Mitschrift
Automatisierungsübung

DINC Atilla (11917652)

28. November 2023

Wiederholung - Theoretiche Grundlagen

- Koordinatentransformation für einfacheren Rechenweg
- Diagonalform zur leichteren Lösung
- Jordanblöcke
- 3.30 auswendig lernen, erspart Zeit bei der Prüfung

2. Übung: Lineare dynamische Systeme

2.1. Zwei autonome Systeme

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Gesucht: $x = V_1 z$, $\tilde{A}_1 = V_1^{-1} A_1 V_1$

Für Eigenwerte gilt: $Ax = \lambda x \implies (A - \lambda E)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

$$\implies \lambda_1 = 1, n_1 = 2, g_1 =$$

$$\implies \lambda_2 = 2, n_2 = 1, g_2 = 1$$

Für Eigenvektoren gilt: $Kern(A - \lambda_i E)$

$$g_1 = dim(Kern(A - \lambda_1 E)) = n - rang(A - \lambda_1 E)$$

λ_1 :(A-$\lambda_1 E$) $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies rang(\ldots) = 1$ V$_1$:(A-$\lambda_1 E$)$v_1 = 0 \implies$ v$_{1,1}$ $= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\implies$ v$_{1,2}$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_2 \implies$ v$_2$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Transformationsmatrix $V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_2 \end{pmatrix}$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_1 = V_1^{-1} A_1 V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Man hätte das Ergebnis auch einfach ablesen können, aber bei der Prüfung würden nicht so einfache Matrizen auftreten.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Gesucht: $x = V_2$, $\tilde{A}_2 = V_2^{-1} A_2 V_2$

- EW:

$$det(A - \lambda E)$$
$$\implies \lambda_1$$
$$\implies \lambda_1$$

  Wieder Vielfachheiten bestimmen.

- EV:

$$v_{1.1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  v$_{1.2}$:(A-$\lambda_1 E)v_{1.2} = v_{1.1}$

$$\implies v_{1.2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

  v$_2$:(A-$\lambda_2 E)v_2 = 0$

$$\implies v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Transformationsmatrix:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\tilde{A}_2 = V_2^{-1} A_2 V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Rest will ich nicht mitschreiben

$$\hat{\Phi}_2(t) = e^{\lambda E t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Schwingungsfähiges Feder-Masse-System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u$$

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

- EW: $det(A - \lambda E) = 0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{(\frac{d}{2m})^2 - \frac{k}{m}} = -1 \pm j\sqrt{2}$$

- EV: $(A - \lambda_1 E)v_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 - j\sqrt{2} & 1 \\ -3 & -1 - j\sqrt{2} \end{pmatrix} v_1 = 0$$

$$\implies \begin{pmatrix} 1 - j\sqrt{2} & 1 \\ -3(1 - j\sqrt{2}) & -3 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 1 - j\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 + j\sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 - j\sqrt{2} \implies v_2 = \begin{pmatrix} 1 - j\sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 \end{pmatrix}$$

laut irgendeiner Formel im Skriptum:

$$V = \begin{pmatrix} Rev_1 & Imgv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}3} \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} = \frac{adj(V_{i,j})}{det(V)} = \frac{(-1)^{i+j} M_{j,i}}{det(V)} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- $$\tilde{A} = V^{-1}AV = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

  ... wie die Form aus dem Skriptum (könnte man wieder direkt anschreiben wenn man es auswendig kann)

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = V^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}6} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = C^T V = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Phi}(t) = e^{-}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & \sin(\sqrt{2}t) \\ -\sin(\sqrt{2}t) & \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.4 Laplacetransformation

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Laplacetransformiert

$$sXs) - x_0 = AX(s) + Bu(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + Du(s)$$
$$\implies (sE - A)X(s) - x_{0=Bu(s)}$$
$$X(s) = (sE - A)^{-1}(Bu(s) + x_0)$$
$$y(s) = C(sE - A)^{-1}x_0 + C(sE - A)^{-1}(Bu(s)) + du(s)$$
$$\implies x_0 = 0, y(s) = C(sE - A)^{-1}B + Du(s)$$
$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(sE - A)^{-1} + D$$

Alternativ:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$
$$X(s) = \Phi(s)x_0 + \Phi(s)Bu(s)$$
$$\implies \Phi(s) = (sE - A)^{-1}$$

$$(sE - A) = \begin{pmatrix} s+3 & 4 \\ -2 & s-1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sE - A)^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s-1)8} \begin{pmatrix} (s-1) & -4 \\ 2 & (s+3) \end{pmatrix}$$

Rücktransformation:

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{(s+1)^2 + 4} \implies \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$$
$$\frac{s-1}{(s+1)^2 + 4} \implies \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t) + e^{-t}2\cos(2t)) - \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$$
$$\frac{s-3}{(s+1)^2 + 4} \implies \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t) + e^{-t}2\cos(2t)) - 3\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$$

$$x(s) = \Phi(s)x_0 + \Phi(s)Bu(s) = 0 + Bu(s)$$
$$y(s) = Cx(s) + Du(s) = Cx(s) + 0$$
$$\implies y(s) = C\Phi(s)Bu(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2 + 4}\frac{1}{s-1} = \frac{1}{N}$$
$$\text{Rücktransformation:} y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$$

Bonusbeispiel, weil wir erst seit 2h ohne Pause dran sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s^2 \\ 0 & -2 & -2s \\ 1 & s & -1 \end{pmatrix}$$

Wir haben 5min Zeit bis er uns das Ergebnis zeigt. Wir brauchen ja keine Pause, aber er kann gern im Gang chillen.

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+2s & -2s & 2 \\ -s^3 & s^2 - 1 & -s \\ -2s^2 & 2s & -2 \end{pmatrix}$$

...Alles falschich hab i und j in der Formel vertauscht

Eine 5min Pause, nach 2h und 10min oida. Der Rechenteil ist abgeschlossen. Jetzt macht er noch eine Fragestunde und zeigt den Umgang mit Maple und Matlab.

MatLab

Alle Programme die er hier zeigen wird, sind auf der Homepage verfügbar. Hilfreiche Befehle:

- "doc ss"
- "doc c2d"

Maple

Alle Programme die er hier zeigen wird, sind auf der Homepage verfügbar. Es sind nicht Programme zu den exakt gleichen Beispielen aber trotzdem das gleiche.

Beispiel 2.1 in Maple

Beispiel 2.2 in Maple

Beispiel 2.3 in Maple

Beispiel 2.4 in Maple

Beispiel 2.5 in Maple

Oida, er hat sich jetzt genau 10min für die Programme genommen. Hat sich voll gelohnt so lang zu warten...

Fragestunde

Hab ich mir nicht gegeben.