

17.10.2023

Notiz: erste stunde fehlt

2.5 Linearisierung nicht-linearer Systeme

Beispiel: Mathematisches Pendel

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{l \cdot \sin(\phi)} \\ \frac{dx}{dt} &= f(x), x_0 = \begin{pmatrix} \phi \\ \omega \end{pmatrix} \\ w_R &= 0\end{aligned}$$

$\sin(\phi_R) = 0$ folglich $\phi_{R1} = 0, \phi_{R2} = \pi$ (hier gibt es eigentlich unendlich viele lösungen für ϕ , weil der 2 verwendet wurde der 2 ist der falsche Zustandsraum, der richtige Raum wäre eigentlich der $SO(3)$, der Zylinder?

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l \cdot \cos(\phi_R)} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\omega \end{pmatrix}$$

Ausgangslage (Linearisierung um die untere Ruhelage):

$$\begin{aligned}w_R &= 0, \phi_{R1} = 0 \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \\ \det(A - \lambda \cdot I) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\lambda \end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}}$ - Klassische Eigenwerte für einen ewig schwingendes, ungedämpftes System $I = \sqrt{-1}$ um Verwechslungen mit Laufindizes zu vermeiden

Ausgangslage (linearisierung um die obere Ruhelage)

$$\begin{aligned}w_R &= 0, \phi_{R2} = \pi \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \\ \det(A - \lambda \cdot I) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{g}{l} & -\lambda \end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$ - Klassische Eigenwerte für einen ewig schwingendes, ungedämpftes System Linearisierung ist ein Werkzeug, das sehr systematisch und sehr einfach angewandt werden kann. In so einem einfachen Fall, kann natürlich auch mit der "Kleine-Winkel-Näherung linearisiert werden. Doch dann muss auf den Winkel geachtet werden, um den linearisiert wird (Näherung nur bei $\phi=0$ gültig). Mit dieser Methode mit der Jakobimatrix liegt man jedoch immer am richtigen Weg. -Fazit: diese Methode (Linearisierung mittels Jakobimatrix) ist bombensicher

inearisierung um die Trajektorie

Annahme: Eine Trajektorie eines Endeffektors wird idealisiert bestimmt. Was passiert, wenn Störungen auf dem Pfad auftreten?

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, u), x_0 \\ y &= h(x, u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) &\implies \tilde{x}(t) \implies \tilde{y}(t) \\ x(t) &= x + \text{deltax}\end{aligned}$$

$$u(t) = u + \text{deltau} \quad y(t) = y + \text{deltay}$$

Taylorentwicklung $\frac{dx}{dt} + \frac{d\text{deltax}}{dt} = f(x + \text{deltax}, u + \text{deltau}) = f(x, u) + \text{pard}$ / analoges für die Ausgangsgröße siehe Skriptum (Folie 95) zwischennotiz: Im Anhang gibt es auch detailreiche Beweise (nicht Prüfungstoff)

Beispiel

Rakete (zeitlich veränderliche Masse) siehe Skriptum

Zusammenfassung:

- was ist eine Ruhelage?
- bei linearen Systemen gibt es entweder 0, 1, oder inf Ruhelagen

Nächste Stunde:

- was für Systemverhalten können aus den Eigenwerten gelesen werden?
- Tools: Jordan-Normalformen, Linearkombinationen, ...

Wir befinden uns noch immer am besten Weg zum Regelkreis!

Wiederholung

- x ... Eingang
- u ... Zusatz
- y ... Ausgang

Ein LTI-SISO-System ist definiert als

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cdot x + b \cdot u, x_0 \\ y &= c^T \cdot x + d \cdot u \\ \implies x &= V \cdot z \dots V \text{ ist regulär} \\ \dot{x} &= V \cdot \dot{z} = A \cdot V \cdot z + b \cdot u \\ \dot{z} &= V^{-1} \cdot A \cdot V \cdot z + V^{-1} \cdot b \cdot u \\ y &= c^T \cdot V \cdot z + d \cdot u\end{aligned}$$

Bestimmung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned}\det(\lambda \cdot E - A) &= 0 \\ \det(V^{-1}) \cdot \det(\lambda \cdot E - A) \cdot \det(V) &= 0 \\ \det(\lambda \cdot V^{-1} \cdot V - V^{-1} \cdot A \cdot V) &= 0 \\ \det(\lambda \cdot E - \tilde{A}) &= 0 \\ \mathbf{\det(V \cdot A)} &= \mathbf{\det(V)} \cdot \mathbf{\det(A)}\end{aligned}$$

Die Gleichungen sind äquivalent, die Dynamik des Systems bleibt unverändert.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms werden als die "Wurzel des Polynoms" bezeichnet. Das liegt daran, dass die Nullstellen des Nennerpolynoms Polstellen und die des Zählerpolynoms Nullstellen genannt werden. Die Eigenwerte charakterisieren die Dynamik, und diese wird sich nicht ändern, man wird nur mal anders draufschauen.

Fallunterscheidungen der Eigenwerte im Rahmen dieser VO:

- reelle Eigenwerte
- konjugiert komplexe Eigenwerte
- Vielfachheiten (geom. und algebraisch) Die Geometrische Vielfachheit ist beschrieben, durch den Rangseinbruch der Matrix A . (Man setzt also einen Eigenwert in $\det(\lambda E - A)$ ein, und schaut, wie weit der Rang zurückgeht; siehe Beispiel)

Warum brauchen wir Diagonalmatrizen? Es ist viel einfacher beim Lösen, die Eigenwerte spielen sich so in Exponentialfunktionen wieder. Die Lösungen von z und x lassen sich ineinander umrechnen.

Wichtiges Beispiel 3.1:

$$\dot{x} = A \cdot x = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$$

Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix liegen IMMER auf der Diagonale. (wichtig für Prüfungen)

$$(A - \lambda_i \cdot E) \cdot v_i = 0$$

, $i \in 1, 2, 3$ Für $\lambda_1 = 3$:

$$\implies v_{13} = 0, v_{1,2} = 0, v_{11} = \text{beliebig}$$

$$\begin{pmatrix} v_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{11} \neq 0$$

Für $\lambda_2 = 1$: Durch einsetzen sieht man:

$$\text{rang}(A - 1 \cdot E) = 1$$

$\dim(\text{Kern}(A - 1 \cdot E)) = 3 - \text{rang}(A - 1 \cdot E) = 2 \dots$ der "Verlust" den man hat, ist immer die Dim des Kerns analog wie zuvor ergibt sich:

$$2 \cdot v_{21} + 2 \cdot v_{22} - 2 \cdot v_{23} = 0$$

$$[-v_{22} + v_{23}, v_{22}, v_{23}]$$

Es können einige Variablen gewählt werden. Gewählt wurden

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{z} = V^{-1} \cdot A \cdot V \cdot z = \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z, z(9) = z_0 = V^{-1} \cdot x_0$$

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \exp(3t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(t) \end{pmatrix}$$

3.2.2 Notwendigkeit von Hauptvektoren

$(A - \lambda \cdot E)v_1 =$ wird gelöst, woraus dann die restlichen Hauptvektoren bestimmt werden können:

$$(A - \lambda E)v_{j+1} = v$$

Nach Herleitung wie im Skriptum folgt:

$$A \cdot V = v \cdot (\lambda \cdot E + N)$$

Beispiel: Berechne $V \cdot N$, wobei $V \in R^{n \times n}$ N ist eine nilpotente Matrix, die wie ein Schieberegister funktioniert, sie verschiebt alle Spaltenvektoren um eine Stelle nach rechts. Nach genügend vielen Schritten kommt immer eine Nullmatrix raus!

Wenn gilt $A \cdot B = B \cdot A$, dann gilt $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$. Damit folgt aus 3.24 die Lösung 2.25. Was sehen wir: Das Lösungsverhalten wird durch den Eigenwert dominiert. Hiermit wurde das Lösungsverhalten gezeigt, wenn die algebraische Vielfachheit größer als die geometrische ist.

Keine Ahnung was das hier werden soll:

$$\begin{pmatrix} v_{11,R} + I \cdot v_{11,R} & v_{12,R} + I \cdot v_{12,R} \\ v_{11,R} - I \cdot v_{11,R} & v_{12,R} - I \cdot v_{12,R} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11,R} & v_{12,R} \\ v_{11,I} & v_{12,I} \end{pmatrix}$$

3.irgendwas Zusammenfassung

Man betrachte wieder die Fallunterscheidung der Eigenwerte. Die Eigenwerte bestimmen nämlich das Lösungsverhalten.

Beispiel: Unbedingt selbstständig durchrechnen (er hat das Beispiel nur durchbesprochen)

Mit der Dynamikmatrix, im speziellen mit ihrer Eigenwerte, identifizieren wir das Verhalten. Im Weiteren wird die Stabilität beurteilt. Wir haben heute die Fallunterscheidungen der Eigenwerte untersucht, weil uns die Lage der Eigenwerte extrem viel sagen.

3.3 Allgemeines Lösungsverhalten

Ein lineares System kann nicht, in endlicher Zeit nach unendlich oder gegen 0 gehen. Ein nicht-lineares System kann das. Siehe Satz 3.3. Mit Satz 3.4 haben wir den ersten Stabilitätsbegriff kennengelernt.

Nächstes Mal:

Was ist die Bedeutung des Eigenvektors. Im Beispiel der Flugtechnik ist weiters die Richtung notwendig, da wird der EigenVEKTOR notwendig.

31.10.2023

Wiederholung

3.5 Realisierungsproblem

Gegeben sei ein LTI-System:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu, x_0 \\ \text{dot}y &= c^T x + du\end{aligned}$$

Daraus kann mit einem Ausgangszustand x_0 eine Übertragungsfunktion im Laplacebereich hergeleitet werden:

$$G(s) = \frac{\hat{Y}(s)}{\hat{U}(s)} = c^T (sE - A)^{-1} b + d$$

Der reverse Weg beschreibt ein Realisierungsproblem.

Wenn der Zählergrad grösser als der Nennergrad ist, hat man einen Differenzierer, daher macht es Sinn, dass man da keinen Zustand haben kann. Es werden Eigenschaften mit den englischen Begriffen

- proper: Zählergrad \leq Nennergrad
• strictly proper: Zählergrad $<$ Nennergrad

Beispiel:

$$\tilde{b}_l = b_l - a_l b_n$$

... bitte nachlesen

Stabilität

BIBO-Stabilität

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax, x_0 \\ G_s &= \frac{\hat{Y}}{\hat{U}} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= 0\end{aligned}$$

Satz 3.7: BIBO-Stabilität anhand der Impulsantwort

Impuls-Eingang Laplace-transformiert ergibt

$$G(s) = 1$$

daraus folgt

$$\hat{Y}(s) = G(s) * 1, y(t) = \mathbb{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$$

Satz 3.8: BIBO-Stabilität anhand der Impulsantwort

$$G(s) = \frac{\hat{Y}}{\hat{U}} = c^T (sE - A)^{-1} b + d = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

Hieraus lässt sich erkennen, dass sich die Eigenwerte im Nenner befinden müssen.

3.7 Kontinuierlicher Frequenzgang

Wir beschränken uns auf Harmonische Eingangs- und Ausgangsgrößen. Wenn eine harmonische Grösse aufgeschaltet wird, schwingen nach ausreichend langer Zeit alle transienten Funktionen im Ausgang ab und es bleibt eine harmonische Schwingung mit der gleichen Frequenz.

Beispiel 3.4

Im Skriptum durchbesprochen Man sieht, wir erhalten wieder eine harmonische Schwingung, es ändern sich nur Amplitude und Phase. Am Beispiel $Y = U^2$ sieht man auch direkt, dass das nur für lineare Systeme gilt.

Rückblick auf die komplexen Zahlen: $z_1 = a_1 + Ib_1 = \text{Betrag}(z_1) \cdot e^{I \arg(z_1)}$

$$\text{Betrag}(z_1) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\arg(z_1) = \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$$

Für die Prüfung: $\arctan(\frac{1}{1}) \neq \arctan(-\frac{1}{-1})$ das ist KEIN Rechenfehler, das wird bei der Prüfung als ein normaler Fehler angerechnet.

HÜ: Rechne auch $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ aus. Der Prof hat lang und breit erklärt, dass wir bei der Prüfung nachdenken müssen, es werden keine 40 Zeilen zum umformen erwartet. Das dividieren zweier komplexer Zahlen ist kein Trick sondern eine Grundlage.

Beim Aufbau eines Frequenzgangs könnte man eine Frequenz einstellen, und aufs Einschwingen warten, und das für ganz viele Frequenzen wiederholen. Wird aber in der Praxis nicht so gemacht. Professionell wird Eingang und Ausgang irgendwie bestimmt angeregt, beides FF-transformiert und die beiden FFTs mit- einander dividiert.

Zur Darstellung werden Bodediagramm und Ortskurve verwendet.

Eine Nyquist-Ortskurve wird mit Betrag und Winkel geplottet (siehe Skriptum)

Das Bodediagramm:

- Amplitudengang: doppellogarithmisch aufgetragener Betrag
- Phasengang

Wieso wird das so gemacht? Siehe Gleichungen 3.117 und 3.118

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

Zu Gleichung 3.119: Es sind einige Erkenntnisse zu den reellen und conj. kompl. Nullstellen zu sehen. Weiters:

- $\xi = 0 \implies 1 + (s \overline{\omega_z^2 = 0})$
- $\xi = 1 \implies 1 + 2(s \overline{\omega_z + (\frac{s}{\omega_z})^2 = (1 + \frac{s}{\omega_z})^2 = 0})$

Die Nullstellen lassen sich sehr gut in der komplexen Ebene abbilden. Diese Erkenntnis ist sehr fundamental für die gesamte Vorlesung.

V wird als Verstärkungsfaktor bezeichnet.

$$G(s) = \frac{\hat{Y}}{\hat{U}}$$

$$u(t) = \sigma(t) \text{ laplacetransformiert } \hat{U} = \frac{1}{s}$$

$\sigma(t) \dots$ Heavyside-Funktion

$$\hat{Y} = G(s)\hat{U} = G(s)\frac{1}{s}$$

Endwertsatz: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{y} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0) = V \frac{Z(0)}{N(0)} = V$

$(I\omega)'$ wird als Integrator/Differenzierer bezeichnet. Integrator

$$\dot{x} = u, x_0 = 0$$

$$y = x$$

$$s\hat{x} = \hat{u}$$

$$\hat{y} = \hat{x} = \frac{\hat{u}}{s} \implies \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{1}{s}$$

Differenzierer

$$y = \dot{u}$$

$$\hat{y} = s\hat{u}$$

$$\frac{\hat{y}}{\hat{u}} = s = G(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{s} = \frac{1}{I\omega}$$

$\text{Betrag}(G(s))_{dB} = \text{Im Bodediagram plotten (Gerade mit } k=-45^\circ)$

$$\arg\left(\frac{1}{I\omega}\right) = 0 - \arg(I\omega) = -90 \dots \text{const}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2} = -\frac{1}{\omega^2}$$

$\text{Betrag}(G(s))_{dB} = \text{Im Bodediagram plotten}$

$$\arg\left(\frac{1}{s^2}\right) = \dots$$

Der Differenzierer steigt stattdessen. Für sehr hohe Frequenzen geht der Differenzierer gegen unendlich. Da jedes reale System Rauschen hat, macht es den Differenzierer sehr unangenehm. Der Differenzierer macht in echt einfach keinen Sinn, und MatLab weigert sich, ihn aus der Toolbox zu entfernen.