Aula 11 — Grafos Hamiltonianos

Teoria dos Grafos — QXD0152

UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

1º semestre/2021

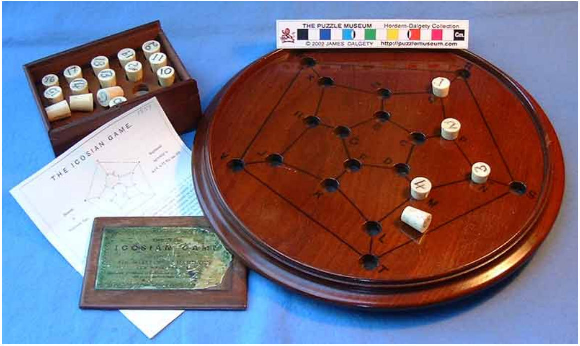
Tópicos desta aula

- Ciclo hamiltoniano - história, definições
- Condição necessária para existência de ciclo hamiltoniano
- Condições suficientes para existência de ciclo hamiltoniano

Introdução

O jogo do Sir William Rowan Hamilton

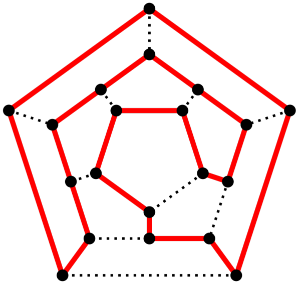
Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá



- Em 1857, Hamilton inventou um jogo no qual um jogador começa especificando um caminho com 5 vértices no grafo dodecaedro e um segundo jogador deve estendê-lo até formar um ciclo gerador do grafo.

Ciclos hamiltonianos

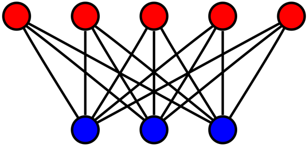
- Um ciclo gerador de um grafo é chamado ciclo hamiltoniano.
- Um grafo é hamiltoniano se possui um ciclo hamiltoniano.



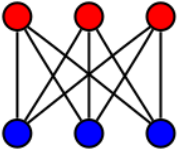
- Consideramos apenas grafos simples dado que laços e arestas paralelas são irrelevantes nesse contexto.

Grafos bipartidos completos

- Que propriedades um grafo bipartido completo hamiltoniano dever ter?



$K_{3,5}$



$K_{3,3}$

Condição necessária

Uma condição necessária

Teorema 11.1: Se G é um grafo hamiltoniano, então **para todo** subconjunto não-vazio $S \subseteq V(G)$, tem-se que $c(G - S) \leq |S|$.

Demonstração:

Uma condição necessária

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.1: Se G é um grafo hamiltoniano, então **para todo** subconjunto não-vazio $S \subseteq V(G)$, tem-se que $c(G - S) \leq |S|$.

Demonstração:

- Seja G um grafo com um ciclo hamiltoniano C e seja $S \subseteq V(G)$, $S \neq \emptyset$.

Uma condição necessária

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.1: Se G é um grafo hamiltoniano, então **para todo** subconjunto não-vazio $S \subseteq V(G)$, tem-se que $c(G - S) \leq |S|$.

Demonstração:

- Seja G um grafo com um ciclo hamiltoniano C e seja $S \subseteq V(G)$, $S \neq \emptyset$.

- Note que sempre que o ciclo hamiltoniano C passa por um vértice de uma componente de $G - S$ pela última vez, o próximo vértice de C pertence ao conjunto S, e cada entrada em S usa um vértice distinto.

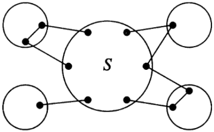
Uma condição necessária

Teorema 11.1: Se G é um grafo hamiltoniano, então **para todo** subconjunto não-vazio $S \subseteq V(G)$, tem-se que $c(G - S) \leq |S|$.

Demonstração:

- Seja G um grafo com um ciclo hamiltoniano C e seja $S \subseteq V(G)$, $S \neq \emptyset$.

- Note que sempre que o ciclo hamiltoniano C passa por um vértice de uma componente de $G - S$ pela última vez, o próximo vértice de C pertence ao conjunto S, e cada entrada em S usa um vértice distinto.

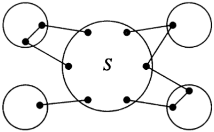


Uma condição necessária

Teorema 11.1: Se G é um grafo hamiltoniano, então **para todo** subconjunto não-vazio $S \subseteq V(G)$, tem-se que $c(G - S) \leq |S|$.

Demonstração:

- Seja G um grafo com um ciclo hamiltoniano C e seja $S \subseteq V(G)$, $S \neq \emptyset$.
- Note que sempre que o ciclo hamiltoniano C passa por um vértice de uma componente de $G - S$ pela última vez, o próximo vértice de C pertence ao conjunto S, e cada entrada em S usa um vértice distinto.



- Portanto, $|S|$ é maior ou igual que o número de componentes de $G - S$. ■

Resultados imediatos

A contrapositiva do Teorema 11.1 nos dá a seguinte condição suficiente para um grafo ser **não-hamiltoniano**:

Corolário 11.2: Seja G um grafo. Se **existe** subconjunto não-vazio $S \subseteq V(G)$ tal que $c(G - S) > |S|$, então G não é hamiltoniano.

Resultados imediatos

A contrapositiva do Teorema 11.1 nos dá a seguinte condição suficiente para um grafo ser **não-hamiltoniano**:

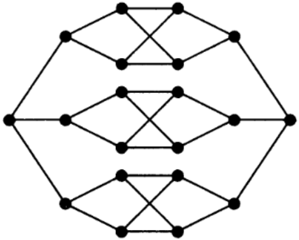
Corolário 11.2: Seja G um grafo. Se **existe** subconjunto não-vazio $S \subseteq V(G)$ tal que $c(G - S) > |S|$, então G não é hamiltoniano.

- A remoção de um vértice de corte de um grafo separável desconecta o grafo em pelo menos duas componentes. Logo, obtemos:

Corolário 11.3: Se G contém um vértice de corte, então G não é hamiltoniano.

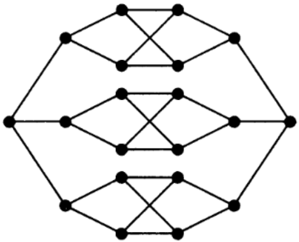
Este grafo é hamiltoniano?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



Teorema 11.1: Se G é um grafo hamiltoniano, então **para todo** subconjunto não-vazio $S \subseteq V(G)$, tem-se que $c(G - S) \leq |S|$.

Este grafo é hamiltoniano?

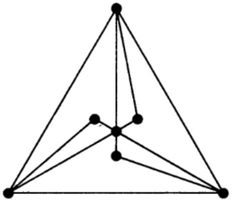


Teorema 11.1: Se G é um grafo hamiltoniano, então **para todo** subconjunto não-vazio $S \subseteq V(G)$, tem-se que $c(G - S) \leq |S|$.

- Este grafo não satisfaz a condição necessária.

Este grafo é hamiltoniano?

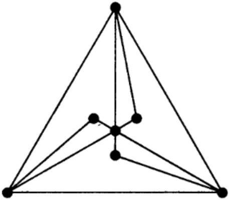
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



Teorema 11.1: Se G é um grafo hamiltoniano, então **para todo** subconjunto não-vazio $S \subset V(G)$, tem-se que $c(G - S) \leq |S|$.

Este grafo é hamiltoniano?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



Teorema 11.1: Se G é um grafo hamiltoniano, então **para todo** subconjunto não-vazio $S \subset V(G)$, tem-se que $c(G - S) \leq |S|$.

- Este grafo não tem um ciclo gerador. Se ele tivesse um ciclo gerador C, todas as arestas incidentes aos vértices de grau 2 estariam em C.
- Porém, isso implicaria o vértice central aparecer repetidamente no ciclo C.

Condições suficientes

Condição suficiente

- Em 1952, G. A. Dirac provou que um grafo G ter $\delta(G) \geq n/2$ é suficiente para ele ser hamiltoniano.

- De fato, para grafos arbitrários, este é o melhor limitante inferior, dado que há grafos com $\delta(G) < n/2$ que não são hamiltonianos.

Dirac

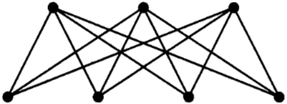
Condição suficiente

- Em 1952, G. A. Dirac provou que um grafo G ter $\delta(G) \geq n/2$ é suficiente para ele ser hamiltoniano.

- De fato, para grafos arbitrários, este é o melhor limitante inferior, dado que há grafos com $\delta(G) < n/2$ que não são hamiltonianos.

Dirac

- Exemplo: Grafos bipartidos completos $K_{p,q}$ com n vértices, n ímpar, tal que $p = (n-1)/2$ e $q = (n+1)/2$.



Condição suficiente

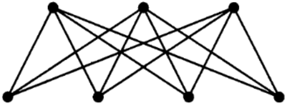
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Em 1952, G. A. Dirac provou que um grafo G ter $\delta(G) \geq n/2$ é suficiente para ele ser hamiltoniano.

Dirac

- De fato, para grafos arbitrários, este é o melhor limitante inferior, dado que há grafos com $\delta(G) < n/2$ que não são hamiltonianos.

- Exemplo: Grafos bipartidos completos $K_{p,q}$ com n vértices, n ímpar, tal que $p = (n-1)/2$ e $q = (n+1)/2$.



- Em 1960, Oisten Ore provou uma condição suficiente ainda mais geral que a de Dirac, que apresentamos a seguir.

Teorema

Teorema 11.4 [Ore, 1960]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $d(u) + d(v) \geq n$, para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ não adjacentes, então G é hamiltoniano.

Oisten Ore

Teorema

Teorema 11.4 [Ore, 1960]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $d(u) + d(v) \geq n$, para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ não adjacentes, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.4 [Ore, 1960]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $d(u) + d(v) \geq n$, para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ não adjacentes, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

- **Prova por contradição.** Suponha, por absurdo, que exista um grafo não-hamiltoniano G de ordem $n \geq 3$ tal que $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ para todo par u, v de vértices não adjacentes de G.

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.4 [Ore, 1960]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $d(u) + d(v) \geq n$, para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ não adjacentes, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

- **Prova por contradição.** Suponha, por absurdo, que exista um grafo não-hamiltoniano G de ordem $n \geq 3$ tal que $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ para todo par u, v de vértices não adjacentes de G.

- Adicione a G o maior número de arestas possível de modo que o grafo resultante H continue não hamiltoniano.

Teorema

Teorema 11.4 [Ore, 1960]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $d(u) + d(v) \geq n$, para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ não adjacentes, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

- **Prova por contradição.** Suponha, por absurdo, que exista um grafo não-hamiltoniano G de ordem $n \geq 3$ tal que $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ para todo par u, v de vértices não adjacentes de G.

- Adicione a G o maior número de arestas possível de modo que o grafo resultante H continue não hamiltoniano.
    - Ou seja, H é **não-hamiltoniano maximal**, o que significa que, adicionando qualquer nova aresta a H, ele se torna hamiltoniano.

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.4 [Ore, 1960]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $d(u) + d(v) \geq n$, para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ não adjacentes, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

- **Prova por contradição.** Suponha, por absurdo, que exista um grafo não-hamiltoniano G de ordem $n \geq 3$ tal que $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ para todo par u, v de vértices não adjacentes de G.

- Adicione a G o maior número de arestas possível de modo que o grafo resultante H continue não hamiltoniano.
  - Ou seja, H é **não-hamiltoniano maximal**, o que significa que, adicionando qualquer nova aresta a H, ele se torna hamiltoniano.
  - Note que $d_H(u) + d_H(v) \geq n$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V(H)$. Além disso, H não é um grafo completo. Why not?

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Como H não é completo, ele possui dois vértices x e y não adjacentes.

Continuação da demonstração

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Como H não é completo, ele possui dois vértices x e y não adjacentes.
- Então, $H + xy$ é hamiltoniano. Além disso, todo ciclo hamiltoniano de H deve conter a aresta xy.

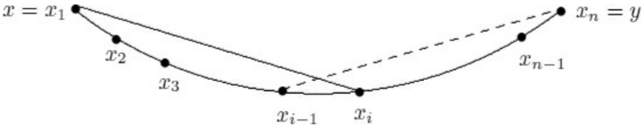
Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Como H não é completo, ele possui dois vértices x e y não adjacentes.
- Então, $H + xy$ é hamiltoniano. Além disso, todo ciclo hamiltoniano de H deve conter a aresta xy.
- Isso implica que H contém um (x, y)-caminho P que é hamiltoniano. Seja $P = (x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y)$.

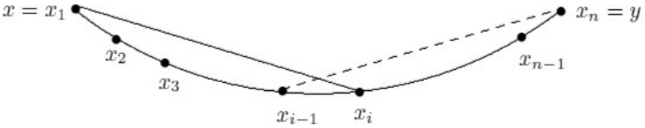
Continuação da demonstração

- Como H não é completo, ele possui dois vértices x e y não adjacentes.
- Então, $H + xy$ é hamiltoniano. Além disso, todo ciclo hamiltoniano de H deve conter a aresta xy.
- Isso implica que H contém um (x, y)-caminho P que é hamiltoniano. Seja $P = (x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y)$.
- Note que se $xx_i \in E(H)$, para $2 \leq i \leq n$, então $yx_{i-1} \notin E(H)$. (Why?)



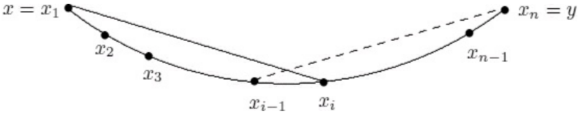
Continuação da demonstração

- Como H não é completo, ele possui dois vértices x e y não adjacentes.
- Então, $H + xy$ é hamiltoniano. Além disso, todo ciclo hamiltoniano de H deve conter a aresta xy.
- Isso implica que H contém um (x, y)-caminho P que é hamiltoniano. Seja $P = (x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y)$.
- Note que se $xx_i \in E(H)$, para $2 \leq i \leq n$, então $yx_{i-1} \notin E(H)$. (Why?)



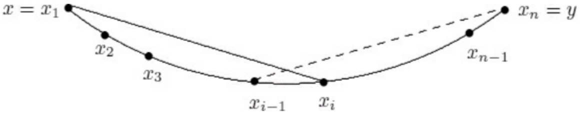
- Se este não fosse o caso, $(x_1, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_{i-1}, x_{i-2}, \ldots, x_1)$ é um ciclo hamiltoniano de H, o que é impossível.

Continuação da demonstração



- Portanto, para cada vértice de $\{x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ adjacente a x, existe um vértice de $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ não adjacente a y.

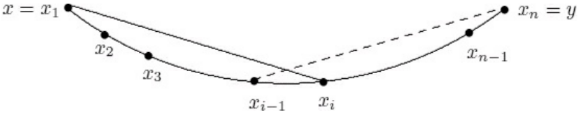
Continuação da demonstração



- Portanto, para cada vértice de $\{x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ adjacente a x, existe um vértice de $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ não adjacente a y.

- Contudo, isto significa que $d_G(y) \leq (n-1) - d_G(x)$.

Continuação da demonstração

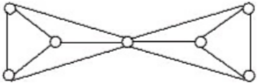


- Portanto, para cada vértice de $\{x_2, x_3, \dots, x_n\}$ adjacente a x, existe um vértice de $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ não adjacente a y.
- Contudo, isto significa que $d_G(y) \leq (n-1) - d_G(x)$.
- O que implica, $d_G(y) + d_G(x) \leq n - 1$, contradizendo o fato de que $d_G(y) + d_G(v) \geq n$.
- Portanto, G é hamiltoniano. ■

Observação

- O limitante dado no Teorema anterior é apertado.

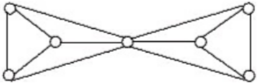
- Exemplo: Seja $n = 2k + 1 \geq 3$ um inteiro. Seja G o grafo obtido identificando um vértice de uma cópia do K_{k+1} e um vértice de outra cópia do K_{k+1}. Para $n = 7$, o grafo G é exibido abaixo.



Observação

- O limitante dado no Teorema anterior é apertado.

- Exemplo: Seja $n = 2k + 1 \geq 3$ um inteiro. Seja G o grafo obtido identificando um vértice de uma cópia do K_{k+1} e um vértice de outra cópia do K_{k+1}. Para $n = 7$, o grafo G é exibido abaixo.



- Certamente, G não é hamiltoniano pois possui um vértice de corte. Além disso, se u, v são vértices não adjacentes de G, então $d(u) = d(v) = k$ e $d(u) + d(v) = 2k = n - 1$.

- Portanto, o limitante do teorema anterior não pode ser melhorado.

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.5 [Dirac, 1952]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $\delta(G) \geq n/2$, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.5 [Dirac, 1952]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $\delta(G) \geq n/2$, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

- Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Suponha que $\delta(G) \geq n/2$.

Teorema

Teorema 11.5 [Dirac, 1952]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $\delta(G) \geq n/2$, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

- Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Suponha que $\delta(G) \geq n/2$.
- Note que se $G \cong K_n$, então certamente G é hamiltoniano. Portanto, podemos supor que G não é completo.

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.5 [Dirac, 1952]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $\delta(G) \geq n/2$, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

- Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Suponha que $\delta(G) \geq n/2$.
- Note que se $G \cong K_n$, então certamente G é hamiltoniano. Portanto, podemos supor que G não é completo.
- Sejam $u, v \in V(G)$ dois vértices não adjacentes. Então,

$$d(u) + d(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

Teorema

Teorema 11.5 [Dirac, 1952]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $\delta(G) \geq n/2$, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

- Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Suponha que $\delta(G) \geq n/2$.
- Note que se $G \cong K_n$, então certamente G é hamiltoniano. Portanto, podemos supor que G não é completo.
- Sejam $u, v \in V(G)$ dois vértices não adjacentes. Então,

$$d(u) + d(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

- Pelo teorema 11.4, G é hamiltoniano. ■

Corolário

Com o auxílio do Teorema 11.4, obtemos a seguinte condição suficiente para que um grafo tenha um caminho hamiltoniano.

Corolário 11.6: Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Se $d(u) + d(v) \geq n - 1$, para quaisquer dois vértices não adjacentes $u, v \in V(G)$, então G contém um caminho hamiltoniano.

Demonstração:

Corolário

Com o auxílio do Teorema 11.4, obtemos a seguinte condição suficiente para que um grafo tenha um caminho hamiltoniano.

Corolário 11.6: Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Se $d(u) + d(v) \geq n - 1$, para quaisquer dois vértices não adjacentes $u, v \in V(G)$, então G contém um caminho hamiltoniano.

Demonstração:

- Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Suponha que $d_G(u) + d_G(v) \geq n - 1$, para quaisquer dois vértices não adjacentes $u, v \in V(G)$.

Corolário

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ CAMPUS QUIXADÁ

Com o auxílio do Teorema 11.4, obtemos a seguinte condição suficiente para que um grafo tenha um caminho hamiltoniano.

Corolário 11.6: Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Se $d(u) + d(v) \geq n - 1$, para quaisquer dois vértices não adjacentes $u, v \in V(G)$, então G contém um caminho hamiltoniano.

Demonstração:

- Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Suponha que $d_G(u) + d_G(v) \geq n - 1$, para quaisquer dois vértices não adjacentes $u, v \in V(G)$.
- Seja $H = G \vee K_1$ a junção de G e K_1, onde w é o vértice de H que não pertence a G.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Então $d_H(u) + d_H(v) \geq n + 1$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V(H)$.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Então $d_H(u) + d_H(v) \geq n + 1$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V(H)$.

- Como a ordem de H é $n + 1$, segue do Teorema 11.4 que H é hamiltoniano. Seja C um ciclo hamiltoniano de H.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Então $d_H(u) + d_H(v) \geq n + 1$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V(H)$.
- Como a ordem de H é $n + 1$, segue do Teorema 11.4 que H é hamiltoniano. Seja C um ciclo hamiltoniano de H.
- Removendo w de C, obtemos um caminho hamiltoniano em G. ■

Fecho hamiltoniano

Teorema

Teorema 11.7 [Bondy e Chvátal, 1976]: Sejam u e v vértices não adjacentes em um grafo G de ordem n tal que $d(u)+d(v) \geq n$. Então, $G + uv$ é hamiltoniano se e somente se G é hamiltoniano.

J. A. Bondy

Vašek Chvátal

Teorema

Teorema 11.7 [Bondy e Chvátal, 1976]: Sejam u e v vértices não adjacentes em um grafo G de ordem n tal que $d(u)+d(v) \geq n$. Então, $G + uv$ é hamiltoniano se e somente se G é hamiltoniano.

Demonstração:

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.7 [Bondy e Chvátal, 1976]: Sejam u e v vértices não adjacentes em um grafo G de ordem n tal que $d(u)+d(v) \geq n$. Então, $G + uv$ é hamiltoniano se e somente se G é hamiltoniano.

Demonstração:

- Sejam u e v vértices não adjacentes em um grafo G de ordem n tal que $d(u) + d(v) \geq n$.

Teorema

Teorema 11.7 [Bondy e Chvátal, 1976]: Sejam u e v vértices não adjacentes em um grafo G de ordem n tal que $d(u)+d(v) \geq n$. Então, $G + uv$ é hamiltoniano se e somente se G é hamiltoniano.

Demonstração:

- Sejam u e v vértices não adjacentes em um grafo G de ordem n tal que $d(u) + d(v) \geq n$.

- Se G é hamiltoniano, então certamente $G + uv$ é hamiltoniano. Assim, precisamos apenas verificar o inverso.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.7 [Bondy e Chvátal, 1976]: Sejam u e v vértices não adjacentes em um grafo G de ordem n tal que $d(u)+d(v) \geq n$. Então, $G + uv$ é hamiltoniano se e somente se G é hamiltoniano.

- Seja $G + uv$ um grafo hamiltoniano e suponha, por absurdo, que G não é hamiltoniano.

Continuação da demonstração

Teorema 11.7 [Bondy e Chvátal, 1976]: Sejam u e v vértices não adjacentes em um grafo G de ordem n tal que $d(u)+d(v) \geq n$. Então, $G + uv$ é hamiltoniano se e somente se G é hamiltoniano.

- Seja $G + uv$ um grafo hamiltoniano e suponha, por absurdo, que G não é hamiltoniano.
- Isso implica que todo ciclo hamitoniano em $G + uv$ contém a aresta uv e, assim, G contém um (u, v)-caminho hamiltoniano P.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.7 [Bondy e Chvátal, 1976]: Sejam u e v vértices não adjacentes em um grafo G de ordem n tal que $d(u)+d(v) \geq n$. Então, $G + uv$ é hamiltoniano se e somente se G é hamiltoniano.

- Seja $G + uv$ um grafo hamiltoniano e suponha, por absurdo, que G não é hamiltoniano.
- Isso implica que todo ciclo hamitoniano em $G + uv$ contém a aresta uv e, assim, G contém um (u, v)-caminho hamiltoniano P.
- O restante desta prova é idêntico à prova do Teorema 11.4. Chegaremos ao fato de que $d(u) \leq (n-1) - d(v)$, contradizendo o fato de que $d_G(u) + d_G(v) \geq n$.
- Portanto, concluímos que G é Hamiltoniano. ■

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

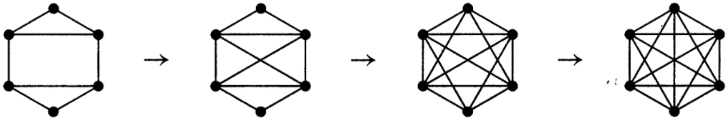
Teorema 11.7 [Bondy e Chvátal, 1976]: Sejam u e v vértices não adjacentes em um grafo G de ordem n tal que $d(u)+d(v) \geq n$. Então, $G + uv$ é hamiltoniano se e somente se G é hamiltoniano.

- Seja $G + uv$ um grafo hamiltoniano e suponha, por absurdo, que G não é hamiltoniano.
- Isso implica que todo ciclo hamitoniano em $G + uv$ contém a aresta uv e, assim, G contém um (u, v)-caminho hamiltoniano P.
- O restante desta prova é idêntico à prova do Teorema 11.4. Chegaremos ao fato de que $d(u) \leq (n-1) - d(v)$, contradizendo o fato de que $d_G(u) + d_G(v) \geq n$.
- Portanto, concluímos que G é Hamiltoniano. ■

O Teorema 11.7 inpirou a definição de fecho de um grafo, apresentada a seguir.

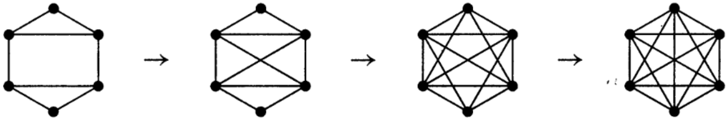
Fecho de um grafo

- O fecho de um grafo simples G com n vértices, denotado por $C(G)$, é o grafo simples obtido a partir de G adicionando arestas entre pares de vértices não-adjacentes de G cuja soma dos graus seja pelo menos n, até que não reste nenhum par com tal propriedade.



Fecho de um grafo

- O fecho de um grafo simples G com n vértices, denotado por $C(G)$, é o grafo simples obtido a partir de G adicionando arestas entre pares de vértices não-adjacentes de G cuja soma dos graus seja pelo menos n, até que não reste nenhum par com tal propriedade.



- A seguir, provamos que o fecho é uma operação bem definida em grafos. Ou seja, o mesmo grafo é obtido independentemente da ordem em que as arestas são adicionadas ao grafo inicial.

Fecho é uma operação bem definida

Teorema 11.9: Seja G um grafo simples de ordem n. Se G_1 e G_2 são grafos obtidos recursivamente ligando pares de vértices não adjacentes de G cuja soma de graus é pelo menos n até que nenhum tal par exista, então $G_1 = G_2$.

Demonstração:

Fecho é uma operação bem definida

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema 11.9: Seja G um grafo simples de ordem n. Se G_1 e G_2 são grafos obtidos recursivamente ligando pares de vértices não adjacentes de G cuja soma de graus é pelo menos n até que nenhum tal par exista, então $G_1 = G_2$.

Demonstração:

- Suponha que G_1 é o grafo obtido adicionando as arestas $e_1, e_2, \ldots, e_r$ a G nesta ordem e que G_2 é obtido a partir de G adicionando as arestas $f_1, f_2, \ldots, f_s$ nesta ordem.

Fecho é uma operação bem definida

Teorema 11.9: Seja G um grafo simples de ordem n. Se G_1 e G_2 são grafos obtidos recursivamente ligando pares de vértices não adjacentes de G cuja soma de graus é pelo menos n até que nenhum tal par exista, então $G_1 = G_2$.

Demonstração:

- Suponha que G_1 é o grafo obtido adicionando as arestas $e_1, e_2, \ldots, e_r$ a G nesta ordem e que G_2 é obtido a partir de G adicionando as arestas $f_1, f_2, \ldots, f_s$ nesta ordem.
- Suponha, por absurdo, que $G_1 \neq G_2$. Então $E(G_1) \neq E(G_2)$.

Fecho é uma operação bem definida

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.9: Seja G um grafo simples de ordem n. Se G_1 e G_2 são grafos obtidos recursivamente ligando pares de vértices não adjacentes de G cuja soma de graus é pelo menos n até que nenhum tal par exista, então $G_1 = G_2$.

Demonstração:

- Suponha que G_1 é o grafo obtido adicionando as arestas $e_1, e_2, \dots, e_r$ a G nesta ordem e que G_2 é obtido a partir de G adicionando as arestas $f_1, f_2, \dots, f_s$ nesta ordem.
- Suponha, por absurdo, que $G_1 \neq G_2$. Então $E(G_1) \neq E(G_2)$.
- Deste modo, podemos assumir que existe uma primeira aresta $e_i = xy$ na sequência $e_1, e_2, \dots, e_r$ que não pertence a G_2.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja H o grafo obtido antes da inserção da aresta e_i. Ou seja, se $i = 1$, então $H = G$; caso contrário, $H = G + \{e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}\}$.

Continuação da demonstração

- Seja H o grafo obtido antes da inserção da aresta e_i. Ou seja, se $i = 1$, então $H = G$; caso contrário, $H = G + \{e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}\}$.

- Então, H é um subgrafo de G_2 e x e y são não-adjacentes em H.

Continuação da demonstração

- Seja H o grafo obtido antes da inserção da aresta e_i. Ou seja, se $i = 1$, então $H = G$; caso contrário, $H = G + \{e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}\}$.

- Então, H é um subgrafo de G_2 e x e y são não-adjacentes em H.

- Como $d_H(x) + d_H(y) \geq n$, segue que $d_{G_2}(x) + d_{G_2}(y) \geq n$, o que produz uma contradição.

Continuação da demonstração

- Seja H o grafo obtido antes da inserção da aresta e_i. Ou seja, se $i = 1$, então $H = G$; caso contrário, $H = G + \{e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}\}$.

- Então, H é um subgrafo de G_2 e x e y são não-adjacentes em H.

- Como $d_H(x) + d_H(y) \geq n$, segue que $d_{G_2}(x) + d_{G_2}(y) \geq n$, o que produz uma contradição.

- Portanto, $G_1 = G_2$, o que implica que o fecho é uma operação bem-definida em grafos. $\blacksquare$

Fecho de um grafo

Repetidas aplicações do Teorema 11.7 nos dão o seguinte resultado.

Teorema 11.10: Um grafo simples é hamiltoniano se e somente se seu fecho é hamiltoniano.

Fecho de um grafo

Repetidas aplicações do Teorema 11.7 nos dão o seguinte resultado.

Teorema 11.10: Um grafo simples é hamiltoniano se e somente se seu fecho é hamiltoniano.

Corolário 11.11: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $C(G)$ é completo, então G é hamiltoniano.

Fecho de um grafo

Repetidas aplicações do Teorema 11.7 nos dão o seguinte resultado.

Teorema 11.10: Um grafo simples é hamiltoniano se e somente se seu fecho é hamiltoniano.

Corolário 11.11: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $C(G)$ é completo, então G é hamiltoniano.

- **Observação:** Agora temos uma condição necessária e suficiente para testar se um grafo tem ciclo hamiltoniano.
    - Porém, ela não ajuda muito, porque requer que testemos se outro grafo é hamiltoniano!

Grafo de Petersen

Teorema 11.13: O grafo de Petersen não é hamiltoniano.

Demonstração:

Grafo de Petersen

Teorema 11.13: O grafo de Petersen não é hamiltoniano.

Demonstração:

- Seja P o grafo de Petersen. Suponha, por absurdo que P é hamiltoniano. Então, P possui um ciclo hamiltoniano $C = (v_1, v_2, \ldots, v_{10}, v_1)$.

Grafo de Petersen

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.13: O grafo de Petersen não é hamiltoniano.

Demonstração:

- Seja P o grafo de Petersen. Suponha, por absurdo que P é hamiltoniano. Então, P possui um ciclo hamiltoniano $C = (v_1, v_2, \ldots, v_{10}, v_1)$.

- Como P é cúbico, v_1 é adjacente a exatamente um dos vértices $v_3, v_4, \ldots, v_9$.

Grafo de Petersen

Teorema 11.13: O grafo de Petersen não é hamiltoniano.

Demonstração:

- Seja P o grafo de Petersen. Suponha, por absurdo que P é hamiltoniano. Então, P possui um ciclo hamiltoniano $C = (v_1, v_2, \ldots, v_{10}, v_1)$.
- Como P é cúbico, v_1 é adjacente a exatamente um dos vértices $v_3, v_4, \ldots, v_9$.
- Contudo, como a cintura de P é igual a 5, concluímos que v_1 só pode ser adjacente a um dos vértices v_5, v_6 e v_7. Além disso, por causa da simetria entre v_5 e v_7, podemos supor, sem perda de generalidade, que v_1 é adjacente apenas a v_5 ou a v_6.

Grafo de Petersen

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema 11.13: O grafo de Petersen não é hamiltoniano.

Demonstração:

- Seja P o grafo de Petersen. Suponha, por absurdo que P é hamiltoniano. Então, P possui um ciclo hamiltoniano $C = (v_1, v_2, \ldots, v_{10}, v_1)$.
- Como P é cúbico, v_1 é adjacente a exatamente um dos vértices $v_3, v_4, \ldots, v_9$.
- Contudo, como a cintura de P é igual a 5, concluímos que v_1 só pode ser adjacente a um dos vértices v_5, v_6 e v_7. Além disso, por causa da simetria entre v_5 e v_7, podemos supor, sem perda de generalidade, que v_1 é adjacente apenas a v_5 ou a v_6.
- Temos então dois casos a considerar.

Continuação da demonstração

- **Caso 1:** v_1 é adjacente a v_5. Neste caso, v_{10} é adjacente a exatamente um dos vértices v_4 e v_6, o que resulta em um ciclo C_4. Contradição, pois P tem cintura 5.

Continuação da demonstração

- **Caso 1:** v_1 é adjacente a v_5. Neste caso, v_{10} é adjacente a exatamente um dos vértices v_4 e v_6, o que resulta em um ciclo C_4. Contradição, pois P tem cintura 5.

- **Caso 2:** v_1 é adjacente a v_6. Neste caso, v_{10} é adjacente a exatamente um dos vértices v_4 e v_5. Como P não contém ciclos de tamanho 4, o vértice v_{10} tem que ser adjacente a v_4.

Continuação da demonstração

- **Caso 1:** v_1 é adjacente a v_5. Neste caso, v_{10} é adjacente a exatamente um dos vértices v_4 e v_6, o que resulta em um ciclo C_4. Contradição, pois P tem cintura 5.

- **Caso 2:** v_1 é adjacente a v_6. Neste caso, v_{10} é adjacente a exatamente um dos vértices v_4 e v_5. Como P não contém ciclos de tamanho 4, o vértice v_{10} tem que ser adjacente a v_4.
  - Como P é cúbico e não contém ciclos de tamanho 3 ou 4, o vértice v_9 deve ser adjacente a exatamente um dos vértices v_3, v_4 ou v_5. Contudo, cada uma destas escolhas gera um ciclo de tamanho menor do que 5 em P ou gera um vértice com grau maior que três. Contradição.

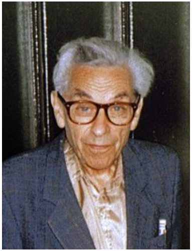
- Portanto, P não é hamiltoniano. ■

Definição

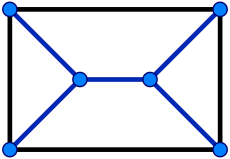
- Dado um grafo G, seja $U \subseteq V(G)$.
- Dizemos que U é um conjunto independente ou conjunto estável de G se quaisquer dois vértices de U são **não-adjacentes**.
- O número de vértices de um conjunto independente máximo em um grafo G é chamado número de independência de G e é denotado por $\alpha(G)$.
- Exemplos:
  - $\alpha(K_{r,s}) = \max\{r, s\}$
  - $\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
  - $\alpha(K_n) = 1$

Mais uma condição suficiente

Teorema 11.14 [Chvátal e Erdös, 1972]:
Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices.
Se $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, então G é hamiltoniano.



Paul Erdös



Mais uma condição suficiente

Teorema 11.14 [Chvátal e Erdös, 1972]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

Mais uma condição suficiente

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.14 [Chvátal e Erdös, 1972]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

- Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Suponha que $\kappa(G) \geq \alpha(G)$. Se $\alpha(G) = 1$, então G é completo e, portanto, hamiltoniano.

Mais uma condição suficiente

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.14 [Chvátal e Erdös, 1972]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

- Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Suponha que $\kappa(G) \geq \alpha(G)$. Se $\alpha(G) = 1$, então G é completo e, portanto, hamiltoniano.

- Então, suponha que $\alpha(G) = k \geq 2$. Como $\kappa(G) \geq \alpha(G) = k \geq 2$, temos que G é 2-conexo (contém um ciclo). Seja C um ciclo mais longo em G.

Mais uma condição suficiente

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.14 [Chvátal e Erdös, 1972]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

- Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Suponha que $\kappa(G) \geq \alpha(G)$. Se $\alpha(G) = 1$, então G é completo e, portanto, hamiltoniano.
- Então, suponha que $\alpha(G) = k \geq 2$. Como $\kappa(G) \geq \alpha(G) = k \geq 2$, temos que G é 2-conexo (contém um ciclo). Seja C um ciclo mais longo em G.
- Suponha, por absurdo, que C não é hamiltoniano.

Mais uma condição suficiente

Teorema 11.14 [Chvátal e Erdös, 1972]: Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, então G é hamiltoniano.

Demonstração:

- Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Suponha que $\kappa(G) \geq \alpha(G)$. Se $\alpha(G) = 1$, então G é completo e, portanto, hamiltoniano.
- Então, suponha que $\alpha(G) = k \geq 2$. Como $\kappa(G) \geq \alpha(G) = k \geq 2$, temos que G é 2-conexo (contém um ciclo). Seja C um ciclo mais longo em G.
- Suponha, por absurdo, que C não é hamiltoniano.
- Como $\delta(G) \geq \kappa(G) = k$ e todo grafo com $\delta(G) \geq 2$ possui um ciclo de comprimento pelo menos $\delta(G) + 1$, temos que C tem pelo menos $k + 1$ vértices.

Continuação da demonstração

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Seja H uma componente de $G - V(C)$.

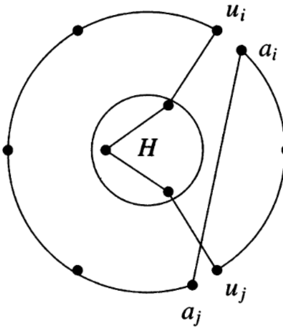
Continuação da demonstração

- Seja H uma componente de $G - V(C)$.

- Note que o ciclo C tem pelo menos k vértices com arestas para a componente H. Caso contrário, poderíamos remover menos do que k vértices de C com arestas para H, desconectando o grafo, contradizendo $\kappa(G) = k$. Sejam $u_1, \ldots, u_k$ k vértices de C com arestas para H, em sentido horário.

Continuação da demonstração

- Para $i = 1, \ldots, k$, seja a_i o vértice imediatamente consecutivo a u_i no ciclo C. Se quaisquer dois vértices a_i e a_j forem adjacentes, então conseguimos construir um novo ciclo mais longo que C usando a aresta $a_i a_j$, a porção de C que vai de a_i até u_j e de a_j até u_i, e ainda um (u_i, u_j)-caminho que passa por H.



Continuação da demonstração

- Se a_i tiver um vizinho em H, então podemos desviar para H entre u_i e a_i em C.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Se a_i tiver um vizinho em H, então podemos desviar para H entre u_i e a_i em C.

- Deste modo, podemos concluir que nenhum vértice a_i tem um vizinho em H. Portanto, $\{a_i, \ldots, a_k\}$ mais um vértice de H formam um conjunto independente de tamanho $k + 1$, contradizendo $\alpha(G) = k$.

Continuação da demonstração

- Se a_i tiver um vizinho em H, então podemos desviar para H entre u_i e a_i em C.

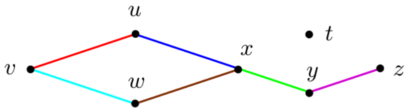
- Deste modo, podemos concluir que nenhum vértice a_i tem um vizinho em H. Portanto, $\{a_i, \ldots, a_k\}$ mais um vértice de H formam um conjunto independente de tamanho $k + 1$, contradizendo $\alpha(G) = k$.

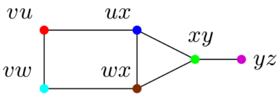
- Portanto, C é um ciclo hamiltoniano. ■

Ciclos hamiltonianos em grafos linha

Definição: Grafo linha $L(G)$

- O **grafo linha** de um grafo G é o grafo $L(G) = (E(G), A)$ em que A é o conjunto de todos os pares de arestas adjacentes de G.

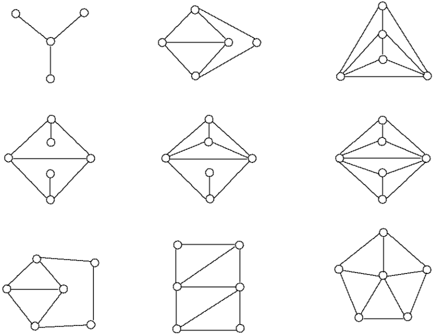


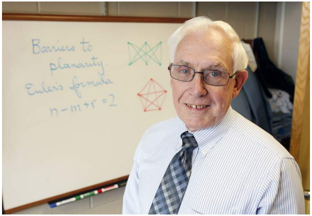


- Exercício: Faça uma figura de $L(K_4)$ e $L(K_5)$.

Caracterização de grafos linha

Teorema 11.15 [Beineke, 1970]: Um grafo G é isomorfo ao grafo linha de algum grafo se e somente se nenhum dos nove subgrafos abaixo é isomorfo a um subgrafo induzido de G.



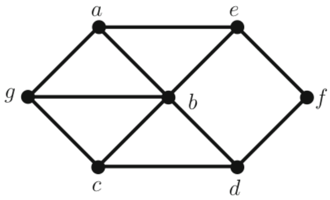


Lowell W. Beineke

Definição: Circuito dominante

- Um circuito C em um grafo G é um circuito dominante se toda aresta de G ou pertence a C ou é adjacente a uma aresta de C.

- Exemplo: Ache um circuito dominante no grafo abaixo.



Caracterização de grafos linha hamiltonianos

Teorema 11.16 [Harary e Nash-Williams, 1965]: Seja G um grafo sem vértices isolados. Então, $L(G)$ é hamiltoniano se e somente se $G = K_{1,\ell}$, para algum $\ell \geq 3$, ou G contém um circuito dominante.

Frank Harary

Crispin Nash-Williams

Demonstração

Teorema 11.16 [Harary e Nash-Williams, 1965]: Seja G um grafo sem vértices isolados. Então, $L(G)$ é hamiltoniano se e somente se $G = K_{1,\ell}$, para algum $\ell \geq 3$, ou G contém um circuito dominante.

- Vamos inicialmente provar a condição suficiente.
- Se $G = K_{1,\ell}$, $\ell \geq 3$, então $L(G)$ é hamiltoniano dado que $L(G) = K_\ell$.

Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.16 [Harary e Nash-Williams, 1965]: Seja G um grafo sem vértices isolados. Então, $L(G)$ é hamiltoniano se e somente se $G = K_{1,\ell}$, para algum $\ell \geq 3$, ou G contém um circuito dominante.

- Vamos inicialmente provar a condição suficiente.
- Se $G = K_{1,\ell}$, $\ell \geq 3$, então $L(G)$ é hamiltoniano dado que $L(G) = K_\ell$.
- Suponha então que G contém um circuito dominante $C = (v_1, v_2, \ldots, v_t, v_1)$.

Demonstração

Teorema 11.16 [Harary e Nash-Williams, 1965]: Seja G um grafo sem vértices isolados. Então, $L(G)$ é hamiltoniano se e somente se $G = K_{1,\ell}$, para algum $\ell \geq 3$, ou G contém um circuito dominante.

- Vamos inicialmente provar a condição suficiente.
- Se $G = K_{1,\ell}$, $\ell \geq 3$, então $L(G)$ é hamiltoniano dado que $L(G) = K_\ell$.
- Suponha então que G contém um circuito dominante $C = (v_1, v_2, \ldots, v_t, v_1)$.
- Note que basta mostrar que existe uma ordenação $\mathcal{S}: e_1, e_2, \ldots, e_m$ das m arestas de G tal que quaisquer duas arestas consecutivas sejam adjacentes.
    - Esta ordenação corresponde a um ciclo hamiltoniano em $L(G)$.

Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Construção da ordenação $\mathcal{S}$:

- Inicie a construção da ordenação $\mathcal{S}$ selecionando, em qualquer ordem, todas as arestas de G incidentes em v_1 que não sejam arestas de C, seguidas pela aresta $v_1 v_2$.

Demonstração

Construção da ordenação $\mathcal{S}$:

- Inicie a construção da ordenação $\mathcal{S}$ selecionando, em qualquer ordem, todas as arestas de G incidentes em v_1 que não sejam arestas de C, seguidas pela aresta $v_1 v_2$.

- Para cada $i \in \{2, \ldots, t-1\}$, selecione, em qualquer ordem, todas as arestas de G incidentes no vértice v_i que não sejam arestas de C e que não sejam arestas previamente selecionadas, seguidas pela aresta $v_i v_{i+1}$.

Demonstração

Construção da ordenação $\mathcal{S}$:

- Inicie a construção da ordenação $\mathcal{S}$ selecionando, em qualquer ordem, todas as arestas de G incidentes em v_1 que não sejam arestas de C, seguidas pela aresta $v_1 v_2$.

- Para cada $i \in \{2, \ldots, t-1\}$, selecione, em qualquer ordem, todas as arestas de G incidentes no vértice v_i que não sejam arestas de C e que não sejam arestas previamente selecionadas, seguidas pela aresta $v_i v_{i+1}$.

- A ordenação $\mathcal{S}$ é completada pela adição da aresta $v_t v_1$.

Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Como C é um circuito dominante de G, toda aresta de G aparece exatamente uma vez em $\mathcal{S}$.

Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Como C é um circuito dominante de G, toda aresta de G aparece exatamente uma vez em $\mathcal{S}$.
- Além disso, arestas consecutivas de $\mathcal{S}$ assim como a primeira e a última arestas de $\mathcal{S}$ são adjacentes em G.

Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Como C é um circuito dominante de G, toda aresta de G aparece exatamente uma vez em $\mathcal{S}$.
- Além disso, arestas consecutivas de $\mathcal{S}$ assim como a primeira e a última arestas de $\mathcal{S}$ são adjacentes em G.
- Isso conclui a prova da suficiência. Temos que provar agora a condição necessária.

Demonstração

Teorema 11.16 [Harary e Nash-Williams, 1965]: Seja G um grafo sem vértices isolados. Então, $L(G)$ é hamiltoniano se e somente se $G = K_{1,\ell}$, para algum $\ell \geq 3$, ou G contém um circuito dominante.

Demonstração

Teorema 11.16 [Harary e Nash-Williams, 1965]: Seja G um grafo sem vértices isolados. Então, $L(G)$ é hamiltoniano se e somente se $G = K_{1,\ell}$, para algum $\ell \geq 3$, ou G contém um circuito dominante.

- Suponha que $L(G)$ é hamiltoniano e que G não é uma estrela $K_{1,\ell}$. Vamos mostrar que G contém um circuito dominante.

Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.16 [Harary e Nash-Williams, 1965]: Seja G um grafo sem vértices isolados. Então, $L(G)$ é hamiltoniano se e somente se $G = K_{1,\ell}$, para algum $\ell \geq 3$, ou G contém um circuito dominante.

- Suponha que $L(G)$ é hamiltoniano e que G não é uma estrela $K_{1,\ell}$. Vamos mostrar que G contém um circuito dominante.

- Como $L(G)$ é hamiltoniano, existe uma ordenação $\mathcal{S}: e_1, e_2, \ldots, e_m$ das m arestas de G tal que e_i e e_{i+1} são arestas adjacentes de G, assim como as arestas e_m e e_1.

Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 11.16 [Harary e Nash-Williams, 1965]: Seja G um grafo sem vértices isolados. Então, $L(G)$ é hamiltoniano se e somente se $G = K_{1,\ell}$, para algum $\ell \geq 3$, ou G contém um circuito dominante.

- Suponha que $L(G)$ é hamiltoniano e que G não é uma estrela $K_{1,\ell}$. Vamos mostrar que G contém um circuito dominante.

- Como $L(G)$ é hamiltoniano, existe uma ordenação $\mathcal{S}: e_1, e_2, \ldots, e_m$ das m arestas de G tal que e_i e e_{i+1} são arestas adjacentes de G, assim como as arestas e_m e e_1.

- Para $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, seja v_i o vértice de G incidente nas arestas e_i e e_{i+1}.

- Como G não é uma estrela, existe um menor inteiro j_1 maior que 1 tal que $v_{j_1} \neq v_1$. Temos que $v_{j_1-1} = v_1$ e que os vértices v_{j_1-1} e v_{j_1} incidem em e_{j_1}. Assim, $e_{j_1} = v_1 v_{j_1}$.

Demonstração

- A seguir, seja j_2 (se ele existir) o menor inteiro maior que j_1 tal que $v_{j_2} \neq v_{j_1}$. Logo, temos que $v_{j_2-1} = v_{j_1}$ e os vértices v_{j_2-1} e v_{j_2} incidem em e_{j_2}. Assim, $e_{j_2} = v_{j_1}v_{j_2}$.

Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- A seguir, seja j_2 (se ele existir) o menor inteiro maior que j_1 tal que $v_{j_2} \neq v_{j_1}$. Logo, temos que $v_{j_2-1} = v_{j_1}$ e os vértices v_{j_2-1} e v_{j_2} incidem em e_{j_2}. Assim, $e_{j_2} = v_{j_1}v_{j_2}$.

- Continuando desta maneira, nós finalmente chegamos em um vértice v_{j_t} tal que $e_{j_t} = v_{j_t-1}v_{j_t}$, onde $v_{j_t} = v_{m-1}$.

Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- A seguir, seja j_2 (se ele existir) o menor inteiro maior que j_1 tal que $v_{j_2} \neq v_{j_1}$. Logo, temos que $v_{j_2-1} = v_{j_1}$ e os vértices v_{j_2-1} e v_{j_2} incidem em e_{j_2}. Assim, $e_{j_2} = v_{j_1}v_{j_2}$.

- Continuando desta maneira, nós finalmente chegamos em um vértice v_{j_t} tal que $e_{j_t} = v_{j_t-1}v_{j_t}$, onde $v_{j_t} = v_{m-1}$.

- Como toda aresta de G aparece exatamente uma vez em $\mathcal{S}$ e como $1 < j_1 < j_2 < \cdots < j_t = m-1$, esta construção produz uma trilha

$$T = (v_1, e_{j_1}, v_{j_1}, e_{j_2}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_{t-1}}, e_{j_t}, v_{j_t} = v_{m-1})$$

com as propriedades: (i) toda aresta de G é incidente a um vértice de T e (ii) nem e_1 nem e_m é uma aresta de T.

Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Seja w um vértice de G incidente a ambos e_1 e e_m. A seguir, consideramos quatro possíveis casos.

Demonstração

Seja w um vértice de G incidente a ambos e_1 e e_m. A seguir, consideramos quatro possíveis casos.

1. $w = v_1 = v_{m-1}$. Então T é um circuito dominante de G.

Demonstração

Seja w um vértice de G incidente a ambos e_1 e e_m. A seguir, consideramos quatro possíveis casos.

1. $w = v_1 = v_{m-1}$. Então T é um circuito dominante de G.

2. $w = v_1$ e $w \neq v_{m-1}$.
   Como e_m é incidente a w e v_{m-1}, segue que $e_m = v_{m-1}w = v_{m-1}v_1$.
   Assim, $C = (T, e_m, v_1)$ é um circuito dominante de G.

Demonstração

Seja w um vértice de G incidente a ambos e_1 e e_m. A seguir, consideramos quatro possíveis casos.

1. $w = v_1 = v_{m-1}$. Então T é um circuito dominante de G.

2. $w = v_1$ e $w \neq v_{m-1}$.
   Como e_m é incidente a w e v_{m-1}, segue que $e_m = v_{m-1}w = v_{m-1}v_1$.
   Assim, $C = (T, e_m, v_1)$ é um circuito dominante de G.

3. $w = v_{m-1}$ e $w \neq v_1$.
   Como e_1 é incidente a w e v_1, temos que $e_1 = wv_1 = v_{m-1}v_1$. Assim, $C = (T, e_1, v_1)$ é um circuito dominante de G.

Demonstração

Seja w um vértice de G incidente a ambos e_1 e e_m. A seguir, consideramos quatro possíveis casos.

1. $w = v_1 = v_{m-1}$. Então T é um circuito dominante de G.

2. $w = v_1$ e $w \neq v_{m-1}$.
   Como e_m é incidente a w e v_{m-1}, segue que $e_m = v_{m-1}w = v_{m-1}v_1$.
   Assim, $C = (T, e_m, v_1)$ é um circuito dominante de G.

3. $w = v_{m-1}$ e $w \neq v_1$.
   Como e_1 é incidente a w e v_1, temos que $e_1 = wv_1 = v_{m-1}v_1$. Assim, $C = (T, e_1, v_1)$ é um circuito dominante de G.

4. $w \neq v_{m-1}$ e $w \neq v_1$. Como e_m é incidente a w e v_{m-1}, segue que $e_m = v_{m-1}w$. Como e_1 é incidente a w e v_1, temos que $e_1 = wv_1$. Assim, $v_1 \neq v_{m-1}$ e $C = (T, e_m, w, e_1, v_1)$ é um circuito dominante de G. ■

Corolário

Teorema 11.16 [Harary e Nash-Williams, 1965]: Seja G um grafo sem vértices isolados. Então, $L(G)$ é hamiltoniano se e somente se $G = K_{1,\ell}$, para algum $\ell \geq 3$, ou G contém um circuito dominante.

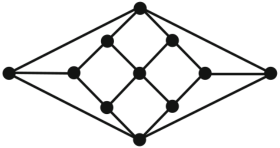
Consequência direta:

Teorema 11.17: Se G é um grafo euleriano ou hamiltoniano, então $L(G)$ é hamiltoniano.

Exercícios

Exercícios

(1) Mostre que o grafo abaixo não é hamiltoniano.



(2) Prove que o grafo hipercubo Q_n é hamiltoniano, para todo $n \geq 2$.

(3) Prove que todo grafo simples k-regular com $2k - 1$ vértices é hamiltoniano.

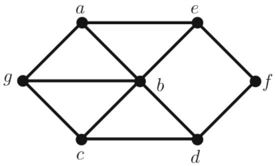
(4) Um grafo G é dito **hipo-hamiltoniano** se G não é hamiltoniano mas G_v é hamiltoniano, para todo vértice $v \in V(G)$. Mostre que o grafo de Petersen é hipo-hamiltoniano.

Exercícios

(5) Para todo vértice v do grafo de Petersen P, mostre que existe um caminho hamiltoniano começando em v.

(6) Prove que se $G[X, Y]$ é um grafo bipartido hamiltoniano, então $|X| = |Y|$.

(7) Desenho o grafo linha $L(G)$ do grafo abaixo e mostre que ele tem um ciclo hamiltoniano.



(8) Prove que o grafo linha de um grafo G tem um caminho hamiltoniano se e somente se G tem uma trilha T tal que toda aresta de G que não está em T é incidente a um vértice de T.

Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

(5) Prove que $\overline{C_n}$ é hamiltoniano, para $n \geq 5$.

(5) O **grafo subdivisão** de um grafo G é o grafo obtido a a partir de G removendo cada aresta uv de G e adicionando um novo vértice w de grau 2 mais as arestas uw e vw. É verdade que se o grafo subdivisão de um grafo G é hamiltoniano, então G é euleriano? Prove que sua resposta é verdadeira.

FIM