Aula 14 — Planaridade

Teoria dos Grafos — QXD0152

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

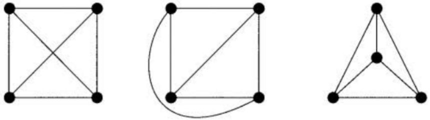
Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

1º semestre/2021

Introdução

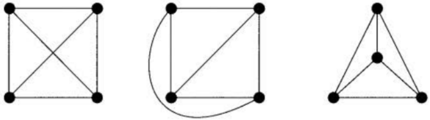
Grafos planares



Três desenhos do grafo K_4 no plano

Grafos planares

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

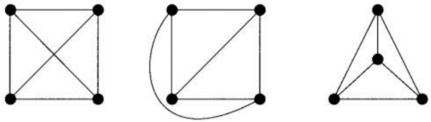


Três desenhos do grafo K_4 no plano

- **Definição:** Um grafo G é planar ou imersível no plano se pode ser desenhado no plano de modo que quaisquer duas de suas arestas não se intersectam, exceto em extremos que sejam comuns a ambas.

Grafos planares

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

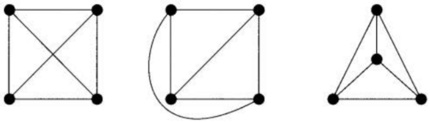


Três desenhos do grafo K_4 no plano

- **Definição:** Um grafo G é planar ou imersível no plano se pode ser desenhado no plano de modo que quaisquer duas de suas arestas não se intersectam, exceto em extremos que sejam comuns a ambas.

- Tal desenho no plano de um grafo G é chamado uma imersão plana ou representação plana de G.

Grafos planares



Três desenhos do grafo K_4 no plano

- **Definição:** Um grafo G é planar ou imersível no plano se pode ser desenhado no plano de modo que quaisquer duas de suas arestas não se intersectam, exceto em extremos que sejam comuns a ambas.

- Tal desenho no plano de um grafo G é chamado uma imersão plana ou representação plana de G.

- Um grafo plano é um grafo planar que está imerso no plano.

Curvas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- O estudo de grafos planares têm relação íntima com uma área da matemática chamada Topologia.

- Os resultados de topologia que são especialmente relevantes no estudo de grafos planares são aqueles que lidam com **curvas simples**.

Curvas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- O estudo de grafos planares têm relação íntima com uma área da matemática chamada Topologia.

- Os resultados de topologia que são especialmente relevantes no estudo de grafos planares são aqueles que lidam com **curvas simples**.

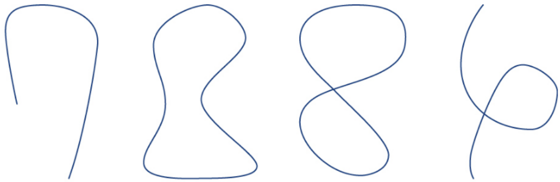
- Uma curva é a imagem de uma função contínua $f\colon [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Curvas

- O estudo de grafos planares têm relação íntima com uma área da matemática chamada Topologia.
- Os resultados de topologia que são especialmente relevantes no estudo de grafos planares são aqueles que lidam com **curvas simples**.
- Uma curva é a imagem de uma função contínua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$.
- Uma curva fechada é a imagem de uma função contínua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ na qual $f(0) = f(1)$.

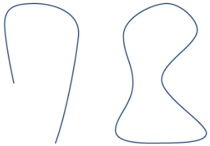
Curvas

- O estudo de grafos planares têm relação íntima com uma área da matemática chamada Topologia.
- Os resultados de topologia que são especialmente relevantes no estudo de grafos planares são aqueles que lidam com **curvas simples**.
- Uma curva é a imagem de uma função contínua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$.
- Uma curva fechada é a imagem de uma função contínua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ na qual $f(0) = f(1)$.



Curvas Simples (ou Curvas de Jordan)

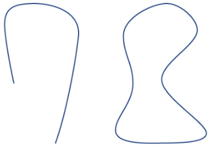
- Uma curva (curva fechada) é simples se ela não intersecta a si mesma.
  - Formalmente, uma curva é dita ser simples, ou uma curva de Jordan, se ela é injetiva, ou seja, se para todo $x, y \in [0, 1]$, tem-se $f(x) = f(y) \implies x = y$.



Curvas de Jordan

Curvas Simples (ou Curvas de Jordan)

- Uma curva (curva fechada) é simples se ela não intersecta a si mesma.
  - Formalmente, uma curva é dita ser simples, ou uma curva de Jordan, se ela é injetiva, ou seja, se para todo $x, y \in [0, 1]$, tem-se $f(x) = f(y) \implies x = y$.

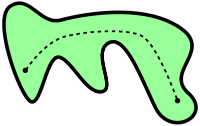


Curvas de Jordan

- Propriedades das curvas simples são importantes no estudo de grafos planos porque um ciclo em um grafo plano é uma curva simples fechada.

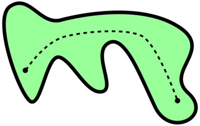
Teorema da curva de Jordan

- Um subconjunto do plano é dito conexo por arcos se quaisquer dois de seus pontos podem ser conectados por uma curva contida inteiramente dentro do subconjunto.



Teorema da curva de Jordan

- Um subconjunto do plano é dito conexo por arcos se quaisquer dois de seus pontos podem ser conectados por uma curva contida inteiramente dentro do subconjunto.



Teorema da Curva de Jordan: Qualquer curva simples fechada C no plano particiona o resto do plano em dois subconjuntos do plano conexos por arcos e disjuntos.

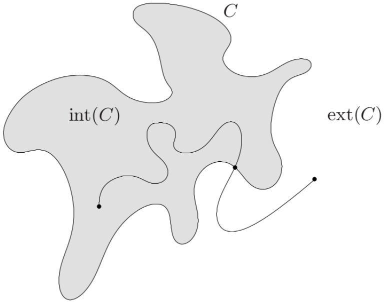
Teorema da curva de Jordan

- Os dois subconjuntos do plano nos quais a curva simples fechada C particiona o plano são chamados de interior e exterior de C e são denotados por $int(C)$ e $ext(C)$.

Teorema da curva de Jordan

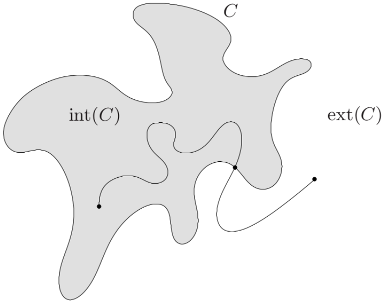
- Os dois subconjuntos do plano nos quais a curva simples fechada C particiona o plano são chamados de interior e exterior de C e são denotados por $int(C)$ e $ext(C)$.

- O Teorema da Curva de Jordan implica que todo arco ligando um ponto de $int(C)$ a um ponto de $ext(C)$ intersecta C em pelo menos um ponto.



Teorema da curva de Jordan

- Os dois subconjuntos do plano nos quais a curva simples fechada C particiona o plano são chamados de interior e exterior de C e são denotados por $int(C)$ e $ext(C)$.
- O Teorema da Curva de Jordan implica que todo arco ligando um ponto de $int(C)$ a um ponto de $ext(C)$ intersecta C em pelo menos um ponto.



Podemos usar esse teorema para provar que o grafo K_5 não é planar.

O grafo K_5 não é planar

Teorema 14.1: K_5 não é planar.

Demonstração:

O grafo K_5 não é planar

Teorema 14.1: K_5 não é planar.

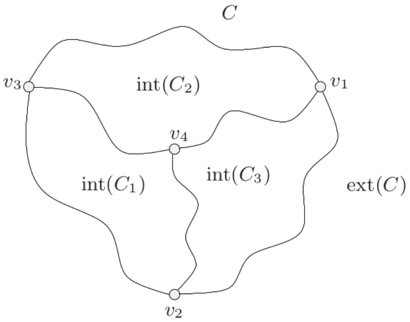
Demonstração:
Suponha, por absurdo, que K_5 tem uma imersão planar G. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 os vértices de G. Como G é completo, quaisquer dois de seus vértices estão ligados por uma aresta.

O grafo K_5 não é planar

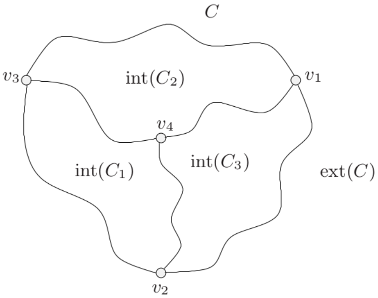
Teorema 14.1: K_5 não é planar.

Demonstração:
Suponha, por absurdo, que K_5 tem uma imersão planar G. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 os vértices de G. Como G é completo, quaisquer dois de seus vértices estão ligados por uma aresta.

G contém um ciclo $C = v_1 v_2 v_3 v_1$ que é uma curva simples fechada no plano. Então, o vértice v_4 deve estar em $int(C)$ ou $ext(C)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $v_4 \in int(C)$. Note que as arestas $v_1 v_4, v_2 v_4, v_3 v_4$ também estão todas em $int(C)$.

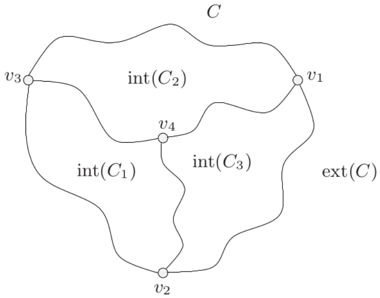


O grafo K_5 não é planar



Considere os ciclos $C_1 = v_2 v_3 v_4 v_2$, $C_2 = v_3 v_1 v_4 v_3$ e $C_3 = v_1 v_2 v_4 v_1$. Observe que $v_i \in ext(C_i)$, para $i = 1, 2, 3$.

O grafo K_5 não é planar

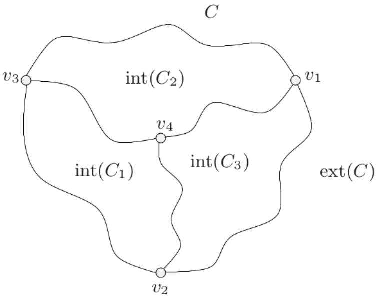


Considere os ciclos $C_1 = v_2v_3v_4v_2$, $C_2 = v_3v_1v_4v_3$ e $C_3 = v_1v_2v_4v_1$. Observe que $v_i \in ext(C_i)$, para $i = 1, 2, 3$.

Como $v_iv_5 \in E(G)$ e G é um grafo plano, pelo Teorema da Curva de Jordan, segue que $v_5 \in ext(C_i)$, para $i = 1, 2, 3$. Assim, $v_5 \in ext(C)$.

O grafo K_5 não é planar

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



Considere os ciclos $C_1 = v_2v_3v_4v_2$, $C_2 = v_3v_1v_4v_3$ e $C_3 = v_1v_2v_4v_1$. Observe que $v_i \in ext(C_i)$, para $i = 1, 2, 3$.

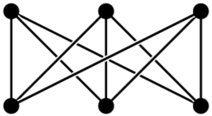
Como $v_iv_5 \in E(G)$ e G é um grafo plano, pelo Teorema da Curva de Jordan, segue que $v_5 \in ext(C_i)$, para $i = 1, 2, 3$. Assim, $v_5 \in ext(C)$.

Mas então, novamente, pelo Teorema da Curva de Jordan, temos que a aresta v_4v_5 cruza C. Isso contradiz a planaridade da imersão G. ■

O grafo $K_{3,3}$ não é planar

Exercício para casa: Usar o Teorema da curva de Jordan para provar o seguinte resultado:

Teorema 14.2: $K_{3,3}$ não é planar.

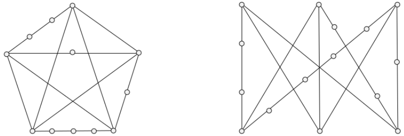


Subdivisões

- Seja e uma aresta de um grafo G com extremos $uv \in V(G)$.
- Subdividir a aresta e consiste em remover e do grafo G e adicionar um novo vértice x a $V(G)$, ligando x aos extremos de e.

Subdivisões

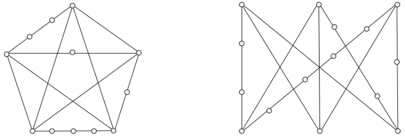
- Seja e uma aresta de um grafo G com extremos $uv \in V(G)$.
- Subdividir a aresta e consiste em remover e do grafo G e adicionar um novo vértice x a $V(G)$, ligando x aos extremos de e.
- Qualquer grafo obtido a partir de um grafo G por meio de uma sequência de subdivisões de arestas é chamado uma subdivisão de G ou uma G-subdivisão.



Subdivisões do K_5 e do $K_{3,3}$

Subdivisões

- Seja e uma aresta de um grafo G com extremos $uv \in V(G)$.
- Subdividir a aresta e consiste em remover e do grafo G e adicionar um novo vértice x a $V(G)$, ligando x aos extremos de e.
- Qualquer grafo obtido a partir de um grafo G por meio de uma sequência de subdivisões de arestas é chamado uma subdivisão de G ou uma G-subdivisão.



Subdivisões do K_5 e do $K_{3,3}$

Obs.: Toda subdivisão do K_5 e do $K_{3,3}$ é não planar.

Subdivisões

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 14.4: Seja G um grafo. Se G contém um subgrafo isomorfo a subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$, então G não é planar.

Demonstração:

Subdivisões

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 14.4: Seja G um grafo. Se G contém um subgrafo isomorfo a subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$, então G não é planar.

Demonstração:

- Suponha, por absurdo, que G contém um subgrafo isomorfo a subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$ e que G é planar.
- Como G é planar, ele possui uma imersão no plano G'.
- Seja $H \subseteq G'$ o subgrafo de G isomorfo à subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$. Portanto, o K_5 ou o $K_{3,3}$ possuem uma imersão planar, contradizendo o fato deles serem não planares.
- Portanto, G não é planar. $\square$

Subdivisões

Teorema 14.5: Um grafo G é planar se e somente se toda subdivisão de G é planar.

Demonstração:

Subdivisões

Teorema 14.5: Um grafo G é planar se e somente se toda subdivisão de G é planar.

Demonstração:

- $(\Longrightarrow)$ Seja G um grafo planar e G' uma subdivisão qualquer de G. Como em cada subdivisão de uma aresta e_1 de G o caminho que substitui a aresta e_1 pode ser desenhado ao longo da aresta original e_1, G' também é planar.

Subdivisões

Teorema 14.5: Um grafo G é planar se e somente se toda subdivisão de G é planar.

Demonstração:

- ($\Longrightarrow$) Seja G um grafo planar e G' uma subdivisão qualquer de G. Como em cada subdivisão de uma aresta e_1 de G o caminho que substitui a aresta e_1 pode ser desenhado ao longo da aresta original e_1, G' também é planar.

- ($\Longleftarrow$) Vamos provar a contrapositiva. Suponha que G não é planar. Tome qualquer desenho de G no plano e forme uma subdivisão de G selecionando uma aresta qualquer de G para fazer uma subdivisão dela. Então, o resultado desta subdivisão é não planar. ■

Teorema de Kuratowski

- O Teorema 14.5 implica que nenhum grafo planar pode conter uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$.
- Em 1930, o matemático polonês Kazimierz Kuratowski provou um teorema fundamental declarando que todo grafo não planar necessariamente contém uma subdivisão de um desses dois grafos.

Teorema de Kuratowski

- O Teorema 14.5 implica que nenhum grafo planar pode conter uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$.

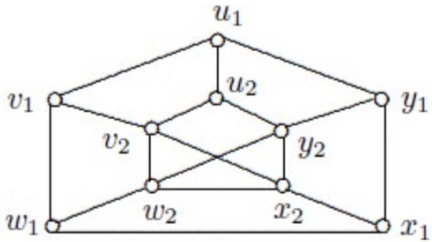
- Em 1930, o matemático polonês Kazimierz Kuratowski provou um teorema fundamental declarando que todo grafo não planar necessariamente contém uma subdivisão de um desses dois grafos.

Teorema 14.6: Um grafo G é planar se e somente se ele não contém uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$.

Subdivisões do K_5 e do $K_{3,3}$ são subgrafos proibidos para a classe dos grafos planares.

Kazimierz Kuratowski

Este grafo é planar?



Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

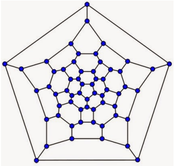
Imergindo grafos

Imergindo grafos

- Alguém pode considerar a imersão de grafos em outras superfícies além do plano, como por exemplo em uma esfera ou em uma caneca.

Imergindo grafos

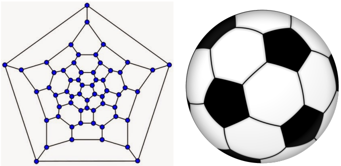
- Alguém pode considerar a imersão de grafos em outras superfícies além do plano, como por exemplo em uma esfera ou em uma caneca.



Imersão do icosaedro em uma esfera

Imergindo grafos

- Alguém pode considerar a imersão de grafos em outras superfícies além do plano, como por exemplo em uma esfera ou em uma caneca.

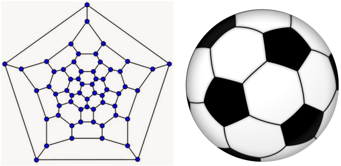


Imersão do icosaedro em uma esfera

Imersão do $K_{3,3}$ em uma caneca

Imergindo grafos

- Alguém pode considerar a imersão de grafos em outras superfícies além do plano, como por exemplo em uma esfera ou em uma caneca.



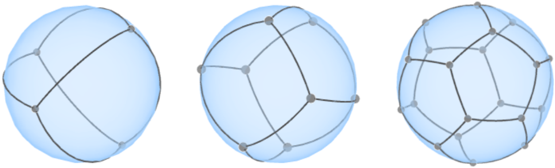
Imersão do icosaedro em uma esfera

Imersão do $K_{3,3}$ em uma caneca

- Sabe-se que, para toda superfície S, existem grafos que não são imersíveis em S. Contudo, todo grafo pode ser imersível no espaço euclideano tridimensional, o $\mathbb{R}^3$ (Exercício (3) no final dos slides).

Grafos imersíveis na esfera

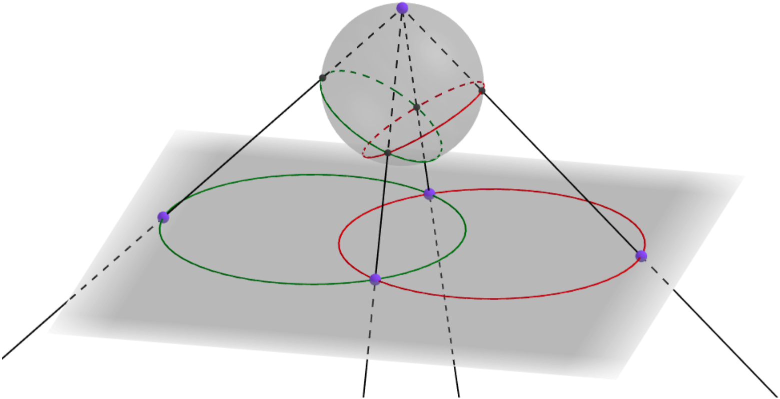
- Será possível imergir grafos planares também na esfera?



- Grafos planares e grafos imersíveis na esfera constituem a mesma classe de grafos. Para ver isso, fazemos uso de um mapeamento conhecido como projeção estereográfica.

Projeção estereográfica

- Considere uma esfera S em repouso sobre um plano P e seja z o ponto diametralmente oposto ao ponto de contato entre P e S. O mapeamento $\pi\colon S\backslash\{z\} \to P$, definido por $\pi(s) = p$ se e somente se os pontos z, s e p são colineares, é chamado projeção estereográfica a partir de z.



Projeção estereográfica

Teorema 14.7: Um grafo G é imersível no plano se e somente se ele é imersível na esfera.

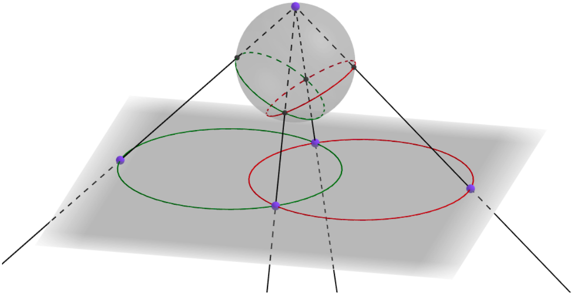
Demonstração:

Projeção estereográfica

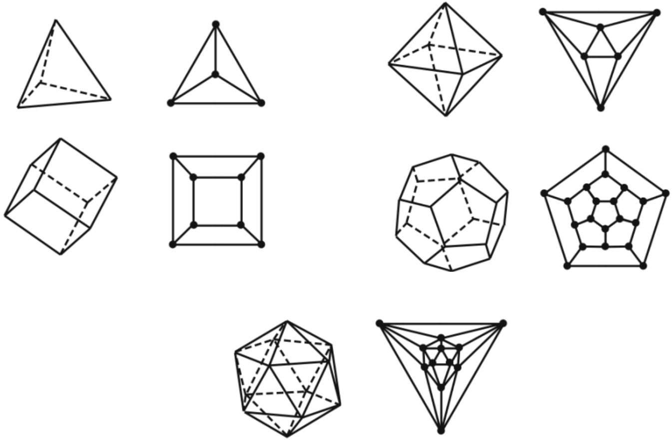
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 14.7: Um grafo G é imersível no plano se e somente se ele é imersível na esfera.

Demonstração:
Suponha que G tem uma imersão $\widetilde{G}$ na esfera. Escolha um ponto z da esfera que não esteja em $\widetilde{G}$. Então, a imagem de $\widetilde{G}$ sob projeção estereográfica a apartir de z é uma imersão de G no plano. A prova do inverso é análoga. ■



Projeções estereográficas dos sólidos platônicos



Faces

Faces

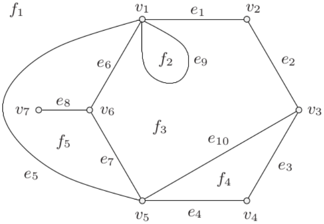
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Dado um grafo plano G, removendo-se todas as curvas e os pontos que representam as arestas e os vértices de G, o que resta são regiões conexas, chamadas faces.

Faces

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

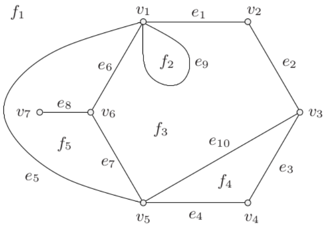
- Dado um grafo plano G, removendo-se todas as curvas e os pontos que representam as arestas e os vértices de G, o que resta são regiões conexas, chamadas faces.
- Note que sempre há uma face ilimitada. Tal face é chamada face externa. O grafo abaixo tem 5 faces f_1, f_2, f_3, f_4, f_5.



Faces

- Dado um grafo plano G, removendo-se todas as curvas e os pontos que representam as arestas e os vértices de G, o que resta são regiões conexas, chamadas faces.

- Note que sempre há uma face ilimitada. Tal face é chamada face externa. O grafo abaixo tem 5 faces f_1, f_2, f_3, f_4, f_5.

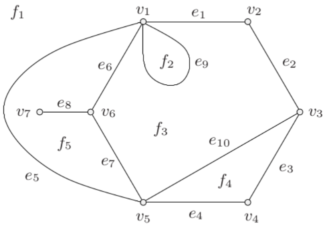


- $F(G)$: conjunto de faces de um grafo plano G.

- $f(G)$: número de faces de um grafo plano G.

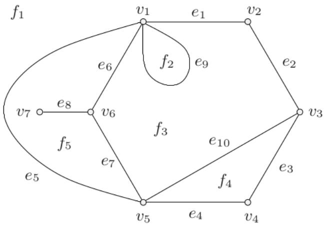
Faces e Fronteiras

- A fronteira de uma face é o passeio fechado formado pelas arestas e vértices no fecho da face. Denotamos a fronteira de uma face f por $\partial(f)$.



Faces e Fronteiras

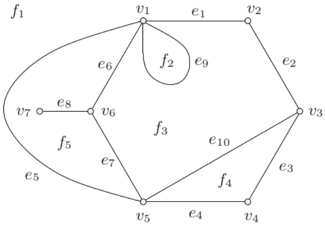
- A fronteira de uma face é o passeio fechado formado pelas arestas e vértices no fecho da face. Denotamos a fronteira de uma face f por $\partial(f)$.



- Dizemos que uma face é incidente aos vértices e arestas na sua fronteira. Duas faces são ditas adjacentes se suas fronteiras têm uma aresta em comum.

Faces e Fronteiras

- Se e é uma aresta de corte, então apenas uma face é incidente a e.
- Se e não é uma aresta de corte, então há exatamente duas faces incidentes a e.
    - Neste caso, dizemos que e separa essas faces.



Grau de uma face

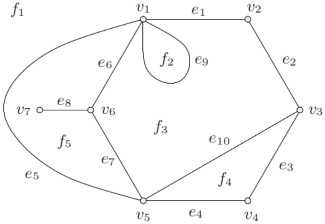
- O grau de uma face f, denotado por $d(f)$, é o número de arestas incidentes a f, onde as arestas de corte são contadas duas vezes.
    - Também pode ser visto como o comprimento do passeio fechado que determina a fronteira da face.

Grau de uma face

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

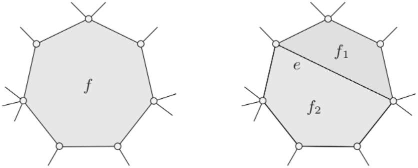
- O grau de uma face f, denotado por $d(f)$, é o número de arestas incidentes a f, onde as arestas de corte são contadas duas vezes.
  - Também pode ser visto como o comprimento do passeio fechado que determina a fronteira da face.

- Na figura abaixo temos que $d(f_5) = 5$ e $d(f_3) = 6$.



Subdividindo uma face

- Seja G um grafo plano conexo. Subdividir uma face f de G consiste em adicionar uma nova aresta e ligando dois vértices na fronteira de f de modo que a aresta e pertença inteiramente ao interior da face f.



- Esta operação resulta em um grafo plano $G + e$ com exatamente uma face a mais que G. Todas as faces de G, com exceção de f são também faces de $G + e$, e a face f é substituída por duas novas faces f_1 e f_2, que incidem na aresta e, como ilustrado acima.

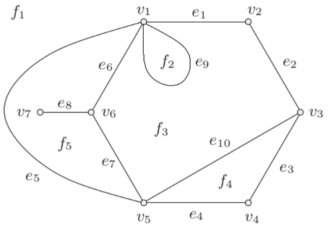
Dualidade

Grafo dual

- Seja G um grafo plano. O dual de G, denotado por G^*, é o grafo definido da seguinte maneira:

(a) a cada face f de G fazemos corresponder um vértice f^* em G^*.

(b) a cada aresta e de G fazemos corresponder uma aresta e^* em G^*, tal que e^* liga dois vértices f^* e h^* se e somente se as faces f e h em G são separadas por e.



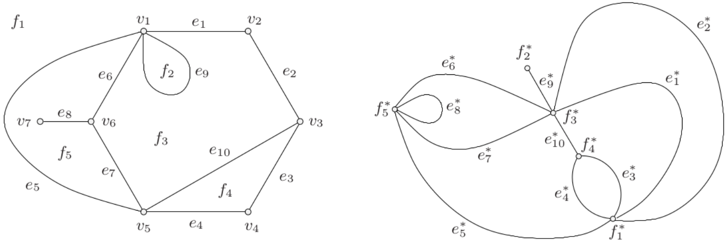
Grafo dual

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Seja G um grafo plano. O dual de G, denotado por G^*, é o grafo definido da seguinte maneira:

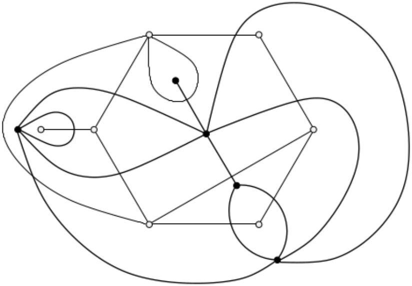
(a) a cada face f de G fazemos corresponder um vértice f^* em G^*.

(b) a cada aresta e de G fazemos corresponder uma aresta e^* em G^*, tal que e^* liga dois vértices f^* e h^* se e somente se as faces f e h em G são separadas por e.



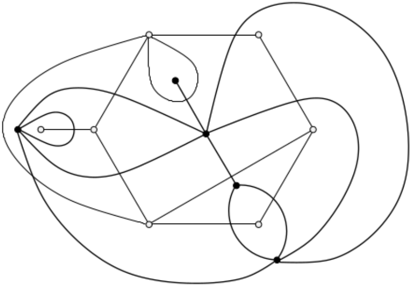
Grafo dual – Observações

- **FATO 1:** O dual de um grafo plano é um grafo planar.



Grafo dual – Observações

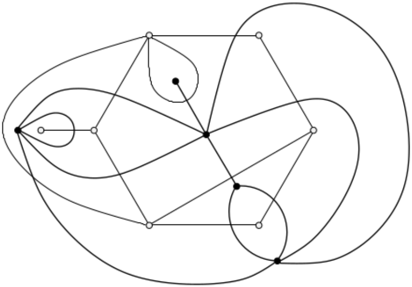
- **FATO 1:** O dual de um grafo plano é um grafo planar.



- **FATO 2:** Se a aresta e é uma aresta de corte em G, então a aresta e^* é um laço em G^*. Inversamente, se e é um laço em G, então e^* é uma aresta de corte de G^*.

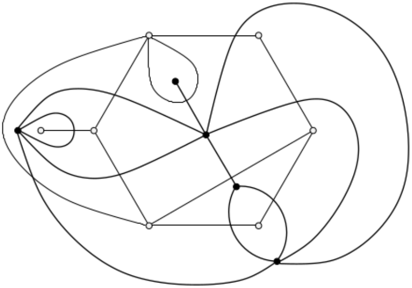
Grafo dual – Observações

- **FATO 3:** No dual G^* de um grafo plano G, as arestas correspondendo àquelas que pertencem à fronteira de uma face f de G são justamente as arestas incidentes no vértice correspondente f^*.



Grafo dual – Observações

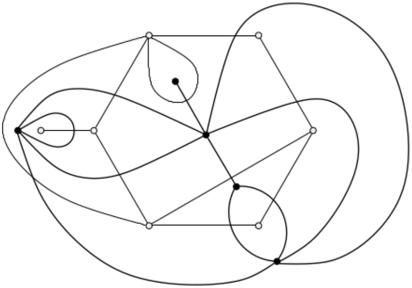
- **FATO 3:** No dual G^* de um grafo plano G, as arestas correspondendo àquelas que pertencem à fronteira de uma face f de G são justamente as arestas incidentes no vértice correspondente f^*.



- **FATO 4:** $|V(G^*)| = |F(G)|$ e $|E(G^*)| = |E(G)|$.

Grafo dual – Observações

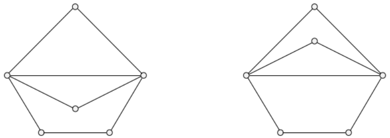
- **FATO 3:** No dual G^* de um grafo plano G, as arestas correspondendo àquelas que pertencem à fronteira de uma face f de G são justamente as arestas incidentes no vértice correspondente f^*.



- **FATO 4:** $|V(G^*)| = |F(G)|$ e $|E(G^*)| = |E(G)|$.
- **FATO 5:** $d_{G^*}(f^*) = d_G(f)$ para todo $f \in F(G)$.

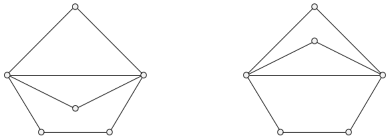
Grafo dual – Observações

- **Obs.:** Um grafo planar pode ter representações planas distintas cujos duais não são isomorfos. Vejam como ficam os duais das seguintes representações planas de um mesmo grafo G.



Grafo dual – Observações

- **Obs.:** Um grafo planar pode ter representações planas distintas cujos duais não são isomorfos. Vejam como ficam os duais das seguintes representações planas de um mesmo grafo G.



- Assim, o conceito de grafo dual só faz sentido para grafo plano e não pra grafos planares em geral.
- No entanto, Whitney(1933) provou que todo grafo simples planar 3-conexo tem uma imersão planar única (no sentido de que as fronteiras de suas faces são unicamente determinadas) e, portanto, têm um único grafo dual.

Teorema – Somatória dos graus das faces

Teorema 14.5: Se G é um grafo plano, então

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2m.$$

Demonstração:

Teorema – Somatória dos graus das faces

Teorema 14.5: Se G é um grafo plano, então

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2m.$$

Demonstração:

Seja G^* o dual de G. Pelos Fatos 4 e 5 e pelo Teorema de Euler (Handshaking Lemma), temos que

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = \sum_{f^* \in V(G^*)} d(f^*) = 2|E(G^*)| = 2|E(G)| = 2m.$$

■

Teorema – Grafo Dual

Teorema 14.6: O dual de qualquer grafo plano é conexo.

Demonstração:

Teorema – Grafo Dual

Teorema 14.6: O dual de qualquer grafo plano é conexo.

Demonstração:

- Seja G um grafo plano e G^* o grafo plano dual de G. Considere quaisquer dois vértices de G^*. Existe uma curva no plano conectando esses dois vértices que evita todos os vértices de G. A sequência de faces e arestas de G percorridas por esta curva corresponde em G^* a um passeio conectando os dois vértices. ■

Grafo dual e cortes de arestas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- O Teorema da curva de Jordan declara que uma curva simples fechada C separa o seu interior $int(C)$ do seu exterior $ext(C)$. Nos grafos planos essa dualidade entre curva e corte torna-se uma dualidade entre ciclos e cortes de arestas mínimais (bonds).

Grafo dual e cortes de arestas

- O Teorema da curva de Jordan declara que uma curva simples fechada C separa o seu interior $int(C)$ do seu exterior $ext(C)$. Nos grafos planos essa dualidade entre curva e corte torna-se uma dualidade entre ciclos e cortes de arestas mínimais (bonds).

- Vamos provar o seguinte resultado.

Teorema 14.7: Arestas em um grafo plano G formam um ciclo em G se e somente se as arestas duais correspondentes formam um corte de arestas minimal em G^*.

Teorema

Teorema 14.7: Arestas em um grafo plano G formam um ciclo em G se e somente se as arestas duais correspondentes formam um corte de arestas minimal em G^*.

Demonstração:

- ($\Longrightarrow$) Considere $D \subseteq E(G)$. Suponha inicialmente que D é o conjunto de arestas de um ciclo C em G.

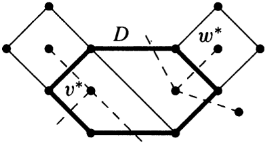
Teorema

Teorema 14.7: Arestas em um grafo plano G formam um ciclo em G se e somente se as arestas duais correspondentes formam um corte de arestas minimal em G^*.

Demonstração:

- ($\Longrightarrow$) Considere $D \subseteq E(G)$. Suponha inicialmente que D é o conjunto de arestas de um ciclo C em G.

- O conjunto de arestas correspondente $D^* \subseteq E(G^*)$ contém todas as arestas duais ligando faces no interior de C a faces no exterior de C (o Teorema da curva de Jordan implica que existe pelo menos uma delas). Assim, D^* é um corte de arestas.



Continuação da demonstração

- Pelo Lema 9.4 (Conectividade), um corte de arestas F de G é minimal se e somente se $G - F$ tem duas componentes.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Pelo Lema 9.4 (Conectividade), um corte de arestas F de G é minimal se e somente se $G - F$ tem duas componentes.

- Pelo Teorema 14.6, o subgrafo de G^* induzido por todos os vértices de G^* que correspondem às faces de G contidas no interior de C formam um subgrafo H conexo em G^*. O mesmo acontece com o subgrafo de G^* induzido por todos os vértices de G^* que correspondem às faces de G contidas no exterior de C.

Continuação da demonstração

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Pelo Lema 9.4 (Conectividade), um corte de arestas F de G é minimal se e somente se $G - F$ tem duas componentes.

- Pelo Teorema 14.6, o subgrafo de G^* induzido por todos os vértices de G^* que correspondem às faces de G contidas no interior de C formam um subgrafo H conexo em G^*. O mesmo acontece com o subgrafo de G^* induzido por todos os vértices de G^* que correspondem às faces de G contidas no exterior de C.

- Logo, pelo Lema 9.4, temos que o corte de arestas D^* é minimal.

Continuação da demonstração

Teorema 14.7: Arestas em um grafo plano G formam um ciclo em G se e somente se as arestas duais correspondentes formam um corte de arestas minimal em G^*.

Demonstração:

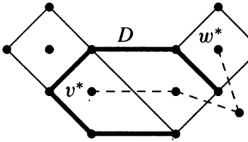
Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 14.7: Arestas em um grafo plano G formam um ciclo em G se e somente se as arestas duais correspondentes formam um corte de arestas minimal em G^*.

Demonstração:

- ($\Longleftarrow$) Vamos provar a contrapositiva. Considere $D \subseteq E(G)$. Suponha que D não contém arestas de nenhum ciclo C em G. Então, temos que as arestas em D não são fronteira de nenhuma região do grafo plano G.



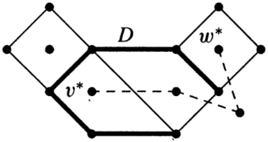
Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 14.7: Arestas em um grafo plano G formam um ciclo em G se e somente se as arestas duais correspondentes formam um corte de arestas minimal em G^*.

Demonstração:

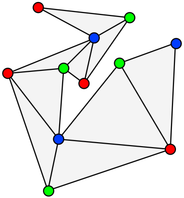
- ($\Longleftarrow$) Vamos provar a contrapositiva. Considere $D \subseteq E(G)$. Suponha que D não contém arestas de nenhum ciclo C em G. Então, temos que as arestas em D não são fronteira de nenhuma região do grafo plano G.

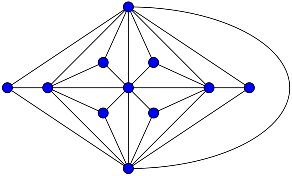


- Então é possível alcançar a face ilimitada de G a partir de qualquer outra face sem cruzar D. Portanto, $G^* - D^*$ é conexo, e D^* não contém nenhum corte de arestas. ■

Definição – Triangulações

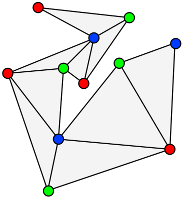
- Uma triangulação é um grafo plano simples e conexo no qual todas as suas faces têm grau três. Quais dos grafos abaixo são triangulação?

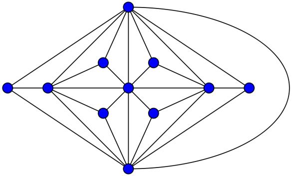




Definição – Triangulações

- Uma triangulação é um grafo plano simples e conexo no qual todas as suas faces têm grau três. Quais dos grafos abaixo são triangulação?





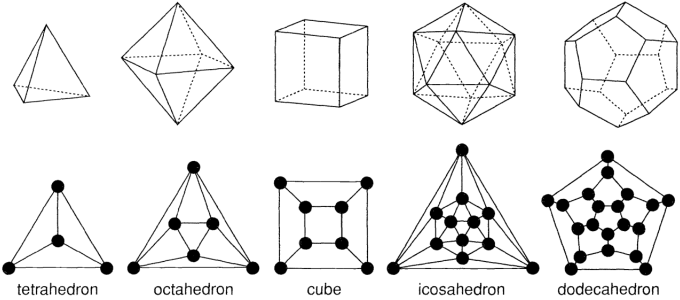
- Como uma consequência do Teorema da Curva de Jordan, temos o seguinte resultado:

Corolário 14.8: Um grafo plano simples e conexo é uma triangulação se e somente se seu dual é 3-regular.

Fórmula de Euler

Grafos platônicos

Quantos vértices, arestas e faces têm os grafos planares abaixo?



Fórmula de Euler

Teorema 14.9 [Euler, 1758]: Se um grafo plano conexo G tem exatamente n vértices, m arestas e f faces, então $n - m + f = 2$.

Demonstração:

Fórmula de Euler

Teorema 14.9 [Euler, 1758]: Se um grafo plano conexo G tem exatamente n vértices, m arestas e f faces, então $n - m + f = 2$.

Demonstração:

- Seja G um grafo plano conexo com n vértices, m arestas e f faces.

Fórmula de Euler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 14.9 [Euler, 1758]: Se um grafo plano conexo G tem exatamente n vértices, m arestas e f faces, então $n - m + f = 2$.

Demonstração:

- Seja G um grafo plano conexo com n vértices, m arestas e f faces.

- Primeiro, suponha que G é uma árvore de ordem n. Então $m = n - 1$ e $f = 1$. Assim, temos que $n - m + f = 2$. Portanto, resta tratar o caso em que G é plano, conexo e contém ciclos.

Fórmula de Euler

Teorema 14.9 [Euler, 1758]: Se um grafo plano conexo G tem exatamente n vértices, m arestas e f faces, então $n - m + f = 2$.

Demonstração:

- Seja G um grafo plano conexo com n vértices, m arestas e f faces.
- Primeiro, suponha que G é uma árvore de ordem n. Então $m = n - 1$ e $f = 1$. Assim, temos que $n - m + f = 2$. Portanto, resta tratar o caso em que G é plano, conexo e contém ciclos.
- Suponha, por absurdo, que o teorema não vale para tais grafos. Então, existe um grafo plano e conexo G com o menor tamanho possível para o qual a fórmula de Euler não é verdadeira.

Fórmula de Euler

- Suponha que G tem ordem n, tamanho m e f faces. Pela nossa suposição, $n - m + r \neq 2$.

Fórmula de Euler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Suponha que G tem ordem n, tamanho m e f faces. Pela nossa suposição, $n - m + r \neq 2$.

- Como G não é uma árvore, ele tem uma aresta e que não é uma ponte. Assim, $G - e$ é um grafo plano conexo de ordem n e tamanho $m - 1$ tendo $f - 1$ faces.

Fórmula de Euler

- Suponha que G tem ordem n, tamanho m e f faces. Pela nossa suposição, $n - m + r \neq 2$.

- Como G não é uma árvore, ele tem uma aresta e que não é uma ponte. Assim, $G - e$ é um grafo plano conexo de ordem n e tamanho $m - 1$ tendo $f - 1$ faces.

- Como o tamanho de $G - e$ é menor que m, a fórmula de Euler vale para $G - e$. Logo, $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$. Porém, isso implica $n - m + f = 2$, o que é uma contradição. ■

Fórmula de Euler

- Suponha que G tem ordem n, tamanho m e f faces. Pela nossa suposição, $n - m + r \neq 2$.

- Como G não é uma árvore, ele tem uma aresta e que não é uma ponte. Assim, $G - e$ é um grafo plano conexo de ordem n e tamanho $m - 1$ tendo $f - 1$ faces.

- Como o tamanho de $G - e$ é menor que m, a fórmula de Euler vale para $G - e$. Logo, $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$. Porém, isso implica $n - m + f = 2$, o que é uma contradição. $\blacksquare$

A Fórmula de Euler tem muitas aplicações. Veremos algumas das suas consequências nos próximos slides.

Consequência da Fórmula de Euler

Corolário 14.10: Todas as representações planas de um grafo planar conexo têm o mesmo número de faces.

Demonstração:

Consequência da Fórmula de Euler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Corolário 14.10: Todas as representações planas de um grafo planar conexo têm o mesmo número de faces.

Demonstração:

- Seja $\widetilde{G}$ uma representação plana de um grafo planar G.

Consequência da Fórmula de Euler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Corolário 14.10: Todas as representações planas de um grafo planar conexo têm o mesmo número de faces.

Demonstração:

- Seja $\widetilde{G}$ uma representação plana de um grafo planar G.
- Pela Fórmula de Euler, nós temos que

$$|F(\widetilde{G})| = |E(\widetilde{G})| - |V(\widetilde{G})| + 2 = |E(G)| - |V(G)| + 2.$$

Consequência da Fórmula de Euler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Corolário 14.10: Todas as representações planas de um grafo planar conexo têm o mesmo número de faces.

Demonstração:

- Seja $\widetilde{G}$ uma representação plana de um grafo planar G.
- Pela Fórmula de Euler, nós temos que

$$|F(\widetilde{G})| = |E(\widetilde{G})| - |V(\widetilde{G})| + 2 = |E(G)| - |V(G)| + 2.$$

- Assim, o número de faces de $\widetilde{G}$ depende somente do grafo G, e não da sua representação plana. $\blacksquare$

Consequência da Fórmula de Euler

Corolário 14.11: Se G é um grafo simples planar de ordem $n \geq 3$, então $m \leq 3n - 6$. Além disso, $m = 3n - 6$ se e somente se toda imersão plana de G é uma triangulação.

Demonstração:

Consequência da Fórmula de Euler

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Corolário 14.11: Se G é um grafo simples planar de ordem $n \geq 3$, então $m \leq 3n - 6$. Além disso, $m = 3n - 6$ se e somente se toda imersão plana de G é uma triangulação.

Demonstração:

- Seja G um grafo simples planar de ordem $n \geq 3$. Primeiro, suponha que G é conexo.

Consequência da Fórmula de Euler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Corolário 14.11: Se G é um grafo simples planar de ordem $n \geq 3$, então $m \leq 3n - 6$. Além disso, $m = 3n - 6$ se e somente se toda imersão plana de G é uma triangulação.

Demonstração:

- Seja G um grafo simples planar de ordem $n \geq 3$. Primeiro, suponha que G é conexo.

- Seja $\widetilde{G}$ uma representação plana qualquer de G.

Consequência da Fórmula de Euler

Corolário 14.11: Se G é um grafo simples planar de ordem $n \geq 3$, então $m \leq 3n - 6$. Além disso, $m = 3n - 6$ se e somente se toda imersão plana de G é uma triangulação.

Demonstração:

- Seja G um grafo simples planar de ordem $n \geq 3$. Primeiro, suponha que G é conexo.
- Seja $\widetilde{G}$ uma representação plana qualquer de G.
- Como G é simples, conexo e tem pelo menos 3 vértices, a fronteira de cada face de G tem pelo menos três arestas, ou seja, $d(f) \geq 3$ para todo $f \in F(\widetilde{G})$.

Continuação da demonstração

- Portanto, pelo Teorema 14.5 e pela Fórmula de Euler, temos que

$$2m = \sum_{f \in F(\widetilde{G})} d(f) \geq 3|F(\widetilde{G})| = 3(m - n + 2) \qquad (1)$$

  o que implica $m \leq 3n - 6$.

Continuação da demonstração

- Portanto, pelo Teorema 14.5 e pela Fórmula de Euler, temos que

$$2m = \sum_{f \in F(\widetilde{G})} d(f) \geq 3|F(\widetilde{G})| = 3(m - n + 2) \tag{1}$$

  o que implica $m \leq 3n - 6$.

- Se G é não conexo, então arestas podem ser adicionadas a $\widetilde{G}$ a fim de produzir um grafo plano conexo de ordem n e tamanho m' com $m < m'$. Pela demonstração acima, temos que $m' < 3n - 6$ e, portanto, $m < 3n - 6$.

Continuação da demonstração

- Portanto, pelo Teorema 14.5 e pela Fórmula de Euler, temos que

$$2m = \sum_{f \in F(\widetilde{G})} d(f) \geq 3|F(\widetilde{G})| = 3(m - n + 2) \tag{1}$$

  o que implica $m \leq 3n - 6$.

- Se G é não conexo, então arestas podem ser adicionadas a $\widetilde{G}$ a fim de produzir um grafo plano conexo de ordem n e tamanho m' com $m < m'$. Pela demonstração acima, temos que $m' < 3n - 6$ e, portanto, $m < 3n - 6$.

- A igualdade acontece na inequação acima se e somente se ela acontece em (1), ou seja, se e somente se $d(f) = 3$ para toda face $f \in F(\widetilde{G})$. Neste caso, $\widetilde{G}$ é uma triangulação (Corolário 14.8). ■

Triangulações

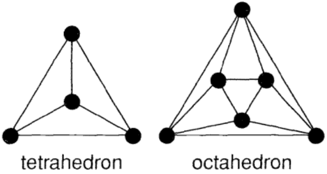
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- (Exercício para Casa): todo grafo plano simples com pelo menos três vértices é um subgrafo gerador de uma triangulação.

Triangulações

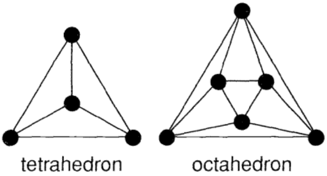
- (Exercício para Casa): todo grafo plano simples com pelo menos três vértices é um subgrafo gerador de uma triangulação.

- Por outro lado, uma consequência imediata do Corolário 14.11 é que nenhum supergrafo simples de uma triangulação é planar. Ou seja, não é possível adicionar novos links em uma triangulação sem fazer o grafo deixar de ser planar.



Triangulações

- (Exercício para Casa): todo grafo plano simples com pelo menos três vértices é um subgrafo gerador de uma triangulação.
- Por outro lado, uma consequência imediata do Corolário 14.11 é que nenhum supergrafo simples de uma triangulação é planar. Ou seja, não é possível adicionar novos links em uma triangulação sem fazer o grafo deixar de ser planar.



- Por causa destes resultados, triangulações são chamadas de grafos planares maximais.

Exercício para Casa

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Definição: Dizemos que um grafo é livre de triângulos se ele não possui o C_3 como subgrafo induzido.

Exercício para Casa

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Definição: Dizemos que um grafo é livre de triângulos se ele não possui o C_3 como subgrafo induzido.

- Usando um argumento similar ao usado na demonstração do teorema 14.11, prove o seguinte resultado.

Corolário 14.12: Se G é um grafo simples planar de ordem $n \geq 3$ e livre de triângulos, então $m \leq 2n - 4$.

Consequência da Fórmula de Euler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Corolário 14.13: Todo grafo planar simples tem um vértice de grau no máximo cinco.

Demonstração:

Consequência da Fórmula de Euler

Corolário 14.13: Todo grafo planar simples tem um vértice de grau no máximo cinco.

Demonstração:

- Seja G um grafo planar simples com n vértices e m arestas.

Consequência da Fórmula de Euler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Corolário 14.13: Todo grafo planar simples tem um vértice de grau no máximo cinco.

Demonstração:

- Seja G um grafo planar simples com n vértices e m arestas.
- Suponha, por absurdo, que $\delta(G) \geq 6$.

Consequência da Fórmula de Euler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Corolário 14.13: Todo grafo planar simples tem um vértice de grau no máximo cinco.

Demonstração:

- Seja G um grafo planar simples com n vértices e m arestas.
- Suponha, por absurdo, que $\delta(G) \geq 6$.
- Pelo Handshaking Lemma e pelo fato acima, temos que:

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6n.$$

Consequência da Fórmula de Euler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Corolário 14.13: Todo grafo planar simples tem um vértice de grau no máximo cinco.

Demonstração:

- Seja G um grafo planar simples com n vértices e m arestas.
- Suponha, por absurdo, que $\delta(G) \geq 6$.
- Pelo Handshaking Lemma e pelo fato acima, temos que:

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6n.$$

- Logo, $m \geq 3n > 3n - 6$. Pelo Teorema 14.11, G é não planar. Contradição.
- Portanto, $\delta(G) \leq 5$. $\square$

Consequência da Fórmula de Euler

Corolário 14.14: O grafo K_5 não é planar.

Demonstração:

Consequência da Fórmula de Euler

Corolário 14.14: O grafo K_5 não é planar.

Demonstração:

- Pelo corolário 14.9, se G é um grafo simples planar de ordem $n \geq 3$, então $m \leq 3n - 6$.

Consequência da Fórmula de Euler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Corolário 14.14: O grafo K_5 não é planar.

Demonstração:

- Pelo corolário 14.9, se G é um grafo simples planar de ordem $n \geq 3$, então $m \leq 3n - 6$.

- Se o K_5 fosse planar, teríamos então que

$$|E(K_5)| \leq 3|V(K_5)| - 6$$
$$10 \leq 9$$

o que é uma contradição.

Consequência da Fórmula de Euler

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Corolário 14.14: O grafo K_5 não é planar.

Demonstração:

- Pelo corolário 14.9, se G é um grafo simples planar de ordem $n \geq 3$, então $m \leq 3n - 6$.

- Se o K_5 fosse planar, teríamos então que

$$|E(K_5)| \leq 3|V(K_5)| - 6$$
$$10 \leq 9$$

  o que é uma contradição.

- Logo, o K_5 não é planar. $\square$

Consequência da Fórmula de Euler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Corolário 14.15: O grafo $K_{3,3}$ não é planar.

Demonstração:

- Suponha $K_{3,3}$ planar e seja G uma representação plana de $K_{3,3}$.

Consequência da Fórmula de Euler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Corolário 14.15: O grafo $K_{3,3}$ não é planar.

Demonstração:

- Suponha $K_{3,3}$ planar e seja G uma representação plana de $K_{3,3}$.
- Como o $K_{3,3}$ não contém ciclo de comprimento menor que 4, toda face de G tem grau pelo menos quatro.

Consequência da Fórmula de Euler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Corolário 14.15: O grafo $K_{3,3}$ não é planar.

Demonstração:

- Suponha $K_{3,3}$ planar e seja G uma representação plana de $K_{3,3}$.
- Como o $K_{3,3}$ não contém ciclo de comprimento menor que 4, toda face de G tem grau pelo menos quatro.
- Pelo Teorema 14.5, temos que $\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|E(G)|$. Portanto,

$$4|F(G)| \leq \sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|E(G)| = 18 \implies 4|F(G)| \leq 18 \implies |F(G)| \leq 4$$

- Agora, podemos usar a Fórmula de Euler, que nos dá $2 = |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| \leq 6 - 9 + 4 = 1$, o que é um absurdo. ■

Número de cruzamentos

Número de cruzamentos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- O número de cruzamentos de um grafo de um grafo G é o menor número de cruzamentos que uma representação plana de G pode ter. Esse número é denotado por $\nu(G)$.

- Para um grafo pequeno G podemos usar a seguinte estratégia para determinar o número de cruzamentos de G:
  - Considere um desenho de G no plano. Seja H um subgrafo plano maximal de G.
  - Como H é maximal, toda aresta de G que não está em H cruza alguma aresta de H. Assim, o desenho tem pelo menos $|E(G)| - |E(H)|$ cruzamentos.
  - Se G tem n vértices , então $m(H) \leq 3n - 6$.
  - Se G não tem triângulos, então $m(H) \leq 2n - 4$.

Número de cruzamentos – Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: $\nu(K_6) = 3$.

Demonstração:

Número de cruzamentos – Exemplo

Teorema: $\nu(K_6) = 3$.

Demonstração:

- O grafo K_6 possui 15 arestas.

Número de cruzamentos – Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: $\nu(K_6) = 3$.

Demonstração:

- O grafo K_6 possui 15 arestas.
- Sabemos que um grafo planar com 6 vértices possui no máximo $3n - 6 = 18 - 6 = 12$ arestas.

Número de cruzamentos – Exemplo

Teorema: $\nu(K_6) = 3$.

Demonstração:

- O grafo K_6 possui 15 arestas.
- Sabemos que um grafo planar com 6 vértices possui no máximo $3n - 6 = 18 - 6 = 12$ arestas.
- Logo, como observado no slide anterior, um desenho de G no plano possui pelo menos $15 - 12 = 3$ cruzamentos. Portanto, $\nu(K_6) \geq 3$.

Número de cruzamentos – Exemplo

Teorema: $\nu(K_6) = 3$.

Demonstração:

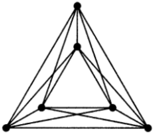
- O grafo K_6 possui 15 arestas.
- Sabemos que um grafo planar com 6 vértices possui no máximo $3n - 6 = 18 - 6 = 12$ arestas.
- Logo, como observado no slide anterior, um desenho de G no plano possui pelo menos $15 - 12 = 3$ cruzamentos. Portanto, $\nu(K_6) \geq 3$.
- O seguinte desenho do K_6 no plano possui 3 cruzamentos. Logo, $\nu(K_6) \leq 3$. $\square$

Número de cruzamentos – Exemplo

Teorema: $\nu(K_6) = 3$.

Demonstração:

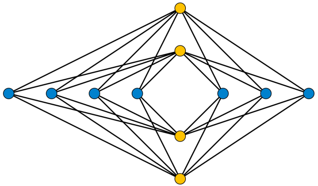
- O grafo K_6 possui 15 arestas.
- Sabemos que um grafo planar com 6 vértices possui no máximo $3n - 6 = 18 - 6 = 12$ arestas.
- Logo, como observado no slide anterior, um desenho de G no plano possui pelo menos $15 - 12 = 3$ cruzamentos. Portanto, $\nu(K_6) \geq 3$.
- O seguinte desenho do K_6 no plano possui 3 cruzamentos. Logo, $\nu(K_6) \leq 3$. $\square$



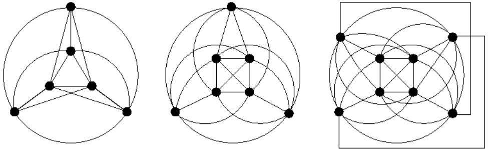
Número de cruzamentos

Conjetura [Zarankiewicz 1954]: $\nu(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

Conjetura [Hill 1950]: $\nu(K_n) = \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$.



$\nu(K_{4,7}) \leq 18$



$\nu(K_6) \leq 3$, $\nu(K_7) \leq 9$ e $\nu(K_8) \leq 18$

- Conjetura de Hill está provada para todo $n \leq 12$.
- Conjetura de Zarankiewicz está provada para $m \leq 6$ e $n \geq 3$.

Exercícios

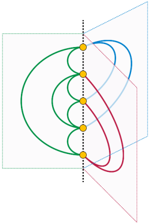
Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

(1) Usando o Teorema da Curva de Jordan, mostre que o $K_{3,3}$ não é planar.

(2) Mostre que o grafo $K_5 - e$ é planar, para toda aresta e do K_5.

(3) Um k-livro é um subespaço topológico do $\mathbb{R}^3$ consistindo em k quadrados unitários, chamados de páginas, que possuem um lado em comum, chamado de sua espinha, mas que são dois a dois disjuntos. Mostre que qualquer grafo G é imersível no $\mathbb{R}^3$ mostrando que ele é imersível em um k-livro, para algum inteiro não negativo k. Por exemplo, uma imersão do K_5 em um 3-livro é mostrada abaixo



Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

(4) Mostre que o grafo de Petersen contém uma subdivisão do $K_{3,3}$

(5) Prove que um grafo é planar se e somente se cada um dos seus blocos é planar.

(6) Prove que o dual de um grafo par é bipartido.

(7) Prove que todo grafo plano simples e conexo com n vértices, $n \geq 3$, é um subgrafo gerador de uma triangulação.

Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

(8) Considere um desenho $\widetilde{G}$ no plano de um grafo (não necessariamente) planar G. Duas arestas de $\widetilde{G}$ cruzam se elas se intersectam em um ponto que não é um vértice de $\widetilde{G}$. Esses pontos de cruzamentos de arestas são chamados de cruzamentos. O número de cruzamento de um grafo G, denotado por $cr(G)$, é o menor número de cruzamentos em um desenho de G no plano. Mostre que:

(a) $cr(G) = 0$ se e somente se G é planar.
(b) $cr(K_5) = cr(K_{3,3}) = 1$
(c) $cr(P) = 2$, onde P é o grafo de Petersen.
(d) $cr(K_6) = 3$.

FIM