2.1 Ladungskontinuität

Maxwell ergänzt in der letzten Maxwellschen Gleichung die Summe der Leitungsströme mit der Änderung der Verschiebungsstromdichte.

$$\nabla \cdot (\nabla \times H) = \nabla \cdot S + \nabla \cdot \frac{dD}{dt} = \nabla \cdot S + \frac{d\nabla \cdot D}{dt} = \nabla \cdot S + \frac{d\rho}{dt}$$

2.2.1 Hilfsgleichung

Problem: 8 Maxwellgleichungen für 12 unbekannte, daher werden Hilfgleichungen benötigt.
el. und mag. FLussdichtegleichungen gelten in isotropen Medien (linear & homogen?)

ρ (ausgeprochen Rohacel)

$$\nabla \cdot (\nabla x H) = \nabla \cdot (S + \frac{dD}{dt})$$
$$\nabla x E = -\frac{dB}{dt}$$
$$\nabla \cdot D = \rho$$

(effektive Ladungsfreiheit bei $f \leq 10^18 Hz$ - bei diesen Wellenlängen ist λ kleiner als der Atomradius, da hören die Kontinuitätsannahmen auf)
$\nabla \cdot B = 0$
aus 1 und 3:

$$0 = \nabla \cdot S + \frac{d\rho}{dt} \text{folgt} \sigma \nabla \cdot E + \frac{drho}{dt} = 0$$
$$\sigma \rho \epsilon + \frac{d\rho}{dt} = 0$$
$$\rho(x, y, z, t) \text{with} (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t \in 0, inf$$
$$\rho(x, y, z, t) = \rho(x, y, z) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_D}}$$
$$S = \sigma E$$
$$D = \epsilon E$$
$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_0(x, y, z) \cdot e^{\frac{-t}{\tau_D}} + \rho_0(x, y, z)(\frac{-1}{\tau_D}) e^{\frac{-t}{\tau_D}} = 0$$
$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{1}{\tau_D}, \tau_D = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

allgemeine Lösung $=$ homogen $+$ partikulär

$$\rho(x, y, z) = \rho_0(x, y, z) \cdot e^(- \frac{t}{\tau_D}) + \text{partikuläre Lösung}$$
$$\int_{\mathbb{R}^3} (\rho(x, y, z, t)) dx dy dz = \int_{\mathbb{R}^2} (\rho_0(x, y, z) \cdot e^{\frac{-t}{\tau_D}}) dx dy dz$$
$$= e^{\frac{-t}{\tau_D}}, Q(t) = e^{\frac{-t}{\tau_D}} \cdot Q_0$$

Anfangsladungsverteilung:

$$Q_0 = rect_{-t_0}(t) - rect_{t_0}(t)$$

Wobei bei Kupfer $\tau_D = 8,854.10^-12 F/m / 60.10^6 S/m \ = 10^-18 s$ gilt.
$H(x, y, z, t) = Re\{\underline{H}(x, y, z) e^{jwt}\}$ ...Notiz: Spitzenwertzeiger $\underline{H}$

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{S} + j\omega \underline{D} = \sigma \cdot \underline{E} + j\omega\epsilon \underline{E} = (\sigma + j\omega\epsilon) \cdot \underline{E} = j\omega\epsilon(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}) \cdot \underline{E} = j\omega\epsilon(1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon}) \cdot \underline{E}$$

$\nabla \times \underline{H} = j\omega\delta \underline{E}$...$\delta =$ effektive Permitivität

$$\nabla \times \underline{H} = -j\omega\mu \underline{H}$$
$$\nabla \times \underline{H} = -j\omega \underline{B}$$
$$\nabla \cdot \underline{D} = -j\omega \underline{B}$$
$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

Poyntingscher Satz

- Gleichungen mit H und E multiplizieren
- Gleichungen subtrahieren
- den Term $\nabla \cdot (E \times H)$ mittels Produktregel + Spatprodukt umformen auf $H \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times H)$
- Weiter Produktregel an E und H Termen anwenden

$$x \cdot \frac{dx}{dt} = |x|^2/2$$

$$\nabla \cdot (E \times H) + \sigma |E|^2 = -\frac{d}{dt}(\frac{\epsilon}{2}|E|^2 + \frac{\mu}{2}|H|^2)$$

Abstrahlung + Heizung = elektromagnetische
Die dielektrischen Verluste wachsen direkt proportional zur Frequenz.

$$E(x,y,z,t) = Re\{E(x,y,z,t) \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$H(x,y,z,t) = \frac{1}{2}(\underline{H}(x,y,z,t) \cdot e^{j\omega t} + \underline{H}*(x,y,z) \cdot e^{-j\omega t})$$

$$E(x,y,z,t) \times H(x,y,z,t) = Re\{\underline{E}(x,y,z) \cdot e^{j\omega t}\} \times \frac{1}{2}(\underline{H} \cdot e^{j\omega t} + \underline{H} * \cdot e^{-j\omega t})$$

$$= Re\{\frac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H} * + \frac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H} \cdot e^{2j\omega t}\} = \text{stationärer + pendelnder Anteil}$$

$$= Re\{\frac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H}*\} + \dots$$

komplexer Poyntingvektor:

$$\underline{T} = \frac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H}* = \underline{T}_\omega + j\underline{T}_b$$

Tägliche Trivia

Quellen und Wellen hängen irgendwie zusammen, Antennen sind gerne mal Quellen. Der Begriff der Antenne kommt aus dem italienischen Wort für Zeltstange. Der Dipol ist die elementare Antenne.
Merksatz: Die niedrigste Strahlungsordnung ist die Dipolladung. Eine Druckwelle einer Explosion ist eine Monopolstrahlung, die Erdbebenwelle ist eine Dipol- oder sogar Quadropolstrahlung. Die Kräfte einer Explosion gehen radial weg, während im Zentrum eines Erbebens Platten mit entgegengesetzten Kräften aneinander reiben.

Dinge des Tages:

- Gerade Einzeldrahtantenne mit induktiver Kopplung in der Mitte. Die Kopplung teilt die Antenne in zwei Teile für kurz- und langwellige Signale.
  Skizze: ——a——===——b—— $\lambda_a = 70cm | \lambda_b = 100cm$
- Koaxialkabel
- Wifi-Antenne: Diese haben "gespiegelteSStecker, damit normale Koaxialantennen nicht in einen Router passen. Mehr dazu in Kapitel 11

Also, was war nochmal eine Antenne? Wandler zwischen raumgebundenen und leitungsgebundenen Wellen.

2.4 Randbedingungen

Wiederholung: Faraday'sches Gesetz

2.1 Grenzflächen zwischen Dielektrika

Beispiel: Oberflächenintegral über kleines Rechteck an Grenzfläche. Δl ist größer als Δx, aber kurz genug, damit $E_{tangential}$ an den beiden kurzen Kanten konstant bleibt. Siehe Resultat im Skriptum. Analoges kann für die magnetische Feldstärke durchgeführt werden.

Ähnliche infinitesimale Methode für die Divergenzgleichungen. Die elektrischen Flächenladungen die in den Ergebnissen auftreten, spielen in dieser Vorlesung keine Rolle und daher gibt es auch keine Beispiele dazu. Die Flächenstromdichte spielt sehr wohl eine Rolle (Skineffekt).

Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung: Wellen verschwinden in der Unendlichkeit
(Mathematische Formulierung wird erstmal nicht durchgeführt)

2.5 Lösung der Wellengleichung in kartesischen Koordinaten

Sei angemerkt: unter hinreichenden Bedingungen gilt der Satz von Schwartz.

$$\nabla \times H = \sigma E + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E$$

$$\nabla x(\nabla x H) = sigma() + epsilonpartd/partdt(\nabla x E)$$

$$\nabla(\nabla H) - \delta H = \sigma - \mu \frac{\partial H}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(-\mu \frac{\partial H}{\partial t})$$

$$\delta H = \mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

für H, B, E & D
In dieser VO wird hauptsächlich auf den Separationsansatz eingegangen. $H = Re\{\underline{H}(x,y,z) \cdot e^{j\omega t}\}$
$\ldots \frac{\partial}{\partial t}$ wird Laplace-transformiert
$\delta \underline{H} = j\omega\mu\sigma\underline{H}\epsilon\mu\omega^2\underline{H} \ldots \delta\underline{H} + (\omega^2\mu\epsilon j\omega\mu\sigma)\underline{H} = \underline{0}?$ ...Helmholtzgleichung

HÜ: Empfehlung: Das gleiche für E wiederholen. Nächste Woche Di: Seperationsansatz (sollte man aus Mathe noch kennen)

17.10.2023

2.5.1 Lösungsansätze

- Methode 1: $E = a \cdot \psi$

- Methode 2:
Reines Wirbelfeld E bzw H=$\nabla x(a.psi) = -ax\nabla.psiDurchWiederholung : \nabla x(\nabla x(a.psi))MitgengendWiederholunge$
$Ansatzmittelselektrodynamischer Potentiale Ansatzmittels Vektorpotential$

2.5.2 Separationsansatz

Zu lösen:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \omega^2\mu\sigma\psi = 0$$

$$\psi(x,y,z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \cdot YZ + X \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \cdot Z + XY \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \omega^2\mu\sigma\psi \cdot XYZ = 0$$

$$\frac{1}{X(x)} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \omega^2\mu\sigma = 0$$

Aufgrund des konstanten Terms folgt:

$$k \cdot x^2 + k \cdot y^2 + k \cdot z^2 = \omega^2\mu\sigma$$

... Seperationsansatz

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k \cdot x^2$$

folglich erhält man die Schwingungsgleichung. Analog können die Schwingungsgleichungen für y und z bestimmen und man erhält das Gleichungssystem

$$X''(x) + k \cdot x^2 \cdot X(x) = 0$$

$$Y''(x) + k \cdot y^2 \cdot Y(y) = 0$$

$$Z''(x) + k \cdot z^2 \cdot Z(z) = 0$$

Zur Bestimmung einer Lösungen können unterschiedliche Formen angesetzt werden. Die nützlichsten sind:

- Fundamentalsystem: $\{\sin(k_x x), \cos(k_x x)\}$... häufig verwendet
- Komplexes Fundsystem: $\{e^{-jk_x x}, e^{jk_x x}\}$äufig verwendet
- Mischform: $\{\sin(k_x x) m e^{jk_x x}\}$, etc.
- Hyperbelfunktion: $\{\cosh(k_x x), \sinh(k_x x)\}$

Physikalische Bedeutungen in Tabelle 2.1 können durch einsetzen in unsere Wellenfunktion $Re\{\psi(x,y,z) \cdot e^{j\omega t}\} = Re\{\sin(k_z z) \cdot e^{j\omega t}\}$ überprüft werden. Die Wellenfront verläuft in z-Richtung. Fortan wird die verkürzte Schreibweise $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ verwendet.

$$(2.39) \partial_y H_z - \partial_z H_y = \frac{j\omega\sigma E_x}{j\omega\mu}$$

$$(2.43) \partial_z E_x - \partial_x E_z = -j\omega_y \partial_z$$

Über 2 Schritte folgt: $j\omega\mu \cdot \partial_y H_z + \partial_z^2 E_x - \partial_z \partial_x E_z = -\omega^2 \mu\sigma \cdot E_x$
Annahme Wanderwelle nach $z = \infty$... $j\omega\mu\partial_y H_z - k_z^2 \cdot E_x + jk_z \cdot \partial_x E_z = -\omega^2 \mu\sigma E_y$

$$(\omega^2 \mu\sigma - k_z^2) E_x = -j\omega\mu\partial_y \cdot H_z - jk_z \partial_y E_z$$

$$E_x = -j\frac{1}{\kappa^2} \cdot (k_z. \cdot \partial_x E_z + \omega\mu\partial_y H_z)$$

... sollte die erste Gleichung (2.45 ergeben) HÜ: Für 2.46 bis 2.48 wiederholen

$$\kappa^2 = 0$$

$$\omega^2 - k_z^2 = 0$$

$$k_z = \pm\frac{\omega}{\sqrt(\mu\epsilon)}$$

$$\kappa^2 \neq 0$$

$$\omega^2 \mu\sigma - k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$$

... Der Betrag der k-Vektors bleibt gleich, daher wird die k_z Komponente wegen k_x und k_y kleiner Aus dieser Erkenntnis zeigt sich: Die TEM-Welle ist die schnellste Welle. Notiz: Eingerahmte Formeln müssen auswendig gelernt werden, außer die Modalen Lösungen in kartesischen Koordinaten. Stattdessen das κ^2 auswendig lernen!

3. Die homogene ebene Welle

3.1 Die HEW im idealen Dielektrikum

$e\ldots$ elektrische Feldstärke
$h\ldots$ magnetische Feldstärke
Kleinbuchstaben zur Andeutung der Zeitabhängigkeit.

$$\partial_z^2 e_x(z,t) - \mu\epsilon\partial_z^2 e_x(z,t) = 0$$

mit $e_x(z,t) = f_1(z - vt) + f_2(z + vt)$ eingesetzt folgt (nur mal für f1):

$$f_1''(z - vt) - \mu\epsilon f_1''(z - vt)(-v)^2 = 0$$

$$1 - \mu\epsilon v^2 = 0 \implies v = \pm\frac{1}{sqrt(\mu\epsilon)}$$

$$h_y^+ = \frac{1}{\nu} \cdot e_x^+ \ldots \nu = \sqrt{(}\frac{\mu}{\epsilon}), \nu_0 = \sqrt{(}\frac{0}{\epsilon_0}) = \sqrt{(}(4 \cdot \pi \cdot 10^{-z}\frac{H}{m})^2 \cdot c_0^2) = 12 \cdot \pi \cdot 10\Omega = 120 \cdot \pi\Omega$$

$\ldots$ Feldwellenwiderstand (hat nichts mit ohmschen Verlusten zu tun)

$$\epsilon_0 \cdot {}_0 = \frac{1}{c_0^2} = \frac{1}{\mu_0 \cdot c_0^2}$$

19.10.2023

Ding des Tages

Der Prof. baute sich einmal eine Antenne, um mit der ISS beim FAQ mit einer Schule zuzuhören. Eine 50cm Stange nach links, eine 50cm Stange nach rechts. Die Stangen gehen per Bananenstecker in eine mysteriöse graue Box. Von unten wird ein Koax-Kabel angesteckt, bissl qualitativer, nicht so wie das vom grindigen Fernsehen.
Es wird ein Balun benötigt (Bal=balanced, un=unbalanced). Dieses schließt eine balanzierte Leitung an eine unbalanzierte Leitung an.
Abb.: Tafelbild + Diashow Weil die Ströme gegensinnig, die Wicklung aber gleichsinnig ist, heben sich die Flüsse auf $\implies$ L=0, $\omega_0 = 0$ Da bereits eine geringe Stromdifferenz eine relativ hohe Impedanz erzeugt, bestraft dieser Balun Differenzströme.
Weil die Schule unterhalb des Horizontes lag, konnte der Prof. nur der ISS, nicht aber der Schule zuhören. Der Prof. hat auch die Aufnahme zur Verfügung gestellt.

3.1.3 Energiedichte der HEW, Poyntingscher Vektor

Zu jedem Zeitpunkt, an jedem Ort, ist die elektrische Energiedichte gleich groß wie die magnetische Energiedichte: sie gehen synchron.
Abb. 3.1 Man sieht die Energiedichte eines Photons. Dort wo die Pfeile näher zusammen liegen, ist die Feldstärke erhöht. Man kann einen sinusförmigen Verlauf der Feldstärke erkennen.
Weiters ist die Homogene Elektromagnetische Welle im freien Raum dargestellt. Unbedingt einprägen!

3.1.4 Wellenzahl und Wellenlänge

Unterschied zwischen k und ω.

Polarisation

Alle haben eine Polaristation. Unpolarisierte sind nur im mittel nicht polarisiert.

Polaristationsarten

elliptische Polarisations (allgemeine Form)