材料力学

第二章 拉伸、压缩与剪切



主讲人：吕杭原

邮箱：lvhy@mail.neu.edu.cn

办公室：新机械楼319

QQ：494489092

复习

1、材料力学任务：既安全又经济地设计构件

强度：构件抵抗破坏的能力

刚度：构件抵抗变形的能力

稳定性：构件保持原有平衡状态的能力

2、内力:物体因外力作用而变形而引起的相互作用。

内力的特点：(1)连续分布于截面上各处；

(2)随外力的变化而变化；

(3)成对出现。

复习

3、截面法：一截、二取、三代、四平衡

4、应力:单位面积上的内力 $p_m = \dfrac{\Delta F}{\Delta A}$

正应力：垂直于截面的应力分量

切应力：平行于截面的应力分量

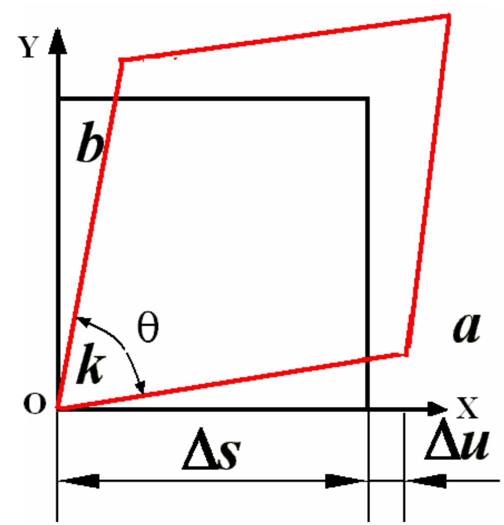
5、变形：在外力作用下物体尺寸和形状发生改变

正应变：单位长度的变化量

$$\varepsilon_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta u}{\Delta s}$$

切应变：直角的变化

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$$

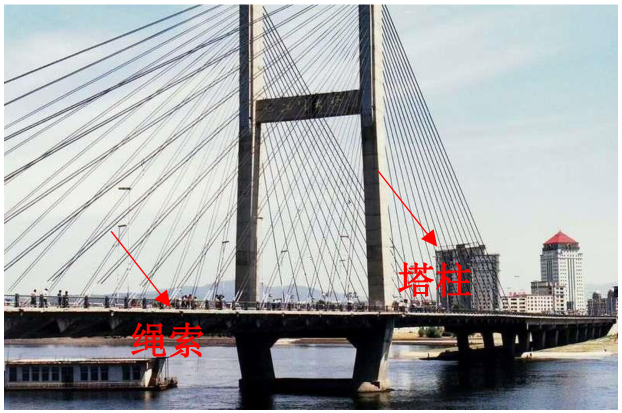


第二章 拉伸、压缩与剪切

第二章 拉伸、压缩与剪切

§2-1 轴向拉伸与压缩的概念和实例

1. 实例



斜拉桥 优点：整体尺寸小，跨度大

起重机

活塞杆

翻斗车

桁架梁

§2-1 轴向拉伸与压缩的概念和实例

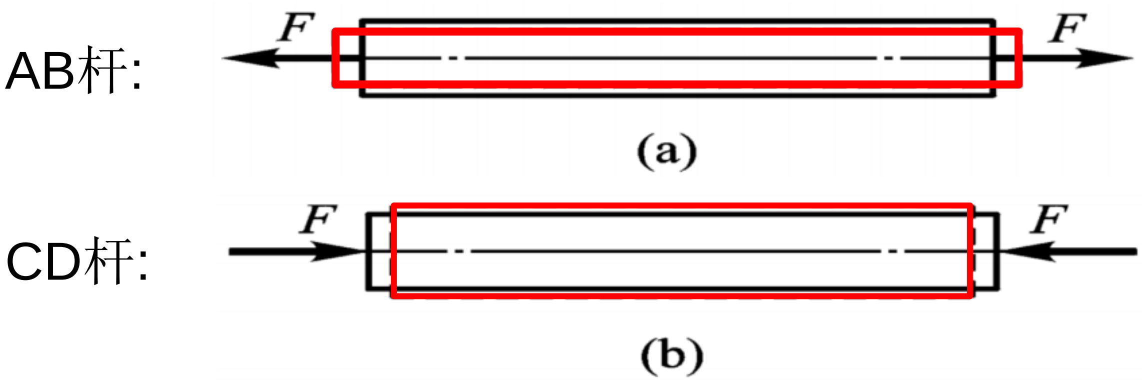
2. 拉压杆的力学特征

以轴向拉压为主要变形的杆件，称为轴向拉压杆。

- **受力——只承受拉力或压力；**

  外力合力作用线与杆轴线重合。

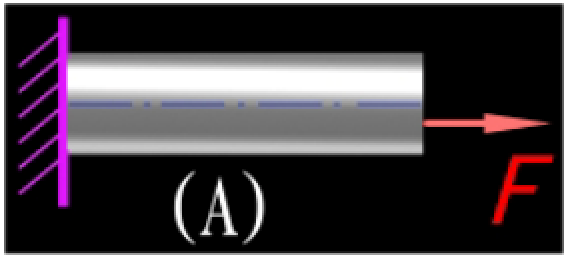
- **变形—— 杆沿轴线方向伸长或缩短；杆沿轴线垂直方向缩短或伸长。**

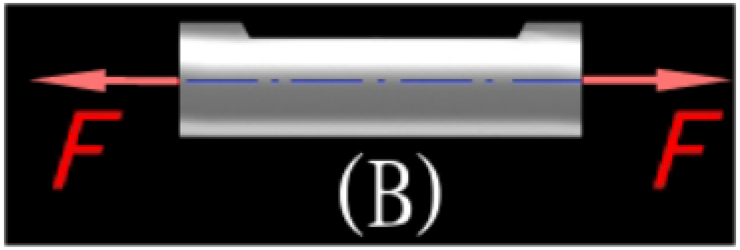


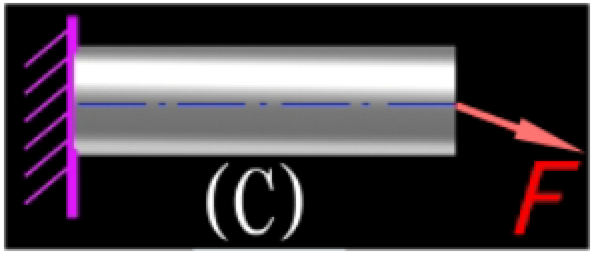
拉（压）杆的受力简图

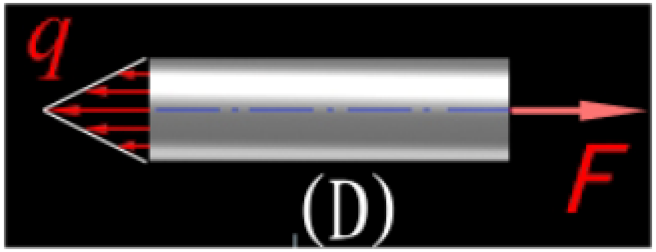
§2-1 轴向拉伸与压缩的概念和实例

思考：下列杆件是不是拉压杆？



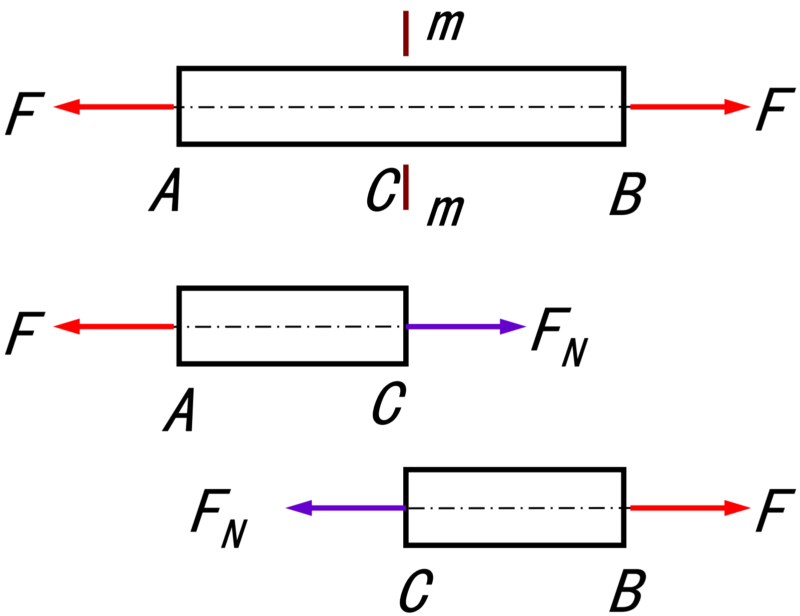






§2-2 轴向拉压杆横截面上的内力

1. 内力（轴力）求解



$$\sum F_x = 0 \quad F_N - F = 0$$

$$F_N = F$$

截面法求内力：

截：假想沿m-m横截面将杆截开

取：取左半段或右半段

代：将抛掉部分对留下部分的作用用内力代替

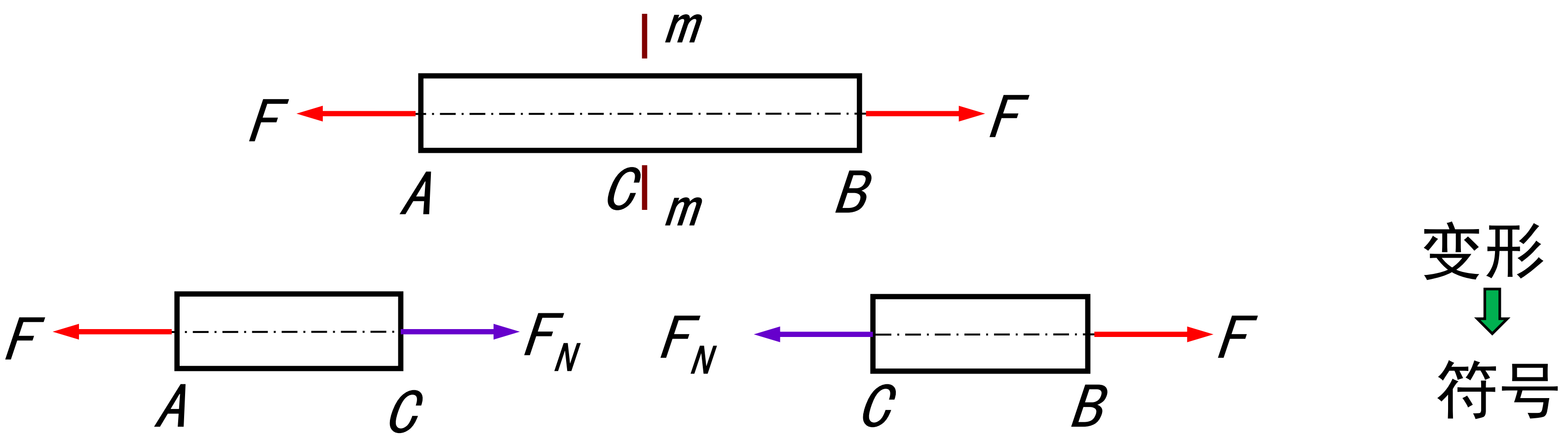
平：对留下部分写平衡方程求出内力即轴力的值

内力的合力作用线与杆件的轴线重合，称为**轴力**，用F_N表示。

§2-2 轴向拉压杆横截面上的内力

2. 轴力符号的规定

？问题：取左端轴力向右，右端轴力向左，符号不是相反吗？



符号规定：离开截面（拉力）为正，指向截面（压力）为负。

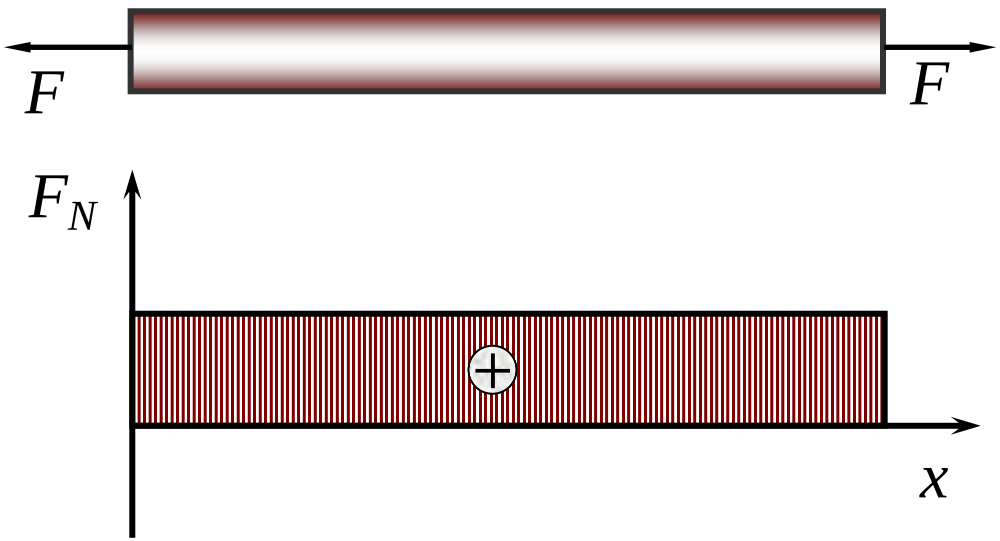
同一截面位置处左、右侧截面上内力必须具有相同的正负号。

设正法：当截面上的轴力未知时，一般将其设为正的即视为拉力。

§2-2 轴向拉压杆横截面上的内力

3、轴力图

轴力沿杆件轴线变化规律的图线，即为轴力图。



建立一个直角坐标系

横坐标：横坐标x表示杆横截面位置

x轴与杆件轴线平行。

纵坐标：纵坐标F_N表示相应截面的轴力；

拉力（正的轴力）画在x轴的上侧；

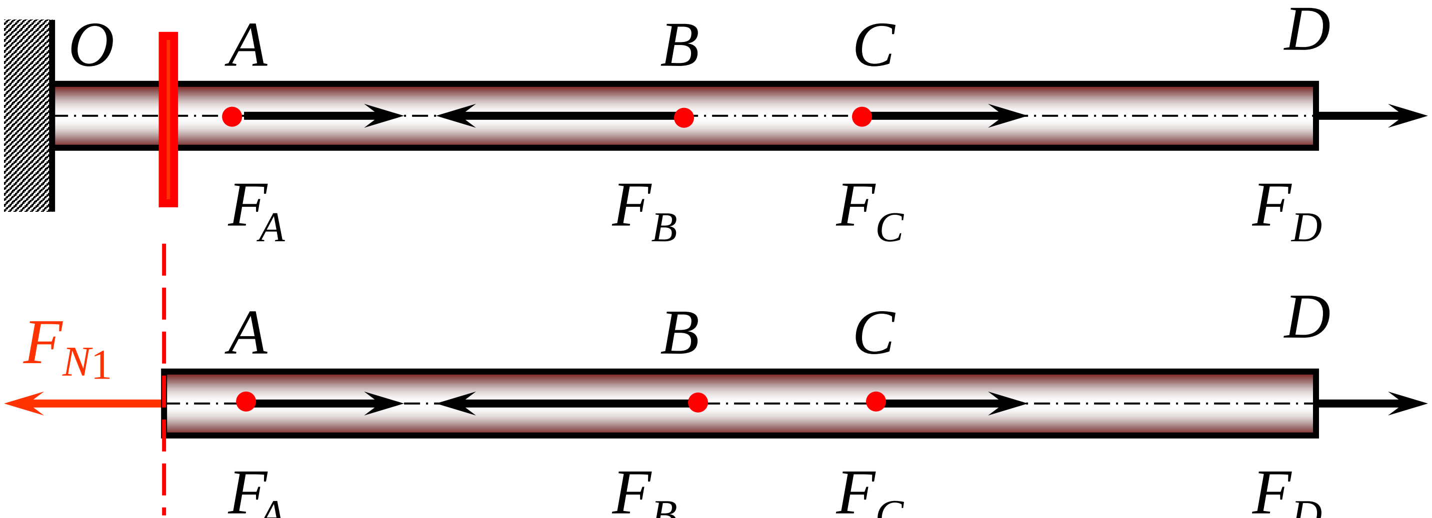
压力（负的轴力）画在x轴的下侧；

意义

①直观反映出轴力与截面位置变化关系；

②确定出最大轴力的数值及其所在横截面的位置，即确定危险截面位置，为强度计算提供依据。

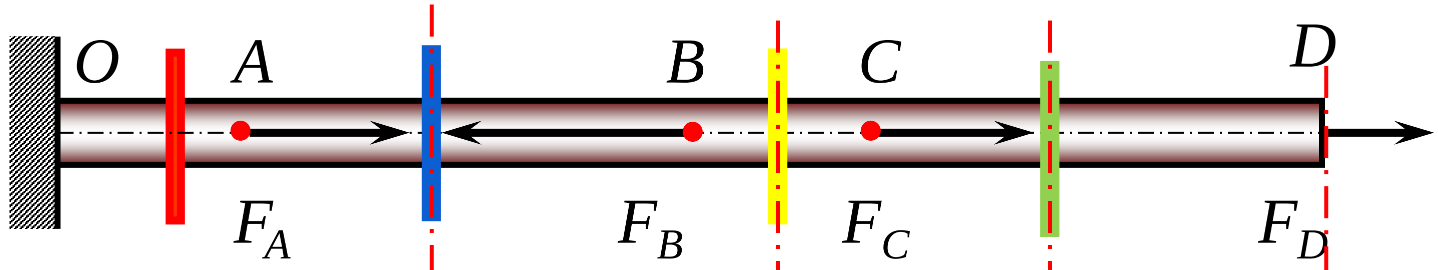
例1 图示杆的A、B、C、D点分别作用着大小为$F_A = 5F$、$F_B = 8F$、$F_C = 4F$、$F_D = F$ 的力，方向如图，试求各段内力并画出杆的轴力图。



解： 求OA段内力F_{N1}：设截面如图

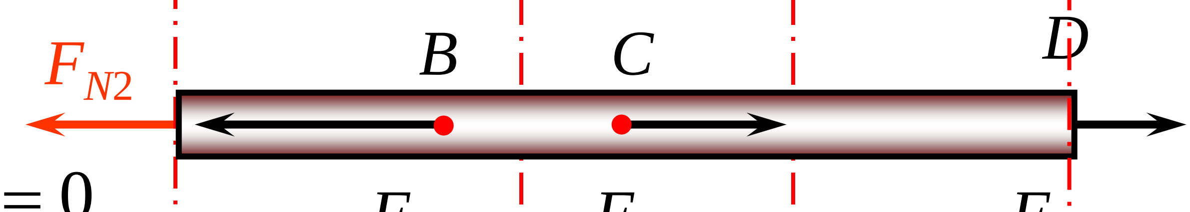
$$\sum X = 0 \qquad F_D + F_C - F_B + F_A - F_{N1} = 0$$

$$F + 4F - 8F + 5F - F_{N1} = 0 \qquad \therefore\ F_{N1} = 2F$$



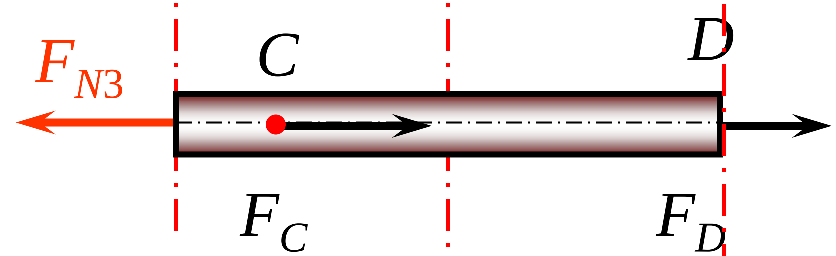
求*AB* 段内力:

$\sum X = 0$



$$F_{N2} + F_B - F_C - F_D = 0$$

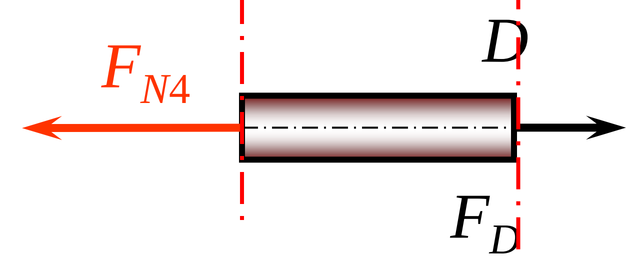
$F_{N2} = -3F$,



求*BC*段内力:

$\sum X = 0$ $\quad F_{N3} - F_C - F_D = 0$

$F_{N3} = 5F$

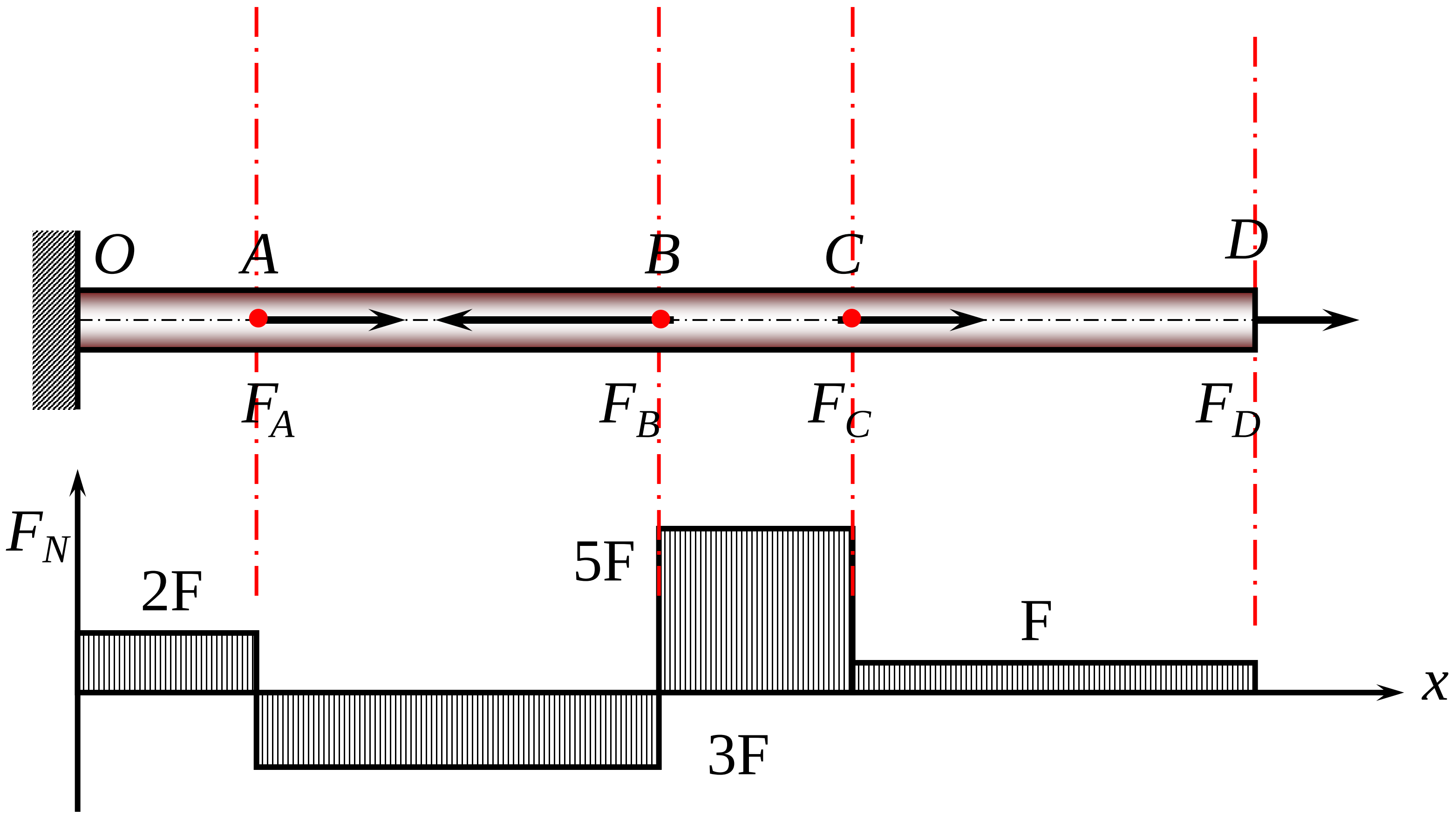


求*CD*段内力:

$\sum X = 0$ $\quad F_{N4} - F_D = 0$ $\quad F_{N4} = F$

$\therefore\ F_{N1}=2F$，$F_{N2}=-3F$，$F_{N3}=5F$，$F_{N4}=F$

轴力图如下图示

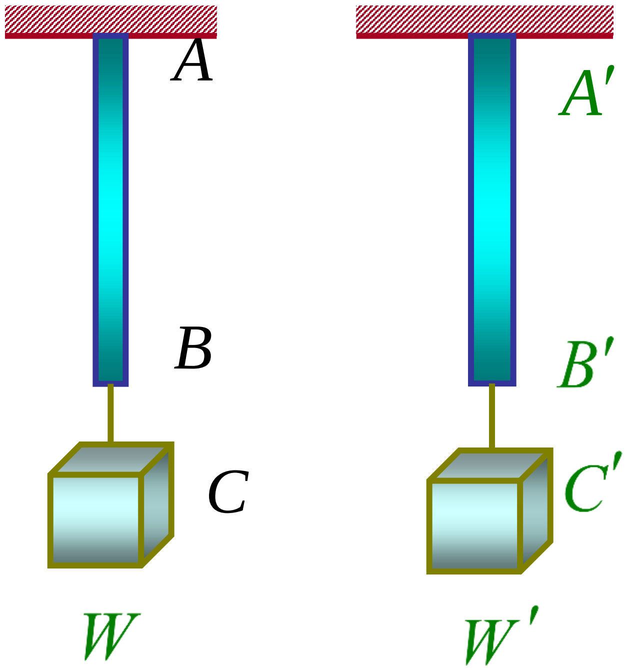


§2-3 轴向拉压杆横截面上的应力

思考：AB杆、$A'B'$杆材料相同，$A'B'$杆截面面积大于 AB杆，

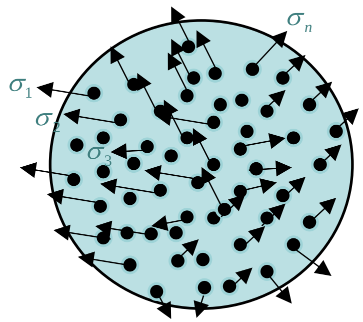
- 挂相同重物 $W'=W$ 哪根杆危险？
- 若重量 $W'>W$ 哪根杆危险？
- 什么量适合量度安全程度？

横截面上的应力



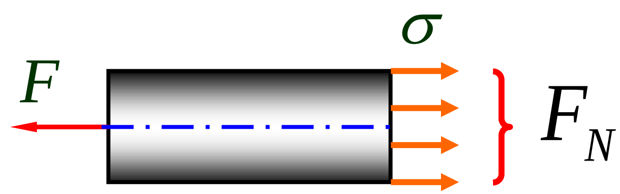
§2-3 轴向拉压杆横截面上的应力

※ 横截面上的应力



应力定义:单位面积上的内力

$$F_N=\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i$$



杆横截面上的应力是如何分布的?

内力 ⟷ 变形 ⇨ 所以,由变形分析应力的分布

看不见 可见

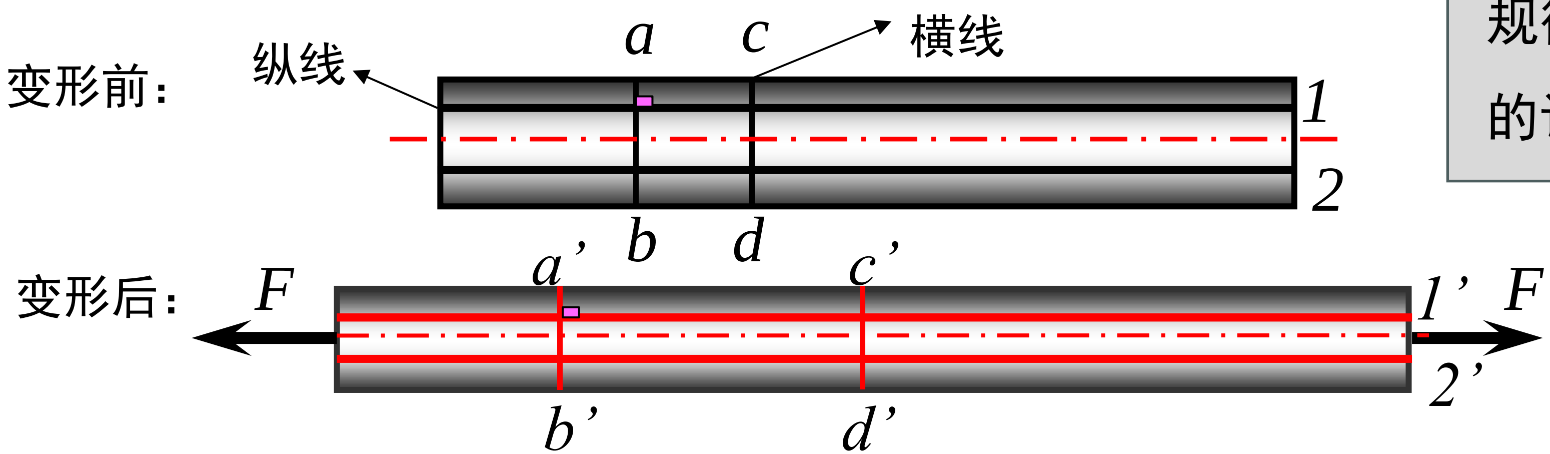
推导思路:实验→变形规律→应力的分布规律→应力的计算公式

§2-3 轴向拉压杆横截面上的应力

推导思路：
实验→
变形规律→
应力的分布
规律→应力
的计算公式

1. 杆件拉伸的变形规律实验

杆件拉伸实验：



变形规律：

横线——仍为平行的直线，且间距增大。
纵线——仍为平行的直线，且间距减小。

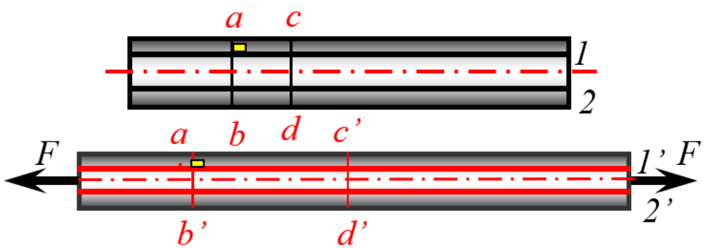
推导思路：
实验→
变形规律
→应力的
分布规律
→应力的
计算公式

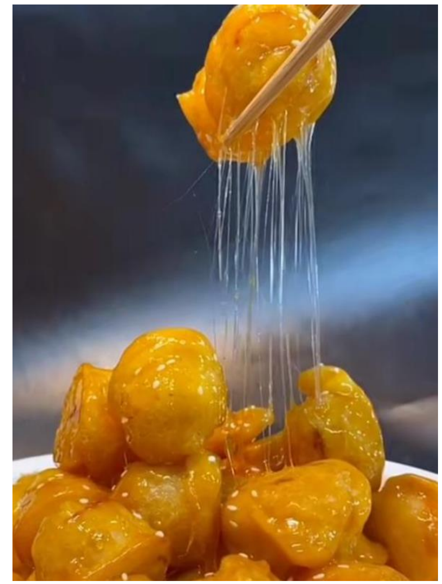
§2-3 轴向拉压杆横截面上的应力

2. 横截面正应力公式

变形前：

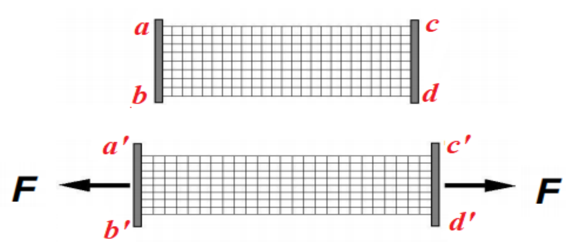
变形后：





平面假设：变形前的横截面，变形后仍为平面且变形后仍垂直于轴线。

截面*ab*变形后为横截面*a’b’*，横截面*a’b’*仍为平面仍垂直于轴线。



平面假设 → 截面上每根纤维伸长量相等 → **横截面上应力均匀分布**

§2-3 轴向拉压杆横截面上的应力

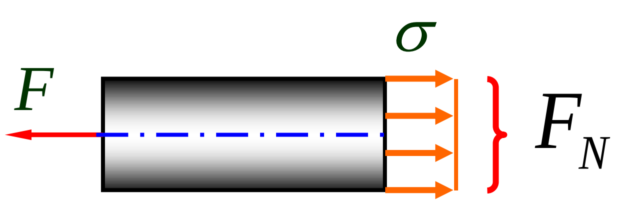
2. 横截面正应力公式

推导思路：实验→变形规律→应力的分布规律→应力的计算公式

应力的分布规律：横截面上应力均匀分布

由静力学可得：

$$F_N=\int_A \sigma d_A=\sigma A$$



※横截面正应力公式：

$$\sigma=\frac{F_N}{A}$$

σ 符号规定：与 F_N 相同，拉应力为正，压应力为负。

※ 横截面上只有正应力 σ，没有切应力 τ。

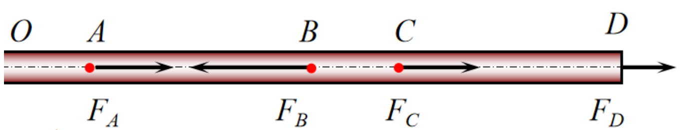
2. 横截面正应力公式

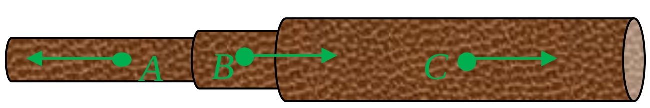
※横截面正应力公式： $$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

横截面最大正应力：

等直杆：$\sigma_{max} = \dfrac{F_{N\,max}}{A}$

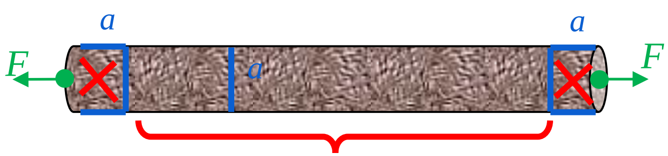
变直杆：$\sigma_{max} = \left(\dfrac{F_N}{A}\right)_{max}$





公式的使用条件：

（1）只适用于轴向拉伸与压缩杆件，即杆端处力的合力作用线与杆件的轴线重合；



此区域公式成立

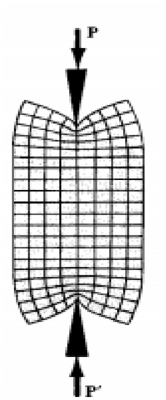
（2）只适用于离杆件受力区域稍远处的横截面。

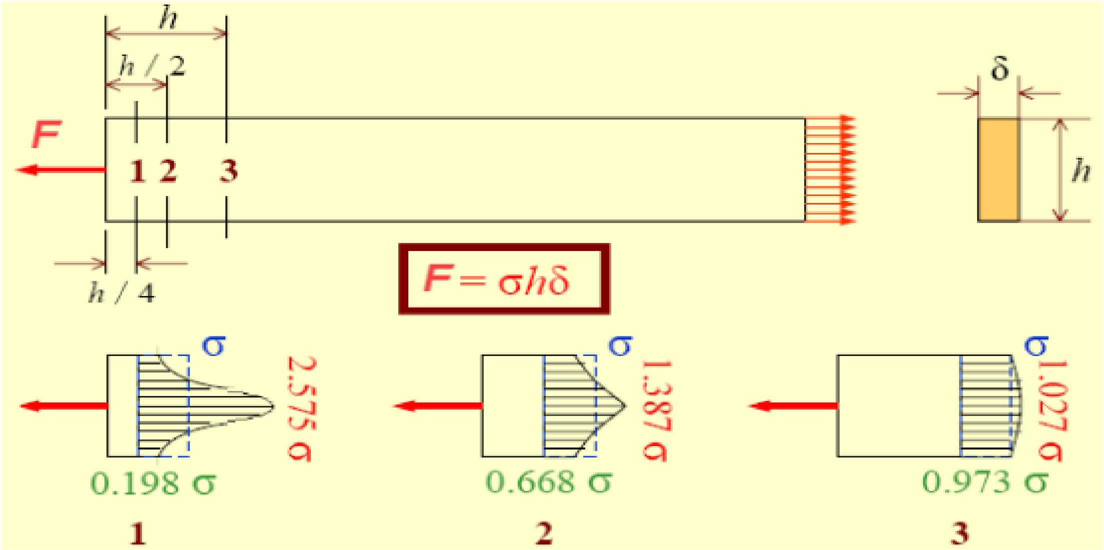
（范围：不超过杆的横向尺寸）

§2-3 轴向拉压杆横截面上的应力

3. 圣维南（Saint-Venant）原理

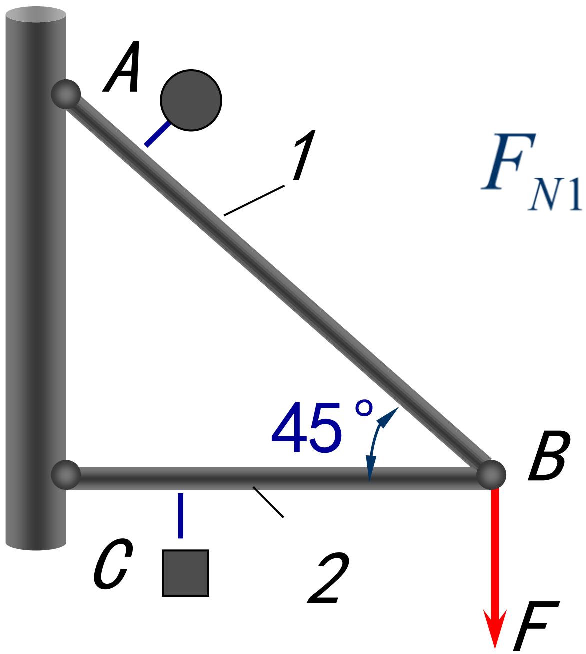
内容：分布于弹性体上一小块面积(或体积)内的荷载所引起的物体中的应力，在离荷载作用区稍远的地方，基本上只同荷载的合力和合力矩有关;荷载的具体分布只影响荷载作用区附近的应力分布。





例2：图示结构，试求杆件AB、CB的应力。已知 F=20kN；斜杆AB为直径20mm的圆截面杆，水平杆CB为15×15mm的方截面杆。计算各杆件的应力？

解：1、计算各杆件的轴力。

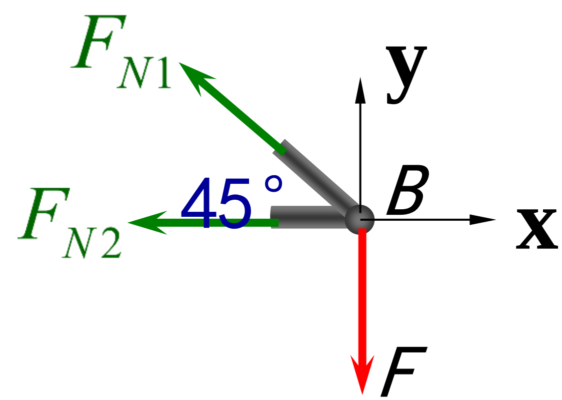


$$\sum F_x = 0$$

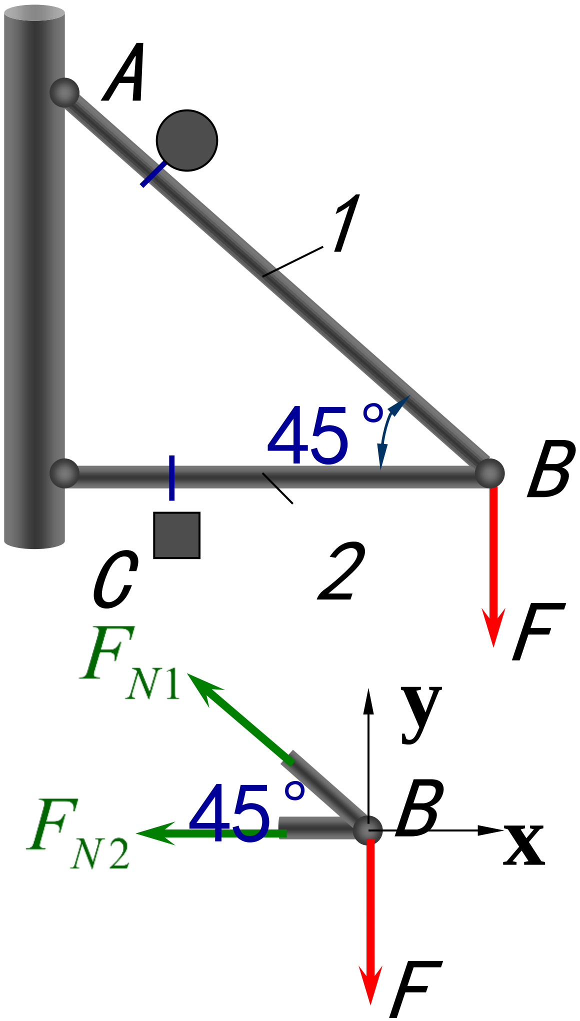
$$F_{N1}\cos 45^\circ + F_{N2} = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{N1}\sin 45^\circ - F = 0$$



$$F_{N1} = 28.3\text{kN} \qquad F_{N2} = -20\text{kN}$$



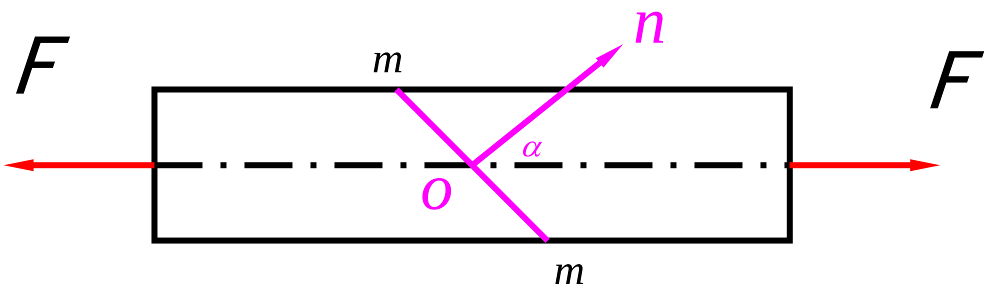
2、计算各杆件的应力。

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{28.3\times 10^3}{\frac{\pi}{4}\times 20^2} = 90\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{-20\times 10^3}{15^2} = -89\text{MPa}$$

应力的国际单位：$1\text{N/m}^2 = 1\text{Pa}$； $1\text{MPa} = 10^6\text{Pa}$, $1\text{GPa}=10^9\text{Pa}$；

§2-4 轴向拉压杆斜截面上的应力

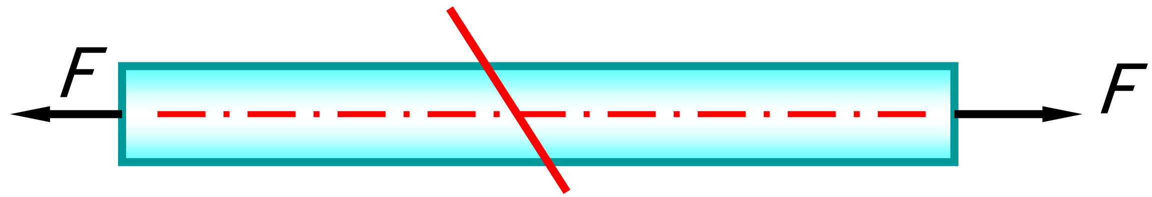


•思考：斜截面上有何应力？如何分布？

§2-4 轴向拉压杆斜截面上的应力

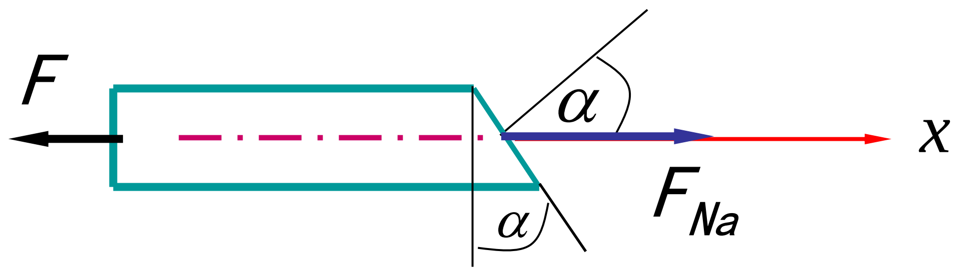
1、斜截面上应力确定

(1) 内力确定：



$F_{N\alpha} = F$

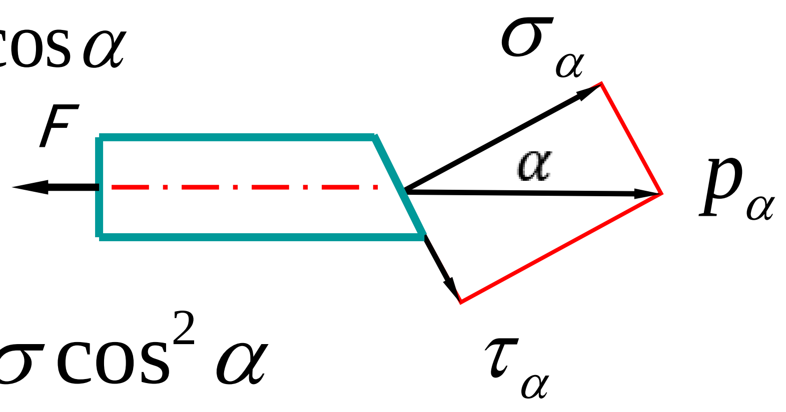
(2) 应力确定：



$$p_\alpha = \frac{F_{N\alpha}}{A_\alpha} = \frac{F}{A/\cos\alpha} = \frac{F}{A}\cos\alpha = \sigma\cos\alpha$$

§2-4 轴向拉压杆斜截面上的应力

$$p_\alpha = \frac{F_{N\alpha}}{A_\alpha} = \frac{F}{A/\cos\alpha} = \frac{F}{A}\cos\alpha = \sigma\cos\alpha$$



(3) 正应力 $\sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha$

切应力 $\tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \dfrac{\sigma}{2}\sin 2\alpha$

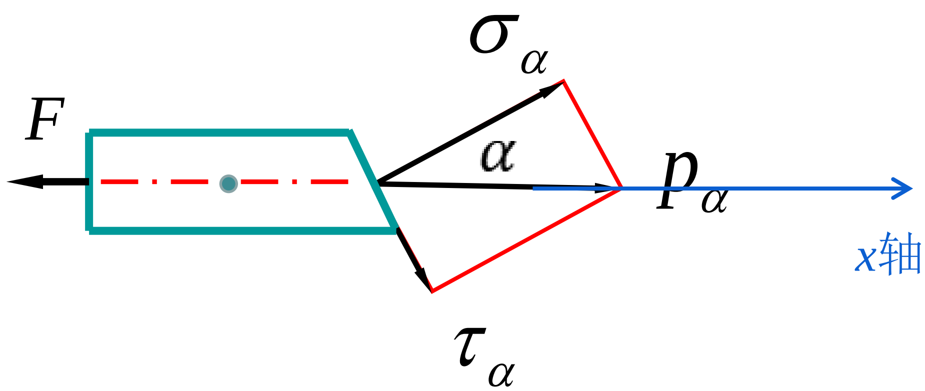
2、斜截面上最大应力值的确定

（1） $\alpha=0^0$时， $\sigma_{max}=\sigma$

（2） $\alpha=45^0$时， $\tau_{max}=\sigma/2$

§2-4 轴向拉压杆斜截面上的应力

3、符号规定：



(1)、α： 由 x 轴逆时针转到斜截面外法线，“α” 为正值；

由 x 轴顺时针转到斜截面外法线，“α”为负值。

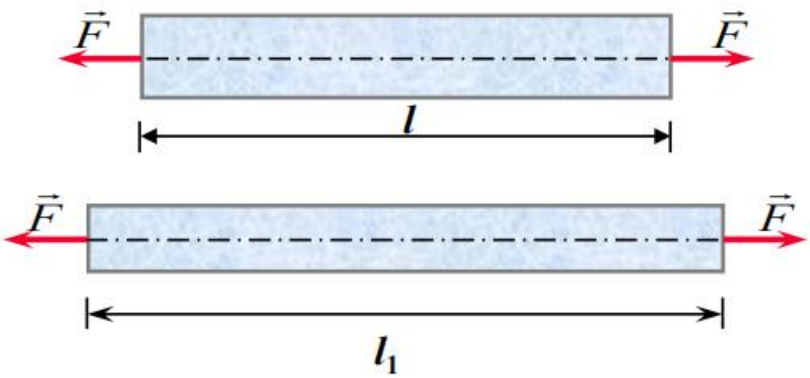
(2)、σ_a： 同 “σ”的符号规定。

(3)、τ_a： 在保留段内任取一点，如果 “τ_a”对该点之矩为顺时针方向，则规定为正值，反之为负值。

§2-5 轴向拉压杆的变形

1. 纵向变形及线应变

纵向变形：$\Delta l = l_1 - l$



纵向线应变：$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$

杆伸长时线应变为正，
杆缩短时线应变为负。

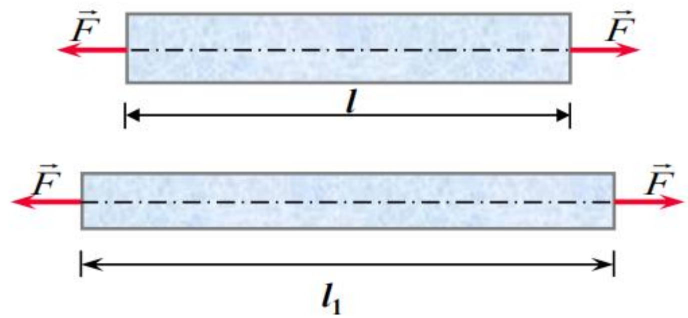
§2-5 轴向拉压杆的变形

2. 横向变形和泊松比(Poisson’s ratio)

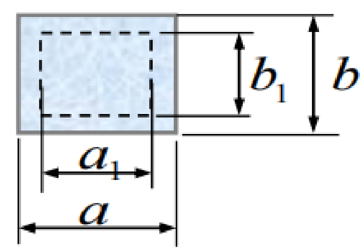
横向变形：

$$\Delta b = b - b_1$$

$$\Delta a = a - a_1$$



横向线应变：$\varepsilon' = \dfrac{\Delta b}{b} = \dfrac{\Delta a}{a}$



实验结果表明 在线弹性范围内：

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right| \qquad \varepsilon' = -\mu\varepsilon$$

μ称为泊松比

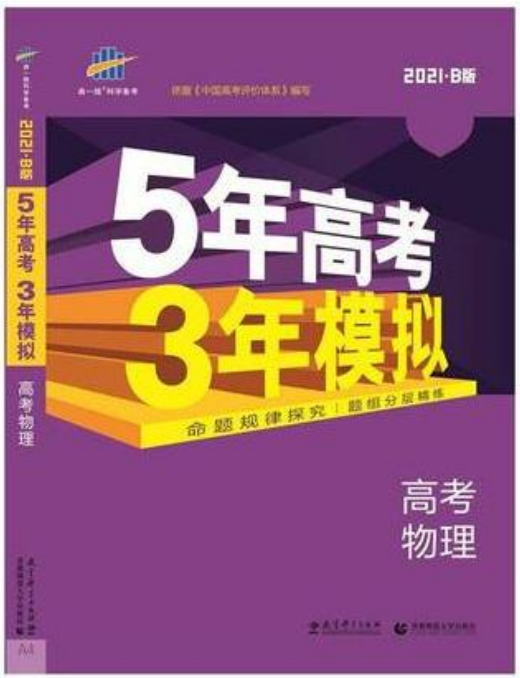
§2-5 轴向拉压杆的变形

3. 胡克定律（Hooke’s Law）

《人教版·高一物理》

高中物理中的胡克定律

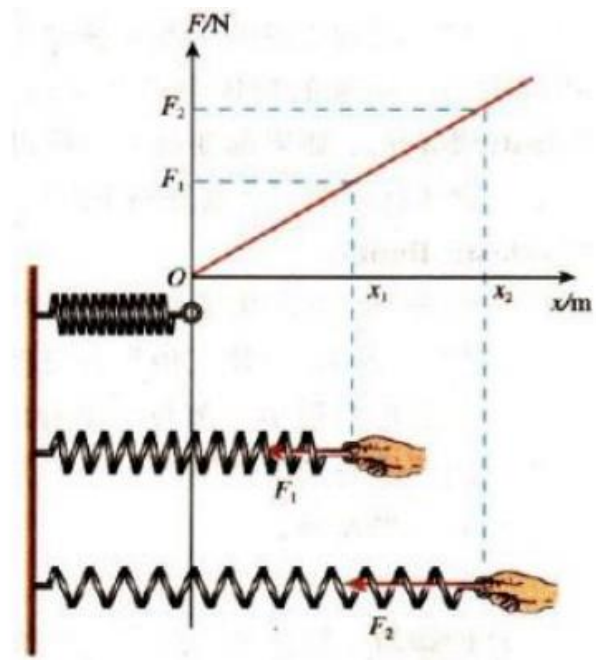
在弹性限度内，弹簧弹力的大小F与弹簧伸长量x成正比。



$$F = kx$$

k：弹簧的劲度系数。

它与弹簧的材料、直径、单位长度匝数、原长、及弹簧丝的粗细有关。



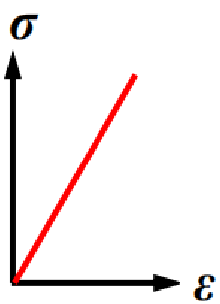
弹力与弹簧伸长量关系

§2-5 轴向拉压杆的变形

3. 胡克定律（Hooke’s Law）

胡克定律的材料力学表述：

当杆内应力不超过材料的某一极限值（比例极限）时，正应力与线应变成正比，为胡克定律。



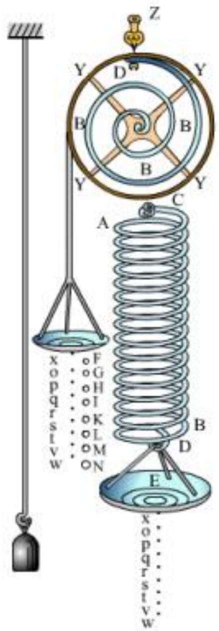
$$\boxed{\sigma = E\varepsilon} \qquad (\sigma \le \sigma_p)$$

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

➡ **杆件的伸长量：** $$\boxed{\Delta l = \frac{F_N l}{EA}}$$ （物理方程）

E：弹性模量/杨氏模量（Young’s modulus）

EA：抗拉（压）刚度（tensile rigidity）



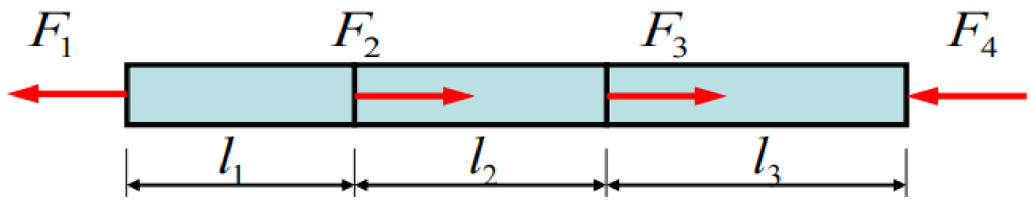
胡克实验用装置

§2-5 轴向拉压杆的变形

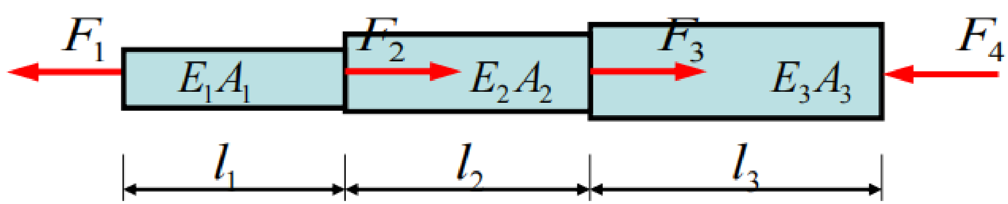
4. 轴向变形的计算

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

伸长为正
缩短为负



$$\Delta L = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{Ni} L_i}{EA} = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^{n} F_i L_i \quad (n = 3)$$



$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 = \sum \frac{F_{Ni} L_i}{E_i A_i}$$

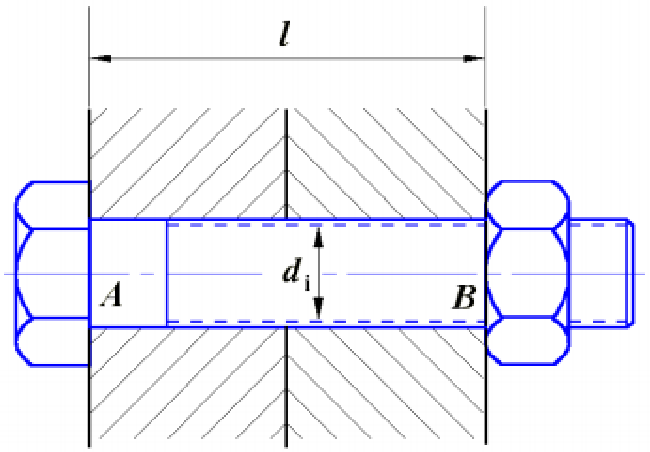
代数和

例3： 图示螺栓，已知：$l=54$ mm，$d_i=15.3$ mm，$E=200$ GPa，$\mu=0.3$，螺栓拧紧后 $\Delta l=0.04$ mm

计算: (a) 螺杆横截面上的应力；

(b) 螺杆直径变化量 Δd

解：



(a) 计算 σ

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}=7.41\times10^{-4}$$

$$\sigma=E\varepsilon=148.2\ \text{MPa}$$

(b) 计算 Δd

$$\varepsilon'=-\mu\varepsilon=-2.22\times10^{-4}$$

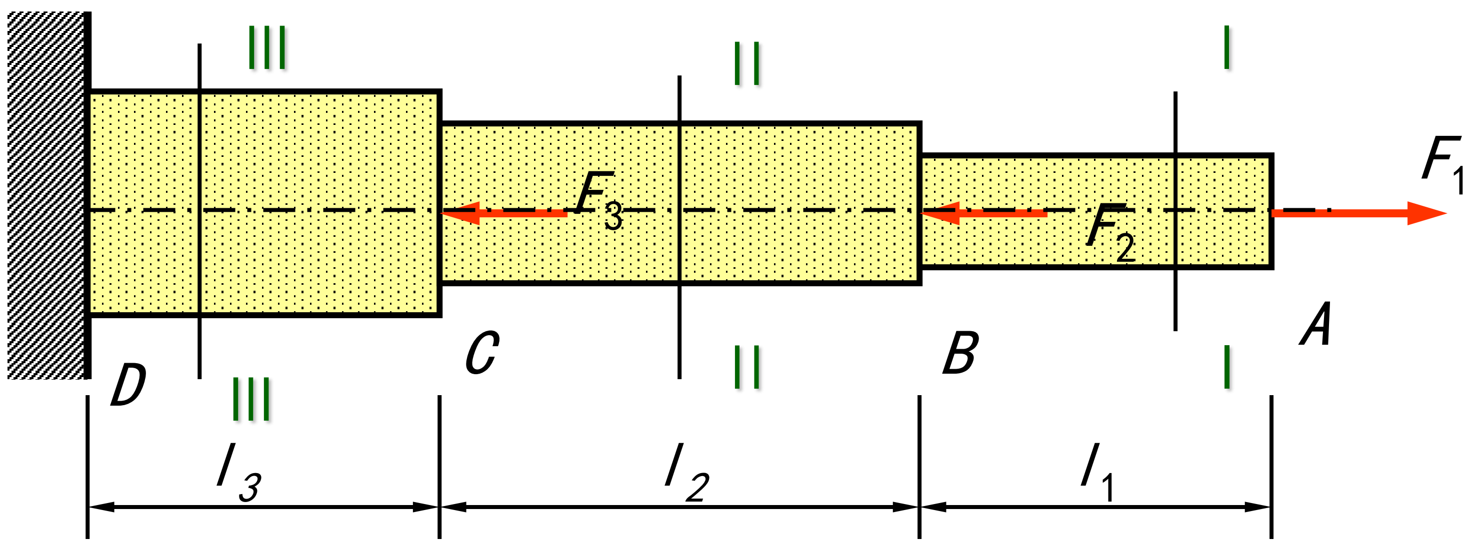
$$\Delta d=\varepsilon' d_i=-0.0034\ \text{mm}$$

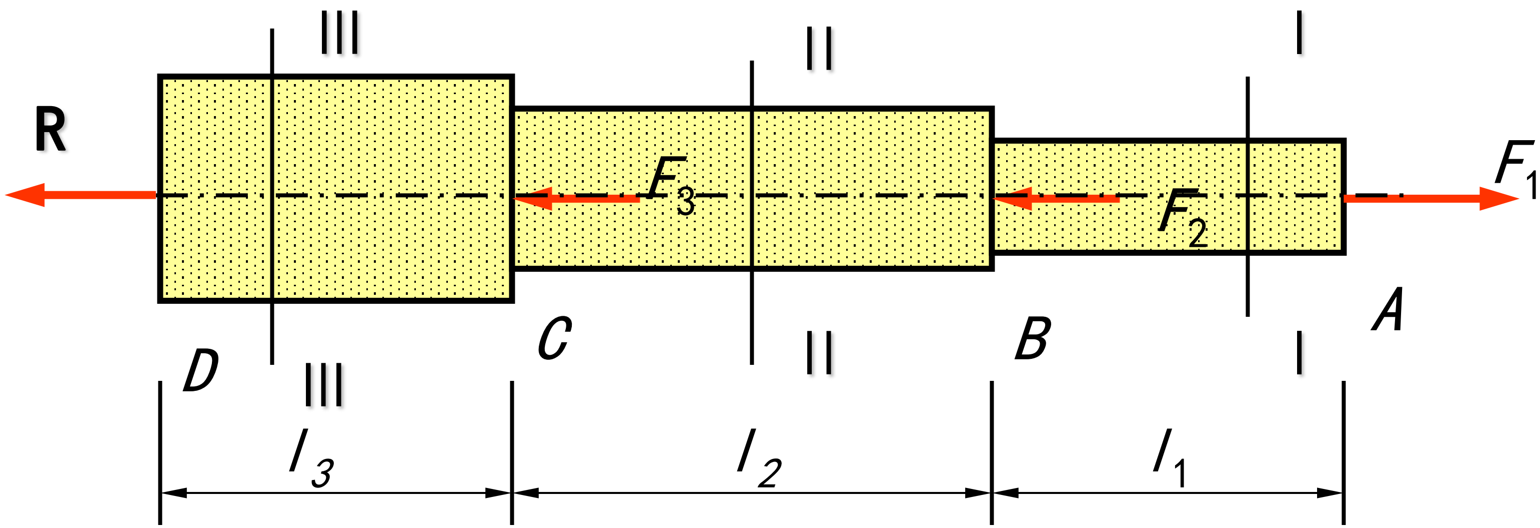
例4 图示为一变截面圆杆*ABCD*。已知F_1=20kN，F_2=35kN，F_3=35kN。l_1=l_3=300mm，l_2=400mm。d_1=12mm，d_2=16mm，d_3=24mm，E=210GPa 。试求：

（1） Ⅰ－Ⅰ、Ⅱ－Ⅱ、Ⅲ－Ⅲ截面的轴力并作轴力图

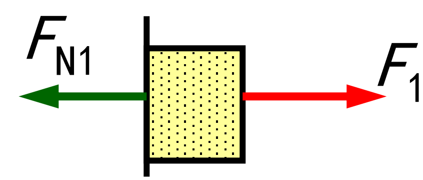
（2） 杆的最大正应力σ_{max}

（3） *B*截面的位移及AD杆的变形量





解：求支座反力　　$R = -50\text{kN}$

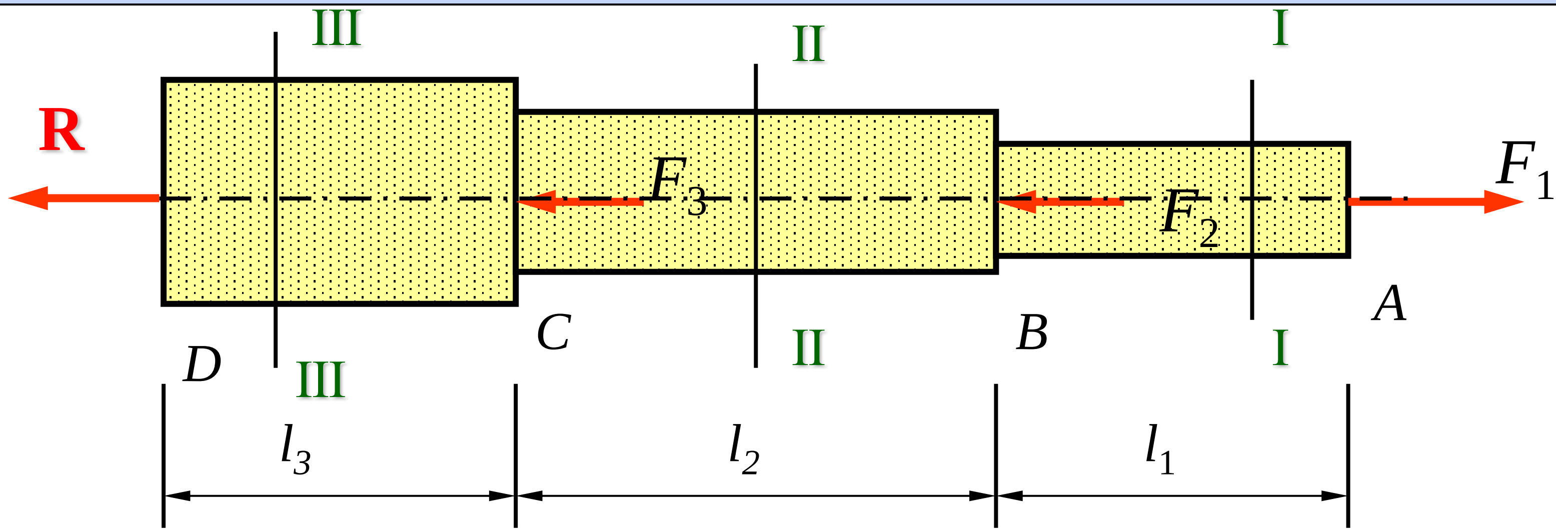


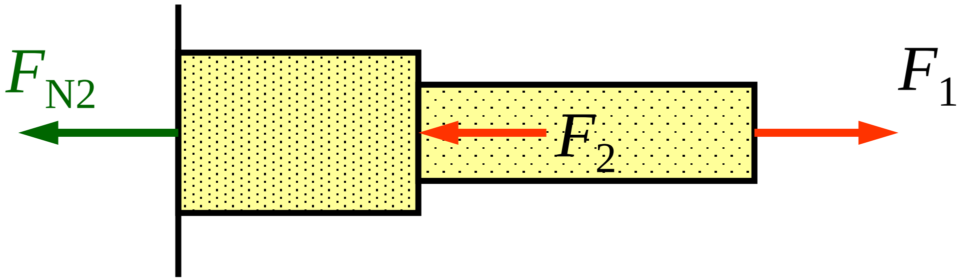
（1）I－I、II－II、III－III

截面的轴力并作轴力图

$$F_1 - F_{N1} = 0$$

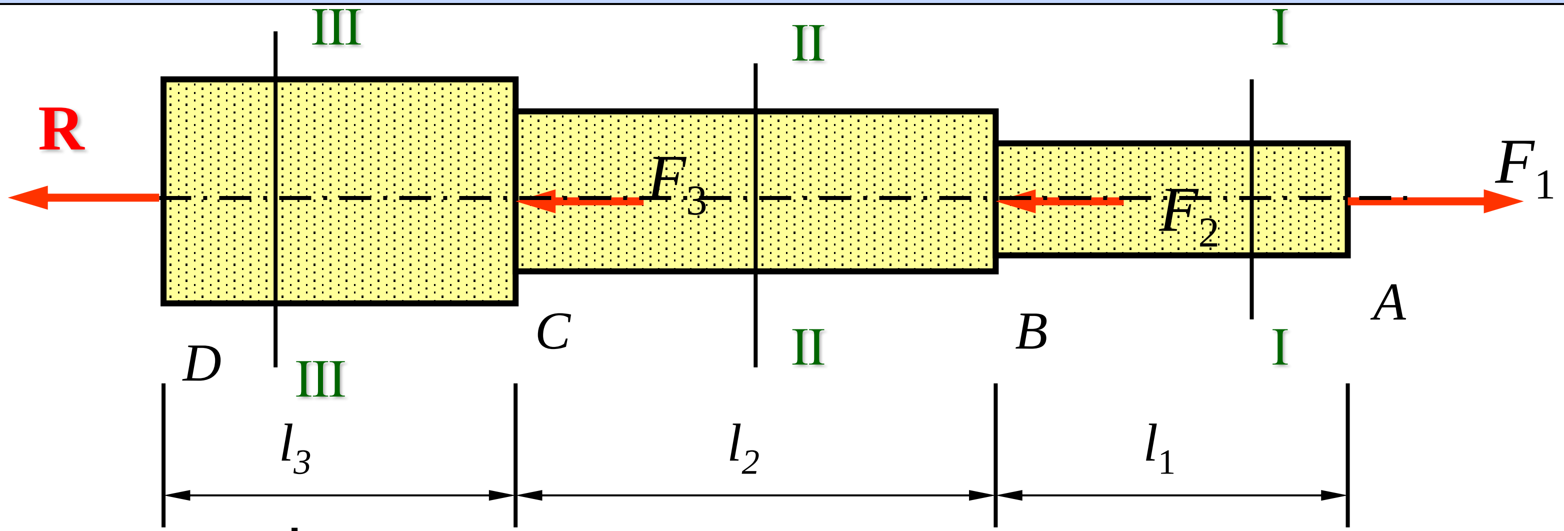
$$F_{N1} = 20\text{kN}\ \ (+)$$

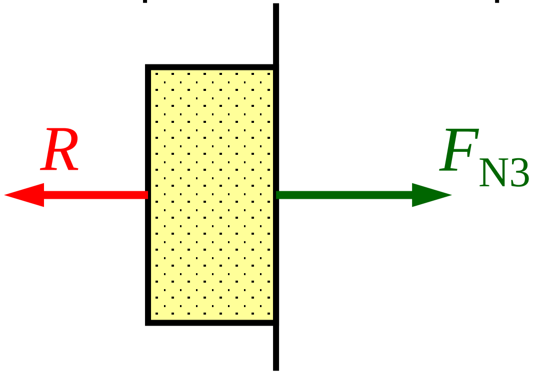




$$F_1 - F_2 - F_{N2} = 0$$

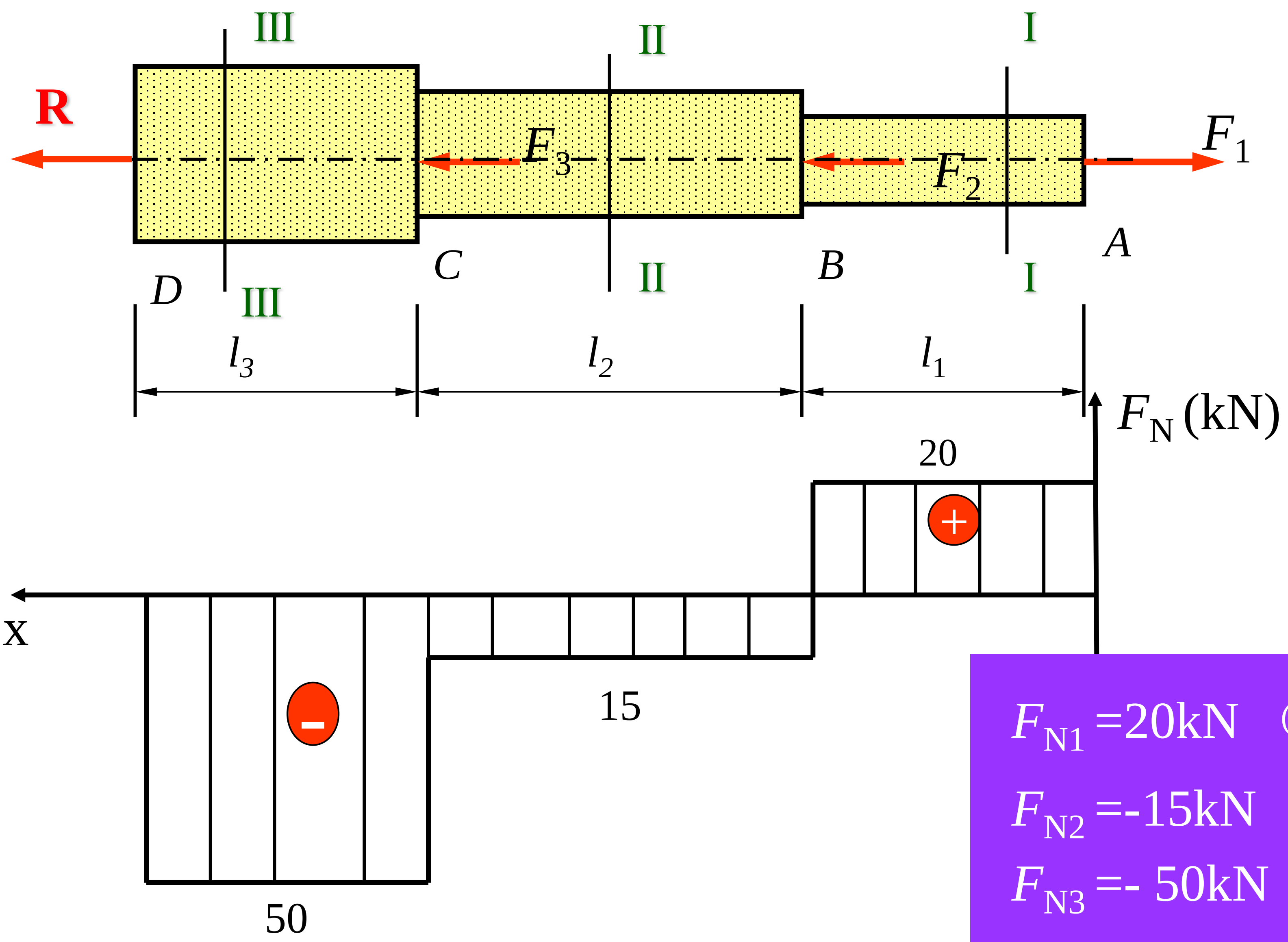
$$F_{N2} = -15\text{kN} \quad (-)$$





$$F_{N3} - R = 0$$

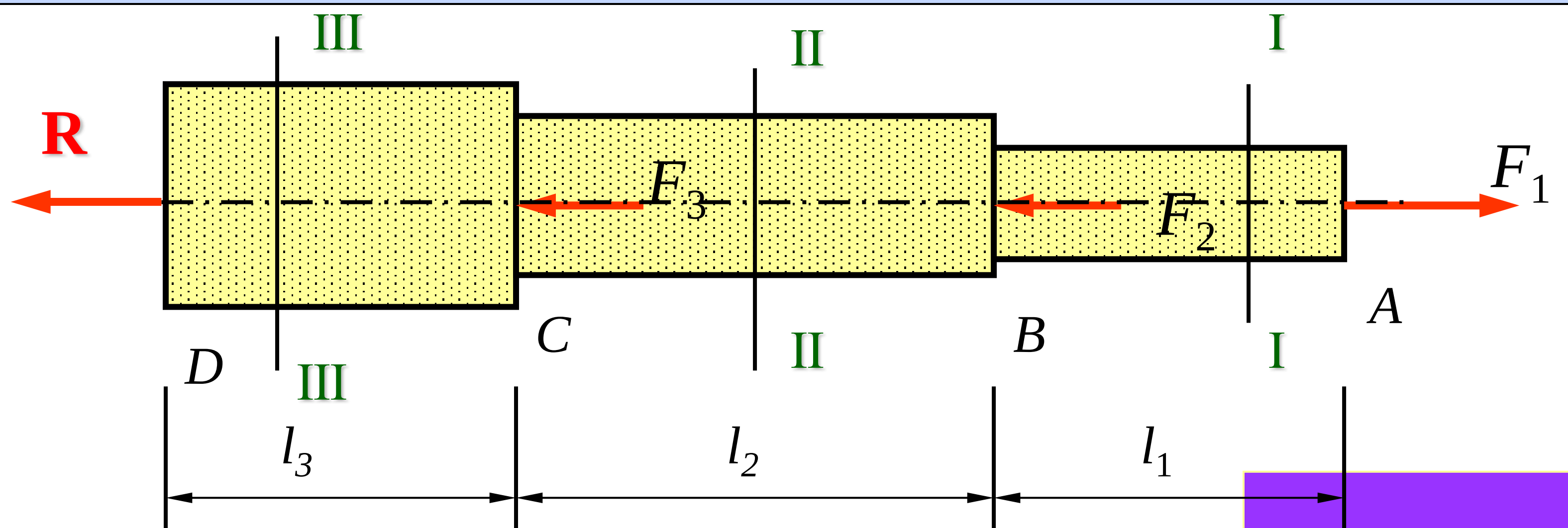
$$F_{N3} = -50\text{kN} \quad (-)$$



F_{N1} =20kN （+）

F_{N2} =-15kN （-）

F_{N3} =- 50kN （-）



F_{N1} =20kN （+）

F_{N2} =-15kN (-)

F_{N3} =- 50kN (-)

(2) 杆的最大正应力σ_{max}

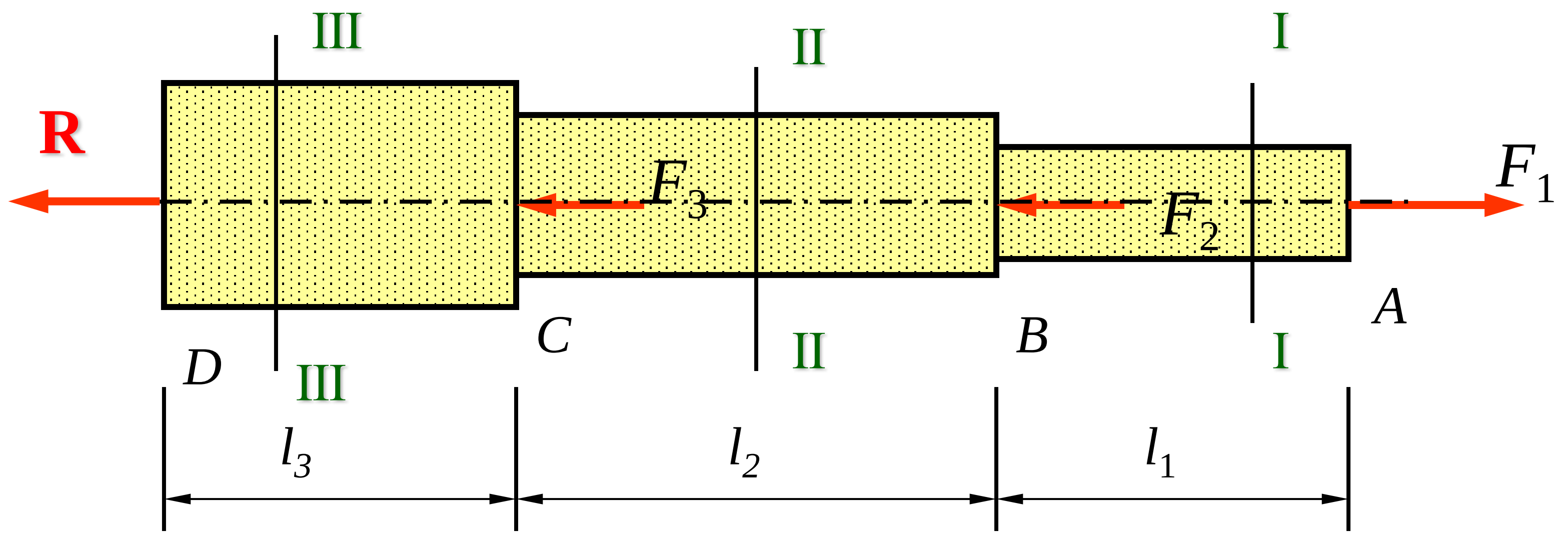
*AB*段: $\sigma_{AB}=\dfrac{F_{N1}}{A_1}=176.8\text{MPa}\ \ (+)$

*BC*段: $\sigma_{BC}=\dfrac{F_{N2}}{A_2}=74.6\text{MPa}\ \ (-)$

*DC*段: $\sigma_{DC}=\dfrac{F_{N3}}{A_3}=110.5\text{MPa}\ \ (-)$

$\sigma_{max}=176.8\text{MPa}$

发生在*AB*段.



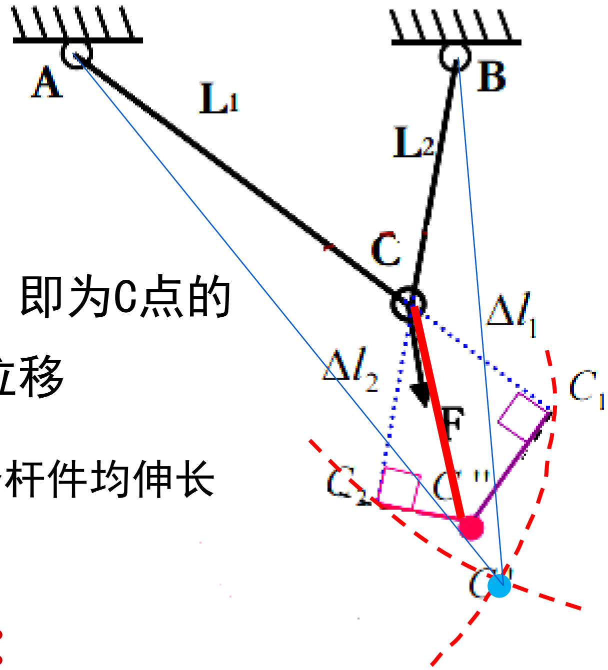
(3) B截面的位移及*AD*杆的变形

$$\Delta l_{AB}=\frac{F_{N1}l_1}{EA_1}=2.53\times10^{-4}\,\mathrm{m}\qquad \Delta l_{BC}=\frac{F_{N2}l_2}{EA_2}=-1.42\times10^{-4}\,\mathrm{m}$$

$$\Delta l_{CD}=\frac{F_{N3}l_3}{EA_3}=-1.58\times10^{-4}\,\mathrm{m}\qquad u_B=\Delta l_{CD}+\Delta l_{BC}=-0.3\,\mathrm{mm}$$

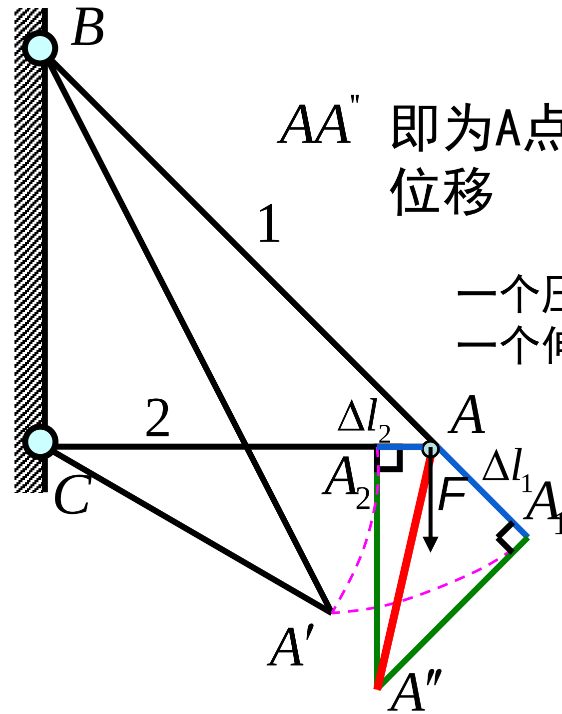
$$\Delta l_{AD}=\Delta l_{AB}+\Delta l_{BC}+\Delta l_{CD}=-0.47\times10^{-4}\,\mathrm{mm}$$

§2-5 轴向拉压杆的变形——节点位移



CC'' 即为C点的近似位移

两个杆件均伸长



AA'' 即为A点的近似位移

一个压缩杆件
一个伸长杆件

解法:

1、确定各杆内力 F_{Ni};

2、计算 Δl_i;

3、画节点位移图求节点位移:

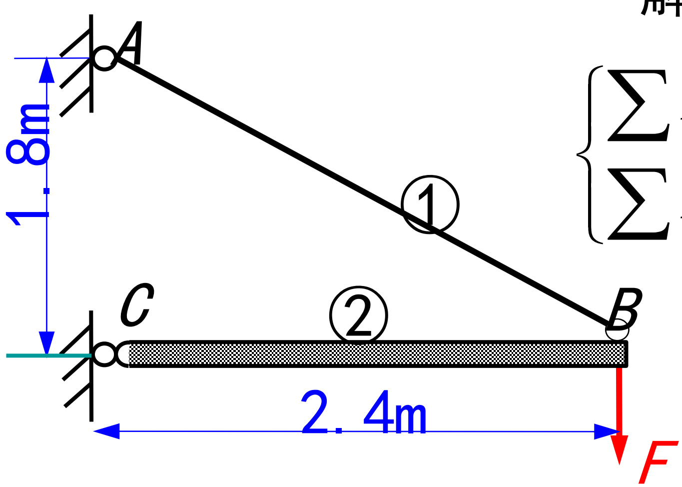
小变形问题

⇩

以垂线代替弧线

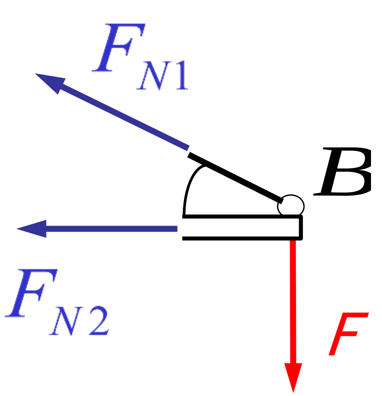
§2-5 轴向拉压杆的变形——节点位移

例5 图示结构中①杆是圆杆，直径为32mm， ②杆槽钢, A_2=1368mm^2。材料均为Q235钢，*E*=210GPa。已知*F*=60kN，试计算B点的位移。



解：1、计算各杆上的轴力

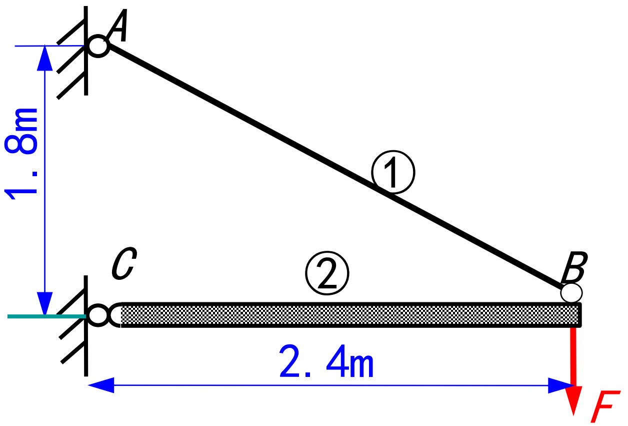
$$\begin{cases}\sum F_X = 0: -F_{N1}\cos\alpha - F_{N2} = 0 \\ \sum F_Y = 0: \quad F_{N1}\sin\alpha - F = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_{N1} = 1.67F \\ F_{N2} = -1.33F\end{cases}$$

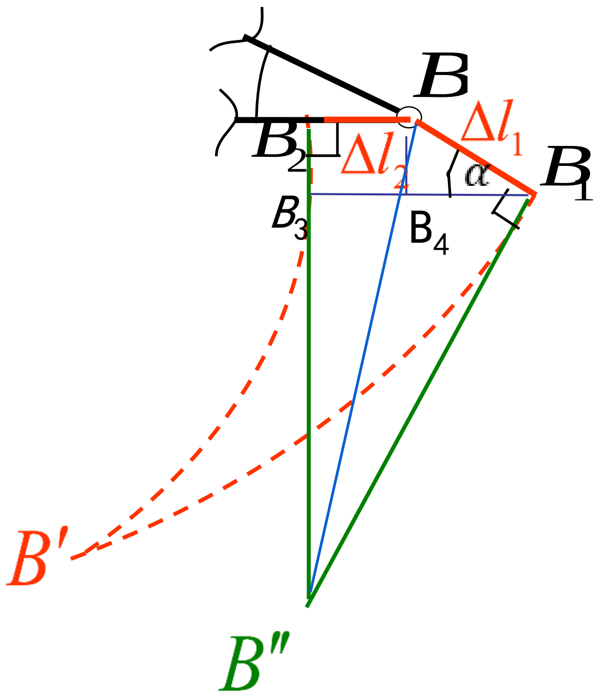


2、计算各杆的变形

$$\Delta L_1 = \frac{F_{N1}L_1}{EA_1} = \frac{1.67\times 60\times 10^3\times 3000}{210\times 10^3\times \frac{\pi}{4}\times 32^2} = 1.78\text{mm}$$

$$\Delta L_2 = \frac{F_{N2}L_2}{EA_2} = \frac{-1.33\times 60\times 10^3\times 2400}{210\times 10^3\times 1368} = -0.66\text{mm}$$





3、计算B点的位移（以垂线代弧线）

$$|B_2B_3| = |BB_4| = |BB_1|\sin\alpha$$

$$= \Delta L_1 \sin\alpha = 1.04\text{mm}$$

$$|B_4B_1| = \Delta L_1 \cos\alpha = 1.42\text{mm}$$

$$|B_3B_1| = \Delta L_2 + |B_4B_1| = 2.08\text{mm}$$

$$|B_3B''| = |B_3B_1|\, ctg\alpha = 2.77\text{mm}$$

$$|B_2B''| = |B_2B_3| + |B_3B''| = 3.81\text{mm}$$

$$|BB''| = \sqrt{|B_2B''|^2 + |B_2B|^2}$$

$$= \sqrt{3.81^2 + 0.66^2} = 3.87\text{mm}$$

例6 图所示杆系由两根钢杆 1 和 2 组成. 已知杆端铰接，两杆与铅垂线均成 $\alpha=30^0$ 的角度， 长度均为 l = 2m，直径均为 d=25mm，钢的弹性模量为 E=210GPa，在点处悬挂一重物 F=100 kN，试求 A点的位移 Δ_A.

课后作业