一、简谐运动 运动学和动力学特征

（一）、简谐运动

物理量随时间的变化规律可以用正弦或余弦函数描述

一维运动的质点(机械振动)：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

简谐运动方程(振动表达式)

x 是描述位置的物理量，如 y，z 或 θ 等。

A: 振幅

ω: 角频率

φ_0: 初相位

简谐振动的三个特征量

一、简谐运动 运动学和动力学特征

（二）、简谐运动的运动学特征

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

1、描述简谐运动的物理量

1）振幅 A：物体离开平衡位置的最大位移的绝对值

2）周期 T、频率 ν、圆(角)频率 ω

周期T：物体完成一次全振动所需时间

频率ν：单位时间内振动的次数

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

圆（角）频率ω：2π时间内振动的次数

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

一、简谐运动 运动学和动力学特征

（二）、简谐运动的运动学特征

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

1、描述简谐运动的物理量

3）相位 $(\omega t + \varphi_0)$ 和初相位 φ_0

$(\omega t + \varphi_0)$ 称为 t 时刻振动的相位

φ_0 为 $t = 0$ 时刻的相位, 称为初相位

一般情况: $0 \le \varphi_0 < 2\pi$, 或 $-\pi \le \varphi_0 < \pi$

相位的意义: 相位确定谐振动物体的运动状态

（二）、简谐运动的运动学特征

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

1、描述简谐运动的物理量

4）相位差：表示两个相位之差

（1）对同一简谐振动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间。

$$x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi_0)，\quad x_2 = A\cos(\omega t_2 + \varphi_0)，$$

$$\Delta\varphi = (\omega t_2 + \varphi_0) - (\omega t_1 + \varphi_0) = \omega(t_2 - t_1) = \omega\Delta t$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$

（二）、简谐运动的运动学特征

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

1、描述简谐运动的物理量

4）相位差：表示两个相位之差

（2）对于两个同频率的简谐振动，相位差表示它们之间振动步调上的差异。

同一时刻，t 时刻： $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{01})$，$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{02})$

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{02}) - (\omega t + \varphi_{01}) = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

① $\Delta\varphi = \pm 2k\pi, k = 0, 1, 2, \cdots,$ 两振动步调一致：同相（同步）

② $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi, k = 0, 1, 2, \cdots,$ 两振动步调相反：反相

（二）、简谐运动的运动学特征

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

1、描述简谐运动的物理量

4）相位差：表示两个相位之差

（2）对于两个同频率的简谐振动，相位差表示它们之间振动步调上的差异。

同一时刻，t 时刻： $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{01})$，$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{02})$

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{02}) - (\omega t + \varphi_{01}) = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

③ $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} > 0$， x_2的振动相位比x_1超前 $\Delta\varphi$

④ $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} < 0$， x_2的振动振动比x_1落后 $|\Delta\varphi|$

（二）、简谐运动的运动学特征

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

2、简谐运动物体的速度和加速度

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

（二）、简谐运动的运动学特征

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

3、振幅A和初相位φ_0的确定

初始条件为 $t = 0$ 时： $x = x_0$， $v = v_0$，

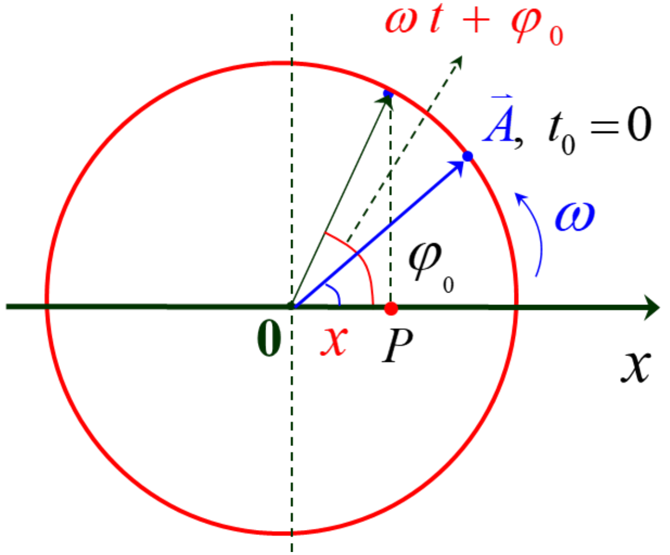
$$A = \sqrt{x_0^{\ 2} + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

(二)、简谐运动的运动学特征

4、旋转矢量(参考圆法)

旋转矢量 $\vec{A}$ 作匀速率圆周运动，其矢量的末端在 x 轴上的投影 P 点的运动方程为:



$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

(投影点 P 的运动为简谐运动)

半径 A
初始角位置 φ_0
角速度 ω
任意时刻角位置 $(\omega t + \varphi_0)$

振幅 A
初位相 φ_0
圆频率 ω
任意时刻位相 $(\omega t + \varphi_0)$

一、简谐运动 运动学和动力学特征

（三）、简谐运动的动力学特征

1、受力特点：线性回复力(准弹性力)作用

$$F=-kx,\quad M=-\lambda\theta,\quad \boxed{f=-k\xi}$$

2、动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x,\quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0,\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\xi=0}$$

3、加速度与位移成正比而方向相反

$$a=-\omega^2x,\quad \beta=-\omega^2\theta$$

（三）、简谐运动的动力学特征

4、固有(圆)频率

固有频率决定于系统本身性质

弹簧振子：$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

单　摆：$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

复　摆：$\omega = \sqrt{\dfrac{mgl}{J_z}}$ ，l为质心到转轴的垂直距离

（三）、简谐运动的动力学特征

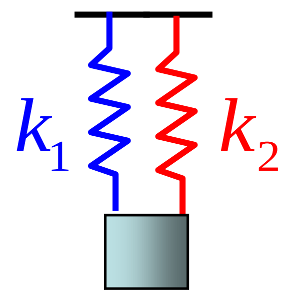
4、固有（圆）频率

固有频率决定于系统本身性质

弹簧振子：$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

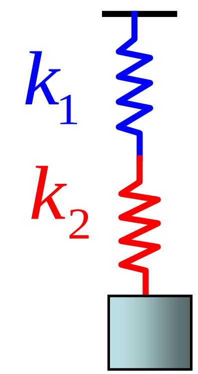
1、轻弹簧并联：

$$k = k_1 + k_2$$



2、轻弹簧串联：

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$



二、简谐运动的能量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \quad v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

1、动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

2、势能

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

3、机械能

$$\boxed{E = E_k + E_P = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2}$$

线性回复力是保守力，简谐运动系统机械能守恒

三、简谐运动的合成

1、两个同方向同频率简谐运动的合成

分振动：
$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{01}),$$
$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{02})$$

合振动：
$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})} \\ \tan\varphi_0 = \dfrac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}} \end{cases}$$

三、简谐运动的合成

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}}$$

1）若两分振动　同相

$\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm 2k\pi$,　$(k = 0, 1, 2, \ldots)$

$$\boxed{A = A_1 + A_2}$$

合振动加强

2）若两分振动　反相

$\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm(2k+1)\pi$,　$(k = 0, 1, 2, \ldots)$

$$\boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

合振动减弱

2、两个同方向不同频率简谐振动的合成

频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐振动的合成

其合振动的振幅时而加强、时而减弱的现象叫拍

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos 2\pi\nu_1 t + A_1\cos 2\pi\nu_2 t$$

$$x = \left(2A_1\cos 2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}t\right)\cos 2\pi\frac{\nu_2+\nu_1}{2}t$$

振幅部分　　合振动频率

振幅　$A = \left|2A_1\cos 2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}t\right|$　随 t 缓慢变化

合振动可看作振幅缓慢变化的简谐振动

$\nu' = |\nu_2 - \nu_1|$ ⇐ 拍频（振幅变化的频率）