Aula 13 — Fatorização

Teoria dos Grafos — QXD0152

Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

1º semestre/2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Introdução

Fatorização

- Vimos que um emparelhamento M em um grafo G de ordem n é perfeito se n é par e $|M| = n/2$.
- Assim, o subgrafo F induzido pelo conjunto de arestas M é um subgrafo gerador 1-regular de G.
  - Subgrafos geradores regulares são importantes no estudo de decomposição de grafos.

Fatorização

- Vimos que um emparelhamento M em um grafo G de ordem n é perfeito se n é par e $|M| = n/2$.

- Assim, o subgrafo F induzido pelo conjunto de arestas M é um subgrafo gerador 1-regular de G.
    - Subgrafos geradores regulares são importantes no estudo de decomposição de grafos.

- Um k-fator é um subgrafo gerador k-regular.

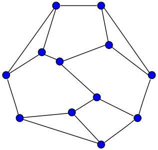
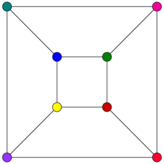
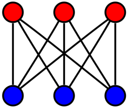
Fatorização

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Vimos que um emparelhamento M em um grafo G de ordem n é perfeito se n é par e $|M| = n/2$.
- Assim, o subgrafo F induzido pelo conjunto de arestas M é um subgrafo gerador 1-regular de G.
  - Subgrafos geradores regulares são importantes no estudo de decomposição de grafos.
- Um k-fator é um subgrafo gerador k-regular.
- **Obs.:** Um 1-fator e um emparelhamento perfeito são quase a mesma coisa. A diferença é que um 1-fator é um subgrafo gerador 1-regular e um emparelhamento perfeito é o conjunto de arestas em tal subgrafo.

Exemplos — 1-fator

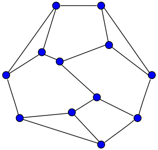
Exemplos de grafos 3-regulares contendo 1-fatores.

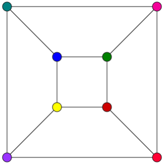




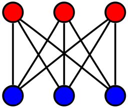
Todos os grafos hamiltonianos 3-regulares têm 1-fator.

Exemplos — 1-fator

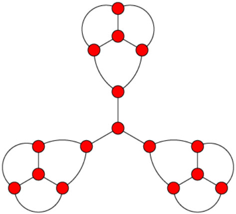
Exemplos de grafos 3-regulares contendo 1-fatores.







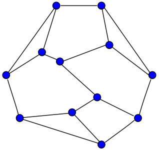
Todos os grafos hamiltonianos 3-regulares têm 1-fator.
Porém, nem todos os grafos 3-regulares contêm um 1-fator.

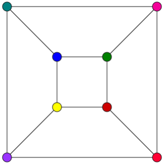


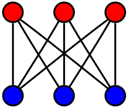
- O que impede o grafo ao lado de ter um 1-fator?

Exemplos — 1-fator

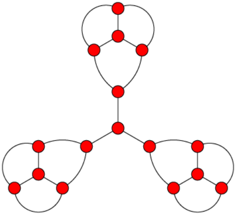
Exemplos de grafos 3-regulares contendo 1-fatores.







Todos os grafos hamiltonianos 3-regulares têm 1-fator.
Porém, nem todos os grafos 3-regulares contêm um 1-fator.



- O que impede o grafo ao lado de ter um 1-fator?
- Isso nos traz a seguinte questão: Quais grafos 3-regulares possuem um 1-fator?

Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Uma componente de um grafo é ímpar se ela tem um número ímpar de vértices; ela é par caso contrário.

Definição

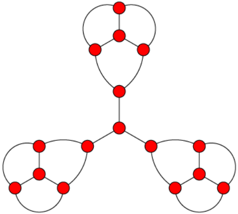
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Uma componente de um grafo é ímpar se ela tem um número ímpar de vértices; ela é par caso contrário.
- $o(G)$: o número de componentes ímpares de um grafo G.

Definição

- Uma componente de um grafo é ímpar se ela tem um número ímpar de vértices; ela é par caso contrário.

- $o(G)$: o número de componentes ímpares de um grafo G.



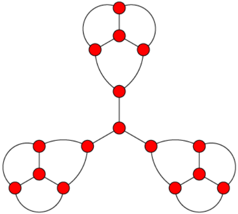
Removendo o vértice central, quantas componentes ímpares resultam?

Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Uma componente de um grafo é ímpar se ela tem um número ímpar de vértices; ela é par caso contrário.

- $o(G)$: o número de componentes ímpares de um grafo G.

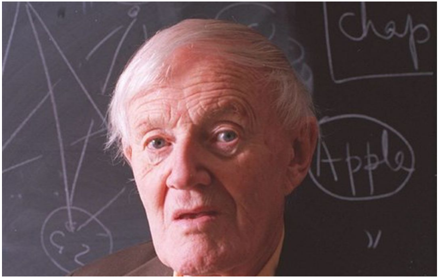


Removendo o vértice central, quantas componentes ímpares resultam?

Condição necessária: Se um grafo G contém um 1-fator, então $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.

Teorema de Tutte

Lema 13.1 [Tutte, 1947]: Um grafo G tem um 1-fator se e somente se $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.



William Thomas Tutte

Teorema de Petersen

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Lema 13.2 [Petersen, 1891]: Todo grafo 3-regular e sem pontes contém um 1-fator.

Demonstração:

Teorema de Petersen

Lema 13.2 [Petersen, 1891]: Todo grafo 3-regular e sem pontes contém um 1-fator.

Demonstração:

- Seja G um grafo 3-regular e sem pontes e seja $S \subseteq V(G)$ de cardinalidade $|S| = k \geq 1$.

Teorema de Petersen

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Lema 13.2 [Petersen, 1891]: Todo grafo 3-regular e sem pontes contém um 1-fator.

Demonstração:

- Seja G um grafo 3-regular e sem pontes e seja $S \subseteq V(G)$ de cardinalidade $|S| = k \geq 1$.

- Vamos provar que $o(G - S) \leq |S|$.

Teorema de Petersen

Lema 13.2 [Petersen, 1891]: Todo grafo 3-regular e sem pontes contém um 1-fator.

Demonstração:

- Seja G um grafo 3-regular e sem pontes e seja $S \subseteq V(G)$ de cardinalidade $|S| = k \geq 1$.
- Vamos provar que $o(G - S) \leq |S|$.
- Note que, se $G - S$ não tem componentes ímpares, então $o(G - S) = 0 \leq |S| = k \geq 1$, e o resultado segue. Logo, podemos supor que $G - S$ tem $\ell \geq 1$ componentes ímpares $G_1, G_2, \ldots, G_\ell$.

Teorema de Petersen

Lema 13.2 [Petersen, 1891]: Todo grafo 3-regular e sem pontes contém um 1-fator.

Demonstração:

- Seja G um grafo 3-regular e sem pontes e seja $S \subseteq V(G)$ de cardinalidade $|S| = k \geq 1$.
- Vamos provar que $o(G - S) \leq |S|$.
- Note que, se $G - S$ não tem componentes ímpares, então $o(G - S) = 0 \leq |S| = k \geq 1$, e o resultado segue. Logo, podemos supor que $G - S$ tem $\ell \geq 1$ componentes ímpares $G_1, G_2, \ldots, G_\ell$.
- Para $1 \leq i \leq \ell$, seja X_i o conjunto de arestas ligando os vértices de G_i aos vértices de S. Vamos contar o número mínimo de arestas que temos em cada X_i.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Como todo vértice de cada grafo G_i tem grau 3 em G, e a soma dos graus dos vértices de G_i é par, temos que $|X_i|$ é ímpar.

Continuação da demonstração

- Como todo vértice de cada grafo G_i tem grau 3 em G, e a soma dos graus dos vértices de G_i é par, temos que $|X_i|$ é ímpar.

- Como G não tem pontes, temos que $|X_i| \neq 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Assim, obtemos que $|X_i| \geq 3$.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Como todo vértice de cada grafo G_i tem grau 3 em G, e a soma dos graus dos vértices de G_i é par, temos que $|X_i|$ é ímpar.

- Como G não tem pontes, temos que $|X_i| \neq 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Assim, obtemos que $|X_i| \geq 3$.

- Portanto, existem pelo menos 3ℓ arestas ligando os vértices de S e os vértices de $G - S$. Contudo, como $|S| = k$ e todo vértice de S tem grau 3 em G, no máximo $3k$ arestas ligam os vértices de S aos vértices de $G - S$. Logo, temos que

$$3o(G - S) = 3\ell \leq 3k = 3|S|$$

Continuação da demonstração

- Como todo vértice de cada grafo G_i tem grau 3 em G, e a soma dos graus dos vértices de G_i é par, temos que $|X_i|$ é ímpar.

- Como G não tem pontes, temos que $|X_i| \neq 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Assim, obtemos que $|X_i| \geq 3$.

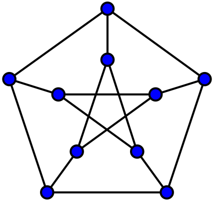
- Portanto, existem pelo menos 3ℓ arestas ligando os vértices de S e os vértices de $G - S$. Contudo, como $|S| = k$ e todo vértice de S tem grau 3 em G, no máximo $3k$ arestas ligam os vértices de S aos vértices de $G - S$. Logo, temos que

$$3o(G - S) = 3\ell \leq 3k = 3|S|$$

- Assim, $o(G - S) \leq |S|$. Pelo Teorema de Tutte, G tem um 1-fator. ■

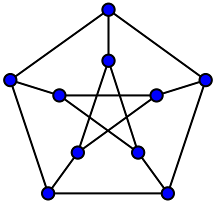
Observações

- **Obs. 1:** O número de 1-fatores no Teorema anterior não pode ser aumentado para 2. O grafo de Petersen satisfaz a hipótese mas não tem dois 1-fatores disjuntos nas arestas (provaremos adiante).



Observações

- **Obs. 1:** O número de 1-fatores no Teorema anterior não pode ser aumentado para 2. O grafo de Petersen satisfaz a hipótese mas não tem dois 1-fatores disjuntos nas arestas (provaremos adiante).



- **Obs. 2:** Todo grafo Hamiltoniano 3-regular G tem três 1-fatores disjuntos nas arestas.
  - Podemos então dizer que G pode ser decomposto em três 1-fatores.
  - Decomposições em 1-fatores são fundamentais em teoria dos grafos.

Grafos 1-fatoráveis

- Dizemos que um grafo G é 1-fatorável se existem 1-fatores F_1, F_2, ..., F_r de G tais que $\{E(F_1), E(F_2), \ldots, E(F_r)\}$ é uma partição de $E(G)$.

Grafos 1-fatoráveis

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Dizemos que um grafo G é 1-fatorável se existem 1-fatores F_1, F_2, ..., F_r de G tais que $\{E(F_1), E(F_2), \ldots, E(F_r)\}$ é uma partição de $E(G)$.
- Neste caso, dizemos que G é fatorado em 1-fatores F_1, F_2, ..., F_r, que formam uma 1-fatorização de G.

Grafos 1-fatoráveis

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Dizemos que um grafo G é 1-fatorável se existem 1-fatores F_1, F_2, ..., F_r de G tais que $\{E(F_1), E(F_2), \ldots, E(F_r)\}$ é uma partição de $E(G)$.

- Neste caso, dizemos que G é fatorado em 1-fatores F_1, F_2, ..., F_r, que formam uma 1-fatorização de G.

- Consequentemente, toda aresta de G pertence a exatamente um desses 1-fatores. Como cada conjunto $E(F_i)$, $1 \leq i \leq r$, é um emparelhamento perfeito, todo vértice v de G é incidente a exatamente uma aresta de cada um desses 1-fatores. Isso implica que G é r-regular.

Grafos 1-fatoráveis

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Dizemos que um grafo G é 1-fatorável se existem 1-fatores F_1, F_2, ..., F_r de G tais que $\{E(F_1), E(F_2), \ldots, E(F_r)\}$ é uma partição de $E(G)$.

- Neste caso, dizemos que G é fatorado em 1-fatores F_1, F_2, ..., F_r, que formam uma 1-fatorização de G.

- Consequentemente, toda aresta de G pertence a exatamente um desses 1-fatores. Como cada conjunto $E(F_i)$, $1 \leq i \leq r$, é um emparelhamento perfeito, todo vértice v de G é incidente a exatamente uma aresta de cada um desses 1-fatores. Isso implica que G é r-regular.

Proposição 13.3: Todo grafo 1-fatorável é regular.

Grafos 1-fatoráveis

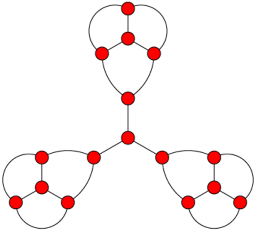
- Dizemos que um grafo G é 1-fatorável se existem 1-fatores F_1, F_2, ..., F_r de G tais que $\{E(F_1), E(F_2), \ldots, E(F_r)\}$ é uma partição de $E(G)$.
- Neste caso, dizemos que G é fatorado em 1-fatores F_1, F_2, ..., F_r, que formam uma 1-fatorização de G.
- Consequentemente, toda aresta de G pertence a exatamente um desses 1-fatores. Como cada conjunto $E(F_i)$, $1 \leq i \leq r$, é um emparelhamento perfeito, todo vértice v de G é incidente a exatamente uma aresta de cada um desses 1-fatores. Isso implica que G é r-regular.

Proposição 13.3: Todo grafo 1-fatorável é regular.

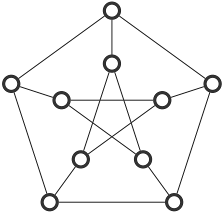
O inverso não é verdadeiro

Exemplo

Exemplo de grafo 3-regular mas não 1-fatorável.



O grafo de Petersen é 1-fatorável?



Grafo de Petersen

Teorema 13.4: O grafo de Petersen não é 1-fatorável.

Demonstração:

Grafo de Petersen

Teorema 13.4: O grafo de Petersen não é 1-fatorável.

Demonstração:

- Suponha, por absurdo, que o grafo de Petersen GP é um fatorável.

Grafo de Petersen

Teorema 13.4: O grafo de Petersen não é 1-fatorável.

Demonstração:

- Suponha, por absurdo, que o grafo de Petersen GP é um fatorável.
- Assim, GP pode ser fatorado em três 1-fatores F_1, F_2, F_3. Portanto, o subgrafo gerador H de GP induzido pelo conjunto de arestas $E(H) = E(F_1) \cup E(F_2)$ é 2-regular. Isso implica que ou H é um ciclo hamiltoniano ou H é a união de dois ou mais ciclos.

Grafo de Petersen

Teorema 13.4: O grafo de Petersen não é 1-fatorável.

Demonstração:

- Suponha, por absurdo, que o grafo de Petersen GP é um fatorável.
- Assim, GP pode ser fatorado em três 1-fatores F_1, F_2, F_3. Portanto, o subgrafo gerador H de GP induzido pelo conjunto de arestas $E(H) = E(F_1) \cup E(F_2)$ é 2-regular. Isso implica que ou H é um ciclo hamiltoniano ou H é a união de dois ou mais ciclos.
- No entanto, sabemos que GP não é hamiltoniano (aula 12). Logo H não pode ser um ciclo e, portanto, H é a união de dois ou mais ciclos.

Grafo de Petersen

Teorema 13.4: O grafo de Petersen não é 1-fatorável.

Demonstração:

- Suponha, por absurdo, que o grafo de Petersen GP é um fatorável.
- Assim, GP pode ser fatorado em três 1-fatores F_1, F_2, F_3. Portanto, o subgrafo gerador H de GP induzido pelo conjunto de arestas $E(H) = E(F_1) \cup E(F_2)$ é 2-regular. Isso implica que ou H é um ciclo hamiltoniano ou H é a união de dois ou mais ciclos.
- No entanto, sabemos que GP não é hamiltoniano (aula 12). Logo H não pode ser um ciclo e, portanto, H é a união de dois ou mais ciclos.
- Por outro lado, como o comprimento do menor ciclo em GP é igual a 5, temos que $H = 2C_5$.

Grafo de Petersen

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 13.4: O grafo de Petersen não é 1-fatorável.

Demonstração:

- Suponha, por absurdo, que o grafo de Petersen GP é um fatorável.

- Assim, GP pode ser fatorado em três 1-fatores F_1, F_2, F_3. Portanto, o subgrafo gerador H de GP induzido pelo conjunto de arestas $E(H) = E(F_1) \cup E(F_2)$ é 2-regular. Isso implica que ou H é um ciclo hamiltoniano ou H é a união de dois ou mais ciclos.

- No entanto, sabemos que GP não é hamiltoniano (aula 12). Logo H não pode ser um ciclo e, portanto, H é a união de dois ou mais ciclos.

- Por outro lado, como o comprimento do menor ciclo em GP é igual a 5, temos que $H = 2C_5$.

- Isso é impossível, dado que $2C_5$ não contém um 1-fator. $\square$

Grafos bipartidos regulares

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

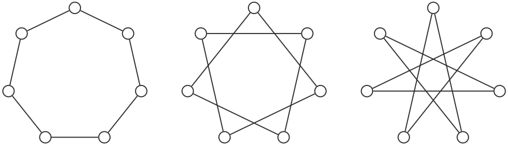
Teorema 13.6: Todo grafo bipartido r-regular com $r \geq 1$ é 1-fatorável.

Demonstração:

- Seja G um grafo bipartido r-regular com $r \geq 1$.
- Como visto na aula anterior, G contém um emparelhamento perfeito M_1 já que ele é bipartido regular.
- Portanto, $G - M_1$ é $(r-1)$-regular.
- Se $r \geq 2$, então $G - M_1$ contém um emparelhamento perfeito M_2. Continuando desta maneira, e aplicando o teorema 11.4 r vezes, nós temos que $E(G)$ pode ser particionado em emparelhamentos perfeitos, o que dá origem à uma 1-fatorização de G. $\blacksquare$

2-fator

- Um 2-fator em um grafo G é um subgrafo gerador de G que é 2-regular.
  - Toda componente de um 2-fator é portanto um ciclo.

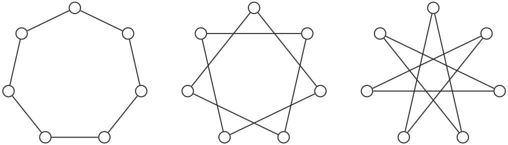


Uma 2-fatorização do K_7

2-fator

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um 2-fator em um grafo G é um subgrafo gerador de G que é 2-regular.
  - Toda componente de um 2-fator é portanto um ciclo.

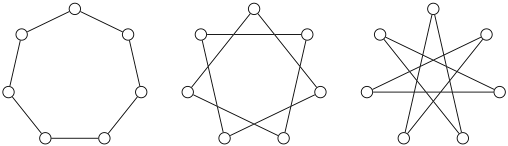


Uma 2-fatorização do K_7

- Um grafo é dito 2-fatorável se existem 2-fatores $F_1, F_2, \ldots, F_k$ tais que $\{E(F_1), E(F_2), \ldots, E(F_k)\}$ é uma partição de $E(G)$.
  - Disso concluímos que: todo grafo 2-fatorável é necessariamente $2k$-regular, para algum inteiro positivo k.

2-fator

- Um 2-fator em um grafo G é um subgrafo gerador de G que é 2-regular.
    - Toda componente de um 2-fator é portanto um ciclo.



Uma 2-fatorização do K_7

- Um grafo é dito 2-fatorável se existem 2-fatores $F_1, F_2, \ldots, F_k$ tais que $\{E(F_1), E(F_2), \ldots, E(F_k)\}$ é uma partição de $E(G)$.
    - Disso concluímos que: todo grafo 2-fatorável é necessariamente $2k$-regular, para algum inteiro positivo k.
- Petersen mostrou que o inverso também é verdadeiro.

Teorema do 2-fator

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 13.7 [Petersen]:
Um grafo G é 2-fatorável se e somente se G é $2k$-regular para algum inteiro positivo k.


Julius Petersen

Demonstração:

Teorema do 2-fator

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 13.7 [Petersen]:
Um grafo G é 2-fatorável se e somente se G é $2k$-regular para algum inteiro positivo k.

Julius Petersen

Demonstração:

- Já observamos que todo grafo 2-fatorável é $2k$-regular para algum inteiro positivo k. Basta então provar o inverso.

Teorema do 2-fator

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 13.7 [Petersen]:
Um grafo G é 2-fatorável se e somente se G é $2k$-regular para algum inteiro positivo k.

Julius Petersen

Demonstração:

- Já observamos que todo grafo 2-fatorável é $2k$-regular para algum inteiro positivo k. Basta então provar o inverso.

- Seja G um grafo $2k$-regular, com $k \geq 1$. Sem perda de generalidade, nós podemos supor que G é conexo.

Teorema do 2-fator

Teorema 13.7 [Petersen]:
Um grafo G é 2-fatorável se e somente se G é $2k$-regular para algum inteiro positivo k.

Julius Petersen

Demonstração:

- Já observamos que todo grafo 2-fatorável é $2k$-regular para algum inteiro positivo k. Basta então provar o inverso.

- Seja G um grafo $2k$-regular, com $k \geq 1$. Sem perda de generalidade, nós podemos supor que G é conexo.

- Como todo vértice de G tem grau par, G é Euleriano e, portanto, G contém um circuito euleriano C. Além disso, cada vértice de G aparece exatamente k vezes nesse circuito.

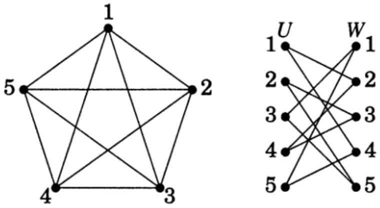
Continuação da demonstração

- Seja $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
- Construimos um grafo bipartido auxiliar $H[U, W]$ com partes $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$, onde os vértices u_i e w_j $(1 \leq i, j \leq n)$ são adjacentes em H se e somente se v_j segue imediatamente v_i no circuito C.

Continuação da demonstração

- Seja $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
- Construimos um grafo bipartido auxiliar $H[U, W]$ com partes $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$, onde os vértices u_i e w_j $(1 \leq i, j \leq n)$ são adjacentes em H se e somente se v_j segue imediatamente v_i no circuito C.

Exemplo: Grafo K_5 com circuito Euleriano $C = 1231425435$ e o grafo bipartido correspondente $H[U, W]$.



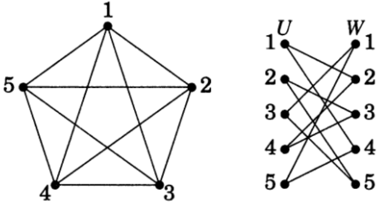
Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Como todo vértice de G aparece k vezes em C, o grafo H é k-regular. Pelo Teorema 13.6, H é 1-fatorável e então H pode ser fatorado em k 1-fatores $F_1', F_2', \ldots, F_k'$.

Continuação da demonstração

- Como todo vértice de G aparece k vezes em C, o grafo H é k-regular. Pelo Teorema 13.6, H é 1-fatorável e então H pode ser fatorado em k 1-fatores $F'_1, F'_2, \ldots, F'_k$.



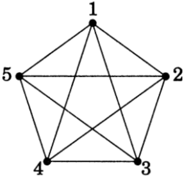
Por exemplo, na figura acima, temos o 1-fator cujas arestas são $\{12, 43, 25, 31, 54\}$ e o 1-fator induzido pelas arestas restantes $\{14, 23, 35, 42, 51\}$.

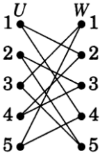
Continuação da demonstração

- **Alegação:** Cada 1-fator F_i' de H corresponde a um 2-fator F_i de G.
  - **Prova:** Seja F um 1-fator de H. A aresta de F incidente a w_i em H corresponde a uma aresta entrando em v_i no circuito C. A aresta de F incidente a u_i em H corresponde a uma aresta saindo de v_i em C.

    Como F é um grafo 1-regular, só existe uma aresta incidente a u_i e só existe uma aresta incidente a w_i em F. Este fato, juntamente com a observação acima, implica que o 1-fator F em H corresponde a um subgrafo gerador 2-regular de G. Portanto, um 2-fator de G.

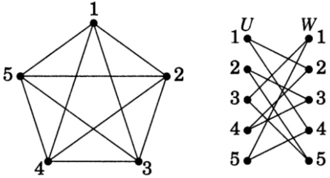
Continuação da demonstração





Por exemplo, na figura acima, o 1-fator cujas arestas são $\{12, 43, 25, 31, 54\}$ dá origem a um ciclo hamiltoniano $(1, 2, 5, 4, 3)$ no grafo $G = K_5$, que é um 2-fator.

Continuação da demonstração



Por exemplo, na figura acima, o 1-fator cujas arestas são $\{12, 43, 25, 31, 54\}$ dá origem a um ciclo hamiltoniano $(1, 2, 5, 4, 3)$ no grafo $G = K_5$, que é um 2-fator.

- Em geral, a 1-fatorização de H em 1-fatores $F'_1, F'_2, \ldots, F'_k$ produz uma 2-fatorização de G em 2-fatores $F_1, F_2, \ldots, F_k$, como desejado. $\square$

Exercícios

Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

(1) Dê um exemplo de um grafo 5-regular que não contém um 1-fator

(2) Prove que $K_{3,5}$ não tem um 1-fator.

(3) Prove que se as pontes de um grafo 3-regular G estão contidas em um único caminho, então G tem um 1-fator.

(4) Prove que todo grafo 3-regular sem pontes contém um 2-fator

(5) Prove que, para todo inteiro positivo par n, o grafo completo K_n pode ser fatorado em caminhos hamiltonianos.

(6) Seja G um grafo 6-regular. Mostre que se G contém dois 1-fatores disjuntos nas arestas, então G é 3-fatorável.

FIM