

2.1 Ladungskontinuität

Maxwell ergänzt in der letzten Maxwellschen Gleichung die Summe der Leitungsströme mit der Änderung der Verschiebungsstromdichte.

$$\nabla \cdot (\nabla \times H) = \nabla \cdot S + \nabla \cdot \frac{dD}{dt} = \nabla \cdot S + \frac{d\nabla \cdot D}{dt} = \nabla \cdot S + \frac{d\rho}{dt}$$

2.2.1 Hilfgleichung

Problem: 8 Maxwellgleichungen für 12 unbekannte, daher werden Hilfgleichungen benötigt. el. und mag. Flussdichtegleichungen gelten in isotropen Medien (linear & homogen?)

ρ (ausgesprochen Rohacel)

$$\nabla \cdot (\nabla \times H) = \nabla \cdot (S + \frac{dD}{dt})$$

$$\nabla \times E = -\frac{dB}{dt}$$

$$\nabla \cdot D = \rho$$

(effektive Ladungsfreiheit bei $f \leq 10^8 \text{ Hz}$ - bei diesen Wellenlängen ist λ kleiner als der Atomradius, da hören die Kontinuitätsannahmen auf)

$$\nabla \cdot B = 0$$

aus 1 und 3:

$$0 = \nabla \cdot S + \frac{d\rho}{dt} \text{ folgt } \sigma \nabla \cdot E + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\sigma \rho \epsilon + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\rho(x, y, z, t) \text{ with } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t \in 0, \text{ inf}$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho(x, y, z) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_D}}$$

$$S = \sigma E$$

$$D = \epsilon E$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_0(x, y, z) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_D}} + \rho_0(x, y, z) \left(\frac{-1}{\tau_D} \right) e^{-\frac{t}{\tau_D}} = 0$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{1}{\tau_D}, \tau_D = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

allgemeine Lösung = homogen + partikulär

$$\rho(x, y, z) = \rho_0(x, y, z) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_D}} + \text{partikuläre Lösung}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (\rho(x, y, z, t)) dx dy dz &= \int_{\mathbb{R}^3} (\rho_0(x, y, z) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_D}}) dx dy dz \\ &= e^{-\frac{t}{\tau_D}} \cdot Q_0 \end{aligned}$$

Anfangsladungsverteilung:

$$Q_0 = \text{rect}_{-t_0}(t) - \text{rect}_{t_0}(t)$$

Wobei bei Kupfer $\tau_D = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} / 60 \cdot 10^6 \text{ S/m} = 10^{-18} \text{ s}$ gilt.

$$H(x, y, z, t) = \text{Re}\{\underline{H}(x, y, z)e^{j\omega t}\} \text{ ...Notiz: Spitzenwertzeiger } \underline{H}$$

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{S} + j\omega \underline{D} = \sigma \cdot \underline{E} + j\omega \epsilon \underline{E} = (\sigma + j\omega \epsilon) \cdot \underline{E} = j\omega \epsilon \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega \epsilon}\right) \cdot \underline{E} = j\omega \epsilon \left(1 - \frac{j\sigma}{\omega \epsilon}\right) \cdot \underline{E}$$

$\nabla \times \underline{H} = j\omega \delta \underline{E} \dots \delta = \text{effektive Permittivität}$

$$\nabla \times \underline{H} = -j\omega \mu \underline{H}$$

$$\nabla \times \underline{H} = -j\omega \underline{B}$$

$$\nabla \cdot \underline{D} = -j\omega \underline{B}$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

Poyntingscher Satz

- Gleichungen mit H und E multiplizieren
- Gleichungen subtrahieren
- den Term $\nabla \cdot (E \times H)$ mittels Produktregel + Spatprodukt umformen auf $H \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times H)$
- Weiter Produktregel an E und H Termen anwenden

$$x \cdot \frac{dx}{dt} = |x|^2/2$$

$$\nabla \cdot (E \times H) + \sigma |E|^2 = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\epsilon}{2} |E|^2 + \frac{\mu}{2} |H|^2 \right)$$

Abstrahlung + Heizung = elektromagnetische

Die dielektrischen Verluste wachsen direkt proportional zur Frequenz.

$$E(x, y, z, t) = \text{Re}\{E(x, y, z, t) \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$H(x, y, z, t) = \frac{1}{2}(\underline{H}(x, y, z, t) \cdot e^{j\omega t} + \underline{H}^*(x, y, z) \cdot e^{-j\omega t})$$

$$E(x, y, z, t) \times H(x, y, z, t) = \text{Re}\{\underline{E}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}\} \times \frac{1}{2}(\underline{H} \cdot e^{j\omega t} + \underline{H}^* \cdot e^{-j\omega t})$$

$$= \text{Re}\left\{\frac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H}^* + \frac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H} \cdot e^{2j\omega t}\right\} = \text{stationärer} + \text{pendelnder Anteil}$$

$$= \text{Re}\left\{\frac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H}^*\right\} + \dots$$

komplexer Poyntingvektor:

$$\underline{T} = \frac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H}^* = \underline{T}_\omega + j\underline{T}_b$$

Tägliche Trivia

Quellen und Wellen hängen irgendwie zusammen, Antennen sind gerne mal Quellen. Der Begriff der Antenne kommt aus dem italienischen Wort für Zeltstange. Der Dipol ist die elementare Antenne.

Merksatz: Die niedrigste Strahlungsordnung ist die Dipolladung. Eine Druckwelle einer Explosion ist eine Monopolstrahlung, die Erdbebenwelle ist eine Dipol- oder sogar Quadropolstrahlung. Die Kräfte einer Explosion gehen radial weg, während im Zentrum eines Erbebens Platten mit entgegengesetzten Kräften aneinander reiben.

Dinge des Tages:

- Gerade Einzeldrahtantenne mit induktiver Kopplung in der Mitte. Die Kopplung teilt die Antenne in zwei Teile für kurz- und langwellige Signale.
Skizze: —a—====—b— $\lambda_a = 70\text{cm}$ | $\lambda_b = 100\text{cm}$
- Koaxialkabel
- Wifi-Antenne: Diese haben "gespiegelte" Stecker, damit normale Koaxialantennen nicht in einen Router passen. Mehr dazu in Kapitel 11

Also, was war nochmal eine Antenne? Wandler zwischen raumbundenen und leitungsgebundenen Wellen.

2.4 Randbedingungen

Wiederholung: Faraday'sches Gesetz

2.1 Grenzflächen zwischen Dielektrika

Beispiel: Oberflächenintegral über kleines Rechteck an Grenzfläche. Δl ist größer als Δx , aber kurz genug, damit $E_{\text{tangential}}$ an den beiden kurzen Kanten konstant bleibt. Siehe Resultat im Skriptum. Analoges kann für die magnetische Feldstärke durchgeführt werden.

Ähnliche infinitesimale Methode für die Divergenzgleichungen. Die elektrischen Flächenladungen die in den Ergebnissen auftreten, spielen in dieser Vorlesung keine Rolle und daher gibt es auch keine Beispiele dazu. Die Flächenstromdichte spielt sehr wohl eine Rolle (Skineffekt).

Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung: Wellen verschwinden in der Unendlichkeit (Mathematische Formulierung wird erstmal nicht durchgeführt)

1 2.5 Lösung der Wellengleichung in kartesischen Koordinaten

Sei angemerkt: unter hinreichenden Bedingungen gilt der Satz von schwartz. $\nabla x H = \sigma + \epsilon \partial_t \nabla x (\nabla x H) = \sigma + \epsilon \partial_t (\nabla x E) \nabla (\nabla H) - \delta H = \sigma - \partial_t H + \epsilon \partial_t (-\partial_t H) \delta H = \sigma \partial_t H + \epsilon \partial_t^2 H \dots T$
 $\text{Rebot} H(x, y, z). e^j \text{wt} \dots \partial_t \text{wird laplace transformiert} \delta \text{bot} H = j \sigma \text{bot} H \epsilon \omega^2 \text{bot} H \dots \delta \text{bot} H +$
 $(\omega^2 \epsilon \text{bot} H) = \text{bot} 0 \dots \text{Helmholtzgleichung}$

HÜ: Empfehlung: Das gleiche für E wiederholen. Nächste Woche Di: Separationsansatz (sollte man aus Mathe noch kennen)

17.10.2023

2 2.5.1 Lösungsansätze

Methode 1: $E = a \cdot \psi$ Methode 2: Reines Wirbelfeld E bzw $H = \nabla x(a \cdot \psi) = -a x \nabla \cdot \psi$ Durch Wiederholung : $\nabla x(\nabla x(a \cdot \psi))$ Mitgehend Wiederholungen kann die Elektrodynamik gelöst werden.

Methode 3: Ansatz mittels elektrodynamischer Potentiale Ansatz mittels Vektorpotential

3 2.5.2 Seperationsansatz

zu lösen: $\text{pard}^2\text{psi}/\text{pard}x^2\text{pard}^2\text{psi}/\text{pard}y^2 + \text{pard}^2\text{psi}/\text{pard}z^2 + w^2\text{sigmapsi} = 0$
 $\text{psi}(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)\text{pard}^2\text{psi}/\text{pard}x^2YZ.X\text{pard}^2\text{psi}/\text{pard}y^2.Z + XY\text{pard}^2\text{psi}/\text{pard}z^2 + w^2\text{sigmapsi}.XYZ = 0$
 $1/X(x).\text{pard}^2\text{psi}/\text{pard}x^2 + 1/Y(y).\text{pard}^2\text{psi}/\text{pard}y^2 + 1/Z(z).\text{pard}^2\text{psi}/\text{pard}z^2 + w^2\text{sigma} = 0$
aufgrund des konstanten $1/X(x).\text{pard}^2\text{psi}/\text{pard}x^2 + 1/Y(y).\text{pard}^2\text{psi}/\text{pard}y^2 + 1/Z(z).\text{pard}^2\text{psi}/\text{pard}z^2 + w^2\text{sigma} = 0$
 $Mkx^2 + ky^2 + kz^2 = w^2\text{sigma} \dots$ Separationsansatz

$1/X \cdot d^2 X(x)/dx^2 = -kx^2$ folglich $X''(x) + kx^2 \cdot X(x) = 0$...Schwingungsgleichung ANALOGY''(x) + $ky^2 \cdot Y(y) = 0$ Fundamentalsystem : $\sin(kx.x), \cos(kx.x)$...hufi verwendet Komplexes Fundsys : $e^{-jkx.x}, e^{+jkx.x}$...hufi verwendet Mischform : $\sin(kx.x), e^{+jkx.x}$, etc. Hyperbelfunktion : $\cosh(kx.x), \sinh(kx.x)$ Die Resin(kz.z).e^jwtberprft werden. Die Wellen frontverluft in z – Richtung.

Fortan wird die verkürzte Schreibweise $\text{pard}/\text{pard}_x = \text{pard}_x$ verwendet.

$$(2.39) \text{pard}_y H_z - \text{pard}_z H_y = jw \text{sigma} E_x / .jw(2.43) \text{pard}_z E_x - \text{pard}_x E_z = -jw H_y / . \text{pard}_z \text{ber2Schritte folgt :} \\ jw . \text{pard}_y H_z + \text{pard}_z^2 E_x - \text{pard}_z \text{pard}_x E_z = -w^2 \text{sigma} . E_x$$

Annahme wanderwelle nach z + inf $j\omega p_{\text{pard}_y} H_z - k_z^2 E_x + j k_z \cdot \text{pard}_x E_z = -w^2 \text{sigma} E_y (w^2 \text{sigma} - k_z^2) E_x = -j\omega p_{\text{pard}_y} H_z - j k_z \text{pard}_x E_z^k \text{appa}^2 E_x = -j/k_{\text{appa}^2} \cdot (k_z \cdot \text{pard}_x E_z + w d_y H_z) \dots \text{solllt die erste Gleichung (2.45) für 2.46 bis 2.48 wiederholen}$

$\kappa^2 = 0w^2\sigma - k^2z^2 = 0kz = + - w/\sqrt{\epsilon}\kappa^2! = 0w^2\sigma - k^2z^2 = kx^2 + k^2z^2 \dots$ Der Betrag der k -Vektors bleibt gleich, daher wird die kz -Komponente wegen k und kz kleiner. Aus dieser Erkenntnis: Die TEM-Welle ist die schnellste Welle. *Notiz: Einnegrierte Formeln müssen auswendig gelernt werden, außer die Mo*

4 3. Die homogene ebene Welle

5 3.1 Die HEW im idealen Dielektrikum

e ... elektrische Feldstärke h ... magnetische Feldstärke Kleinbuchstaben als Anzeichen der Zeitabhängigkeit.

$\text{pard}_z^2 e_x(z, t) - \epsilon \text{pard}_z^2 e_x(z, t) = 0$ mit $e_x(z, t) = f_1(z - vt) + f_z(z + vt)$ eingesetzt (normal fr f1) :
 $f_1''(z - vt) - \epsilon f_1''(z - vt)(-v) \cdot (-v) = 0$ $1 - \epsilon v^2 = 0$ folgt $v = \pm 1/\sqrt{\epsilon}$
 $h_y^+ = 1/n \cdot e_x^+ \dots n = \sqrt{\epsilon} n_0 = \sqrt{\epsilon_0/\epsilon} n_0 = \sqrt{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m})^2 \cdot c_0^2} = 12\pi \cdot 10 \text{ Ohm} = 120\pi \text{ Ohm}$
 \dots Feldwellenwiderstand h a nicht mit ohmschen Verlusten zutun $\epsilon_{0,0} = 1/c_0^2 \epsilon_{0,0} = 1/(\epsilon_0 \cdot c_0^2)$

19.10.2023

Ding des Tages

Der Prof. baute sich einmal eine Antenne, um mit der ISS beim FAQ mit einer Schule zuzuhören. Eine 50cm Stange nach links, eine 50cm Stange nach rechts. Die Stangen gehen per Bananenstecker in eine mysteriöse graue Box. Von unten wird ein Koax-Kabel angesteckt, bissl qualitativer, nicht so wie das vom grindigen Fernsehen.

Es wird ein Balun benötigt (Bal=balanced, un=unbalanced). Dieses schließt eine balanzierte Leitung an eine unbalanzierte Leitung an.

Abb.: Tafelbild + Diashow Weil die Ströme gegensinnig, die Wicklung aber gleichsinnig ist, heben sich die Flüsse auf $\Rightarrow L=0$, $\omega_0 = 0$ Da bereits eine geringe Stromdifferenz eine relativ hohe Impedanz erzeugt, bestraft dieser Balun Differenzströme.

Weil die Schule unterhalb des Horizontes lag, konnte der Prof. nur der ISS, nicht aber der Schule zuhören. Der Prof. hat auch die Aufnahme zur Verfügung gestellt.

3.1.3 Energiedichte der HEW, Poyntingscher Vektor

Zu jedem Zeitpunkt, an jedem Ort, ist die elektrische Energiedichte gleich groß wie die magnetische Energiedichte: sie gehen synchron.

Abb. 3.1 Man sieht die Energiedichte eines Photons. Dort wo die Pfeile näher zusammen liegen, ist die Feldstärke erhöht. Man kann einen sinusförmigen Verlauf der Feldstärke erkennen.

Weiters ist die Homogene Elektromagnetische Welle im freien Raum dargestellt. Unbedingt einprägen!

3.1.4 Wellenzahl und Wellenlänge

Unterschied zwischen k und ω .

Polarisation

Alle haben eine Polarisation. Unpolarisierte sind nur im Mittel nicht polarisiert.

Polarisationsarten

elliptische Polarisations (allgemeine Form)