extremos.
    - Essas trocas foram usadas para transformar um grafo arbitrário com sequência de graus $d$ em um grafo satisfazendo a condição desejada.
- **Definição:** Dado um grafo que contém as arestas $uv$ e $wx$ mas não contém as arestas $uw$ e $vx$, um 2-switch é a operação que remove $uv$ e $wx$ e adiciona $uw$ e $vx$.



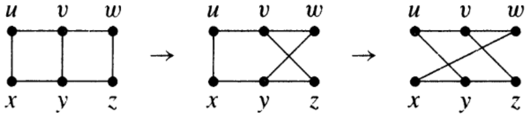
# Observações

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

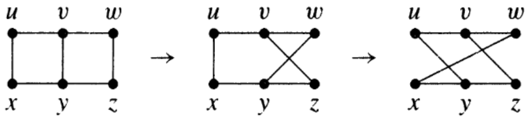
- Uma ideia fundamental usada na prova do Teorema de Havel-Hakimi é a operação que troca duas arestas mantendo os graus dos seus extremos.
  - Essas trocas foram usadas para transformar um grafo arbitrário com sequência de graus $d$ em um grafo satisfazendo a condição desejada.
- **Definição:** Dado um grafo que contém as arestas $uv$ e $wx$ mas não contém as arestas $uw$ e $vx$, um 2-switch é a operação que remove $uv$ e $wx$ e adiciona $uw$ e $vx$.




A figura abaixo ilustra dois 2-switches sucessivos:

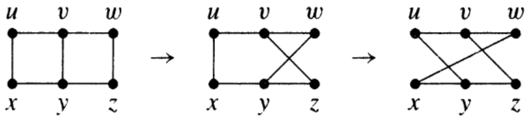


# Observações



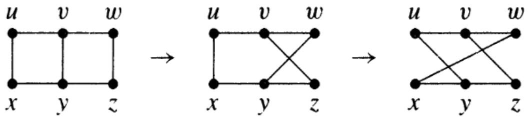

- Um 2-switch preserva os graus de todos os vértices.
- Se um 2-switch torna $H$ em $H'$, então um 2-switch realizado nos mesmos quatro vértices torna $H'$ em $H$.

# Observações




- Um 2-switch preserva os graus de todos os vértices.
- Se um 2-switch torna $H$ em $H'$, então um 2-switch realizado nos mesmos quatro vértices torna $H'$ em $H$.
- Quando dois grafos possuem a mesma sequência de graus, será que é possível transformar um no outro?

# Observações




- Um 2-switch preserva os graus de todos os vértices.
- Se um 2-switch torna $H$ em $H'$, então um 2-switch realizado nos mesmos quatro vértices torna $H'$ em $H$.
- Quando dois grafos possuem a mesma sequência de graus, será que é possível transformar um no outro?

> **Teorema [Berge 1973]:** Dois grafos simples $G$ e $H$ têm a mesma sequência de graus se e somente se existe uma sequência de 2-switches que transforma $G$ em $H$.


Claude Berge

# Sequências de graus unigráficas

# Sequências de graus unigráficas

- **Definição:** Uma sequência de graus é unigráfica se existe exatamente um grafo com esta sequência.

# Sequências de graus unigráficas

- **Definição:** Uma sequência de graus é unigráfica se existe exatamente um grafo com esta sequência.

Exemplo 1: A estrela $K_{1,n-1}$ tem sequência de graus $n-1, 1, \ldots, 1$. Além disso, nenhum 2-switch pode ser realizado numa estrela. Logo, podemos afirmar que um grafo é uma estrela se e somente se ele tem sequência de graus da forma $n-1, 1, \ldots, 1$.

# Sequências de graus unigráficas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Uma sequência de graus é unigráfica se existe exatamente um grafo com esta sequência.

Exemplo 1: A estrela $K_{1,n-1}$ tem sequência de graus $n-1, 1, \ldots, 1$. Além disso, nenhum 2-switch pode ser realizado numa estrela. Logo, podemos afirmar que um grafo é uma estrela se e somente se ele tem sequência de graus da forma $n-1, 1, \ldots, 1$.

Exemplo 2: A sequência $3, 3, 3, 3$ é unigráfica, dado que o $K_4$ é o único grafo que concretiza esta sequência de graus.

# Sequências de graus unigráficas

- **Definição:** Uma sequência de graus é unigráfica se existe exatamente um grafo com esta sequência.

Exemplo 1: A estrela $K_{1,n-1}$ tem sequência de graus $n-1, 1, \ldots, 1$. Além disso, nenhum 2-switch pode ser realizado numa estrela. Logo, podemos afirmar que um grafo é uma estrela se e somente se ele tem sequência de graus da forma $n-1, 1, \ldots, 1$.

Exemplo 2: A sequência $3, 3, 3, 3$ é unigráfica, dado que o $K_4$ é o único grafo que concretiza esta sequência de graus.

Exemplo 3: A sequência $3, 3, 3, 3, 3, 3$ não é unigráfica, dado que o $K_{3,3}$ e o $K_3 \square K_2$ ambos concretizam esta sequência.

# Fim