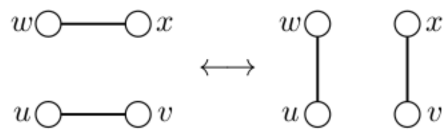
Prova do Teorema de Berge (2-switches)
Aula 3 - Graus dos vértices de um grafo

> **Definição:** Dado um grafo que contém as arestas uv e wx mas não contém as arestas uw e vx, um **2-switch** é a operação que remove uv e wx e adiciona uw e vx.



Theorem 1. *Dois grafos simples G e H têm a mesma sequência de graus* ***se e somente se*** *existe uma sequência de 2-switches que transforma G em H.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Todo 2-switch preserva os graus dos vértices e, portanto, preserva também as sequências de graus.

($\Rightarrow$) Sejam G e H dois grafos simples. Considere que G e H possuem o mesmo conjunto de vértices, $V(G) = V(H)$, e que $d_G(v) = d_H(v)$ para todo vértice v. Vamos usar indução em n para provar que existe uma sequência de 2-switches que transforma G em H.

Para $1 \leq n \leq 3$, cada sequência de graus corresponde a exatamente um grafo (cheque essa afirmação).

Suponha que o resultado é verdadeiro para todos os grafos com ordem $n-1$, onde $n-1 \geq 3$.

Sejam G e H dois grafos simples ambos com ordem n. Seja u um vértice com grau $d(u) = \Delta(G) = \Delta$. Seja S um conjunto de vértices com os Δ maiores graus que vêm após $d(u)$ na sequência de graus. Como na demonstração do Teorema de Havel-Hakimi, alguma sequência de 2-switches transforma G em um grafo G' com $N_{G'}(u) = S$, e alguma sequência de 2-switches transforma H em um grafo H' com $N_{H'}(u) = S$.

Agora, $N_{G'}(u) = N_{H'}(u)$. Então, removendo u tanto de G quanto de H, obtemos os grafos $G' - u$ e $H' - u$ com os mesmos graus nos vértices correspondentes. Pela hipótese de indução, alguma sequência de 2-switches transforma $G' - u$ em $H' - u$. Como estas operações não envolvem u, que possui os mesmos vizinhos em G' e H', a sequência de 2-switches transforma G' em H'. Assim, existe uma sequência de 2-switches que transforma G em H (via G' e H'). $\square$