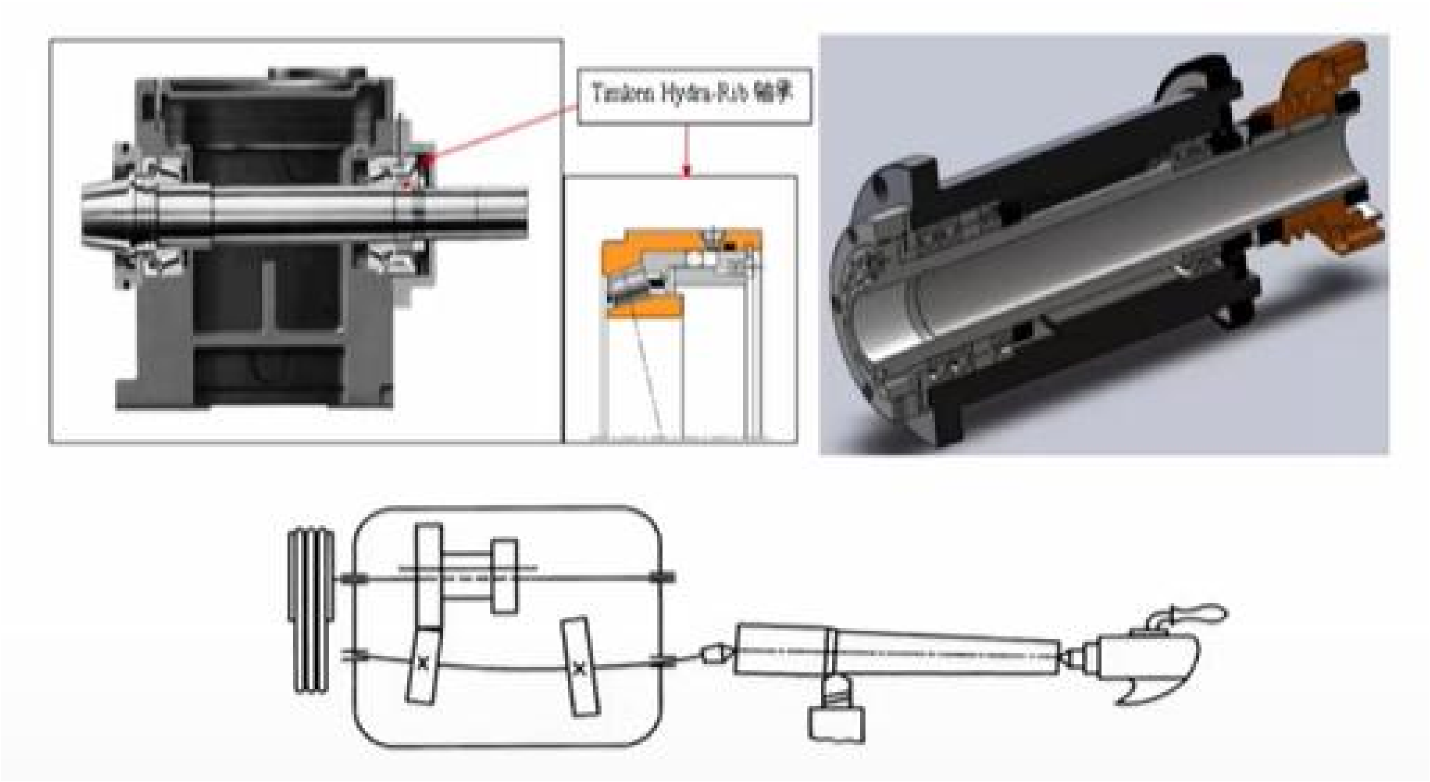
第六章 弯曲变形

1. 工程实际中的弯曲变形问题
2. 梁的挠曲线近似微分方程
3. 用积分法计算梁的变形
4. 用叠加法计算梁的变形
5. 刚度校核、提高弯曲刚度的措施

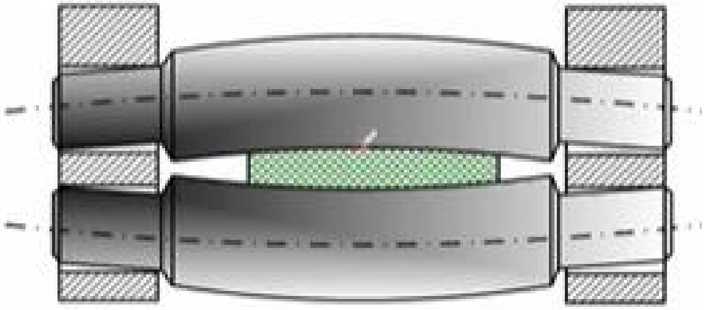
§ 6-1 工程实际中的弯曲变形问题

案例1 机床主轴变形过大，影响齿轮的啮合和轴承的配合，造成磨损不匀，引起噪声，降低寿命，影响加工精度。



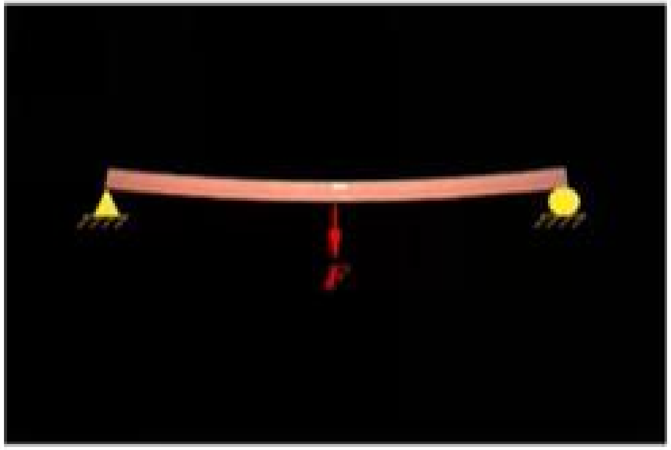
§ 6-1　工程实际中的弯曲变形问题

案例2 轧钢机的轧辊，若弯曲变形过大，轧出的钢板将薄厚不均匀，产品不合格。



§6-1　工程实际中的弯曲变形问题

案例3 车间吊车梁的过大变形，会使梁上的小车行走困难，造成爬坡现象；还会引起较为严重的振动。

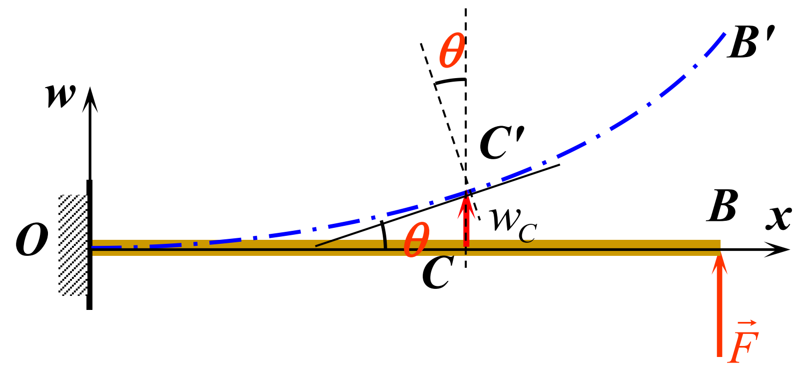


§6-2　梁的挠曲线近似微分方程

一、度量梁变形的两个基本量

1、挠度：

横截面形心沿垂直于轴线方向的线位移。用w表示。



- 挠度向上为正，反之为负

2、转角：横截面对其原位置的角位移。

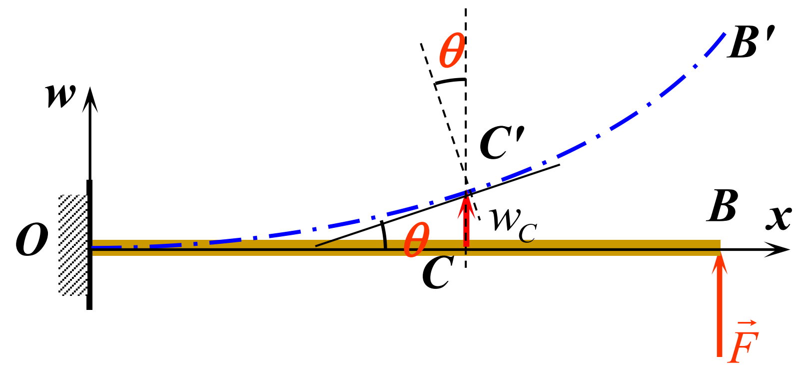
等于挠曲线在某点处的切线与x轴的夹角。

- 挠曲线某一点斜率为正，则转角为正，反之为负；或以梁轴线为基线，逆时针转向为正，反之为负。

§ 6-2　梁的挠曲线近似微分方程

二、挠曲线

梁在发生弯曲变形时，轴线变为一条光滑平坦的曲线。



挠曲线方程　$w = f(x)$

其中，$\boldsymbol{x}$ — 梁变形前轴线上任一点的横坐标；

$\boldsymbol{w}$ — $\boldsymbol{x}$点的挠度。

$$\left.\begin{aligned} &\tan\theta = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w' \\ &\theta \approx \tan\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w' \quad \text{— 转角方程}$$

小变形

§ 6-2 梁的挠曲线近似微分方程

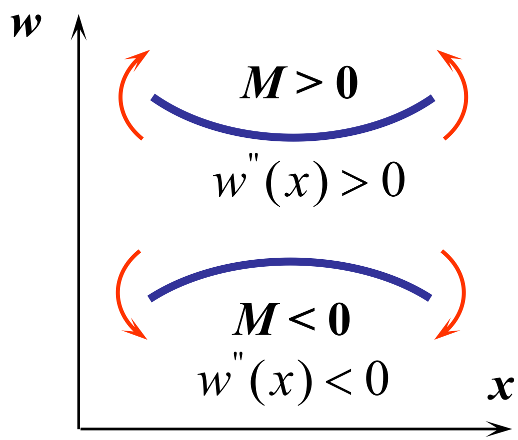
三、挠曲线近似微分方程

梁纯弯曲时中性层曲率 $$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}$$

横力弯曲时中性层曲率 $$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EI}$$ （忽略剪力对变形的影响）

平面曲线一点处的曲率 $$\frac{1}{\rho(x)}=\pm\frac{w''}{[1+(w')^2]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{M(x)}{EI}=\frac{w''}{[1+(w')^2]^{3/2}}$$



§ 6-2 梁的挠曲线近似微分方程

$$\frac{M(x)}{EI}=\frac{w''}{[1+(w')^2]^{3/2}}$$ —— 挠曲线微分方程

小变形时，转角较小 $\Rightarrow (w')^2 << 1$

$$w''=\frac{M(x)}{EI}$$ —— 挠曲线近似微分方程

忽略剪力对变形的影响；
忽略了$(w')^2$。

等直梁的挠曲线近似微分方程 $EIw''=M(x)$

§6-3 用积分法计算梁的变形

一、积分法求解梁变形的步骤

挠曲线近似微分方程 $EIw'' = M(x)$

积分一次得转角方程 $EIw' = EI\theta = \int M(x)dx + C$

积分两次得挠度方程 $EIw = \int [\int M(x)dx]dx + Cx + D$

(1) 适用于小变形、线弹性材料、细长梁的对称弯曲;

(2) 可求解承受各种载荷的等截面或变截面梁的位移;

(3) 积分常数由边界条件、连续性条件确定;

(4) 使用范围广,计算较精确,但计算较繁。

§6-3　用积分法计算梁的变形

利用积分法求梁的位移的分析过程：　$EIw''=M(x)$

1、建立坐标系（一般：坐标原点设在梁的左端），求支座反力，分段列弯矩方程

分段的原则：
（1）凡载荷有突变处（包括中间支座），应作为分段点；
（2）凡截面或材料有变化处，应作为分段点；
（3）中间铰可看作两段梁间的联系，此联系体现在两段梁间的相互作用力，应作为分段点。

§ 6-3 用积分法计算梁的变形

利用积分法求梁的位移的分析过程： $EIw''=M(x)$

2、分段列出梁的挠曲线近似微分方程，并对其积分两次

对挠曲线积分一次，得到转角方程：

$$\theta(x)=\frac{dw}{dx}=\frac{1}{EI}\left(\int M(x)dx+C\right)$$

再积分一次，得到曲线方程：

$$w=\frac{1}{EI}\left[\int\left[\int M(x)dx\right]dx+Cx+D\right]$$

§ 6-3　用积分法计算梁的变形

3、利用边界条件和连续条件确定积分常数

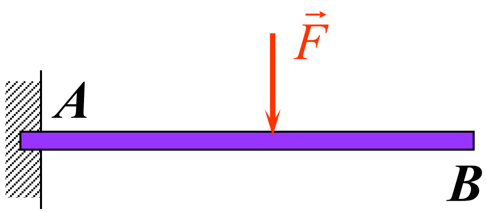
边界条件：梁在其支承处地挠度或转角是已知的，这样的已知条件称为边界条件。

连续条件：梁的挠曲线是一条光滑、连续、平坦的曲线。因此，在梁的同一截面上不可能有两个不同的挠度值或转角值，这样的已知条件称为连续条件。

积分常数的个数——取决于$M(x)$的分段数

$M(x)$——n段，积分常数的个数$2n$个

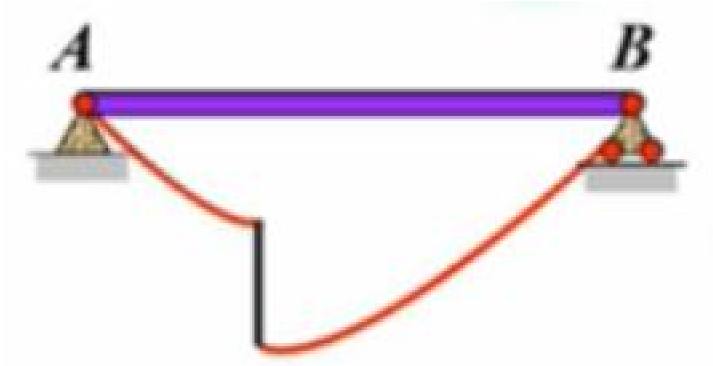
积分常数的个数$2n$ $\begin{cases}\text{边界条件}\\ + \\ \text{连续条件}\end{cases}$

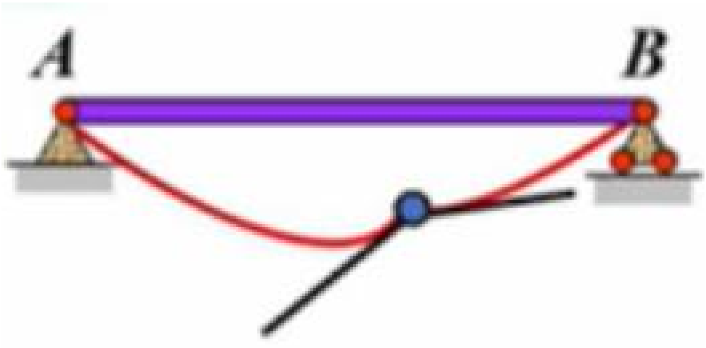


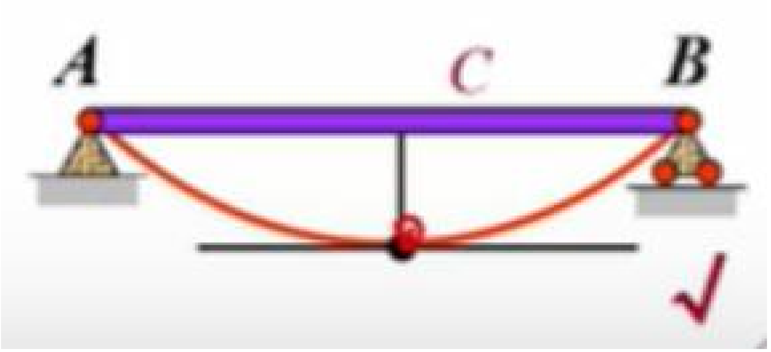
2段　4个常数

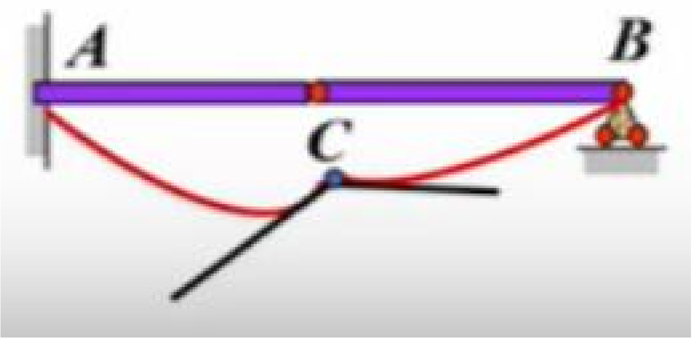
§ 6-3　用积分法计算梁的变形

连续条件：梁的挠曲线是一条光滑、连续、平坦的曲线。因此，在梁的同一截面上不可能有两个不同的挠度值或转角值，这样的已知条件称为连续条件。





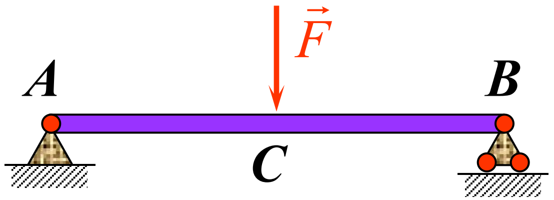




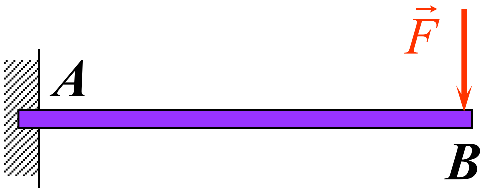
§ 6-3 用积分法计算梁的变形

积分常数的确定

1、简支梁



2、悬臂梁



（1）边界条件

$$w_A = 0; \quad w_B = 0$$

（2）连续性条件

$$w_C^{左} = w_C^{右}; \quad \theta_C^{左} = \theta_C^{右}$$

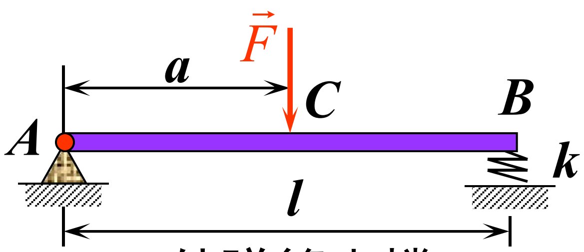
（1）边界条件

$$w_A = 0; \quad \theta_A = 0$$

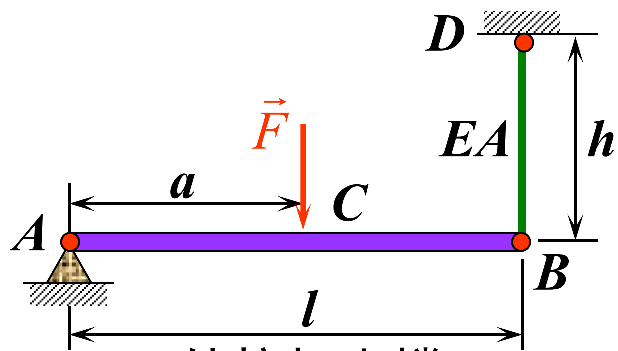
§ 6-3　用积分法计算梁的变形

积分常数的确定

3、组合梁



B处弹簧支撑



B处拉杆支撑

B处弹簧支撑：

(1) 边界条件

$$w_A = 0;\ w_B = F_{By}/k$$

(2) 连续性条件

$$\theta_C^{左} = \theta_C^{右};\ w_C^{左} = w_C^{右}$$

B处拉杆支撑：

(1) 边界条件

$$w_A = 0;\ w_B = F_{By}h/EA$$

(2) 连续性条件

$$\theta_C^{左} = \theta_C^{右};\ w_C^{左} = w_C^{右}$$

§6-3 用积分法计算梁的变形

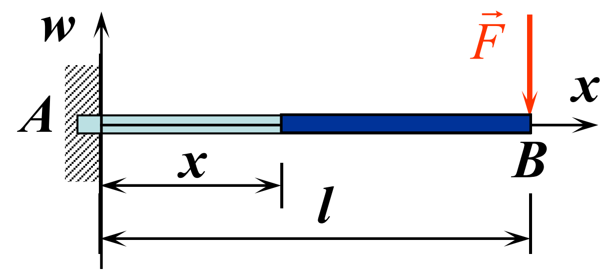
4、建立转角方程和挠曲线方程

5、计算指定截面的转角和挠度值。

§ 6-3　用积分法计算梁的变形

例6-1 试求等直梁的挠曲线方程、转角方程、$|w|_{max}$及$|\theta|_{max}$。

解:(1) 建立坐标系, 写出弯矩方程



$$M(x) = -F(l-x)$$

(2) 对梁的挠曲线近似微分方程积分

$$EIw'' = M(x) = F(x-l) \Rightarrow EIw' = \frac{Fx^2}{2} - Flx + C$$

$$EIw = \frac{F}{6}(x-l)^3 + Cx + D$$

(3) 应用边界条件求积分常数

$$x = 0: \theta_A = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0 + 0 + C$$

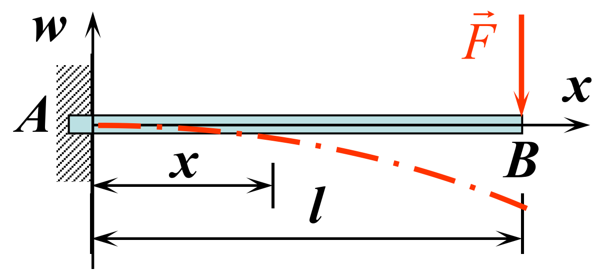
$$x = 0: w_A = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0 + 0 + 0 + D$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = 0 \end{cases} ;$$

§ 6-3 用积分法计算梁的变形

例6-1 试求等直梁的挠曲线方程、转角方程、$|w|_{max}$及$|\theta|_{max}$。

(4) 写出挠曲线、转角方程并画出曲线



$$\theta = w' = \frac{Fx^2}{2EI} - \frac{Flx}{EI}$$

$$w = \frac{Fx^3}{6EI} - \frac{Flx^2}{2EI}$$

$$EIw' = \frac{Fx^2}{2} - Flx + C;$$

$$EIw = \frac{Fx^3}{6} - \frac{Flx^2}{2} + Cx + D;$$

$$C = 0\ ;\ D = 0.$$

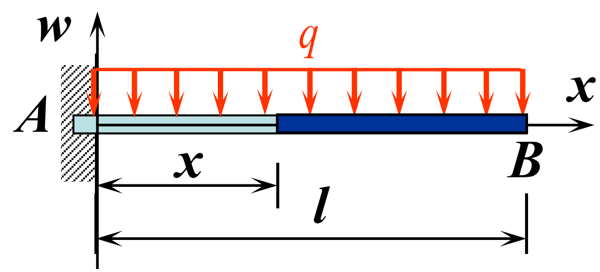
(5) 最大挠度及最大转角

$$|\theta|_{max} = |\theta(l)| = \left| -\frac{Fl^2}{2EI} \right|$$

$$|w|_{max} = |w(l)| = \left| -\frac{Fl^3}{3EI} \right|$$

§ 6-3 用积分法计算梁的变形

例6-2 试求等直梁的挠曲线方程、转角方程、$|w|_{max}$及$|\theta|_{max}$。



解:(1) 建立坐标系,写出弯矩方程

$$M(x)=-\frac{1}{2}q(l-x)^2=-\frac{1}{2}qx^2+qlx-\frac{1}{2}ql^2$$

(2) 对梁的挠曲线近似微分方程积分

$$EIw''=M(x)=-\frac{1}{2}qx^2+qlx-\frac{1}{2}ql^2\Rightarrow EIw'=-\frac{1}{6}qx^3+\frac{1}{2}qlx^2-\frac{1}{2}ql^2x+C$$

$$EIw=-\frac{1}{24}qx^4+\frac{1}{6}qlx^3-\frac{1}{4}ql^2x^2+Cx+D$$

(3) 应用边界条件求积分常数

$$x=0:\theta_A=0 \quad \Rightarrow 0=0+0+0+C$$

$$x=0:w_A=0 \quad \Rightarrow 0=0+0+0+C\cdot 0+D$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ D=0 \end{cases};$$

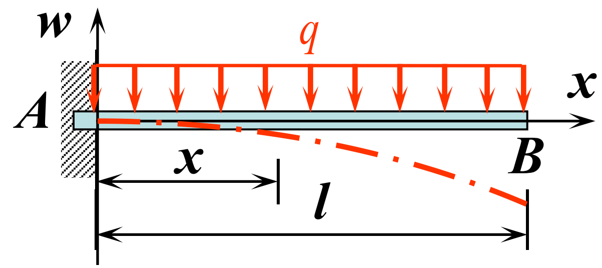
§ 6-3 用积分法计算梁的变形

例6-2 试求等直梁的挠曲线方程、转角方程、$|w|_{\max}$及$|\theta|_{\max}$。

(4) 写出挠曲线、转角方程并画出曲线

$$w' = -\frac{qx^3}{6EI} + \frac{qlx^2}{2EI} - \frac{ql^2x}{2EI}$$

$$w = -\frac{qx^4}{24EI} + \frac{qlx^3}{6EI} - \frac{ql^2x^2}{4EI}$$



$$EIw' = -\frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{2}qlx^2 - \frac{1}{2}ql^2x + C\ ;$$

$$EIw = -\frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}qlx^3 - \frac{1}{4}ql^2x^2 + Cx + D;$$

$$C = 0\ ;\ D = 0.$$

(5) 最大挠度及最大转角

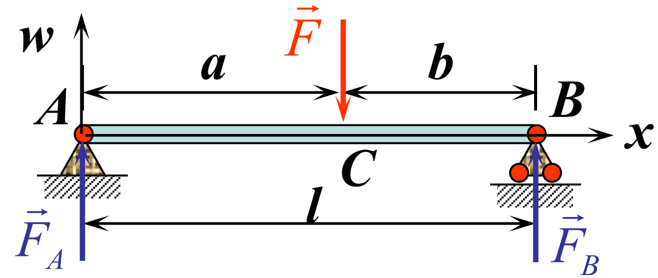
$$|\theta|_{\max} = |\theta(l)| = \left|-\frac{ql^3}{6EI}\right|$$

$$|w|_{\max} = |w(l)| = \left|-\frac{ql^4}{8EI}\right|$$

§ 6-3 用积分法计算梁的变形

例6-3 求等直梁的挠曲线方程, 转角方程, $|w|_{\max}$及θ_A 。$(a > b)$

解:(1) 求支座反力 $F_A = \dfrac{Fb}{l}; F_B = \dfrac{Fa}{l}$



(2) 建立坐标系, 写出弯矩方程

$$M(x) = \begin{cases} Fbx/l & (0 \le x \le a) \\ Fbx/l - F(x-a) & (a \le x \le l) \end{cases}$$

取左侧列方程，后段方程包含前段，利于积分

(3) 对梁的挠曲线近似微分方程积分

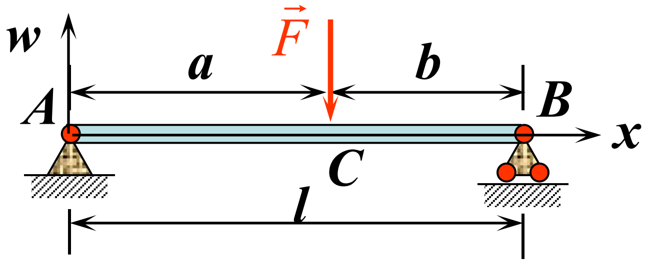
AC段（$0 \le x \le a$）	CB段（$a \le x \le l$）
$EIw'' = \dfrac{Fbx}{l}$	$EIw'' = \dfrac{Fb}{l}x - F(x-a)$
$EIw' = \dfrac{Fb}{2l}x^2 + C_1$	$EIw' = \dfrac{Fb}{2l}x^2 - \dfrac{F}{2}(x-a)^2 + C_2$
$EIw = \dfrac{Fb}{6l}x^3 + C_1 x + D_1$	$EIw = \dfrac{Fb}{6l}x^3 - \dfrac{F}{6}(x-a)^3 + C_2 x + D_2$

（x-a）整体积分，使根据连续条件计算积分常数更简便

§ 6-3 用积分法计算梁的变形

例6-3 求等直梁的挠曲线方程, 转角方程, $|w|_{\max}$及θ_A 。($a>b$)

(3) 应用边界条件求积分常数



$$x=0, w_A=0 \Rightarrow 0=\frac{Fb}{6l}\cdot 0+C_1\cdot 0+D_1 \Rightarrow D_1=0$$

$$x=l, w_B=0 \Rightarrow 0=\frac{Fb}{6l}l^3-\frac{F}{6}(l-a)^3+C_2 l+D_2 \Rightarrow C_2=-\frac{Fb}{6l}(l^2-b^2)$$

$$x=a, w_C^-=w_C^+ \quad \Rightarrow \frac{Fb}{6l}a^3+C_1 a+D_1=\frac{Fb}{6l}a^3-\frac{F}{6}(a-a)^3+C_2 a+D_2 \Rightarrow D_1=D_2=0$$

$$x=a, \theta_C^-=\theta_C^+ \quad \Rightarrow \frac{Fb}{2l}a^2+C_1=\frac{Fb}{2l}a^2-\frac{F}{2}(a-a)^2+C_2 \Rightarrow C_1=C_2$$

AC段（$0\le x\le a$）	**CB段（$a\le x\le l$）**
$EIw'=\frac{Fb}{2l}x^2+C_1$	$EIw'=\frac{Fb}{2l}x^2-\frac{F}{2}(x-a)^2+C_2$
$EIw=\frac{Fb}{6l}x^3+C_1 x+D_1$	$EIw=\frac{Fb}{6l}x^3-\frac{F}{6}(x-a)^3+C_2 x+D_2$

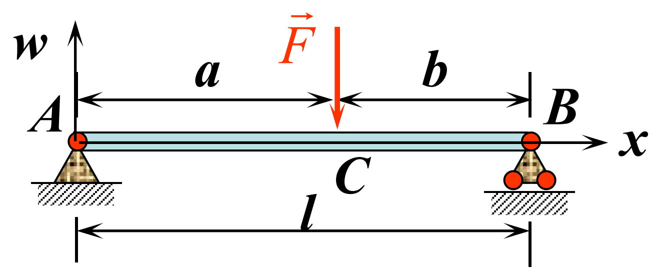
§ 6-3　用积分法计算梁的变形

例6-3 求等直梁的挠曲线方程, 转角方程, $|w|_{max}$及θ_A 。($a > b$)

(4) 写出挠曲线方程, 转角方程

AC段（$0 \le x \le a$）	CB段（$a \le x \le l$）
$EIw' = -\frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2 - 3x^2)$	$EIw' = -\frac{Fb}{6l}[l^2 - b^2 - 3x^2 + \frac{3l}{b}(x-a)^2]$
$EIw = -\frac{Fbx}{6l}(l^2 - b^2 - x^2)$	$EIw = -\frac{Fb}{6l}[(l^2 - b^2)x - x^2 + \frac{l}{b}(x-a)^3]$

$$\theta_A = \theta(0) = -\frac{Fab}{6EIl}(l+b) < 0$$



$$\theta_C = \frac{Fab}{3EIl}(a-b) > 0$$　∴θ=0在AC段

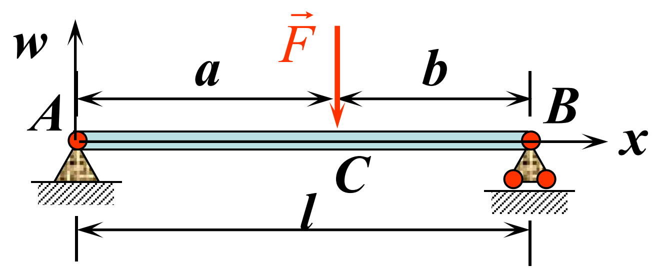
令$w' = \theta = -\frac{Fb}{6lEI}(l^2 - b^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$

§ 6-3 用积分法计算梁的变形

例6-3 求等直梁的挠曲线方程, 转角方程, $|w|_{max}$及θ_A 。($a > b$)

AC段（$0 \le x \le a$）	CB段（$a \le x \le l$）
$EIw' = -\frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2 - 3x^2)$	$EIw' = -\frac{Fb}{6l}[l^2 - b^2 - 3x^2 + \frac{3l}{b}(x-a)^2]$
$EIw = -\frac{Fbx}{6l}(l^2 - b^2 - x^2)$	$EIw = -\frac{Fb}{6l}[(l^2 - b^2)x - x^2 + \frac{l}{b}(x-a)^3]$

$$\Rightarrow |w|_{max} = \left| w\left(\sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}\right) \right| = \frac{Fb}{9\sqrt{3}EIl}\sqrt{(l^2 - b^2)^3}$$



$$\left| w\left(\frac{l}{2}\right) \right| = \frac{Fb(3l^2 - 4b^2)}{48EI}$$

$$\Rightarrow |w|_{max} \approx \left| w\left(\frac{l}{2}\right) \right|$$

对于简支梁, 不管载荷作用在何处(支座除外), w_{max}可用跨度中点的挠度代替, 误差小于3%。

§ 6-3 用积分法计算梁的变形

积分法的原则：

(1) 对各段梁, 都是由坐标原点到所研究截面之间的梁段上的外力来写弯矩方程的. 所以后一段梁的弯矩方程包含前一段梁的弯矩方程. 只增加了(x-a)的项；

(2) 对(x-a)的项作积分时，应该将(x-a)项作为积分变量，从而简化了确定积分常数的工作。

积分法的优缺点：

优点：

可以得到全梁的结果；可以得到全梁变形的变化情况；

缺点：

推导过程复杂、繁琐。

§6-4 用叠加法求梁的变形

一、叠加原理

载荷叠加：多个载荷同时作用于结构而引起的变形等于每个载荷单独作用于结构而引起的变形的代数和。

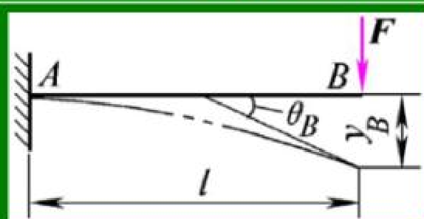
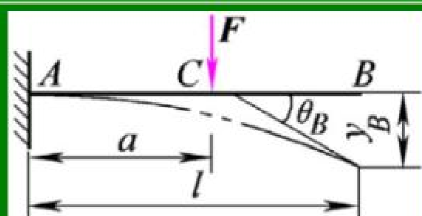
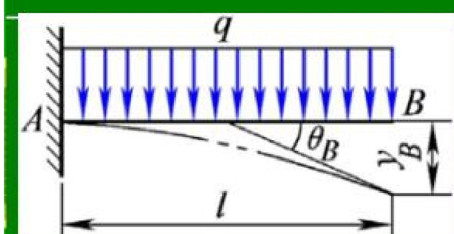
$$\theta(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots\cdots\vec{F}_n)=\theta_1(\vec{F}_1)+\theta_2(\vec{F}_2)+\cdots\cdots+\theta_n(\vec{F}_n)$$

$$w(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots\cdots\vec{F}_n)=w_1(\vec{F}_1)+w_2(\vec{F}_2)+\cdots\cdots+w_n(\vec{F}_n)$$

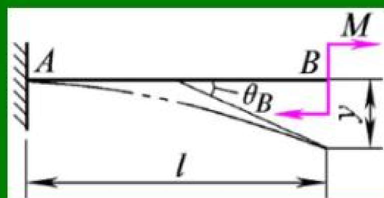
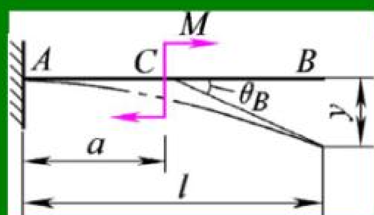
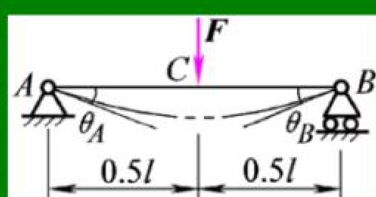
适用条件：所求物理量与载荷为线性关系。

要求：
- （1）小变形
- （2）虎克定律

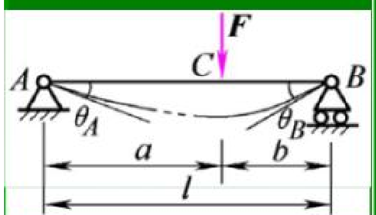
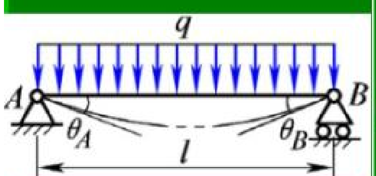
§ 6-4　用叠加法求梁的变形

梁的简图	挠曲线方程	转角和挠度
	$y=-\dfrac{Fx^2}{6EI}(3l-x)$	$\theta_B=-\dfrac{Fl^2}{2EI}$ $y_B=-\dfrac{Fl^3}{3EI}$
	$y=-\dfrac{Fx^2}{6EI}(3a-x)\quad 0\le x\le a$ $y=-\dfrac{Fa^2}{6EI}(3x-a)\quad a\le x\le l$	$\theta_B=-\dfrac{Fa^2}{2EI}$ $y_B=-\dfrac{Fa^2}{6EI}(3l-a)$
	$y=-\dfrac{qx^2}{24EI}(x^2-4lx+6l^2)$	$\theta_B=-\dfrac{ql^3}{6EI}$ $y_B=-\dfrac{ql^4}{8EI}$

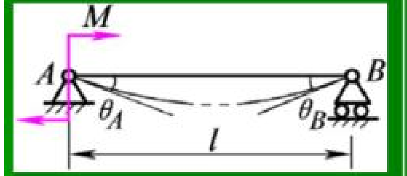
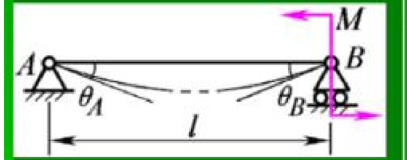
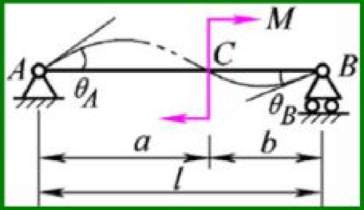
§ 6-4 用叠加法求梁的变形

梁的简图	挠曲线方程	转角和挠度
	$y=-\dfrac{Mx^2}{2EI}$	$\theta_B=-\dfrac{Ml}{EI}$ $y_B=-\dfrac{Ml^2}{2EI}$
	$y=-\dfrac{Mx^2}{2EI}\quad 0\le x\le a$ $y=-\dfrac{Ma}{EI}(x-\dfrac{a}{2})\quad a\le x\le l$	$\theta_B=-\dfrac{Ma}{EI}$ $y_B=-\dfrac{Ma}{EI}(l-\dfrac{a}{2})$
	$y=-\dfrac{Fx}{48EI}(3l^2-4x^2)$ $0\le x\le\dfrac{l}{2}$	$\theta_A=-\theta_B=-\dfrac{Fl^2}{16EI}$ $y_C=-\dfrac{Fl^3}{48EI}$

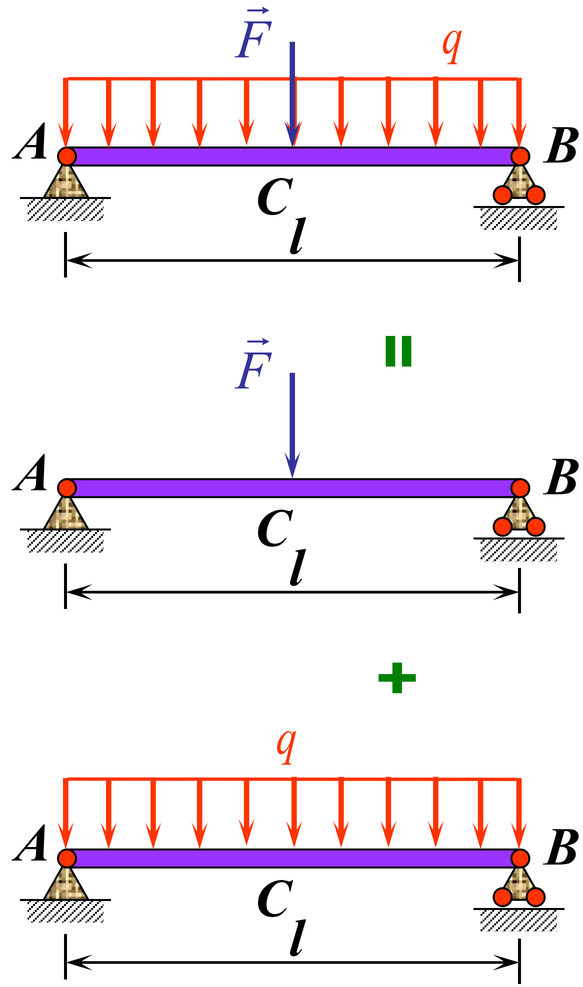
§ 6-4　用叠加法求梁的变形

梁的简图	挠曲线方程	转角和挠度
	$y=-\dfrac{Fbx}{6EIl}(l^2-x^2-b^2)$ $0\le x\le a$ $y=-\dfrac{Fb}{6EIl}[\dfrac{l}{b}(x-a)^3+x(l^2-b^2)-x^3]$ $a\le x\le l$	$\theta_A=-\dfrac{Fab(l+b)}{6EIl}$　$\theta_B=\dfrac{Fab(l+a)}{6EIl}$ 设$a>b$，在$x=\sqrt{\dfrac{l^2-b^2}{3}}$处 $y_{\max}=-\dfrac{Fb(l^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}EIl}$， 在$x=l/2$处　$y_{0.5l}=-\dfrac{Fb(3l^2-4b^2)}{48EI}$
	$y=-\dfrac{qx}{24EI}(l^3-2lx^2+x^3)$	$\theta_A=-\theta_B=-\dfrac{ql^3}{24EI}$ $x=\dfrac{l}{2}$　$y_{\max}=-\dfrac{5ql^4}{384EI}$

§ 6-4　用叠加法求梁的变形

梁的简图	挠曲线方程	转角和挠度
	$y=-\frac{Mx}{6EIl}(l-x)(2l-x)$	$\theta_A=-\frac{Ml}{3EI}$，$\theta_B=\frac{Ml}{6EI}$ $x=(1-\frac{1}{\sqrt{3}})l$，$y_{\max}=-\frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x=l/2$，$y_{0.5l}=-\frac{Ml^2}{16EI}$
	$y=-\frac{Mx}{6EIl}(l^2-x^2)$	$\theta_A=-\frac{Ml}{6EI}$，$\theta_B=\frac{Ml}{3EI}$ $x=\frac{l}{\sqrt{3}}$，$y_{\max}=-\frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x=l/2$，$y_{0.5l}=-\frac{Ml^2}{16EI}$
	$y=\frac{Mx}{6EIl}(l^2-x^2-3b^2)$ $0\le x\le a$ $y=\frac{M}{6EIl}[-x^3+3l(x-a)^2+$ $(l^2-3b^2)x]\quad a\le x\le l$	$\theta_A=\frac{M}{6EIl}(l^2-3b^2)$ $\theta_B=\frac{M}{6EIl}(l^2-3a^2)$

例6-4 按叠加原理求A点转角和C点挠度。



解:(1) 载荷分解

(2) 查梁的简单载荷变形表, 得简单载荷引起的变形

$$\theta_A(\vec{F}) = -\frac{Fl^2}{16EI} \qquad w_C(\vec{F}) = -\frac{Fl^3}{48EI}$$

$$\theta_A(q) = -\frac{ql^3}{24EI} \qquad w_C(q) = -\frac{5ql^4}{384EI}$$

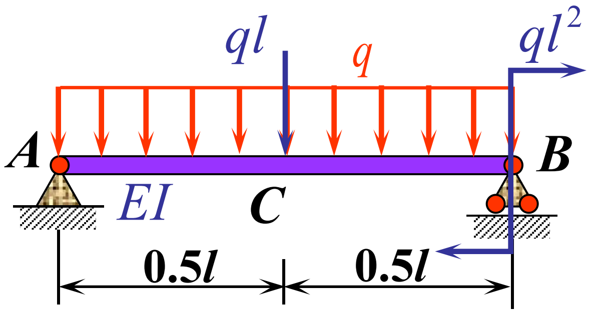
(3) 变形叠加

$$\theta_A = \theta_A(\vec{F}) + \theta_A(q) = -\frac{Fl^2}{16EI} - \frac{ql^3}{24EI}$$

$$w_C = w_C(\vec{F}) + w_C(q) = -\frac{Fl^3}{48EI} - \frac{5ql^4}{384EI}$$

§ 6-4 用叠加法求梁的变形

例6-5 已知q、l、EI，求：w_C，θ_B。

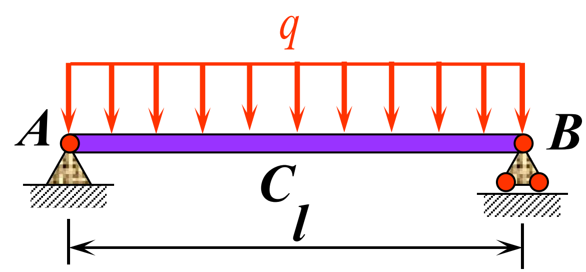


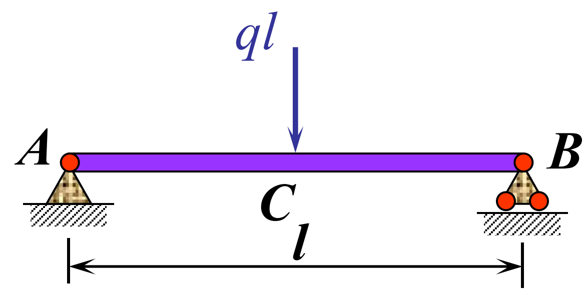
$$w_C = w_C(q) + w_C(ql) + w_C(ql^2)$$

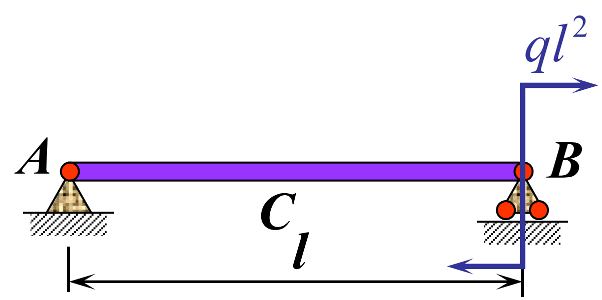
$$= -\frac{ql^4}{48EI} - \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{ql^4}{16EI} = \frac{11ql^4}{384EI}$$

$$\theta_B = \theta_B(q) + \theta_{B2}(ql) + \theta_{B3}(ql^2)$$

$$= \frac{ql^3}{16EI} + \frac{ql^3}{24EI} - \frac{ql^3}{3EI} = -\frac{11ql^3}{48EI}$$

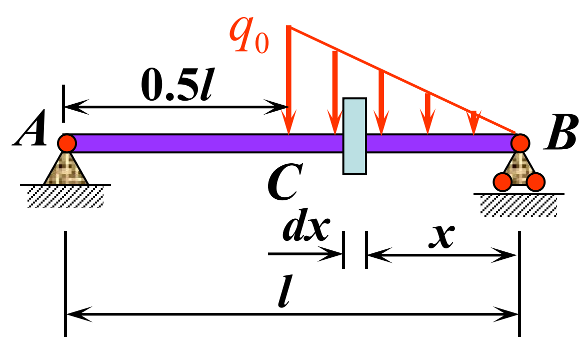






§6-4 用叠加法求梁的变形

例6-6 按叠加原理求C点挠度。



解:(1) 载荷分解

$$dF = q(x)dx = \frac{q_0}{0.5l} x \cdot dx$$

(2) 由梁的简单载荷变形表查简单载荷引起的变形

$$w_C(\vec{F}) = -\frac{Fb(3l^2-4b^2)}{48EI} \Rightarrow w_C(dF) = -\frac{dFx(3l^2-4x^2)}{48EI}$$

$$= -\frac{q_0x^2(3l^2-4x^2)}{24EIl}dx$$

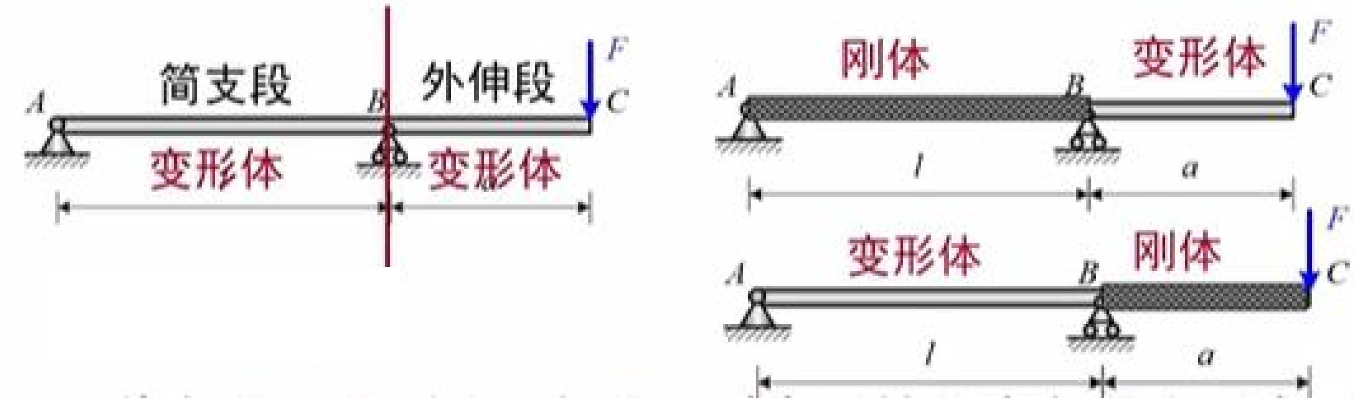
(3) 变形叠加 $w_C(q) = \int_l w_C(dF) = -\int_0^{0.5l} \frac{q_0x^2(3l^2-4x^2)}{24EIl}dx = -\frac{q_0l^4}{240EI}$

载荷叠加法适用于简支梁和悬臂梁

§6-4 用叠加法求梁的变形

结构形式叠加（逐段刚化法）：

将外伸梁等效成简支梁和悬臂梁。



在荷载作用下，无论是简支段还是外伸段，都发生了变形，这两段都是变形体。将各段逐段钢化，实际上是只让其中一段发生变形，另一段不变形。即将各段同时变形转化为各段先后变形。

§6-4 用叠加法求梁的变形

结构形式叠加（逐段刚化法）：

（1）把梁分段

（2）将各段逐段钢化

（3）把各段按照受力与变形等效的原则转换为表中形式的梁，然后查表

（4）利用叠加法求解梁的变形

§ 6-5　刚度校核、提高弯曲刚度的措施

一、梁的刚度条件

$$|w|_{\max} \leq [\delta]$$ —— 构件的许用挠度；

$$|\theta|_{\max} \leq [\theta]$$ —— 构件的许用转角；

工程中，$[\delta]$常用梁的计算跨度l的若干分之一表示：

桥式起重机梁：$$[\delta]=(\frac{1}{500}\sim\frac{1}{750})l$$

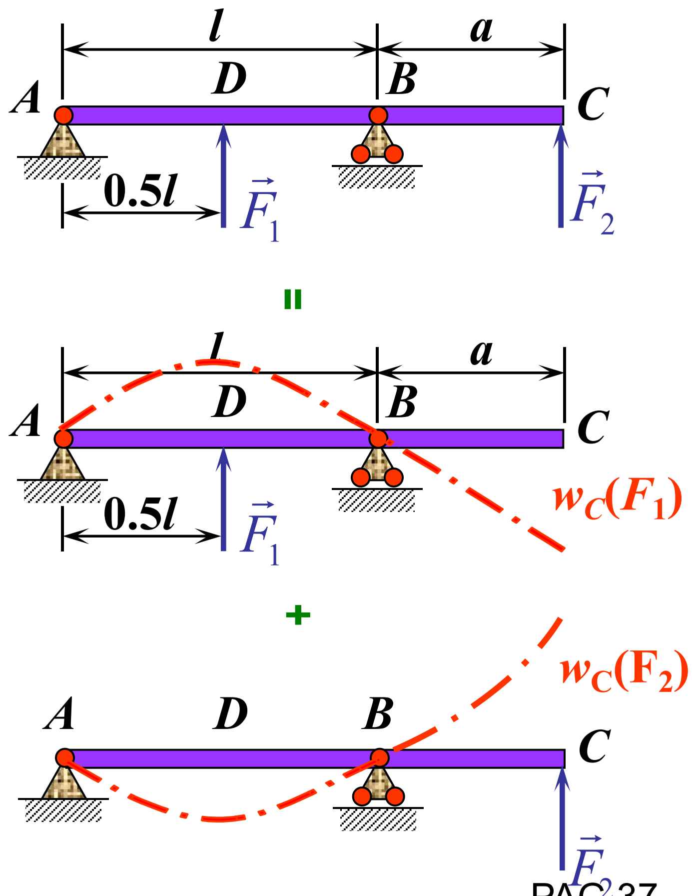
一般用途的轴：$$[\delta]=(0.0003\sim0.0005)l$$

土建工程：$$[\delta]=(\frac{1}{1000}\sim\frac{1}{250})l$$

齿轮或滑动轴承处：$$[\theta]=0.001rad$$

§ 6-5 刚度校核、提高弯曲刚度的措施

例6-8 已知空心圆杆内径d =40mm, 外径D=80mm, l =0.4m, a = 0.1m, F_1=1kN, F_2=2kN, 若C点[δ]=10^{-5}m, B点[θ]=0.001rad, 试核此杆的刚度。（E = 210GPa）



解:(1) 载荷分解

(2) 由梁的简单载荷变形表得

$$\theta_B(\vec{F}_1) = -\frac{F_1 l^2}{16EI}; \quad \theta_B(\vec{F}_2) = \frac{F_2 a l}{3EI};$$

$$w_C(\vec{F}_1) = \theta_B(\vec{F}_1)\cdot a = -\frac{F_1 l^2}{16EI}\cdot a$$

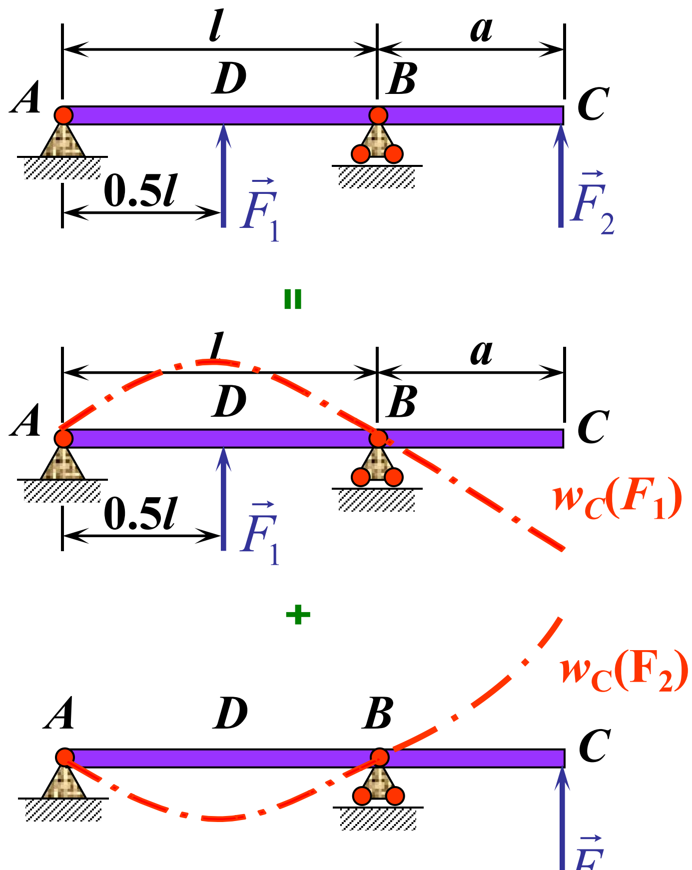
$$w_C(\vec{F}_2) = \frac{F_2 a^2}{3EI}(l+a)$$

§ 6-5 刚度校核、提高弯曲刚度的措施

例6-8 已知空心圆杆内径d =40mm, 外径D=80mm, l =0.4m, a = 0.1m, F_1=1kN, F_2=2kN, 若C点[δ]=10^{-5}m, B点[θ]=0.001rad, 试核此杆的刚度。(E = 210GPa)

$$\theta_B(\vec{F}_1) = -\frac{F_1 l^2}{16EI};\theta_B(\vec{F}_2) = \frac{F_2 a l}{3EI};$$

$$w_C(\vec{F}_1) = -\frac{F_1 l^2}{16EI}\cdot a; w_C(\vec{F}_2) = \frac{F_2 a^2}{3EI}(l+a).$$



(3) 叠加求复杂载荷下的变形

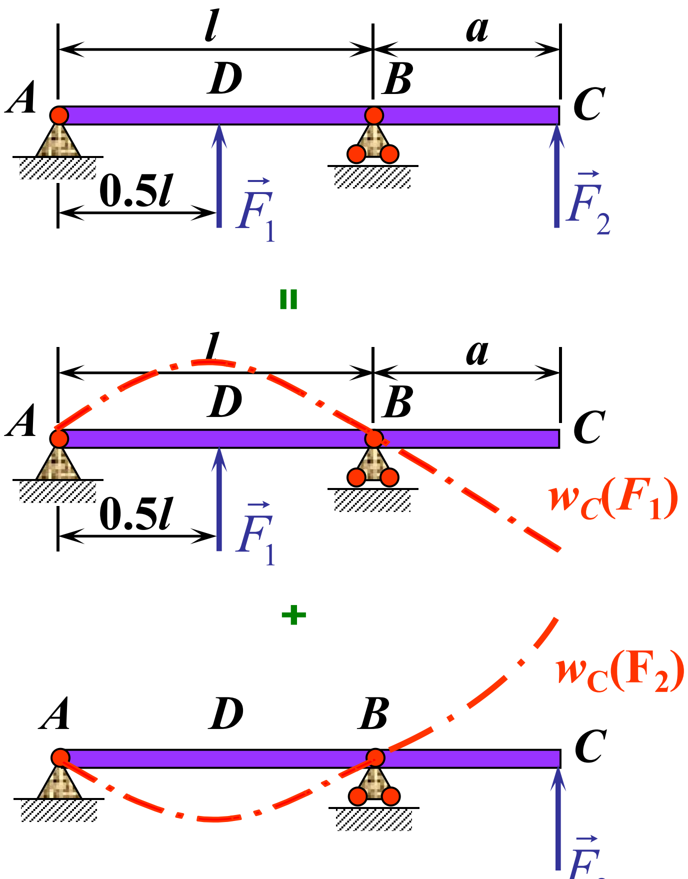
$$\theta_B = \theta_B(\vec{F}_1) + \theta_B(\vec{F}_2) = -\frac{F_1 l^2}{16EI} + \frac{F_2 a l}{3EI}$$

$$w_C = w_C(\vec{F}_1) + w_C(\vec{F}_2) = \frac{F_2 a^2}{3EI}(l+a) - \frac{F_1 a l^2}{16EI}$$

§ 6-5 刚度校核、提高弯曲刚度的措施

例6-8 已知空心圆杆内径d =40mm, 外径D=80mm, l =0.4m, a = 0.1m, F_1=1kN, F_2=2kN, 若C点[δ]=10^{-5}m, B点[θ]=0.001rad, 试核此杆的刚度。（E = 210GPa）

$$\theta_B=\frac{F_2al}{3EI}-\frac{F_1l^2}{16EI};w_C=\frac{F_2a^2}{3EI}(l+a)-\frac{F_1al^2}{16EI}.$$



（4）校核刚度

$$I_z=\frac{\pi(D^4-d^4)}{64}=188\times10^{-8}\text{m}^4$$

$$\Rightarrow w_C=0.519\times10^{-5}\text{m}<[\delta]=10^{-5}\text{m}$$

$$\theta_B=0.0000423rad<[\theta]=0.001rad$$

∴此杆有足够的刚度

§6-5 刚度校核、提高弯曲刚度的措施

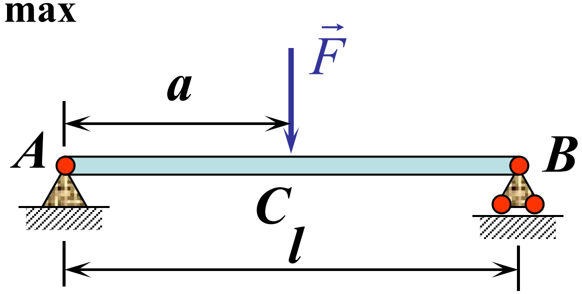
二、提高弯曲刚度的措施

等直梁的挠曲线近似微分方程 $EIw'' = M(x)$

1、载荷 — 梁的变形与梁的载荷有关

合理安排载荷作用点，以降低$M_{\max}$

使载荷尽量靠近支座，由支座承担大多数载荷。



$$a = 0.5l时, w_{\max} = \frac{Fl^3}{48EI}$$

$w_{\max}$降低42.8%

$$a = 0.2l时, w_{\max} = 0.572\frac{Fl^3}{48EI}$$

§ 6-5　刚度校核、提高弯曲刚度的措施

等直梁的挠曲线近似微分方程 $EIw'' = M(x)$

2、材料 — 梁的变形与弹性模量 $\boldsymbol{E}$ 成反比；

工程常用钢材的弹性模量 $\boldsymbol{E}$ 基本相同，此方法对变形影响不大。

3、截面 — 梁的变形与截面的惯性矩$\boldsymbol{I_z}$成反比；

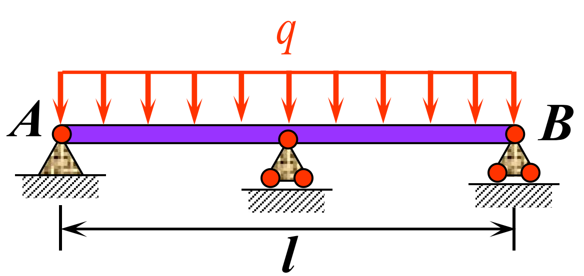
采用工字形和箱形截面，以提高惯性矩。与强度不同的是，要提高全梁或大部分梁的惯性矩，才能使梁的变形有明显改善。

§ 6-5　刚度校核、提高弯曲刚度的措施

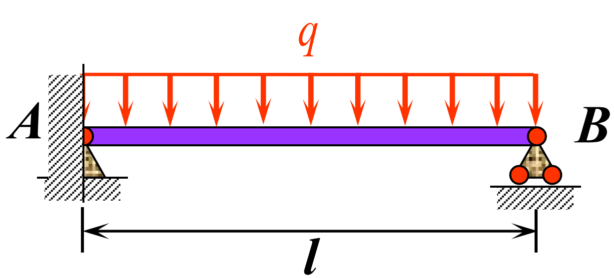
等直梁的挠曲线近似微分方程 $EIw'' = M(x)$

4、跨长 — 梁的变形与跨长l的n次幂成正比。

※ 增加支座以减小跨度



※ 加固支座



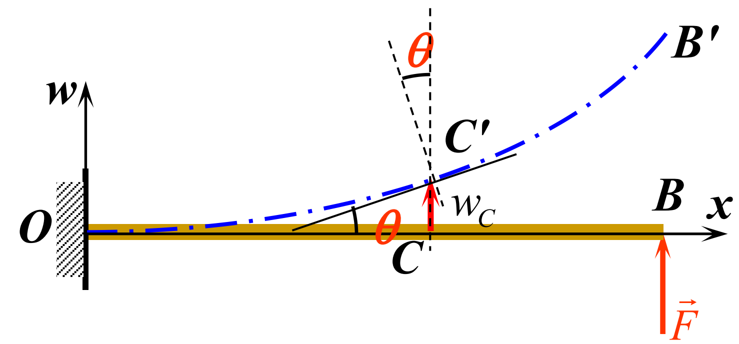
w_{max}降低60%

本章小结

一、度量梁变形的两个基本量

1、挠度：

横截面形心沿垂直于轴线方向的线位移，与w同向为正，反之为负。



2、转角：

横截面对其原位置的角位移，等于挠曲线在某点处的切线与x轴的夹角。

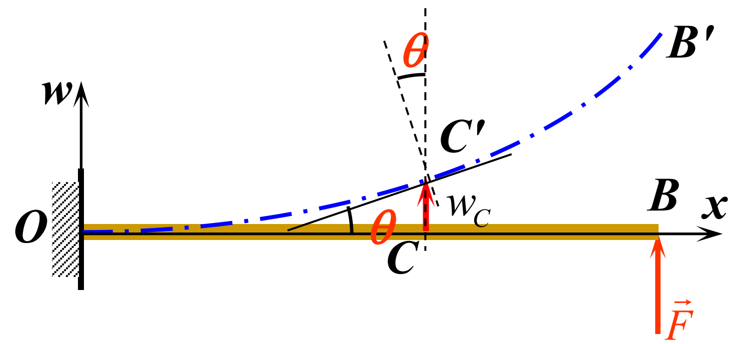
挠曲线某一点斜率为正，则转角为正，反之为负；或以梁轴线为基线，逆时针转向为正，反之为负。

本章小结

二、挠曲线近似微分方程

挠曲线：

梁发生弯曲变形时，轴线变为光滑平坦的曲线。



挠曲线方程 $w = f(x)$

转角方程 $\theta = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w'$

挠曲线近似微分方程 $w'' = \dfrac{M(x)}{EI}$ 忽略剪力对变形的影响；忽略了$(w')^2$。

等直梁的挠曲线近似微分方程 $EIw'' = M(x)$

本章小结

三、积分法计算梁的变形

挠曲线近似微分方程 $EIw''=M(x)$

积分一次得转角方程 $EIw'=EI\theta=\int M(x)dx+C$

积分两次得挠度方程 $EIw=\int[\int (x)dx]dx+Cx+D$

积分常数确定：边界条件、连续性条件

注意：

(1) 凡载荷有突变处(包括中间支座)，应作为分段点；

(2) 凡截面或材料有变化处，应作为分段点；

(3) 中间铰可看作两段梁间的联系，此联系体现在两段梁之间的相互作用力，应作为分段点。

本章小结

四、叠加法求梁的变形

叠加原理：

多个载荷同时作用于结构而引起的变形等于每个载荷单独作用于结构而引起的变形的代数和。

适用条件：所求物理量与载荷为线性关系。

要求：
（1）小变形
（2）胡克定律

本章小结

五、梁的刚度条件

$$|w|_{\max} \le [\delta]$$ —— 构件的许用挠度；

$$|\theta|_{\max} \le [\theta]$$ —— 构件的许用转角；

提高梁刚度的措施：

(1) 合理安排载荷作用点、增加支座、加固支座；

(2) 增大全梁或大部分梁的惯性矩。