例 1: （1）温度为 $20^{\circ}\mathrm{C}$的黑体，其单色辐出度的峰值所对应的波长是多少？(2)太阳的单色辐出度的峰值波长 $\lambda_{\mathrm{m}}=483\ \mathrm{nm}$ ，估算太阳表面的温度.（3）以上两辐出度之比为多少？

解: 由维恩位移定律: $T\lambda_{\mathrm{m}}=b$

（1） $$\lambda_{\mathrm{m}}=\frac{b}{T_1}=\frac{2.898\times10^{-3}}{293}=9891\ \mathrm{nm}$$

（2） $$T_2=\frac{b}{\lambda_{\mathrm{m}}}=\frac{2.898\times10^{-3}}{483\times10^{-9}}\mathrm{K}\approx6000\ \mathrm{K}$$

（3） 由斯特藩 - 玻耳兹曼定律: $M(T)=\sigma T^4$

$$M(T_2)/M(T_1)=(T_2/T_1)^4=1.76\times10^5$$

例 2 ： 在加热黑体的过程中，其单色辐出度的峰值波长由0. 69 μ m变化到0. 50 μ m，

求： 总辐出度改变为原来的多少倍？

解：

维恩位移定律： $T\lambda_m = b$

斯特藩 - 玻耳兹曼定律： $M(T) = \sigma T^4$

$$\frac{M(T_2)}{M(T_1)} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \left(\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}}\right)^4 = \left(\frac{0.69\mu\text{m}}{0.50\mu\text{m}}\right)^4 = 3.63$$

例 3: 天文学上常用斯特藩-玻耳兹曼定律来估算恒星半径。

已知某恒星辐射能到达地球时，单位面积上的辐射功率(辐出度)为 $1.2\times10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$，此恒星离地球距离为 $R' = 4.3\times10^{17}\,\mathrm{m}$，表面温度为**5200K**。

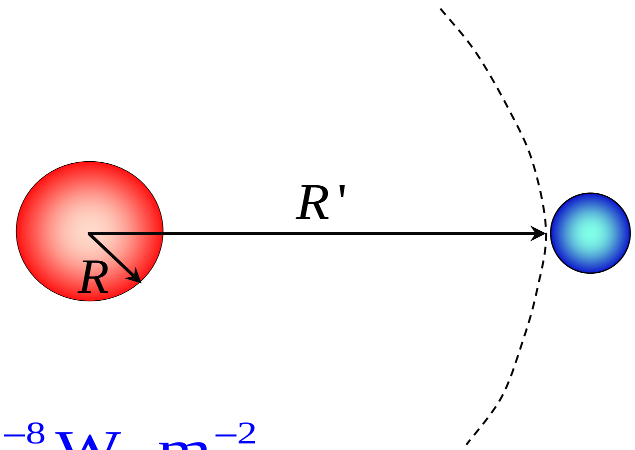
求： 如恒星辐射与黑体相似，求恒星半径R为多少？

解： 设恒星半径为R，表面温度为T，距地球表面 R'

斯特藩-玻耳兹曼定律： $M = \sigma T^4$

恒星表面(半径为R)辐射的总功率：

$$W = M\cdot S = 4\pi R^2 M = 4\pi R^2\cdot\sigma T^4$$



到达地球时(半径为 R')辐射的总功率：

$$W' = M'\cdot S' = 4\pi R'^2 M', \quad M' = 1.2\times10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$$

不考虑能量吸收有： $W = W' \Rightarrow 4\pi R^2\cdot\sigma T^4 = 4\pi R'^2 M'$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{R'^2 M'}{\sigma T^4}} = 7.3\times10^{9}\,\mathrm{m}$$

例 4: 一弹簧振子系统，轻弹簧的劲度系数为 $k = 15\ \mathrm{N/m}$，一端悬挂质量为 **1kg** 的小球，其振幅为 **0.01m**，

求：1）按普朗克能量子假设，与此振子系统相联系的量子数n应为多少？

2）如量子数n改变一个单位，能量的改变值与总能量的比值为多少？

解： 1） 弹簧振子系统具有的能量：

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\times 15\times 0.01^2 = 7.5\times 10^{-4}\ \mathrm{J}$$

弹簧振子振动频率： $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 0.617\mathrm{Hz}$

由普朗克能量子假设： $E = nh\nu$

量子数： $n = \dfrac{E}{h\nu} = 1.8\times 10^{30}$

在宏观范围内，能量量子化的效应是极不明显的，即宏观物体的能量完全可视作是连续的。

2） $\Delta E = (\Delta n)h\nu$， $\Delta n = 1$， $\Delta E = h\nu$， $\dfrac{\Delta E}{E} = \dfrac{1}{n} = 5.6\times 10^{-29}$

☞ 实验仪器无法分辨，看到的将是一片连续区域 ----不显量子效应

例 5

关于光子的性质，有以下说法，其中正确的是：

（1）不论真空中或介质中的速度都是c;

（2）它的静止质量为零；

（3）它的动量为：$p=\dfrac{h\nu}{c}$ ；

（4）它的总能量就是它的动能；

（5）它有动量和能量，但没有质量。

例 6: 以 $\lambda_1 = 550\ \text{nm}$ 的光照射某金属表面，测得遏止电压为 $U_{01} = 0.19\text{V}$ 。现以 $\lambda_2 = 190\ \text{nm}$ 的光照射该表面，

求：1) 此时的遏止电压 U_{02}； 2) 该金属的逸出功 W ；

3) 该金属的红限频率 ν_0。

解：1）由爱因斯坦光电效应方程:

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + W, \quad \frac{1}{2}mv_m^2 = eU_0, \quad h\nu = h\frac{c}{\lambda} = eU_0 + W,$$

对于 $\lambda_1 = 550\ \text{nm}$ 的光，有： $h\dfrac{c}{\lambda_1} = eU_{01} + W,$

对于 $\lambda_2 = 190\ \text{nm}$ 的光，有： $h\dfrac{c}{\lambda_2} = eU_{02} + W,$

$$U_{02} = U_{01} + \frac{1}{e}\left(h\frac{c}{\lambda_2} - h\frac{c}{\lambda_1}\right) \Rightarrow U_{02} = 4.47\text{V}$$

例 6: 以 $\lambda_1 = 550\ \text{nm}$ 的光照射某金属表面，测得遏止电压为 $U_{01} = 0.19\text{V}$ 。现以 $\lambda_2 = 190\ \text{nm}$ 的光照射该表面，

求：1) 此时的遏止电压 U_{02}； 2) 该金属的逸出功 W ；

3) 该金属的红限频率 ν_0。

解:

2）
$$h\frac{c}{\lambda_1} = eU_{01} + W,$$

$$\Rightarrow W = h\frac{c}{\lambda_1} - eU_{01} = 2.07\text{eV}$$

3）
$$\nu_0 = \frac{W}{h} \quad \Rightarrow \nu_0 = 5.0\times10^{14}\text{Hz}$$

例 7： 从金属铝中逸出一个电子至少需要 **4.2 eV**的能量，现以波长为 **200 nm** 的光照射到铝的表面上，

求： 1) 逸出光电子的最大初动能为多少？

2) 遏止电势差为多少？

3) 铝的截止波长为多少？

解： 1）由题可知： $W = 4.2\ \text{eV}, \quad \lambda = 200\ \text{nm}$

根据爱因斯坦光电效应方程：

$$h\nu = E_{k\max} + W, \quad \Rightarrow E_{k\max} = h\frac{c}{\lambda} - W, \quad \Rightarrow E_{k\max} = 2.0\ \text{eV}$$

2）由 $E_{k\max} = eU_0, \quad \Rightarrow U_0 = \frac{E_{k\max}}{e} = 2.0\ \text{V}$

3）由 $W = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0}, \quad \Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{W} = 296\ \text{nm}$

例 8: 波长为 250 nm、强度为 $2\ \mathrm{W/m^2}$ 的紫光照射到钾的表面上，钾的逸出功为 2.21 eV，

求： 1) 逸出光电子的最大初动能为多少？

2) 每秒从钾表面单位面积所发射的最大电子数为多少？

解： 1） 根据爱因斯坦光电效应方程：

$$h\nu = E_{k\max} + W, \Rightarrow E_{k\max} = h\frac{c}{\lambda} - W, \quad \Rightarrow E_{k\max} = 2.76\ \mathrm{eV}$$

2） 每个光子的能量：

$$h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 4.97\,\mathrm{eV} = 7.95\times10^{-19}\ \mathrm{J}$$

光强 I:

$$I = Nh\nu$$

每个光子最多只能释放一个电子，

每秒从钾表面单位面积所发射的最大电子数为 N：

$$N = \frac{I}{h\nu} = \frac{2}{7.95\times10^{-19}} = 2.52\times10^{18}\ \mathrm{s^{-1}m^{-2}}$$

例 9: 如图所示，K是一细金属丝电极，A是以K为轴、半径为*R*的圆筒形电极，其内部有沿轴向的均匀磁场，磁感应强度为*B*，在A、K之间接有一个灵敏检流计G，当波长为 λ 的单色光照射到K上时，G可以检测到光电流。如果逐渐加大磁感应强度*B*，当 $B=B_0$ 时，光电流恰好为零，电子的质量为 *m*，电量为 *e*，

求: 金属丝K的逸出功。

解:

$$F_m = ev_m B = ma_n = m\frac{v_m^2}{R'}$$

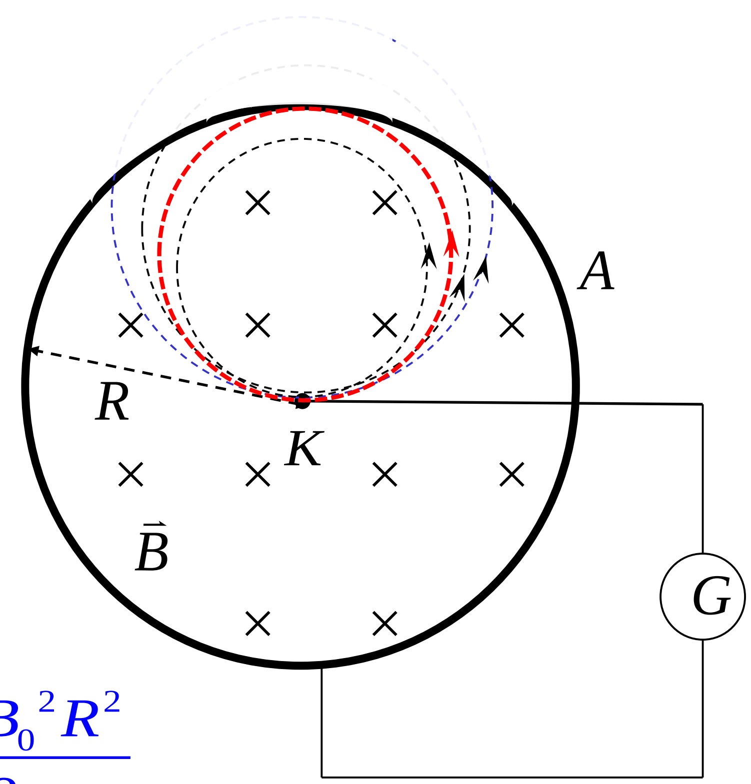
回旋半径 $$R' = \frac{mv_m}{eB},$$

当$B=B_0$时，$R' = \dfrac{R}{2}$，光电流恰好为0，

当$B>B_0$时，$R' < \dfrac{R}{2}$，光电子被限制于磁场内

$$\frac{R}{2} = \frac{mv_m}{eB_0}, \qquad v_m = \frac{eB_0 R}{2m}$$

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + W, \quad \Rightarrow W = \frac{hc}{\lambda} - \frac{e^2 B_0^2 R^2}{8m}$$



思考:

在光电效应中，光子和电子组成的系统，**动量是否守恒？**

不守恒

本节知识点

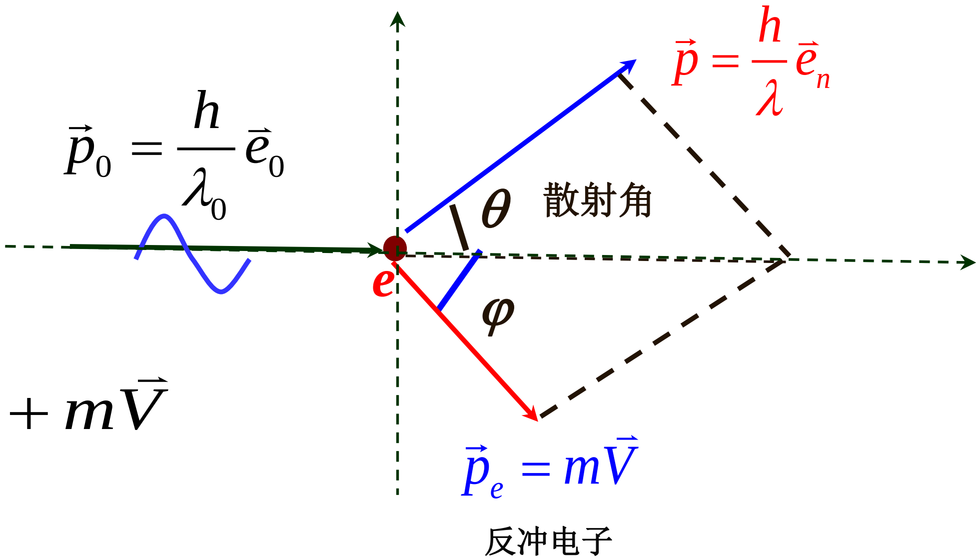
康普顿效应中，

碰撞过程中能量守恒

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2$$

碰撞过程中动量守恒

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_e \Rightarrow \frac{h}{\lambda_0}\vec{e}_0 = \frac{h}{\lambda}\vec{e}_n + m\vec{V}$$



散射使波长的偏移量为:

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)}$$

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda_c(1-\cos\theta)}$$

电子的康普顿波长: $\lambda_c = \frac{h}{m_0c} \approx 2\cdot 43\times 10^{-12}\,\mathrm{m} = 0.00243\mathrm{nm}$

例 10: 在康普顿效应中，入射X射线的波长为 $\lambda_0 = 3\times 10^{-3}$nm，反冲电子的速度为光速的60%，

求: 散射X光的波长和散射角。

解:

$$hv_0 + m_0c^2 = hv + mc^2 \Rightarrow \frac{hc}{\lambda_0} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda} + \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}c^2$$

散射X射线波长：$\lambda = \dfrac{4h\lambda_0}{4h - \lambda_0 m_0 c} = 4.34\times 10^{-3}\,\mathrm{nm}$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_C(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 1 - \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_c} = 0.449$$

散射角: $\theta = 63.3°$

例 11: 在康普顿效应中，入射X 射线的波长为 $\lambda_0 = 0.0700\ \text{nm}$，散射X 射线与入射X 射线垂直，

求： 1）反冲电子的动能；

2）反冲电子运动方向与入射X 射线之间的夹角。

解：1） $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_C(1-\cos\theta) = \lambda_C(1-\cos 90^\circ) = \lambda_C$

散射X射线波长： $\lambda = \lambda_0 + \lambda_C = 0.07243\,\text{nm}$

根据能量守恒： $h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2$

反冲电子的动能为：

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = h\nu_0 - h\nu = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = 9.42\times10^{-17}\,\text{J}$$

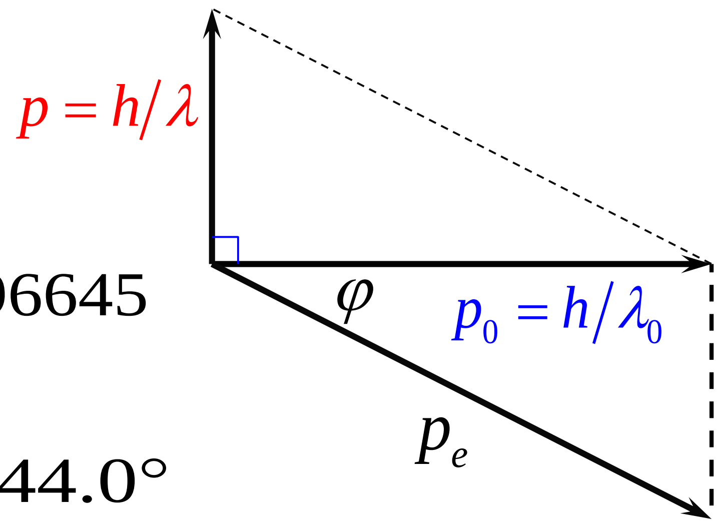
例 11: 在康普顿效应中，入射X 射线的波长为 $\lambda_0 = 0.0700\ \mathrm{nm}$，散射X 射线与入射X 射线**垂直**，

求： 1）反冲电子的动能；

2）反冲电子运动方向与入射X 射线之间的夹角。

解：2） 根据动量守恒：

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_e$$



$$\tan\varphi = \frac{p}{p_0} = \frac{h/\lambda}{h/\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 0.96645$$

$$\varphi = \arctan(0.96645) = 44.0^\circ$$

另，反冲电子的动量： $p_e = \sqrt{p^2 + p_0^2} = \sqrt{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2}$

例 12: 在康普顿效应中，一具有10^4 eV能量的X 射线光子，与一静止的自由电子相碰撞，碰撞后，光子的散射角为 60^0，

求: 1）散射X光子的波长、频率和能量各为多少？

2）反冲电子的动能、动量和运动方向？

解: 1）

$$\varepsilon_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} \Rightarrow \nu_0 = \frac{\varepsilon_0}{h} = 2.41\times 10^{18}\,\mathrm{Hz}$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{\varepsilon_0} = 0.1242\mathrm{nm}$$

散射X射线波长： $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_C(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\lambda_C$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_c = 0.1254\mathrm{nm}$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} = 2.392\times 10^{18}\,\mathrm{Hz}$$

$$\varepsilon = h\nu = 9.905\times 10^3\,\mathrm{eV}$$

例 12 在康普顿效应中，一具有10^4 eV能量的X 射线光子，与一静止的自由电子相碰撞，碰撞后，光子的散射角为 60^0，

求： 1）散射X光子的波长、频率和能量各为多少？

2）反冲电子的动能、动量和运动方向？

解： 2）反冲电子的动能： $h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2$

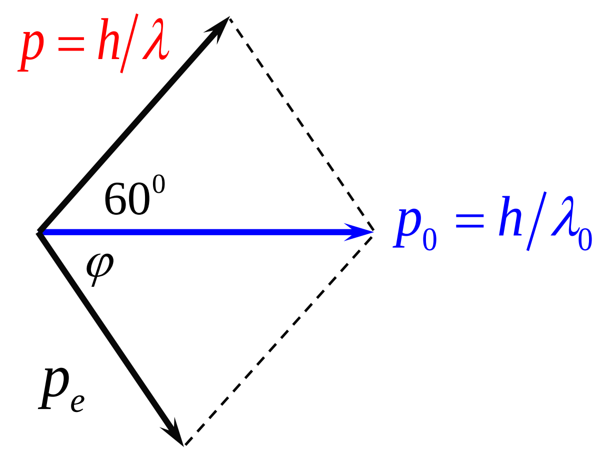
$$\Rightarrow E_k = mc^2 - m_0c^2 = h\nu_0 - h\nu \Rightarrow E_k = 95\text{eV}$$

反冲电子的动量：**方法-1：** 动量守恒

$$p_e^2 = p_0^2 + p^2 - 2p_0 p\cos 60^0$$

$$\Rightarrow p_e = \sqrt{(\frac{h}{\lambda_0})^2 + (\frac{h}{\lambda})^2 - 2\frac{h}{\lambda_0}\cdot\frac{h}{\lambda}\cos 60^0}$$

$$\Rightarrow p_e = 5.26\times10^{-24}\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$



例 12: 在康普顿效应中，一具有10^4 eV能量的X 射线光子，与一静止的自由电子相碰撞，碰撞后，光子的散射角为 60^0，

求: 1）散射X光子的波长、频率和能量各为多少?

2）反冲电子的动能、动量和运动方向?

解: 2）反冲电子的动能: $h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2$

$$\Rightarrow E_k = mc^2 - m_0c^2 = h\nu_0 - h\nu \Rightarrow E_k = 95\text{eV}$$

反冲电子的动量: **方法-2:** 相对论能量与动量关系

$$E^2 = E_0^2 + p_e^2c^2$$

$$\Rightarrow p_e = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c} = \frac{\sqrt{E_k^2 + 2E_0E_k}}{c}$$

$$\Rightarrow p_e = 5.26\times10^{-24}\,\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

例 12: 在康普顿效应中，一具有10^4 eV能量的X 射线光子，与一静止的自由电子相碰撞，碰撞后，光子的散射角为 60^0，

求: 1）散射X光子的波长、频率和能量各为多少？

2）反冲电子的动能、动量和运动方向？

解: 2）反冲电子的运动方向

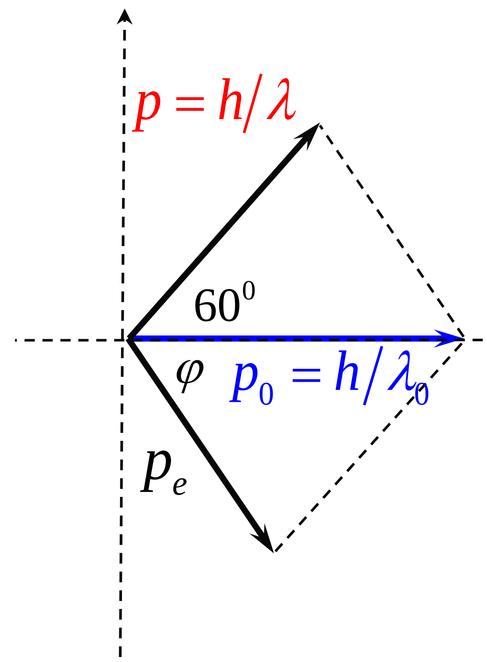
动量守恒（竖直方向）：

$$0 = p\sin 60^0 - p_e \sin\varphi$$

$$0 = \frac{h}{\lambda}\sin 60^0 - p_e \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{h}{p_e\lambda}\sin 60^0 = 0.870$$

$$\Rightarrow \varphi = 60.4^0$$



例 13: 1）使氢原子基态下的电子移离原子（电离），至少需要多少能量？

2）如用光照射实现氢原子电离，光的波长多大？

解：1） 把电子从氢原子基态轨道移至无限远处所需要的能量值，即电离能，

$$E_{电离}=E_{\infty}-E_{1}=13.6\,\mathrm{eV}$$

2） $\varepsilon=h\nu=h\dfrac{c}{\lambda}=E_{电离}$，

$$\Rightarrow \lambda=\frac{ch}{E_{电离}}=\frac{3\times10^{8}\times6.63\times10^{-34}}{13.6\times1.60\times10^{-19}}=91.2\,\mathrm{nm}$$

（紫外光）

例 14: 实验发现基态氢原子可吸收能量为 **12.75 eV** 的光子，

求： 1) 氢原子吸收该光子后将被激发到哪个能级？

2) 受激发的该氢原子系统向低能级跃迁时，

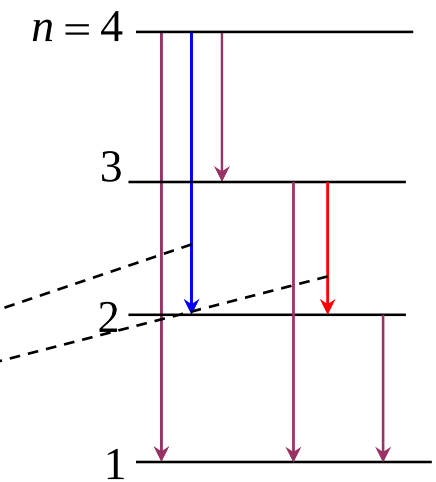
可能发出哪几条光谱线？有几条可见光谱线？

解：1） 设氢原子吸收该光子后，最高能激发到第n个能级，

此能级的能量为: $E_n = -\dfrac{13.6}{n^2}\,\mathrm{eV}$

$$E_n - E_1 = 12.75\,\mathrm{eV}\,,\quad -\frac{13.6}{n^2}\,\mathrm{eV} - (-13.6\,\mathrm{eV}) = 12.75\,\mathrm{eV} \;\Rightarrow\; n = 4$$

2） 氢原子最高能激发到 ***n*** **=4** 的能级



如图所示，可发出6条谱线

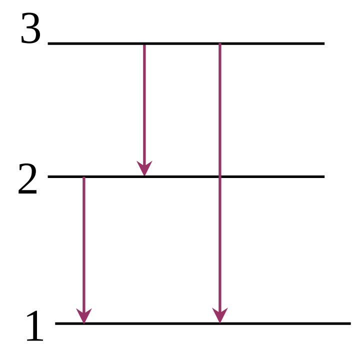
其中2条谱线为可见光

例 15: 用某频率的单色光照射基态氢原子系统，使氢原子系统发射出三种频率的谱线，

求： 该单色光的频率为多少？

解： 基态氢原子吸收该光子后，激发到n=3能级，

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2}\,\mathrm{eV}$$



$$\varepsilon = h\nu = E_n - E_1$$

$$= \left(-\frac{13.6}{3^2}\,\mathrm{eV}\right) - \left(-\frac{13.6}{1^2}\,\mathrm{eV}\right),$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{8}{9h}\times 13.6\,\mathrm{eV} \Rightarrow \nu = 2.917\times 10^{15}\ \mathrm{Hz}$$

例 16： 计算经过电势差 $U=100\ \text{V}$ 加速的电子的德布罗意波长（不考虑相对论效应）。

$$E=\frac{1}{2}m_0 v^2=eU,$$

$$\boxed{\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{m_0 v}=\frac{h}{\sqrt{2em_0U}}}$$

$$\boxed{U=100\text{V},\qquad \lambda=0.1228\text{nm}}$$

与 X 射线波长的数量级相当

1923年， 德布罗意提出了作电子衍射实验的设想；

1924年， 又提出用电子在晶体上作衍射实验的想法。

“在一定情形中，任一运动质点能够被衍射。穿过一个相当小的开孔的电子群会表现出衍射现象。正是在这一方面，有可能寻得我们观点的实验验证。”

例17： 电子静止质量 $m_0=9.1\times10^{-31}$kg，以$v = 6.0\times10^6$m/s速率运动；质量 $m = 40$ g的子弹，以 $v = 1.0\times10^3$ m/s的速率运动，比较电子与子弹的德布罗意波长。

解： 电子和子弹的德布罗意波长分别为

$$\lambda_e = \frac{h}{m_0 v} = \frac{6.63\times10^{-34}}{9.1\times10^{-31}\times6\times10^{6}} = 1.2\times10^{-10}\,\mathrm{m}$$

$$\lambda_{子弹} = \frac{h}{mv} = \frac{6.63\times10^{-34}}{40\times10^{-3}\times1.0\times10^{3}} = 1.66\times10^{-35}\,\mathrm{m}$$

电子的德布罗意波长与 X 射线接近，其波动性不能忽略；而子弹的德布罗意波长小到实验难以测量的程度(人、足球的波长也是如此)。“宏观物体只表现出粒子性”

例18: 已知

电子的质量 m_e 为 9.11×10^{-31} kg

一氢原子中的电子速度 v_x 的数量级为 $10^6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

若以氢原子的线度 10^{-10} m 作为电子的坐标不确定量 Δx

求 电子速度的不确定量

解法提要:

由不确定关系 $\Delta x\cdot\Delta P_x\geq\dfrac{\hbar}{2}$

因该电子速度远小于光速，可不考虑相对论效应，用 $p_x=m_e v_x$ 代入

$$\Delta p_x=m_e\Delta v_x$$

$$\Delta v_x\geq\frac{\hbar}{2m_e\Delta x}=0.58\times10^{6}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

说明：氢原子中电子速率不确定量与速率本身的数量级基本相同，因此原子中电子的位置和速度不能同时完全确定，也没有确定的轨道。

在微观领域内，粒子的轨道概念不适用！

例19: 质量 $m = 40\ \text{g}$ 的子弹，以 $v = 1.0\times10^3\ \text{m/s}$ 的速率飞行，求：（1）其德布罗意波长；

（2）若子弹位置的不确定量为 0.10 mm ，求其速率的不确定量。

解: （1）子弹的De Broglie波长为：

$$\lambda_{子弹} = \frac{h}{mv} = \frac{6.63\times10^{-34}}{40\times10^{-3}\times1.0\times10^{3}} = 1.66\times10^{-35}\,\text{m}$$

（2） $\Delta x = 0.10\text{mm},\qquad \Delta x\cdot\Delta P_x \geq \dfrac{\hbar}{2}$

$$\Delta P_x = m\Delta v_x,\qquad \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} = 1.32\times10^{-29}\ \text{m/s}$$

$v >> \Delta v_x$　　波动性可忽略

说明: 子弹速率的不确定范围很小，是微不足道的。子弹的动量和位置都能精确地确定。不确定性关系对宏观物体来说没有实际意义。

例 20: 一电子以初速度 $v_0 = 6\times10^6$ m/s，逆着场强方向飞入电场强度为 E=500 V/m 的均匀电场中，(飞行过程中，不考虑相对论效应），则该电子在电场中要飞行多长距离，可使得电子的德布罗意波长达到 0.1 nm。

解： 根据动能定理：$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = W = eU,\quad U = Ed$

$$\Rightarrow E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2}m_0 v^2 - \frac{1}{2}m_0 v_0^2 = eEd$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{2m_0} - \frac{1}{2}m_0 v_0^2 = eEd$$

由德布罗意关系，有： $p = \dfrac{h}{\lambda},\quad \lambda = 0.1\text{nm}$

$$\Rightarrow d = 9.715\times10^{-2}\ \text{m}$$

例 21: 能量为 **15eV** 的光子，被处于基态的氢原子吸收，使氢原子电离发射一个电子，则此电子的德布罗意波长为多少？(不考虑相对论效应)

解：把电子从氢原子基态轨道移至无限远处所需要的能量值，即电离能，

$$E_{电离} = E_{\infty} - E_1 = 13.6\,\text{eV}$$

此电子获得的动能： $E_k = 15\,\text{eV} - 13.6\,\text{eV} = 1.4\,\text{eV}$

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{p^2}{2m_0} \Rightarrow p = \sqrt{2m_0 E_k}$$

德布罗意波长： $\lambda = \dfrac{h}{p} = 1.038\,\text{nm}$

例 22: 设氦原子的动能等于氦原子处于温度为 T 的热平衡状态时的平均动能，氦原子的质量为m,
则此氦原子的德布罗意波长为多少？

(不考虑相对论效应）

解： 处于温度为 T 的热平衡状态时，
氦原子的平均动能为：

$$E_k = \frac{i}{2}kT = \frac{3}{2}kT$$

$$p = mv,\quad E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow p = \sqrt{2mE_k}$$

德布罗意波长：

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$$

例 23: 氦氖激光器所发出红光波长为 $\lambda = 632.8\text{nm}$ ，谱线宽度 $\Delta\lambda = 10^{-9}\text{nm}$ ，当这种光子沿x方向传播时，求光子的坐标 x 的不确定量 Δx 为多大？

解：

光子具有波粒二象性，其动量为： $p_x = \dfrac{h}{\lambda}$

其动量不确定量为： $\Delta p_x = \Delta(\dfrac{h}{\lambda}) = -\dfrac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda$ （注：只需考虑不确定量大小）

利用： $\Delta x \Delta p_x \geq h \Rightarrow \Delta x \Delta p_x \sim h \Rightarrow \Delta x \cdot \dfrac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda \sim h$

$$\Rightarrow \Delta x \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \approx 4\times10^5\text{m} = 400\text{km}$$

Δx 为波列长度，光子的位置不确定量也就是波列的长度。
原子在一次能级跃迁过程中发射一个光子或说发出一列波。

本部分（波函数）

知识点

微观粒子的状态可以用波函数来描写，而波函数随时间的演化，遵从薛定谔方程.

1、波函数统计解释

t 时刻粒子出现在空间某点 r 附近体积元 dV 中的概率，与波函数模的平方及 dV 成正比。

概率密度：$$w=\frac{dW}{dV}=\left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2=\Psi(\vec{r},t)\Psi^*(\vec{r},t)$$

单位体积内粒子出现的概率

$$w=\frac{dW}{dx}=\left|\Psi(x,t)\right|^2=\Psi(x,t)\Psi^*(x,t)$$

微观粒子的状态可以用波函数来描写，而波函数随时间的演化，遵从薛定谔方程.

2、波函数满足的条件

一粒子在整个空间出现的总概率等于 1，即：

$$\iiint |\Psi(\vec{r},t)|^2 dV = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$$

波函数归一化条件

波函数满足的条件：单值、连续、有限、归一

其中，波函数满足的标准化条件：单值、连续、有限

对于一维空间（x轴）：

概率密度： $$w=|\Psi(x,t)|^2=\Psi(x,t)\Psi^*(x,t)$$

波函数归一化条件 $$\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x)|^2dx=1$$

粒子出现在 $x\sim x+dx$ 区间内概率： $$dW=|\Psi(x,t)|^2\,dx$$

粒子出现在 $x_1\sim x_2$ 区间内概率： $$W=\int_{x_1}^{x_2}|\Psi(x,t)|^2\,dx$$

粒子出现概率极大、极小的位置：

令 $\dfrac{dw}{dx}=\dfrac{d|\Psi|^2}{dx}=0$，解出极值点：$x=x_m$

例 24：设一粒子在一维空间运动，其波函数为：$\psi(x)=\begin{cases}Axe^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0\ , & x\leq 0\end{cases}\quad(\lambda>0)$

求：1) 归一化的波函数； 2) 粒子的概率密度函数；
3) 在何处发现粒子的概率最大？

解：1）由归一化条件：$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2dx=1$

$$\int_{-\infty}^{0}|\psi(x)|^2\,dx+\int_{0}^{\infty}|\psi(x)|^2\,dx=1\Rightarrow |A|^2\int_0^{\infty}x^2e^{-2\lambda x}dx=1\Rightarrow A=2\sqrt{\lambda^3}$$

归一化的波函数：$\psi(x)=\begin{cases}2\sqrt{\lambda^3}xe^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0\ , & x\leq 0\end{cases}$

2) 粒子的概率密度函数：

$$w(x)=|\psi(x)|^2=\begin{cases}4\lambda^3x^2e^{-2\lambda x}, & x\geq 0\\ 0\ , & x\leq 0\end{cases}$$

例 24: 设一粒子在一维空间运动，其波函数为: $\psi(x)=\begin{cases}Axe^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}\quad(\lambda>0)$

求: 1) 归一化的波函数； 2) 粒子的概率密度函数；

3) 在何处发现粒子的概率最大？

解:

3）
$$w(x)=|\psi(x)|^2=\begin{cases}4\lambda^3x^2e^{-2\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

$$\frac{dw(x)}{dx}=\frac{d|\psi(x)|^2}{dx}=0\Rightarrow\frac{d}{dx}(4\lambda^3x^2e^{-2\lambda x})=0$$

$$\Rightarrow 4\lambda^3[2xe^{-2\lambda x}-2\lambda x^2e^{-2\lambda x}]=0\Rightarrow xe^{-2\lambda x}(1-\lambda x)=0$$

$$\Rightarrow x=0,\quad x\to\infty,\quad x=\frac{1}{\lambda}$$

$x=0, x\to\infty$时， $w=0$

概率最小

粒子出现的概率最大的位置: $x=\dfrac{1}{\lambda}$

例 25: 一粒子在一维无限深势阱中运动，其波函数为：

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{2\pi x}{a}),\quad (0\le x\le a)$$

求： 1)概率密度最大值位置和概率密度最大值；

2)在区间(0～*a*/3)找到粒子的概率是多少？

解：1） 波函数：

$$\psi=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{2\pi x}{a}),\quad (0\le x\le a)$$

概率密度函数：

$$w(x)=|\psi|^2=\frac{2}{a}\sin^2(\frac{2\pi x}{a}),\quad (0\le x\le a)$$

$\therefore$ 当 $\frac{2\pi x}{a}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 有极大值，$\Rightarrow x=(2k+1)\frac{a}{4},\quad k=0,1,\cdots,$

$0\le x\le a$

粒子出现概率最大的位置： $x=\frac{a}{4},\quad \frac{3a}{4}$

概率密度最大值： $w_{\max}=\frac{2}{a}$

例 25: 一粒子在一维无限深势阱中运动，其波函数为：

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{2\pi x}{a}),\quad (0\le x\le a)$$

求： 1)概率密度最大值位置和概率密度最大值；

2)在区间(0～*a*/3)找到粒子的概率是多少？

解：1） 波函数: $\psi=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{2\pi x}{a}),\quad (0\le x\le a)$

概率密度函数: $w(x)=|\psi|^2=\frac{2}{a}\sin^2(\frac{2\pi x}{a}),\quad (0\le x\le a)$

$\therefore$ 当 $\frac{2\pi x}{a}=k\pi$ 有极小值, $\Rightarrow x=k\frac{a}{2},\quad 0\le x\le a$

粒子出现概率最小的位置: $x=0,\quad \frac{a}{2},\quad a$

例 25: 一粒子在一维无限深势阱中运动，其波函数为：

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{2\pi x}{a}),\quad (0\le x\le a)$$

求： 1)概率密度最大值位置和概率密度最大值；

2)在区间(0～*a*/3)找到粒子的概率是多少？

解：2）波函数:

$$\psi=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{2\pi x}{a}),\quad (0\le x\le a)$$

概率密度函数:

$$w(x)=|\psi|^2=\frac{2}{a}\sin^2(\frac{2\pi x}{a}),\quad (0\le x\le a)$$

$$\Rightarrow W=\int_0^{\frac{a}{3}}|\psi|^2dx=\int_0^{\frac{a}{3}}\frac{2}{a}\sin^2(\frac{2\pi x}{a})dx=\int_0^{\frac{a}{3}}\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos\frac{4\pi x}{a})dx$$

$$\Rightarrow W=\frac{1}{a}(x-\frac{a}{4\pi}\sin\frac{4\pi x}{a})\Big|_0^{\frac{a}{3}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{3}=40.2\%$$

例 26: 一粒子在一维无限深势阱中运动，其波函数为：

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a}), \quad (0 \le x \le a)$$

求：1) 当 $n=2$ 时，粒子出现概率最大的位置和粒子出现概率最小的位置；

2) 当 $n=1$ 时，在区间 $(0\sim a/4)$ 发现粒子的概率是多少？

解： 1）$n=2$时，波函数为：
$$\psi_2 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{2\pi x}{a}), \quad (0 \le x \le a)$$

概率密度函数：
$$w(x) = |\psi_2|^2 = \frac{2}{a}\sin^2(\frac{2\pi x}{a}), \quad (0 \le x \le a)$$

$$\therefore \text{当} \quad \frac{2\pi x}{a} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{有极大值,} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{a}{4}, \quad 0 \le x \le a$$

粒子出现概率最大的位置：
$$x = \frac{a}{4}, \quad \frac{3a}{4}$$

例 26: 一粒子在一维无限深势阱中运动，其波函数为：

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a}), \quad (0 \le x \le a)$$

求：1) 当 $n=2$ 时，粒子出现概率最大的位置和
粒子出现概率最小的位置；
2) 当 $n=1$ 时，在区间(0～a/4)发现粒子的概率是多少？

解： 1）n=2时，波函数为：
$$\psi_2 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{2\pi x}{a}), \quad (0 \le x \le a)$$

概率密度函数：
$$w(x) = |\psi_2|^2 = \frac{2}{a}\sin^2(\frac{2\pi x}{a}), \quad (0 \le x \le a)$$

$$\therefore \text{当} \quad \frac{2\pi x}{a} = k\pi \quad \text{有极小值,} \qquad \Rightarrow x = k\frac{a}{2}, \qquad 0 \le x \le a$$

粒子出现概率最小的位置：
$$x = 0, \quad \frac{a}{2}, \quad a$$

例 26: 一粒子在一维无限深势阱中运动，其波函数为：

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a}),\quad (0 \le x \le a)$$

求：1) 当 n=2 时，粒子出现概率最大的位置和
粒子出现概率最小的位置；
2) 当 n=1 时，在区间(0～a/4)发现粒子的概率是多少？

解： 2）

n=1时，波函数为： $\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi x}{a}),\quad (0 \le x \le a)$

概率密度函数： $w(x) = |\psi_1|^2 = \frac{2}{a}\sin^2(\frac{\pi x}{a}),\quad (0 \le x \le a)$

$$\Rightarrow W = \int_0^{\frac{a}{4}} |\psi_1|^2 dx = \int_0^{\frac{a}{4}} \frac{2}{a}\sin^2(\frac{\pi x}{a})dx = \int_0^{\frac{a}{4}} \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi x}{a})dx$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{a}(x - \frac{a}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{a})\Big|_0^{\frac{a}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 9.1\%$$

例 27: 一粒子在宽度为a的一维无限深势阱中运动，其波函数为：

$$\psi_n=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a}),\quad (0\le x\le a)$$

求：1)在区间(0～a/4)粒子出现的概率，并对n=1和 $n\to\infty$ ，的情况算出概率值；

2)在哪些量子态上（n），a/4处的概率密度最大？

解： 1）波函数为: $\psi_n=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a}),\quad (0\le x\le a)$

概率密度函数： $w_n(x)=|\psi_n|^2=\frac{2}{a}\sin^2(\frac{n\pi x}{a}),\quad (0\le x\le a)$

$$\Rightarrow W=\int_0^{\frac{a}{4}}|\psi_n|^2dx=\int_0^{\frac{a}{4}}\frac{2}{a}\sin^2(\frac{n\pi x}{a})dx=\int_0^{\frac{a}{4}}\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2n\pi x}{a})dx$$

$$\Rightarrow W=\frac{1}{a}(x-\frac{a}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{a})\Big|_0^{\frac{a}{4}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}n=1, & W=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}=9.1\% \\ n\to\infty, & W=\frac{1}{4}=25\%\end{cases}$$

例 27: 一粒子在宽度为*a*的一维无限深势阱中运动，其波函数为：

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{n\pi x}{a}), \quad (0 \le x \le a)$$

求：1)在区间(0～a/4)粒子出现的概率，并对n=1和 $n \to \infty$ ，
的情况算出概率值；
2)在哪些量子态上（n），a/4处的概率密度最大?

解： 2） 概率密度函数： $w_n(x) = |\psi_n|^2 = \frac{2}{a}\sin^2(\frac{n\pi x}{a}), \quad (0 \le x \le a)$

$x = \frac{a}{4}$处， $w_n(\frac{a}{4}) = \frac{2}{a}\sin^2(\frac{n\pi}{4})$

最大值有： $\sin^2(\frac{n\pi}{4}) = 1, \quad w_n(\frac{a}{4})_{\max} = \frac{2}{a}$

$$\Rightarrow \frac{n\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\Rightarrow n = 4k + 2 \qquad n = 2, \quad 6, \quad 10, \quad \cdots,$$

例 28: 在描述氢原子中电子状态的量子数中，

1）当 n=5 时，l 的可能值是多少？

2）当 l =5 是，m_l 的可能值为多少？

3）当 l =4 时，n 的最小可能值是多少？

4）当 n =4、l =3 时，角动量与z轴的夹角的可能值为多少？

解： 1） $l = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1 \Rightarrow l = 0, 1, 2, 3, 4$

2） $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l \Rightarrow m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$

3） 因为：$l = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1 \Rightarrow l \le (n-1) \Rightarrow n \ge l+1 \Rightarrow n \ge 5$

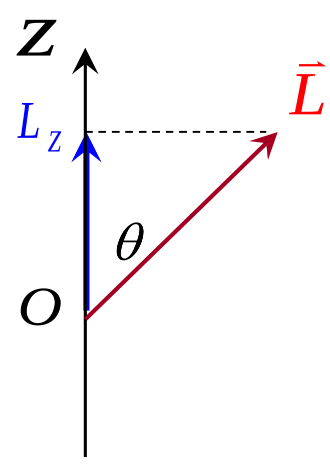
4） n=4、l =3 时，

$$l = 3, \quad L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar = \sqrt{12}\,\hbar$$

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \quad L_Z = 0, \pm \hbar, \pm 2\hbar, \pm 3\hbar$$

$$\cos\theta = \frac{L_z}{L} = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{12}}, \pm \frac{2}{\sqrt{12}}, \pm \frac{3}{\sqrt{12}}$$

$$\theta = 30^0, 55^0, 73^0, 90^0, 107^0, 125^0, 150^0$$



例 29：原子内电子的量子态由n，l，m_l，m_s四个量子数来表征

当n，l，m_l一定时，不同的量子态数目为__2__

当n，l一定时，不同的量子态数目为__$2(2l+1)$__

当n一定时，不同的量子态数目为__$2n^2$__

在主量子数为n、自旋磁量子数$m_s=+1/2$的量子态中，能够填充的最多电子数为__n^2__