第四章 弯曲内力

主讲人：吕杭原

邮箱：lvhy@mail.neu.edu.cn

办公室：新机械楼319

QQ：494489092

第四章 弯曲内力

§4-1 弯曲的概念和实例

§4-2 梁的计算简图

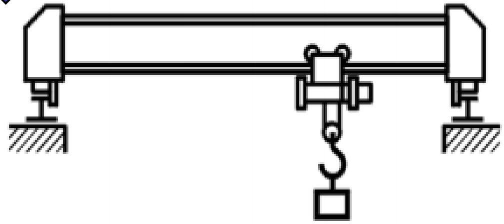
§4-3 剪力和弯矩

§4-4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

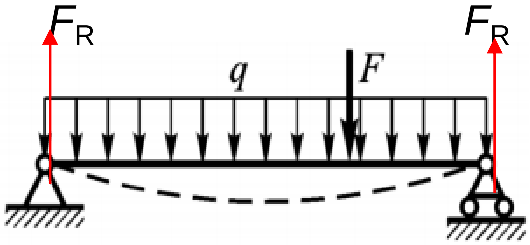
§ 4–1 弯曲的概念和实例

一、应用实例

吊车梁



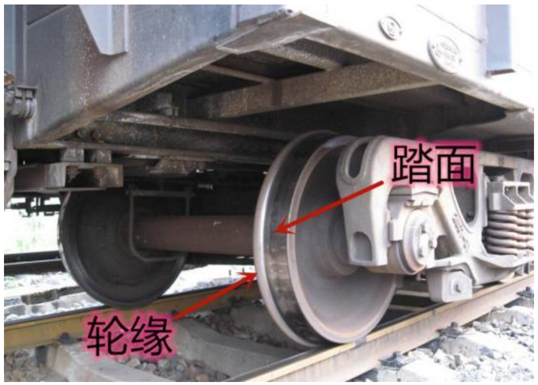
(a)

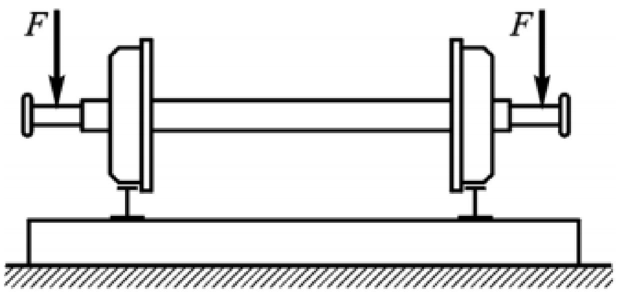


§ 4-1 弯曲的概念和实例

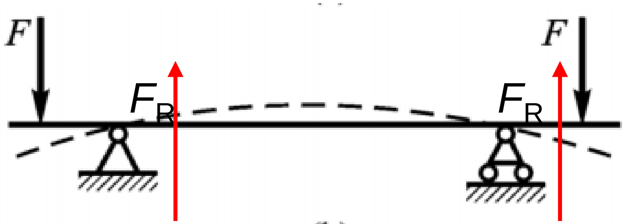
一、应用实例

火车轮轴





(a)



(b)

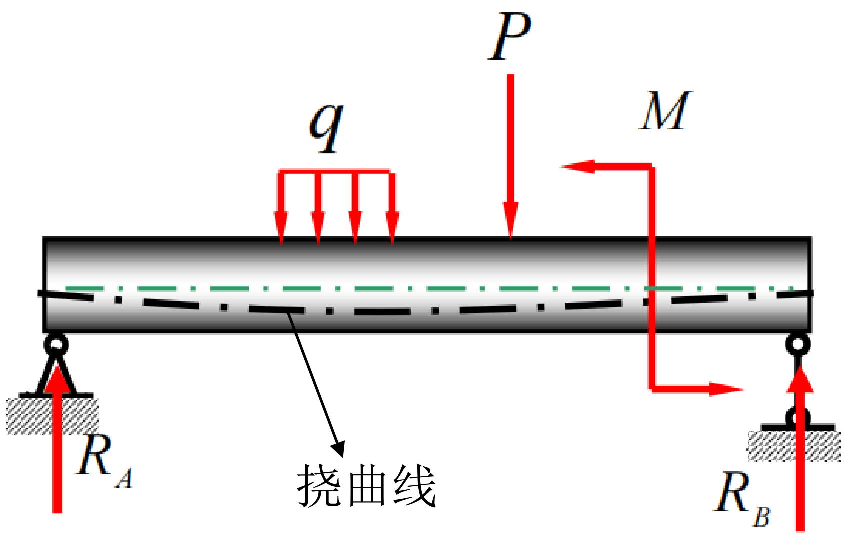
§4-1 弯曲的概念和实例

二、弯曲的概念

1、杆件受垂直于轴线的外力或外力偶矩的作用时，轴线变成了曲线，这种变形称为**弯曲**。

2、弯曲变形后，杆件的轴线由直线变成曲线，则该曲线称为**挠曲线**。

3、**梁**—主要发生弯曲变形的构件称为梁。



4、**受力特点**——作用于杆件上的**外力（包括力偶）都垂直于杆**的轴线。

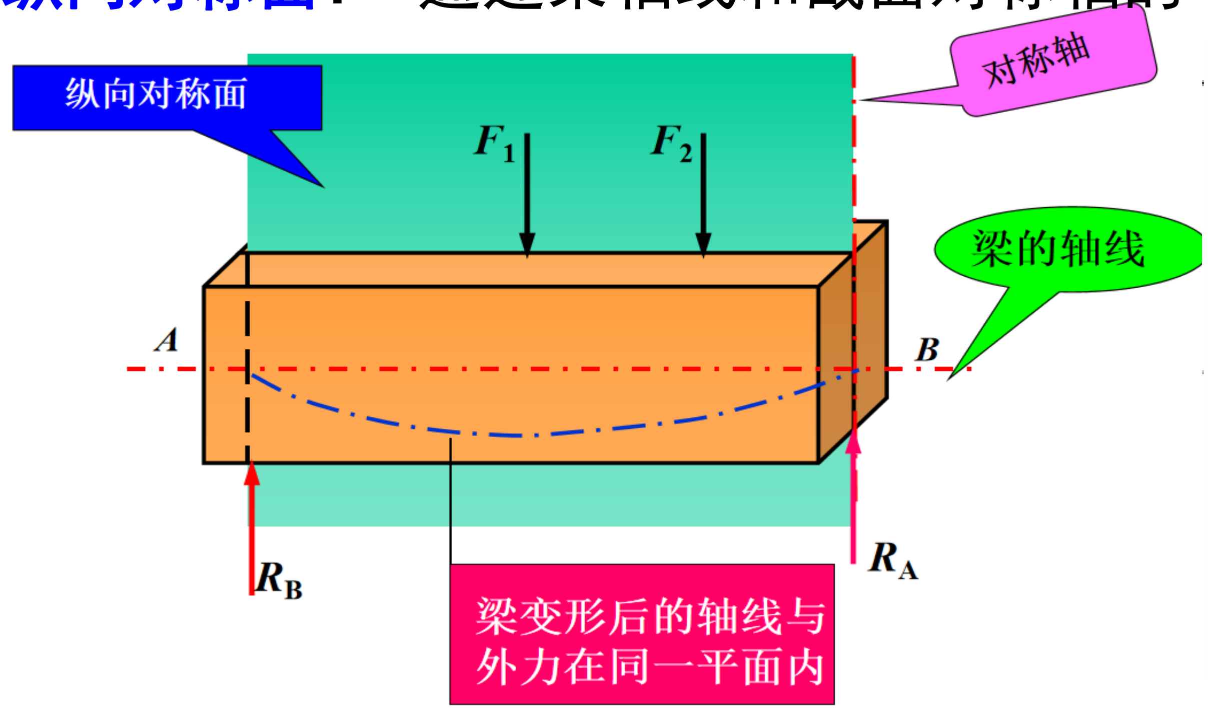
5、**变形特点**——变形前为直线的轴线，变形后成为曲线。

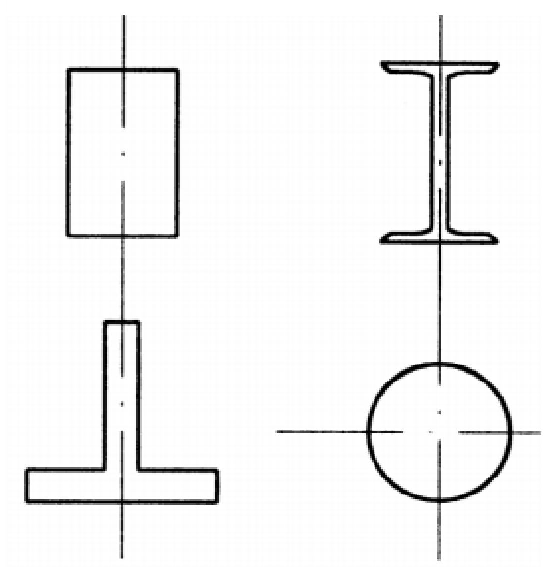
§4-1 弯曲的概念和实例

三、平面弯曲

平面弯曲—作用于梁上的所有外力都在纵向对称面内，弯曲变形后的轴线是一条在该纵向对称面内的平面曲线，这种弯曲称为平面弯曲。

纵向对称面： 通过梁轴线和截面对称轴的平面。

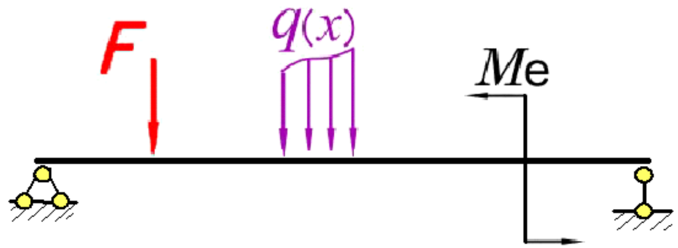




§4-2 梁的计算简图

一、梁的计算简图

将工程实际中的受弯梁，简化其外形、载荷和支承得到用于力学分析的计算简图。

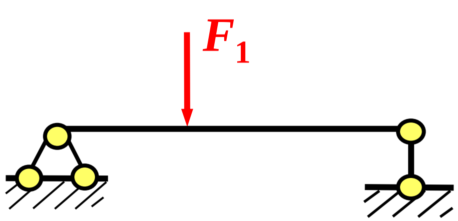


1. 构件本身的简化

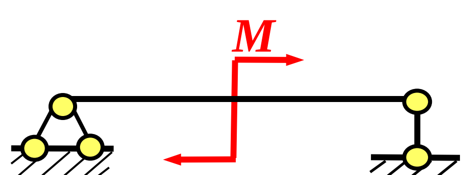
梁的轴线代替梁

2. 载荷的简化

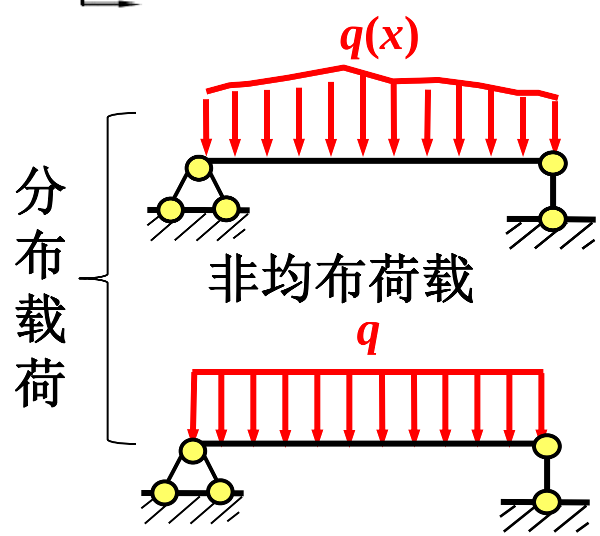
作用于梁上的载荷可简化为三种类型：
集中力、集中力偶和分布载荷



集中力



集中力偶

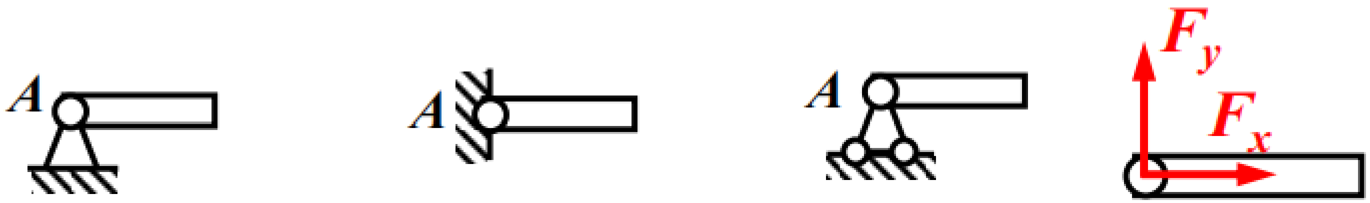


均布荷载

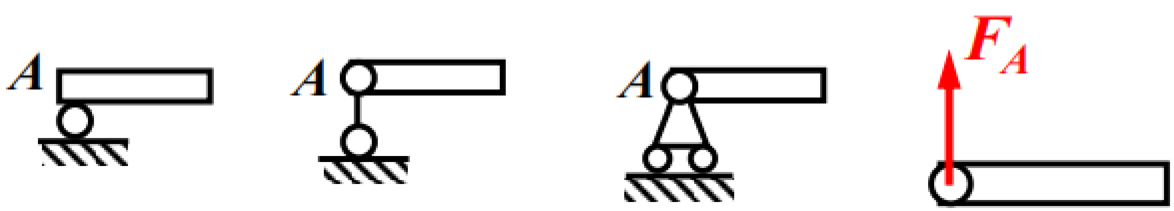
§4-2　梁的计算简图

3、支座的简化

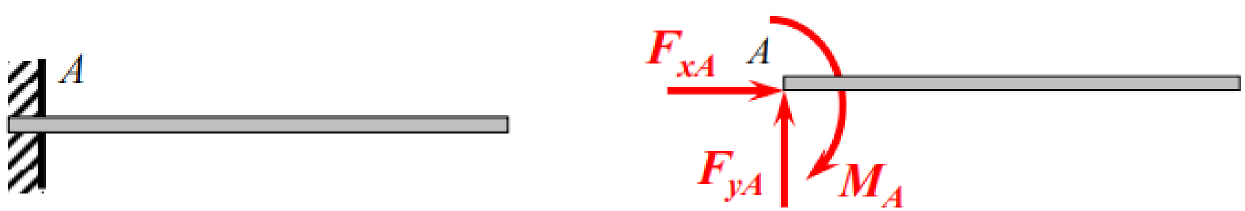
(1) 固定铰支座　如：桥梁下的固定支座，止推滚珠轴承等。



(2) 滑动铰支座　如：桥梁下的辊轴支座，滚珠轴承等。



(3) 固定端　如：游泳池的跳板支座，木桩下端的支座等。

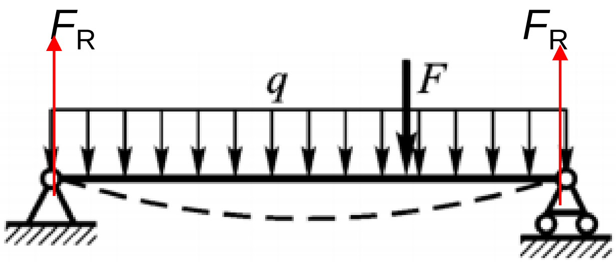


§4-2 梁的计算简图

吊车大梁简化实例

梁的轴线代替梁，将荷载和支座加到轴线上。

梁的计算简图



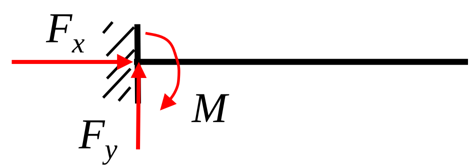
§4-2 梁的计算简图

二、静定梁的基本形式

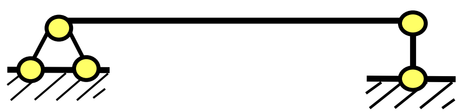
$$\begin{cases}\sum m_A = 0 \\ \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0\end{cases}$$

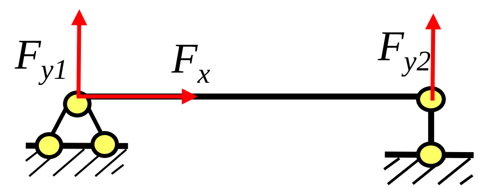
静定梁——约束反力可由静力平衡方程求得，统称静定梁。

(*a*)悬臂梁

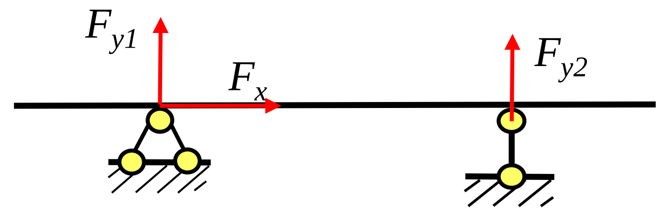


(*b*)简支梁





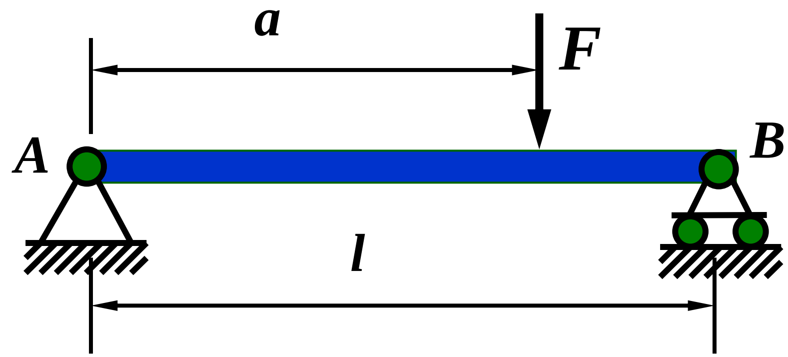
(*c*)外伸梁



§4-3 剪力和弯矩

已知 如图，F，a，l，求 距A端 x（$x<a$）处截面上内力。

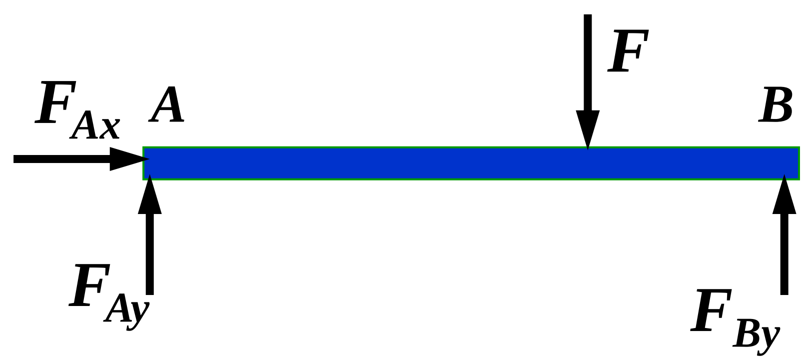
解：求支座反力



$$\sum m_A = 0, \quad F_{By} = \frac{Fa}{l}$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} = \frac{F(l-a)}{l}$$

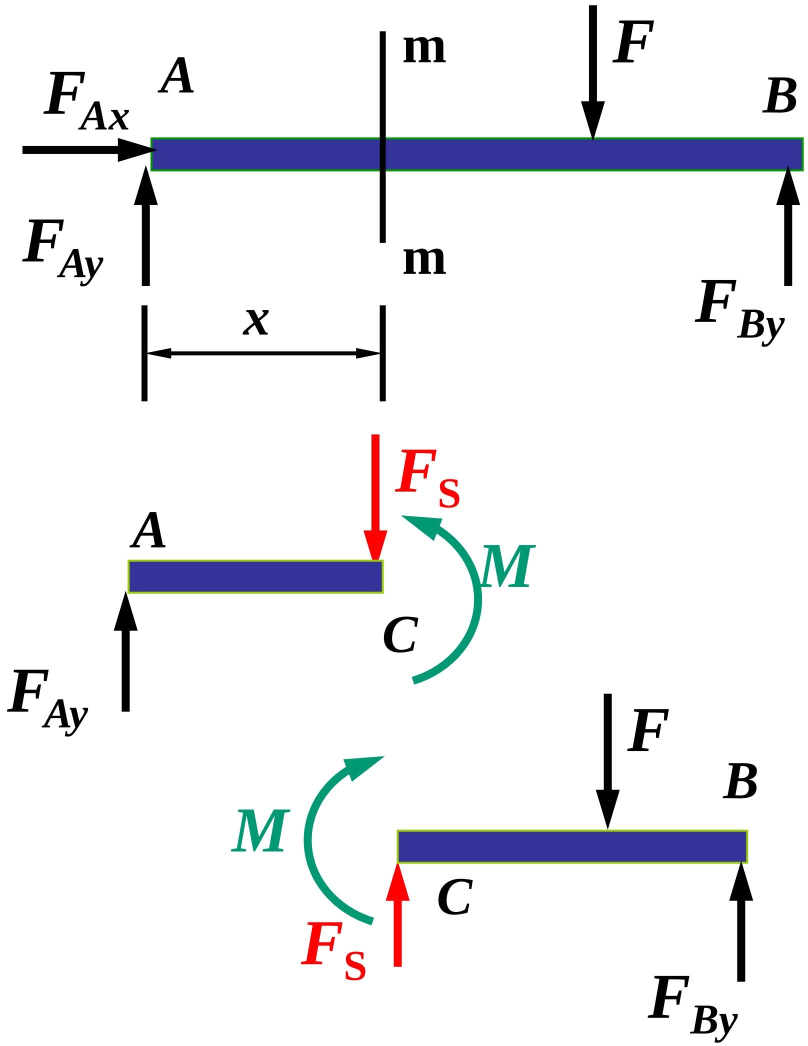


§ 4-3 剪力和弯矩

求内力—截面法

$$\sum F_y = 0, \quad Fs = F_{Ay} = \frac{F(l-a)}{l}$$

$$\sum M_C = 0, \quad M = F_{Ay} \cdot x$$

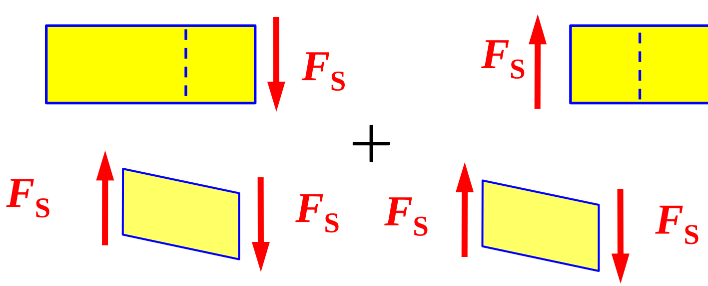


弯曲构件内力 $\begin{cases} \text{剪力} \\ \text{弯矩} \end{cases}$

§4-3 剪力和弯矩

①剪力符号：

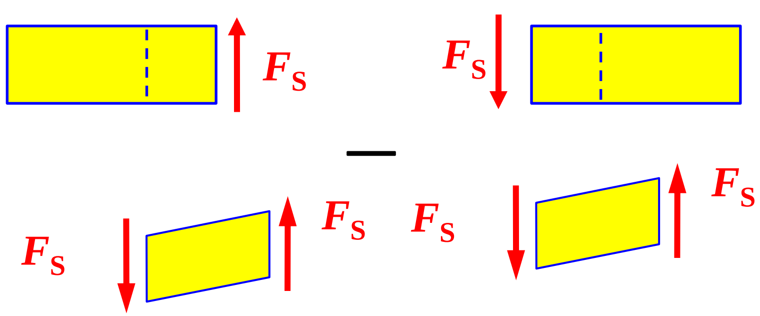
剪力对所选取部分上任意一点的矩为顺时针转向时，剪力为正；反之为负。



顺时针转动

左高右低

剪力为正



逆时针转动

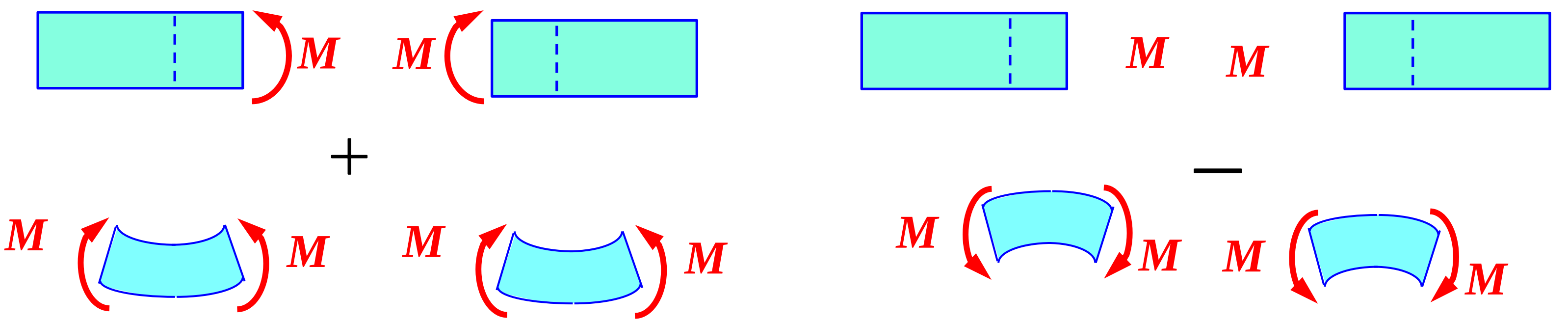
右高左低

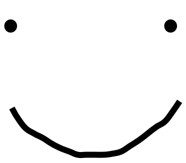
剪力为负

§4-3 剪力和弯矩

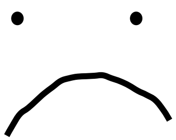
②弯矩符号：

弯矩使得梁呈凹形为正；反之为负。





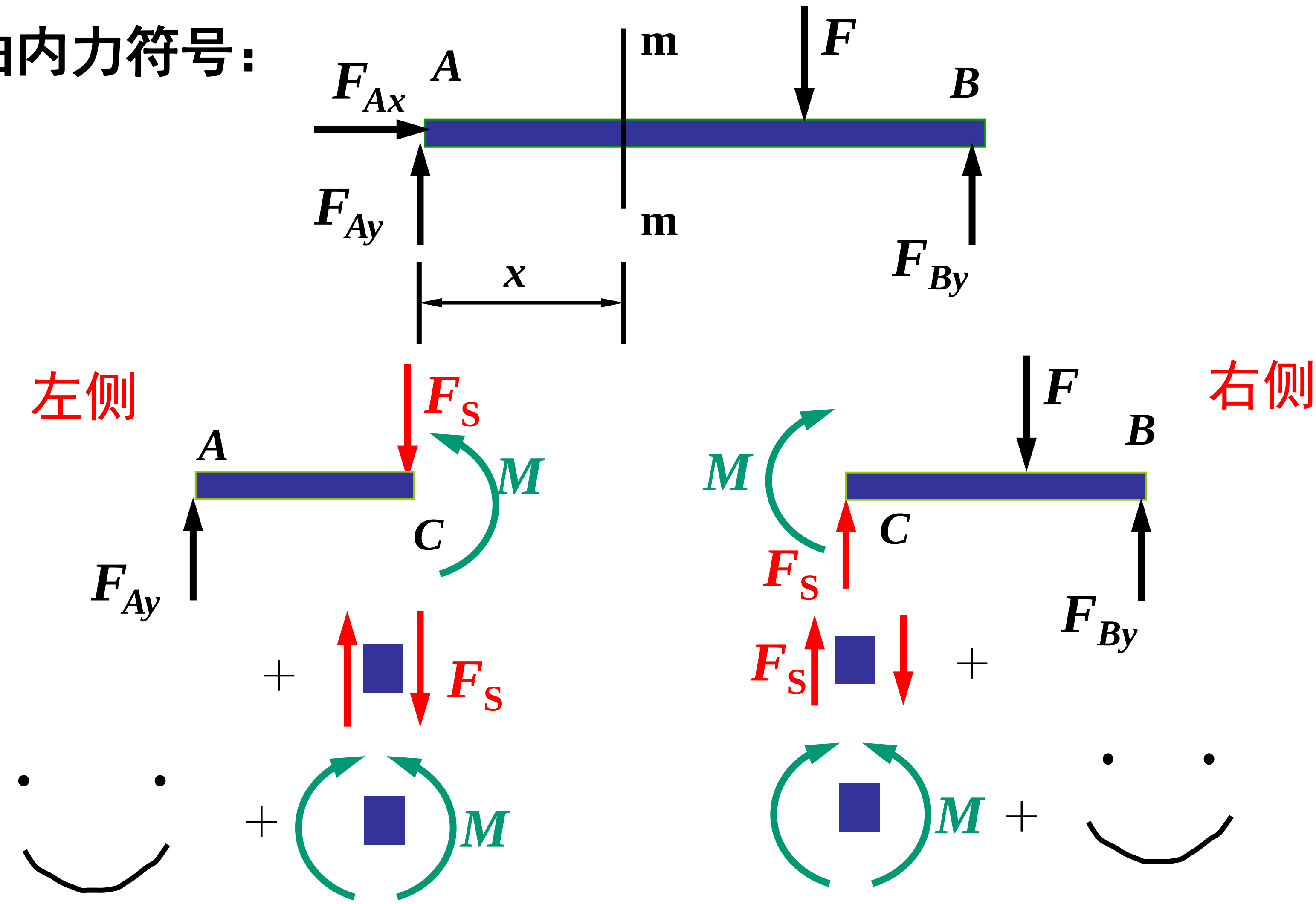
弯矩为正



弯矩为负

§4-3 剪力和弯矩

弯曲内力符号：



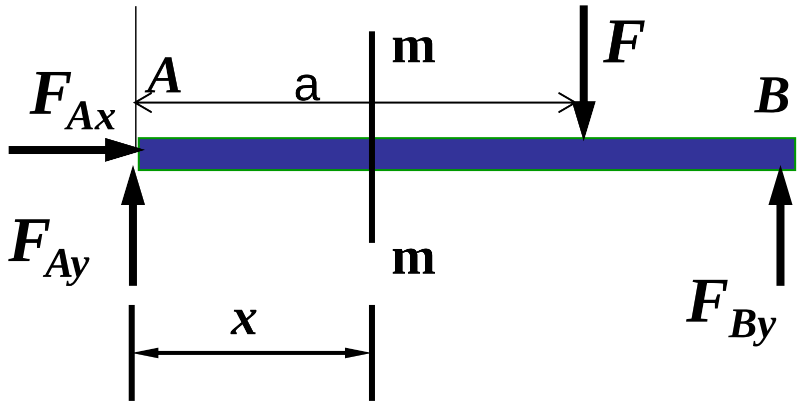
第四章 弯曲内力

列平衡方程：

外力：

M：逆+；顺-

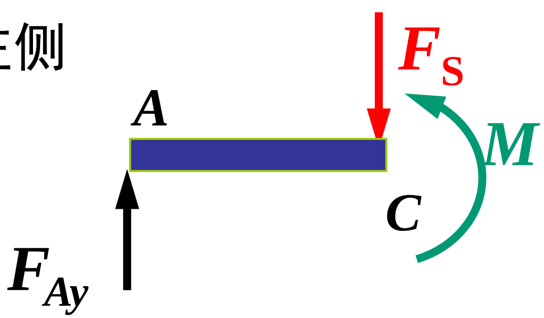
F：上+；下-



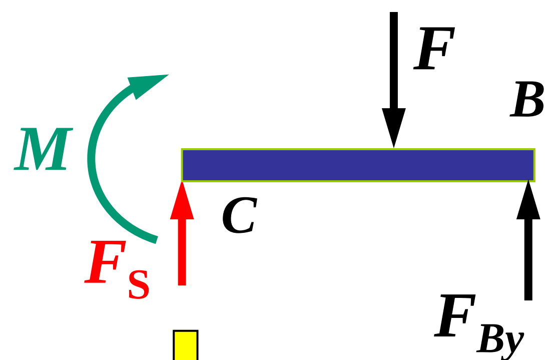
$$F_{Ay}=\frac{F(l-a)}{l}$$

$$F_{By}=\frac{Fa}{l}$$

左侧



右侧



$$\sum F_y=0,\quad -Fs+F_{Ay}=0$$

$$\sum M_C=0,\quad +M-F_{Ay}\cdot x=0$$

$$F_S=\frac{F(l-a)}{l}$$

$$M=\frac{Fx(l-a)}{l}$$

$$\sum F_y=0,\quad Fs+F_{By}-F=0$$

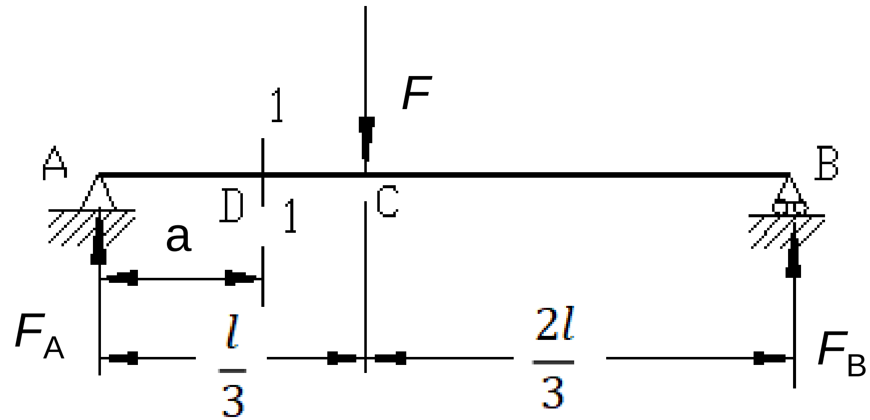
$$\sum M_C=0,\quad -M-F.(a-x)+F_{By}\cdot(l-x)=0$$

$$F_S=\frac{F(l-a)}{l}$$

$$M=\frac{Fx(l-a)}{l}$$

§4-3 剪力和弯矩

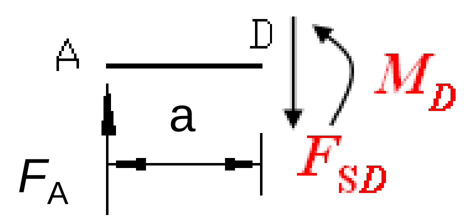
例1 如图所示的简支梁，试求1－1及C左右截面上的内力。



解：(1). 求支座反力

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_y=0, F_A+F_B-F=0\\&\sum M_A=0, F_B\cdot l-F\cdot\frac{l}{3}=0\end{aligned}\right\}$$

得 $F_A=\dfrac{2}{3}F, F_B=\dfrac{1}{3}F$



(2). 求截面1－1上的内力

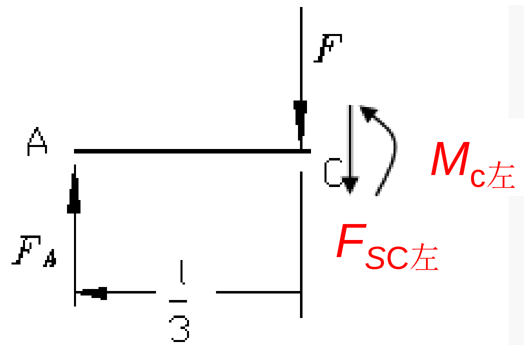
$$F_{SD}=F_A=\frac{2}{3}F \qquad M_D=F_A\cdot a=\frac{2}{3}Fa$$

§ 4-3 剪力和弯矩

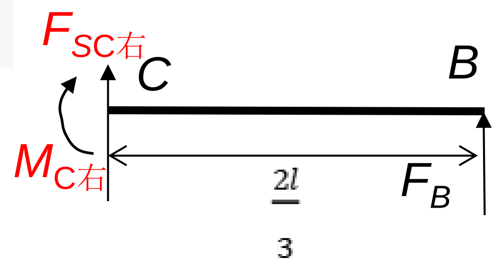
同理, 对于$C_{左}$截面:

$$F_{SC左}=F_A=\frac{2}{3}F$$

$$M_{C左}=\frac{2}{3}F\cdot\frac{l}{3}=\frac{2}{9}Fl$$



对于$C_{右}$截面:



$$F_{SC右}+F_B=0\ \therefore F_{SC右}=-\frac{1}{3}F \qquad M_{C右}=F_A\cdot\frac{l}{3}=\frac{2}{9}Fl$$

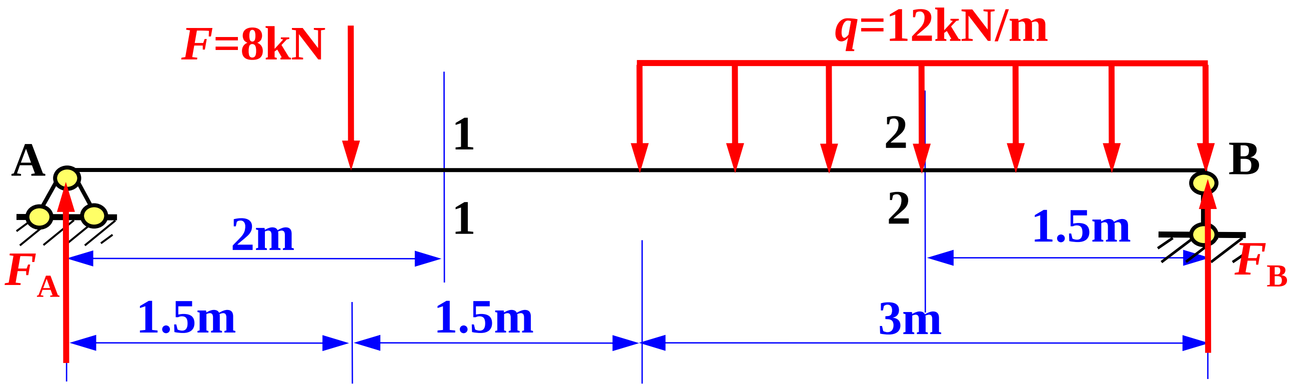
负号表示假设方向与实际方向相反, $F_{sc右}$应向下。

$$F_{SC左}\neq F_{SC右}, M_{C左}=M_{C右}$$

在集中力作用处，左右截面上剪力发生突变，突变值为该集中力的大小；而弯矩保持不变。

§4-3 剪力和弯矩

例2 求下图所示简支梁1-1与2-2截面的剪力和弯矩。



解： 1、求支反力

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -F_A \times 6 + F \times 4.5 + q \times 3 \times \frac{3}{2} = 0 \ \Rightarrow F_A = 15\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow F_A + F_B - F - q \times 3 = 0 \ \Rightarrow F_B = 29\text{kN}$$

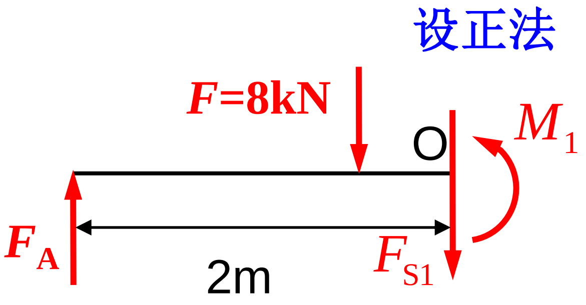
(也可由$\sum M_A = 0$求F_B或校核F_B的正误)

§4-3 剪力和弯矩

2、计算1-1截面的内力

$$F_{S1}=F_A-F=7\text{kN}$$

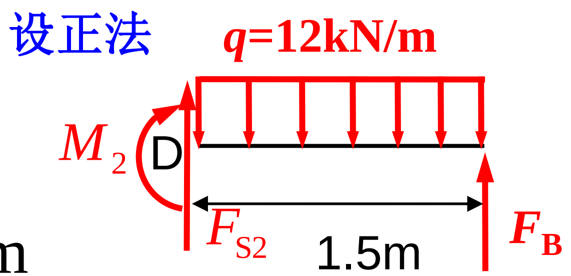
$$M_1=F_A\times 2-F\times(2-1.5)=26\text{kN}\cdot\text{m}$$



3、计算2-2截面的内力

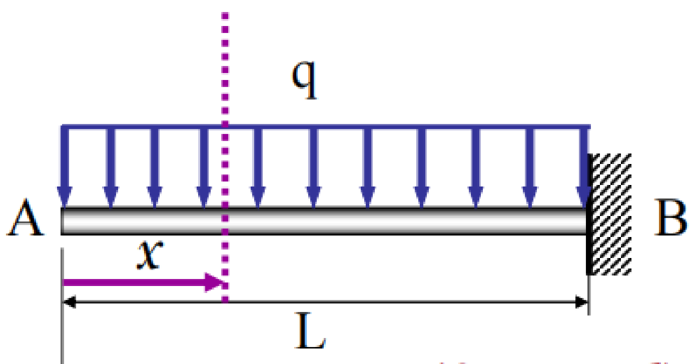
$$F_{S2}=q\times 1.5-F_B=-11\text{kN}$$

$$M_2=F_B\times 1.5-q\times 1.5\times\frac{1.5}{2}=30\text{kN}\cdot\text{m}$$



§ 4-4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

一般情况下，梁横截面上的剪力和弯矩是随横截面的位置变化而变化的。



$$F_s(x) = -qx, \quad (0 \le x < l)$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2, \quad (0 \le x < l)$$

我们将反映梁的横截面上的剪力和弯矩随截面位置变化的函数式，分别称为剪力和弯矩方程。

剪力、弯矩方程：

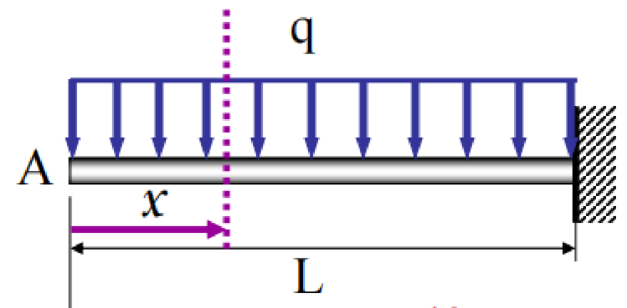
$$\begin{cases} F_S = F_S(x) \\ M = M(x) \end{cases}$$

x表示横截面沿梁的位置坐标。

§4–1 弯曲的概念和实例

显示剪力和弯矩随截面位置的变化规律的图形则分别称为剪力图和弯矩图。

先写方程后作图，不能用一个函数表达的要分段画。

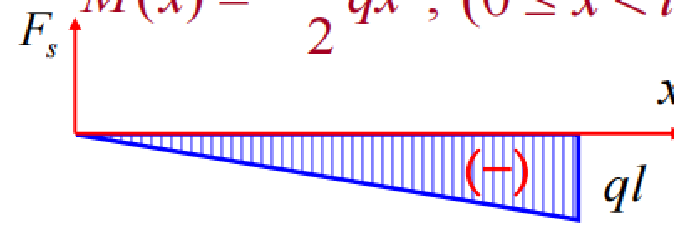


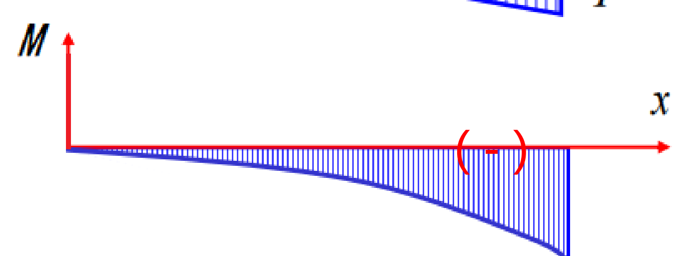
$$F_s(x) = -qx, \quad (0 \le x < l)$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2, \quad (0 \le x < l)$$

Fs 图的坐标系

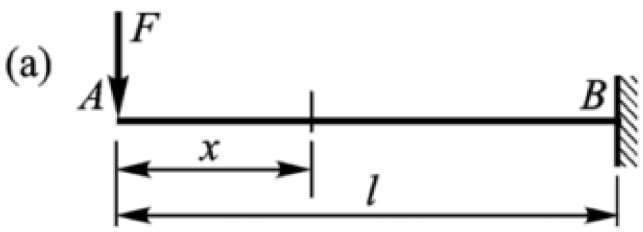
M 图的坐标系





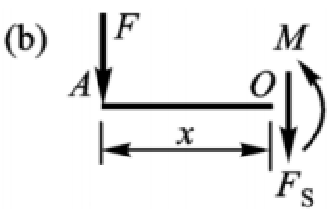
§ 4-1　弯曲的概念和实例

例3 悬臂梁，右端固定，左端受力F作用，作内力图。



解：　（1）列内力方程

截面法：　剪力和弯矩按正向设

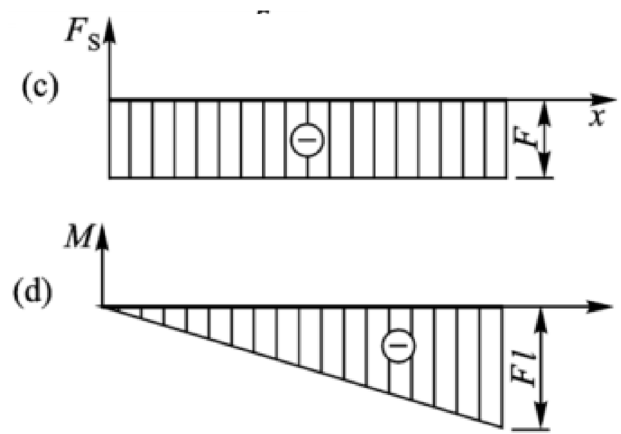


$$\sum F_y = 0 \quad -F - F_S = 0 \quad F_S = -F \quad (0 < x < l)$$

$$\sum M_O = 0 \quad Fx + M = 0 \quad M = -Fx \quad (0 \le x < l)$$

（2）根据方程作内力图

$$|M|_{\max} = Fl$$

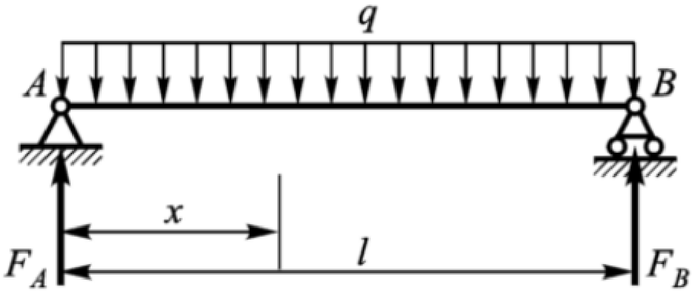


无载荷作用的梁段，剪力图为水平线，弯矩图为斜直线。

§4-1 弯曲的概念和实例

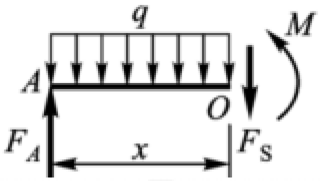
例4 简支梁受均布载荷q作用试写出剪力和弯矩方程，并画出剪力图和弯矩图。

解：1．求支座反力 $\sum M_A=0$， $\sum M_B=0$



$$F_A = F_B = ql/2$$

2．列内力方程，求剪力和弯矩



$$\sum F_y = 0 \quad F_A - qx - F_S = 0$$

$$\therefore F_S = \frac{ql}{2} - qx \quad (0 < x < l)$$

$$\sum M_O = 0 \quad -F_A x + qx.\frac{x}{2} + M = 0$$

$$\therefore M = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \quad (0 < x < l)$$

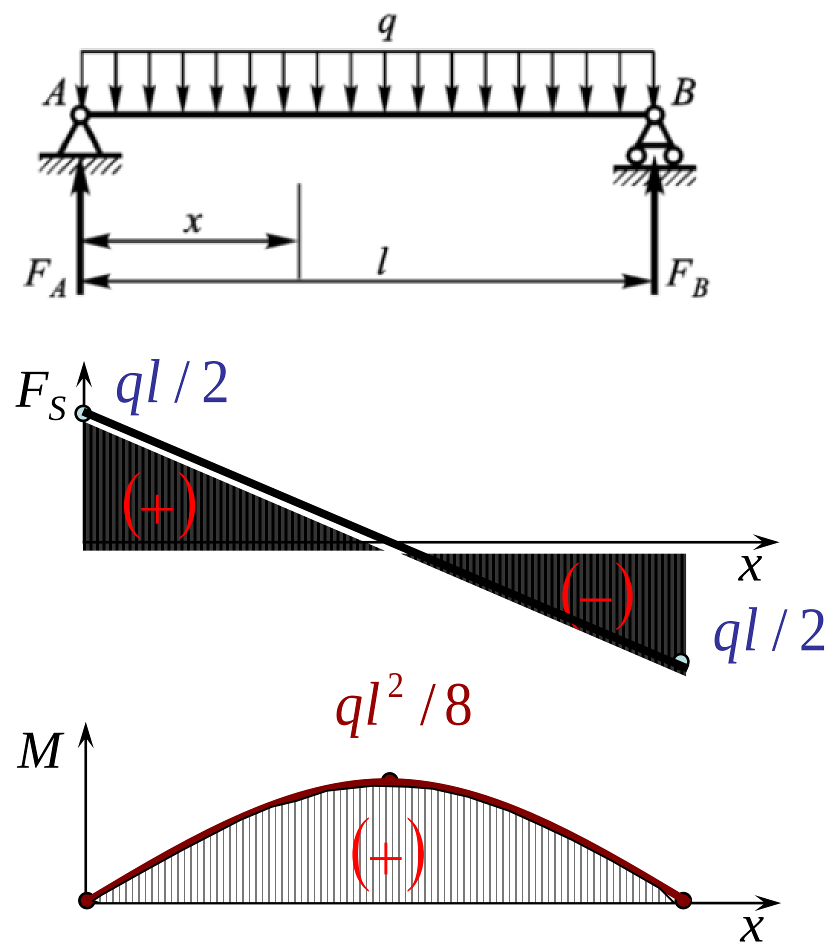
§ 4-1 弯曲的概念和实例

3. 根据方程作内力图

$$F_S = \frac{ql}{2} - qx \quad (0 < x < l)$$

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \quad (0 < x < l)$$

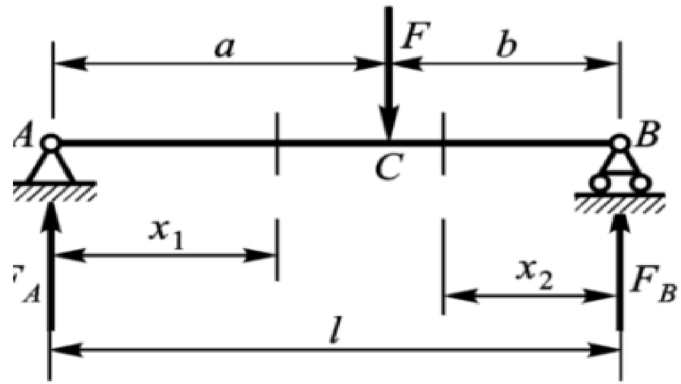
$$|F_S|_{\max} = \frac{ql}{2} \quad M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$



均布载荷作用的梁段，剪力图为斜直线，弯矩图为二次曲线。剪力为零的截面弯矩有极值。

§4-1 弯曲的概念和实例

例5 简支梁，受集中力F作用，作内力图.



解： （1）求支座反力 $F_A=\dfrac{Fb}{l}$ $F_B=\dfrac{Fa}{l}$

（2）列内力方程

$$F_{S1}=F_A=\frac{Fb}{l}$$

$$M_1=F_Ax_1=\frac{Fb}{l}x_1 \qquad (0<x_1<a)$$

$$F_{S2}=-F_B=-\frac{Fa}{l}$$

$$M_2=F_Bx_2=\frac{Fa}{l}x_2 \qquad (0<x_2<b)$$

§4-1 弯曲的概念和实例

（3）根据方程作内力图

$$F_{S1}=F_A=\frac{Fb}{l}$$

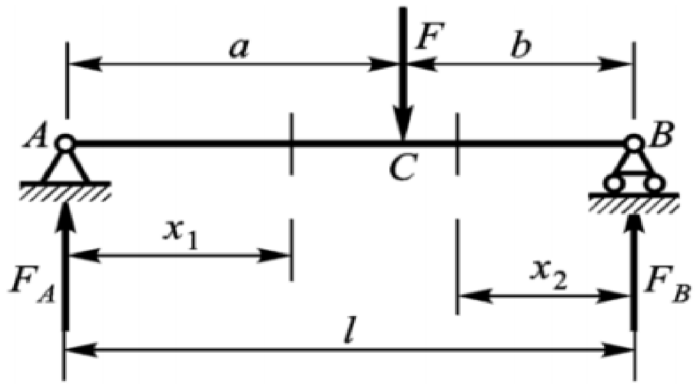
$$M_1=F_A x_1=\frac{Fb}{l}x_1 \qquad (0<x_1<a)$$

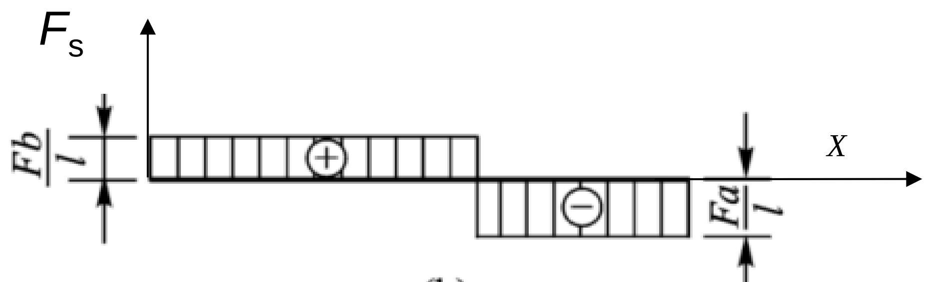
$$F_{S2}=-F_B=-\frac{Fa}{l}$$

$$M_2=F_B x_2=\frac{Fa}{l}x_2 \qquad (0<x_2<b)$$

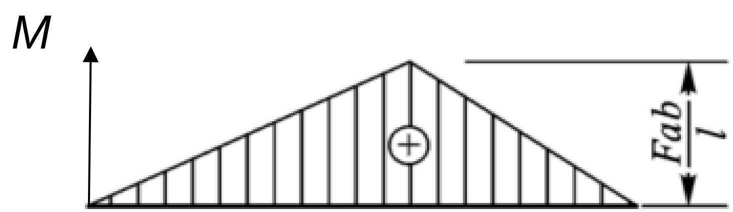
$$\left|F_S\right|_{\max}=\frac{Fa}{l}$$

$$M_{\max}=\frac{Fab}{l}$$





(b)

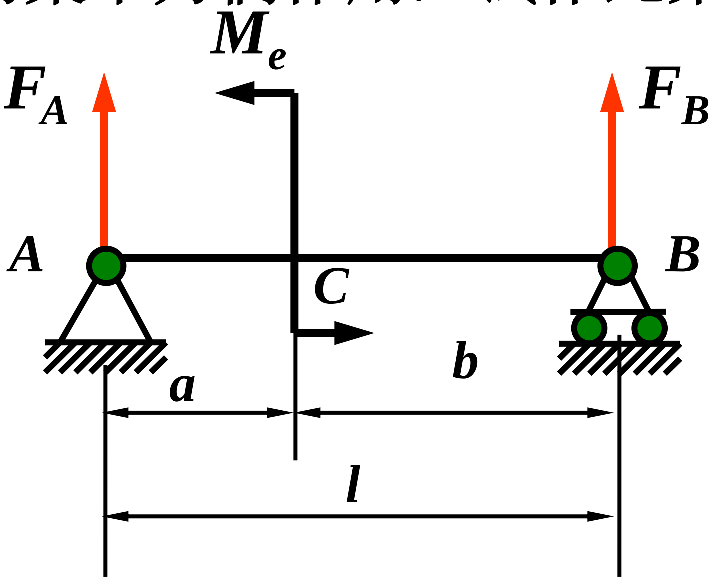


(c)

在集中力***F*** 作用处，剪力图有突变，突变值为集中力的大小；弯矩图有转折。

§4-1 弯曲的概念和实例

例6 图示的简支梁在 C点处受矩为m的集中力偶作用，试作此梁的的剪力图和弯矩图.



解 ：

1、支反力

$$\sum M_B = 0 \quad M_e - F_A \times l = 0$$

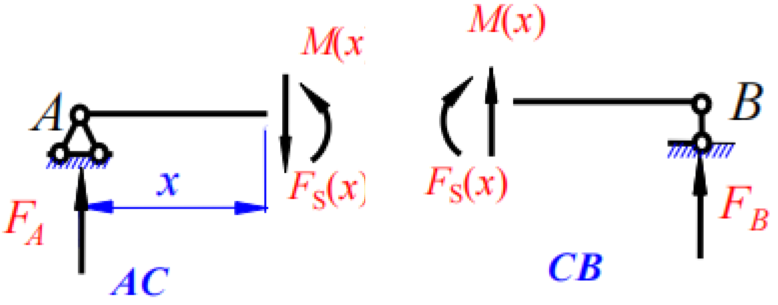
$$F_A = \frac{M_e}{l}(\uparrow) \quad F_B = \frac{M_e}{l}(\downarrow)$$

2、内力方程

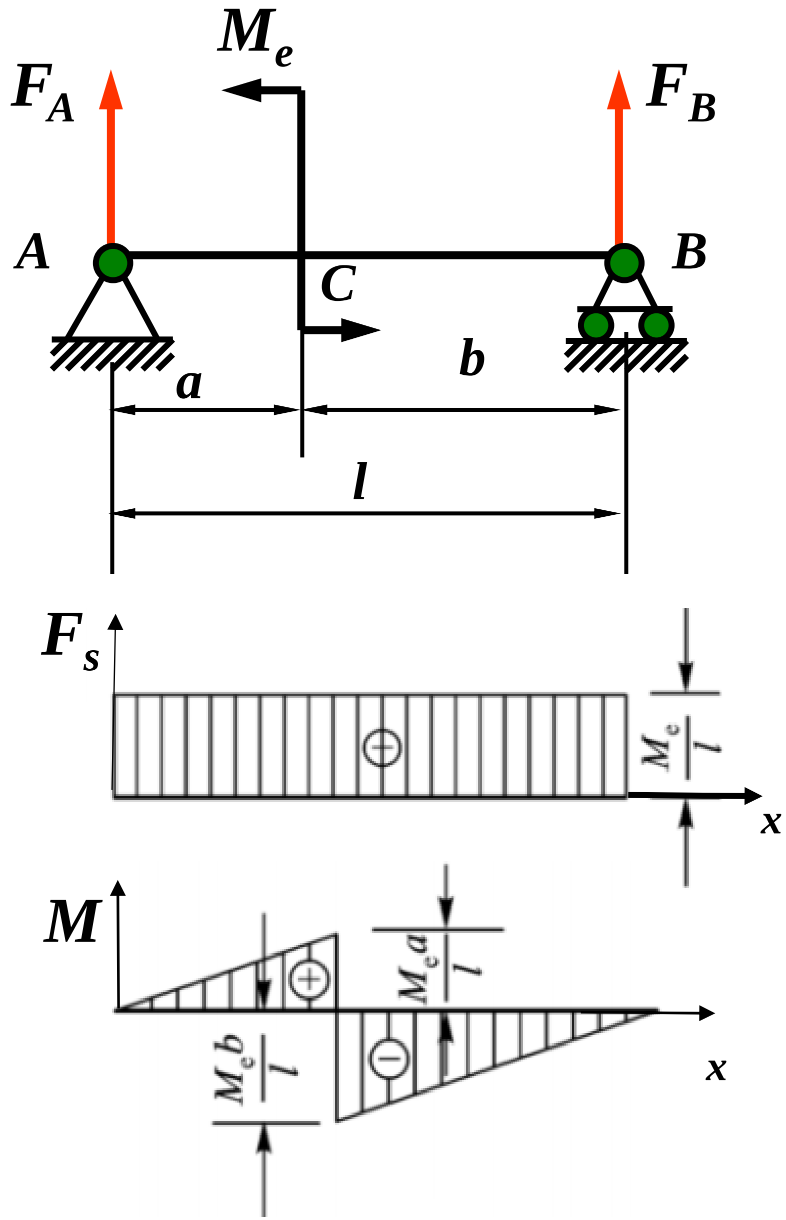
$$F_S(x) = F_A = \frac{M_e}{l} (0 < x < l)$$

$$M(x) = F_A x = \frac{M_e}{l} x \ (0 \le x < a)$$

$$M(x) = F_A x - M_e = -\frac{M_e}{l}(l - x) \ (a < x \le l)$$



§4–1 弯曲的概念和实例



（3）根据方程作内力图

$$F_S(x)=\frac{M_e}{l}$$

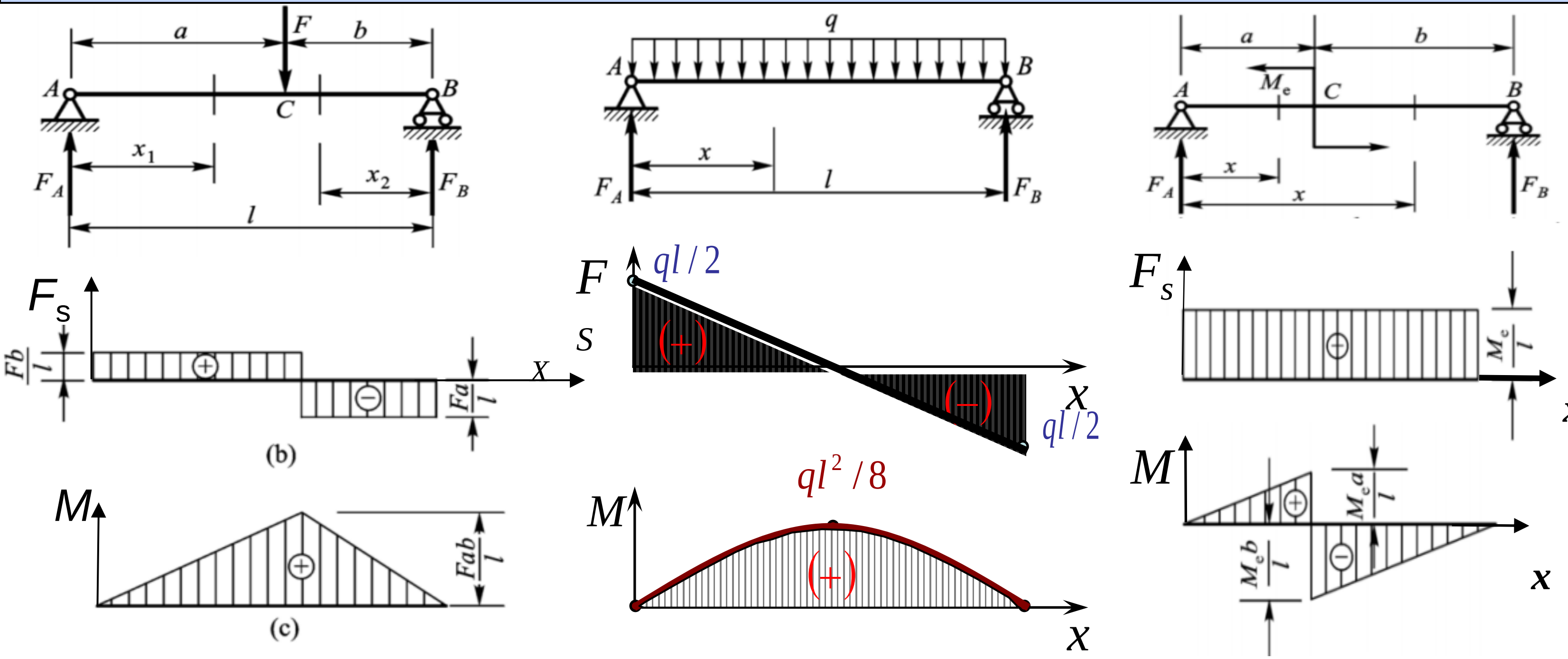
$$M(x)=\frac{M_e}{l}x \qquad (0\le x<a)$$

$$M(x)=-\frac{M_e}{l}(l-x) \quad (a<x\le l)$$

$$|M|_{\max}=\frac{M_e b}{l}$$

集中力偶作用点处剪力图无影响，弯矩图有突变，突变值的大小等于集中力偶的大小。

第四章 弯曲内力



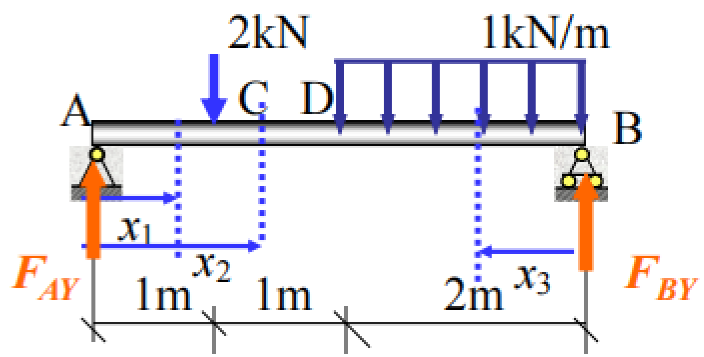
0
平
斜
弯

- 在**无载荷**作用处，**剪力图**为**水平线**，**弯矩图**为**斜直线**。
- 在**分布载荷**作用处，**剪力图**为**斜直线**，**弯矩图为抛物线**，且弯矩M最大值发生于F_S=0处。
- 在**集中力**作用处，**剪力图为突变水平线**，变化值等于集中力的大小；**弯矩图为折角斜直线**。
- 在**集中力偶**作用处，**剪力图为水平线**，**弯矩图上突变斜直线**，突变值为该集中力偶的大小。

§ 4–1 弯曲的概念和实例

随堂练习

画出图中梁的内力图



解:

1、支反力

$$\sum Y = 0,\quad F_{AY} + F_{BY} - 2 - 1\times 2 = 0$$

$$\sum M_B = 0,\ 1\times 2\times 1 + 2\times 3 - F_{AY}4 = 0$$

$$\therefore\quad F_{AY} = 2(kN);\qquad F_{BY} = 2(kN)$$

2. 内力方程

$AC:$

$$F_s(x_1) = F_{AY} = 2(kN)$$

$$M(x_1) = F_{AY}x_1 = 2x_1(kN.m)$$

$$F_s(x_2) = F_{AY} - 2 = 2 - 2 = 0,$$

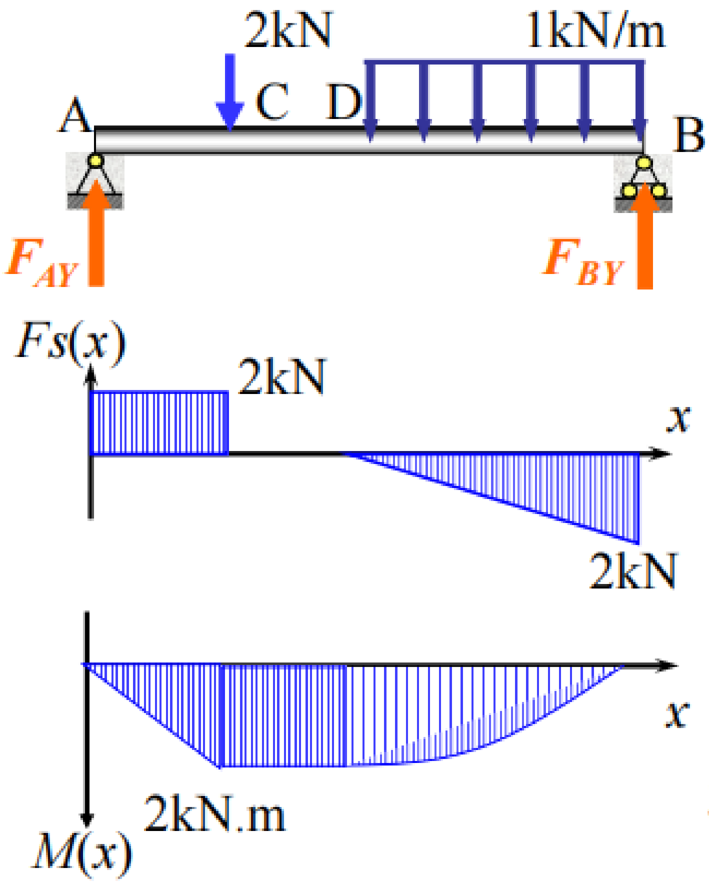
$$M(x_2) = F_{AY}x_2 - 2(x_2 - 1) = 2(kN.m)$$

$BD:$

$$F_s(x_3) = -F_{BY} + 1\times x_3 = -2 + x_3$$

$$M(x_3) = F_{BY}x_3 - 1\times x_3\times\frac{x_3}{2} = 2x_3 - \frac{x_3^2}{2}$$

§ 4-1 弯曲的概念和实例



$$AC: F_s(x_1) = 2, \qquad (0 < x_1 < 1)$$

$$M(x_1) = 2x_1, \qquad (0 \le x_1 \le 1)$$

$$CD: F_s(x_2) = 0, \qquad (1 < x_2 < 2)$$

$$M(x_2) = 2, \qquad (1 \le x_2 \le 2)$$

$$BD: F_s(x_3) = -2 + x_3, \quad (0 < x_3 \le 2)$$

$$M(x_3) = 2x_3 - \frac{x_3^2}{2}, \quad (0 \le x_3 \le 2)$$

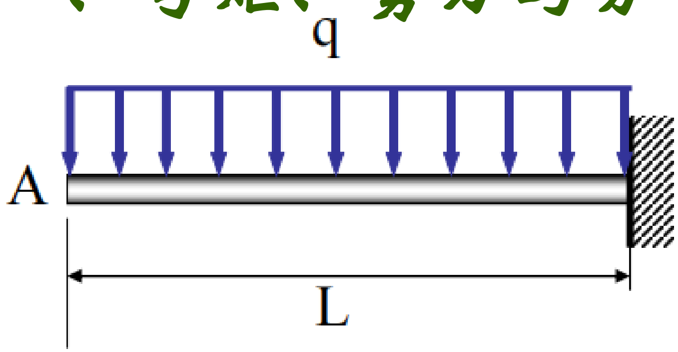
3、内力图

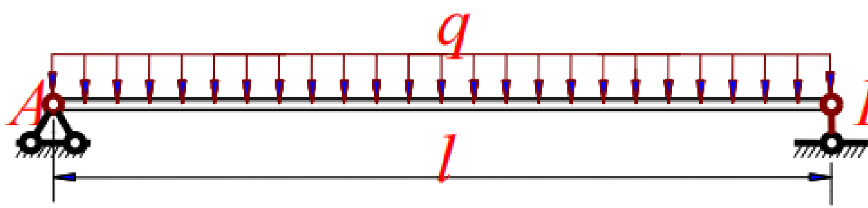
§4-5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

第四章　弯曲内力

§ 4-5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

一、弯矩、剪力与分布载荷间的关系





$$F_s(x) = -qx, \quad (0 \le x < l)$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2, \quad (0 \le x < l)$$

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = -q \quad = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = -qx \quad = F_s(x),$$

$$F_S(x) = F_A - qx = \frac{ql}{2} - qx$$

$$M(x) = F_A x - qx \times \frac{x}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = -q \quad = q(x)$$

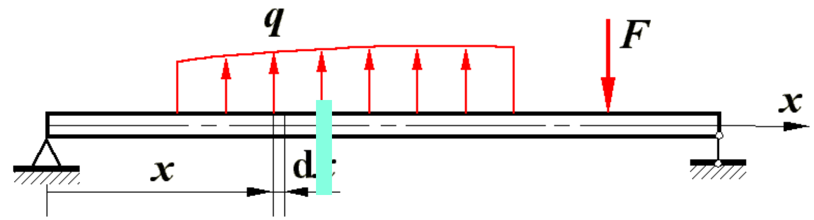
$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{1}{2}ql - qx \quad = F_s(x),$$

§4-5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

一、弯矩、剪力与分布载荷间的关系

设梁上有任意分布载荷*q*，其集度

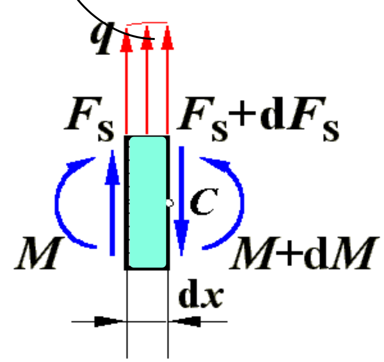
$$q = q(x)$$



将 x 轴的坐标原点取在梁的左端。

微段很小，所以可以假设载荷是均匀分布的

从坐标为 x 和 $x+\mathrm{d}x$的两横截面取出dx 一段



x **截面上内力为** F_S , M

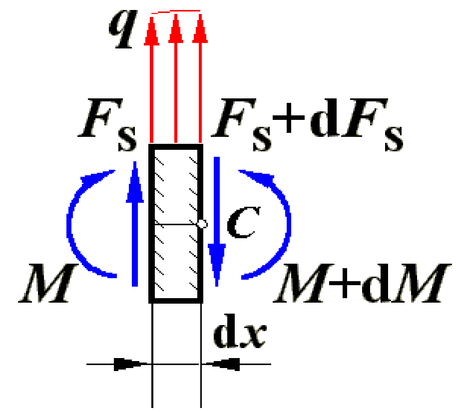
$x+\mathrm{d}x$ **截面上内力为**$F_S+\mathrm{d}F_S$, $M+\mathrm{d}M$.

写出平衡方程

q 向上为正

$$\sum F_y = 0,\quad F_S + q\mathrm{d}x - (F_S + \mathrm{d}F_S) = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\mathrm{d}F_S}{\mathrm{d}x} = q$$



公式的几何意义

（1）剪力图上某点处的切线斜率等于该点处载荷集度的大小.

$$\sum M_C = 0,$$

dx的高阶，可以忽略

$$M + \mathrm{d}M - q\mathrm{d}x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2} - F_S\mathrm{d}x - M = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = F_S}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} &= F_S\\ \frac{\mathrm{d}F_S}{\mathrm{d}x} &= q\end{aligned}\right\} \quad \frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = q$$

（2）弯矩图上某点处的切线斜率等于该点处剪力的大小.

二、利用微分关系判断内力图的形状

a、$q(x)=0$

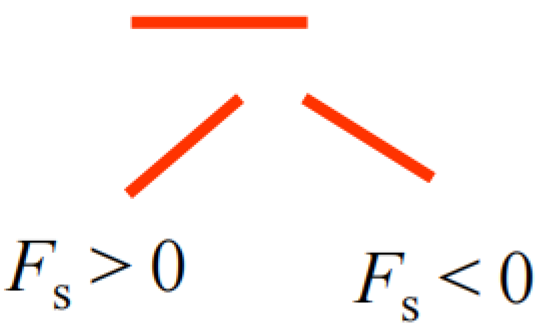
0平斜弯

$$\frac{\mathrm{d}F_s(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)=0 \qquad \therefore F_s(x)=C$$

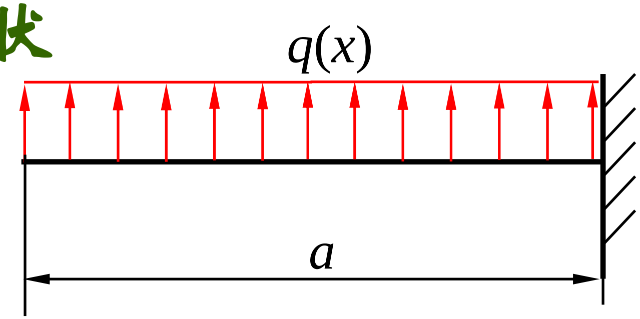
$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_s(x)=C \qquad \therefore M(x)=Cx+D$$

剪力图　为一条水平线。

弯矩图　为一条斜直线。



二、利用微分关系判断内力图的形状



b、$q(x)$ = 常数　　**0平斜弯**

$$\frac{\mathrm{d}F_s(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)=q \qquad \therefore F_s(x)=qx+C$$

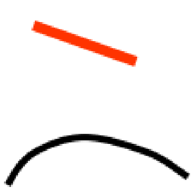
$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_s(x)=qx+C \qquad \therefore M(x)=\frac{1}{2}qx^2+Cx+D$$

（1）若分布载荷方向向上, 即 $q>0$,

剪力图　为一条向上的斜直线。

弯矩图　为一条上凸的二次曲线。

（2）若分布载荷的方向向下, 即 $q<0$,



剪力图　为一条向下的斜直线。

弯矩图　为一条下凸的二次曲线。

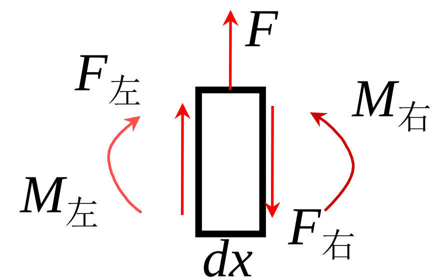
二、利用微分关系判断内力图的形状

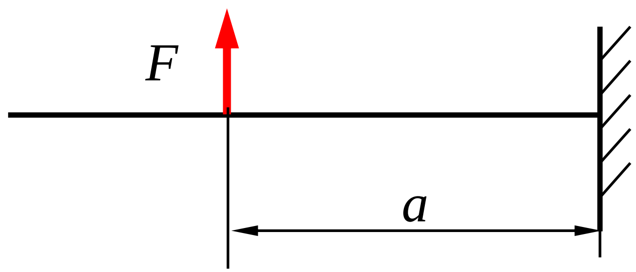
c、集中力

$$F_{左}+F=F_{右}$$

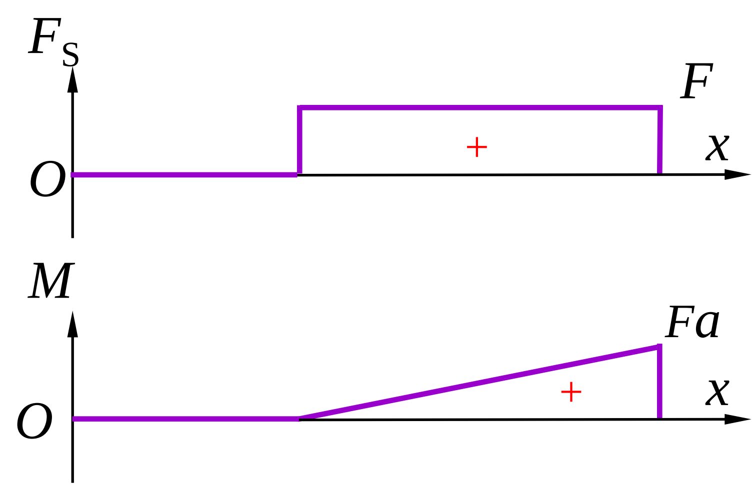
$$M_{左}+F_{左}dx+Fdx/2=M_{右}$$

$$\boxed{F_{左}+F=F_{右},\qquad M_{左}=M_{右}}$$





在集中力处，剪力图沿集中力方向跳跃（突变）跟着箭头走。弯矩图连续。



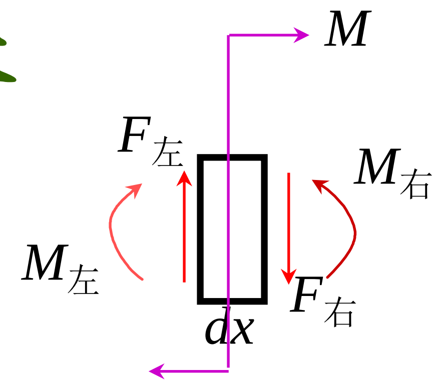
二、利用微分关系判断内力图的形状

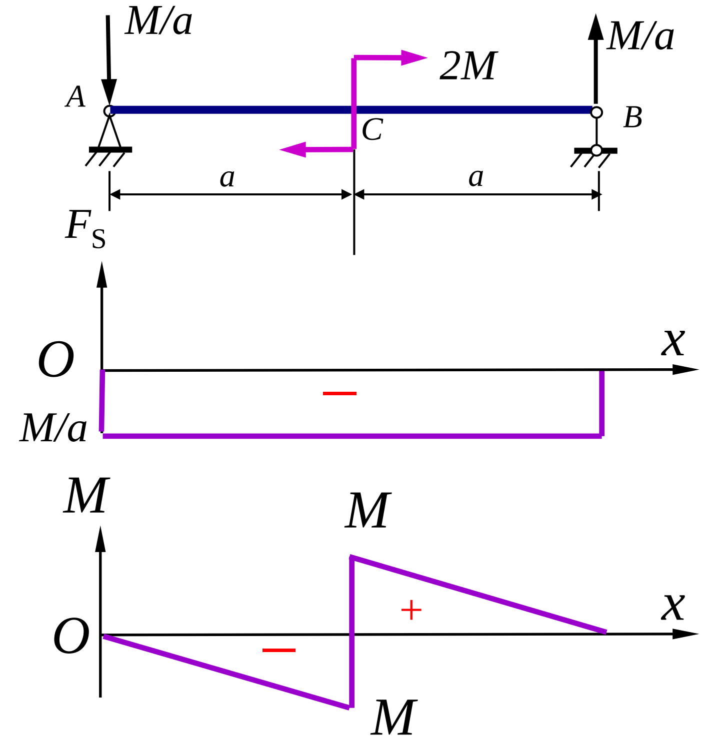
d、集中力偶（顺时针为正）

$F_{左}=F_{右}$

$M_{左}+ F_{左}dx+M=M_{右}$

$\boxed{F_{左} = F_{右}, \qquad M_{左}+M = M_{右}}$



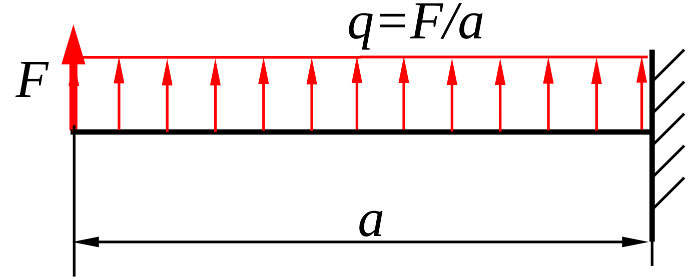


在集中力偶处，剪力图连续，弯矩图跳跃，顺时针力偶向上跳，逆时针力偶向下跳。

积分关系： $F_S = \int q dx, \quad M = \int F_S dx$

- 若在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处两个横截面 A，B 间无集中力则

$$F_{S2} - F_{S1} = \int_{x1}^{x2} q(x) dx$$

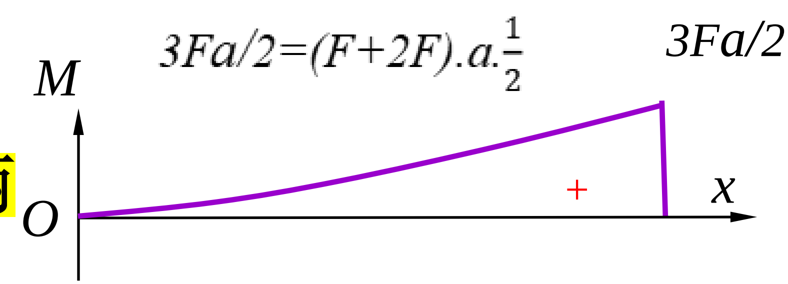


梁上任意两截面的剪力之差等于两截面间载荷图所包围的面积

2F-F=q.a

- 若横截面 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 间无集中力偶作用则

$$M_2 - M_1 = \int_{x1}^{x2} F_S(x) dx$$



梁上任意两截面的弯矩之差等于两截面间剪力图所包围的面积

内力F_s、M 的变化规律

0平斜弯

载荷	$q(x)=0$	$q=C>0$	$q=C<0$	F	M_o
F_s-图	水平直线 ⊕ or ⊖	上斜直线	下斜直线	F	(剪力图无突变)
M-图	斜直线 or	下凸抛物线	上凸抛物线	F处有尖角	M_o

利用外力和内力的微分关系做内力图的步骤

①利用平衡条件，确定支座反力，注意校核；

②根据外力将梁合力分段；

分段点：梁端点、支座处、集中载荷作用点、分布载荷起止点

③画剪力图和弯矩图:

- 分析各段内力图形状；
- 确定分段点内力的数值大小及正负；
- 画内力图，标明控制点处的大小。

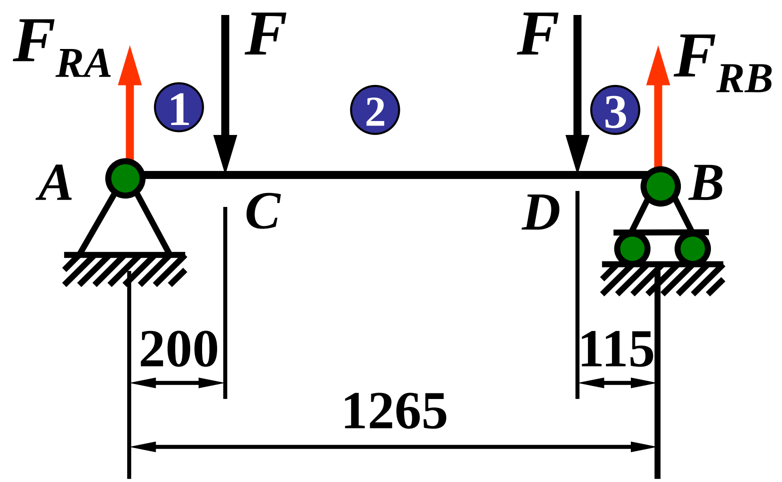
例题1 一简支梁受两个力F作用，如图所示。已知 F= 25.3kN，有关尺寸如图所示。用本节所述关系作此梁的剪力图和弯矩图。

解　(1) 求梁的支反力 **0平斜弯**

$F_{RA}=23.6\text{kN}$　　$F_{RB}=27\ \text{kN}$

将梁分为 AC，CD，DB 三段。

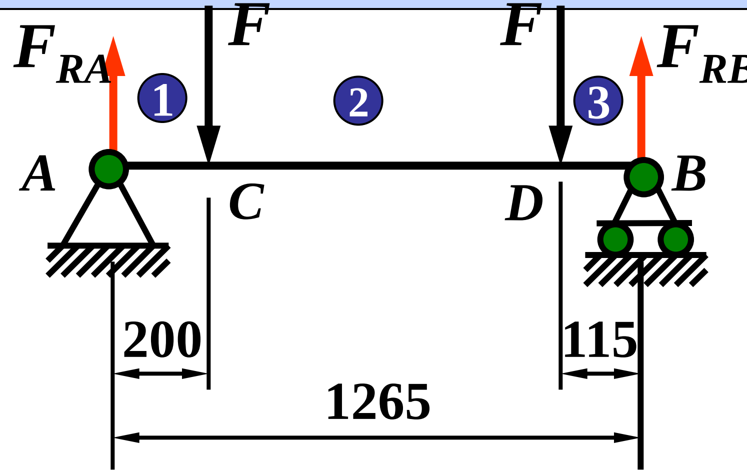
每一段均属无载荷区段。



(2) 剪力图

每段梁的剪力图均为水平直线

AC段：水平线， $F_{SA右}=F_{SC左}=F_{RA}=23.6\text{kN}$



CD段：水平线

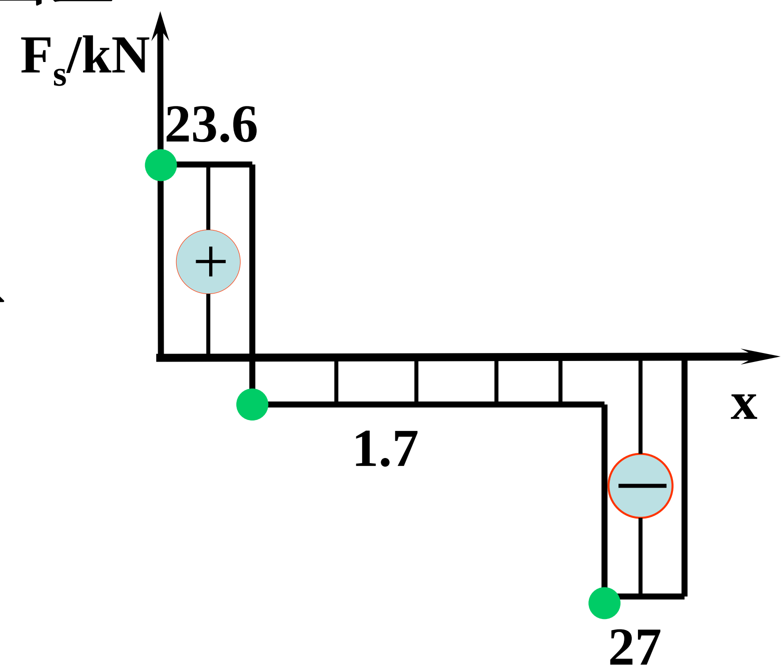
$$F_{SC右} = F_{SD左} = F_{RA} - F = -1.7\text{kN}$$

DB段：水平线

$$F_{SD右} = F_{SB左} = -F_{RB} = -27\text{kN}$$

最大剪力发生在**DB**段中的任一横截面上

$$F_{S\max} = 27\text{kN}$$



(3)弯矩图

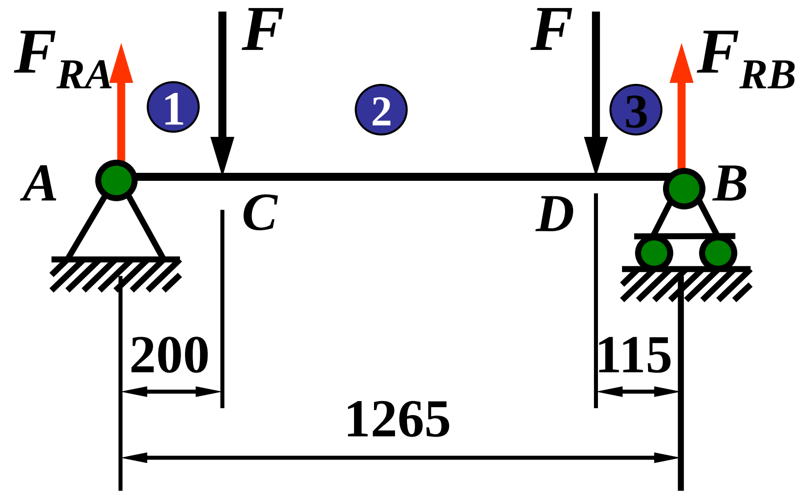
每段梁的弯矩图均为斜直线。且梁上无集中力偶。

$$M_A = 0$$

$$M_C = F_{RA} \times 0.2 = 4.72\text{kN} \cdot \text{m}$$

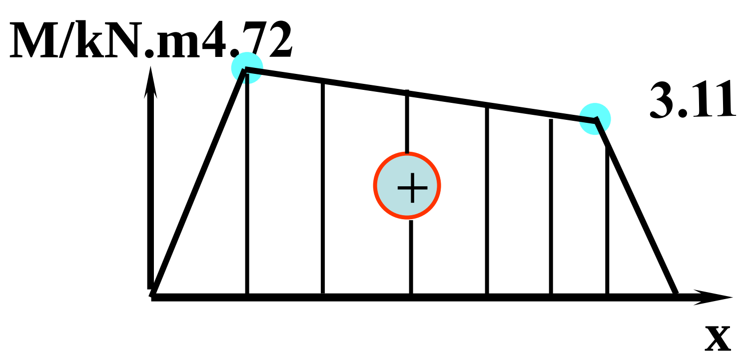
$$M_D = F_{RB} \times 0.115 = 3.11\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 0$$



最大弯矩发生在 *C* 截面

$$M_{max} = 4.72\text{kN} \cdot \text{m}$$



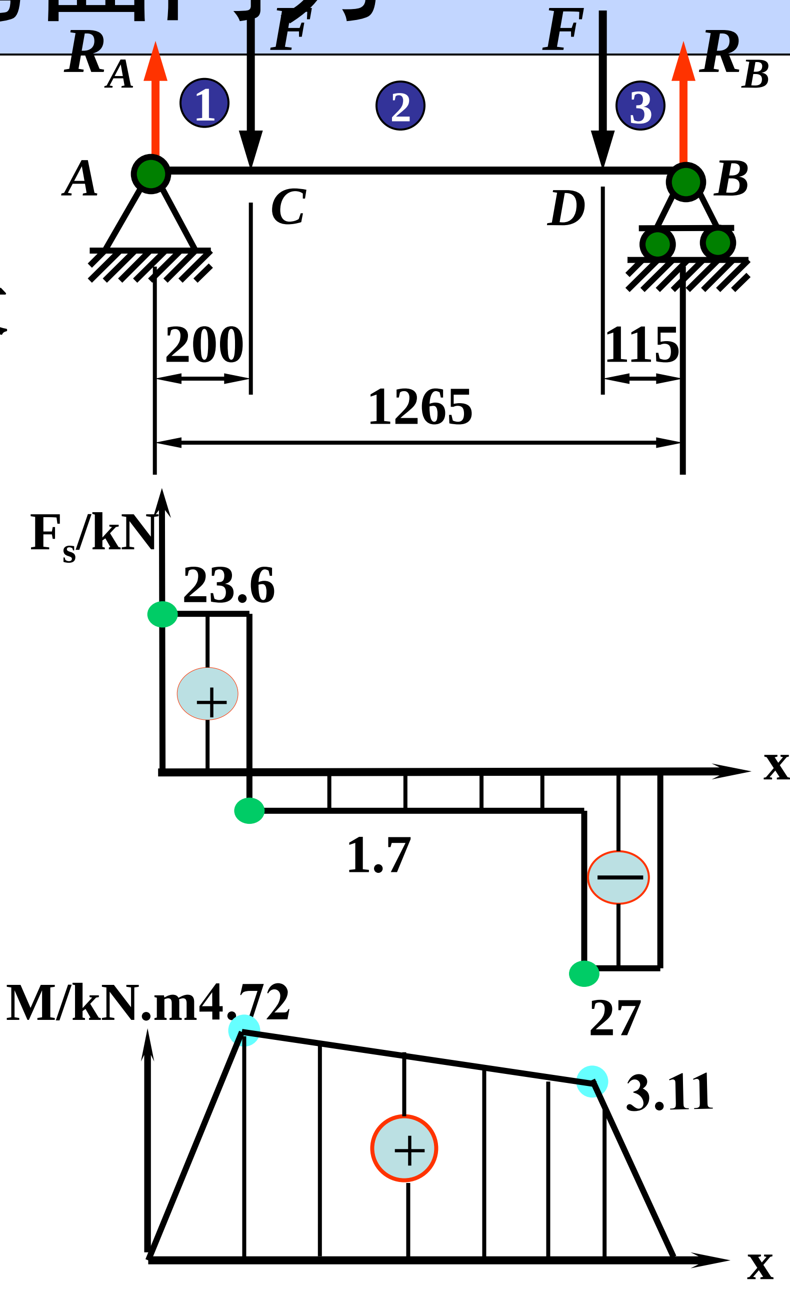
(4)对图形进行校核

在集中力作用的*C*，*D* 两点剪力图发生突变，突变*P*=25.3kN。而弯矩图有尖角。

在*AC*段剪力为正值，弯矩图为向上倾斜的直线。

在*CD*和*DB*段，剪力为负值，弯矩图为向下倾斜的直线。

最大弯矩发生在集中力作用 *C*截面处。



第四章 弯曲内力

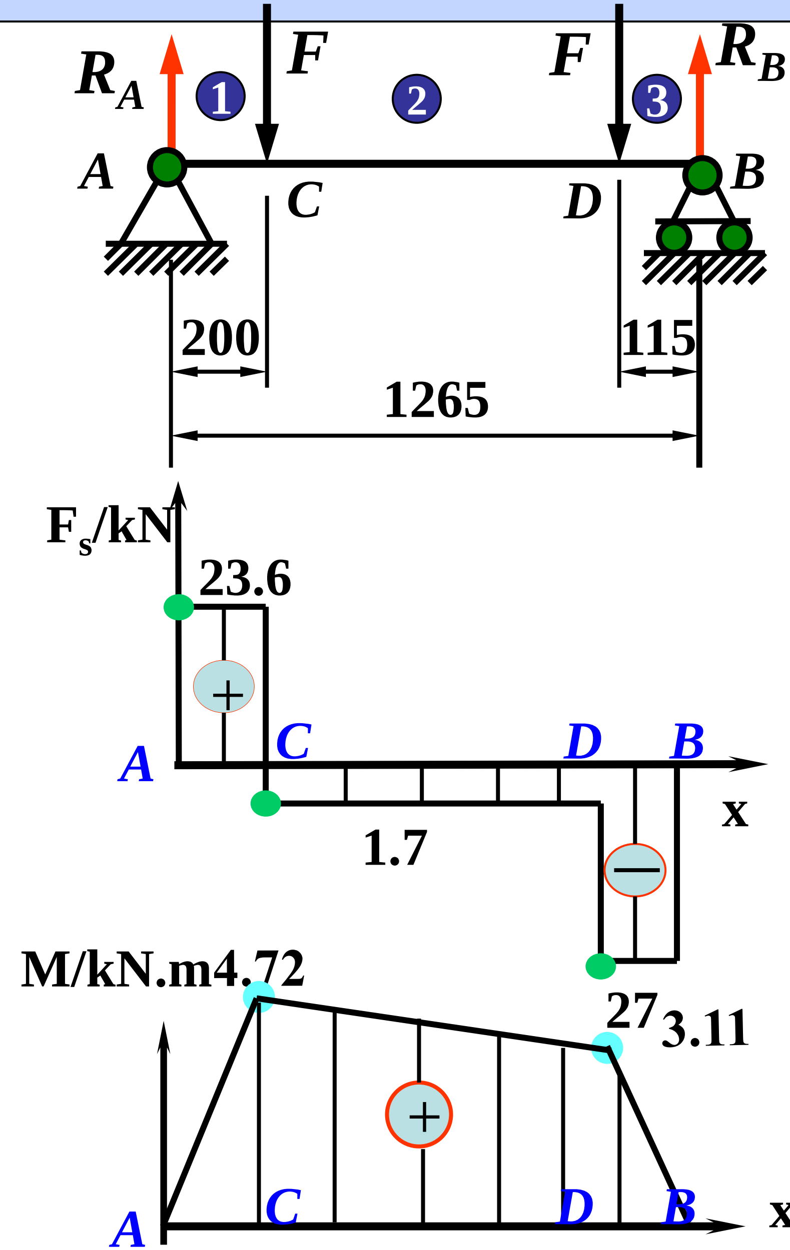
利用面积法：

M_C-M_A=23.6×0.2=4.72kN.m

M_A =0，M_C=4.72kN.m

M_D-M_C=-1.7×0.95=-1.615kN.m

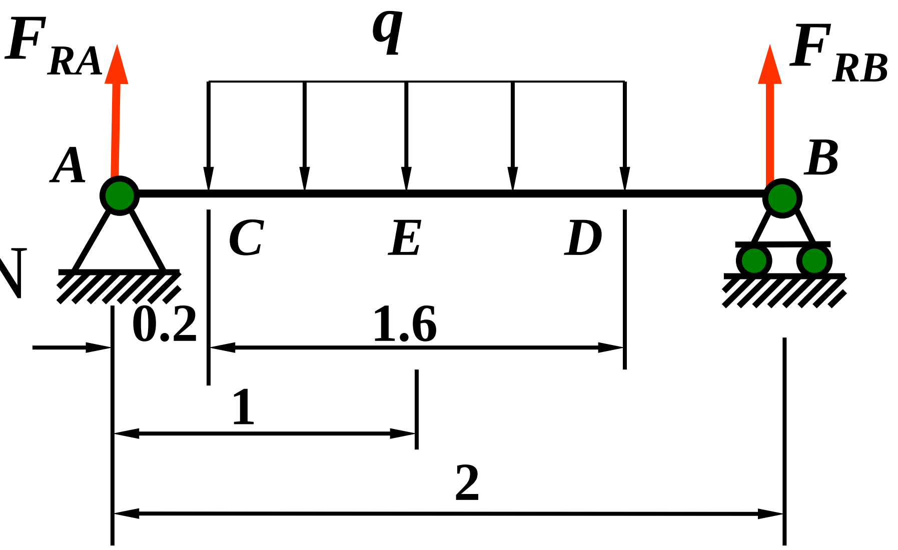
M_D=3.11kN.m



例题2　一简支梁受均布荷载作用，其集度 q=100kN/m ,如图 所示。试用简易法作此梁的剪力图和弯矩图。

解 :(1) 计算梁的支反力

$$F_{RA}=F_{RB}=0\cdot5\times100\times1\cdot6=80\text{kN}$$



将梁分为 *AC*、*CD*、*DB* 三段。*AC* 和 *DB* 上无荷载，*CD* 段有向下的均布荷载。

(2) 剪力图

AC段 水平直线

$$F_{SA右}=F_{RA}=80\text{kN}$$

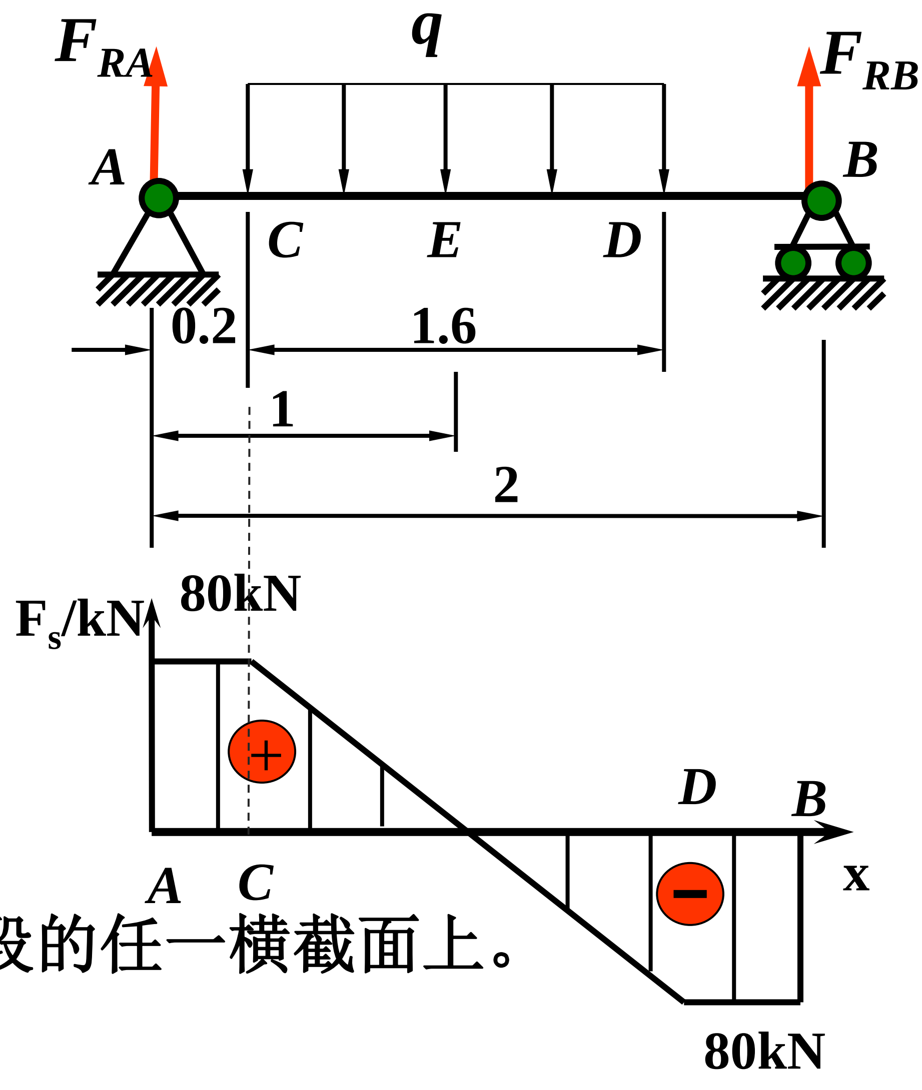
CD段 向右下方的斜直线

$$F_{SC}=F_{RA}=80\text{kN}$$

$$F_{SD}=-F_{RB}=-80\text{kN}$$

DB段 水平直线

$$F_{SB左}=-F_{RB}=-80\text{kN}$$



最大剪力发生在 *AC* 和 *DB* 段的任一横截面上。

$$F_{S\max}=80\text{kN}\ \ (+,-)$$

(3) 弯矩图

AC段： 向上倾斜的直线

$M_A = 0$

$M_C = F_{RA} \times 0.2 = 16\text{kN.m}$

CD段： q<0，抛物线开口向下

$M_D = F_{RB} \times 0\cdot 2 = 16\text{kN}\cdot\text{m}$

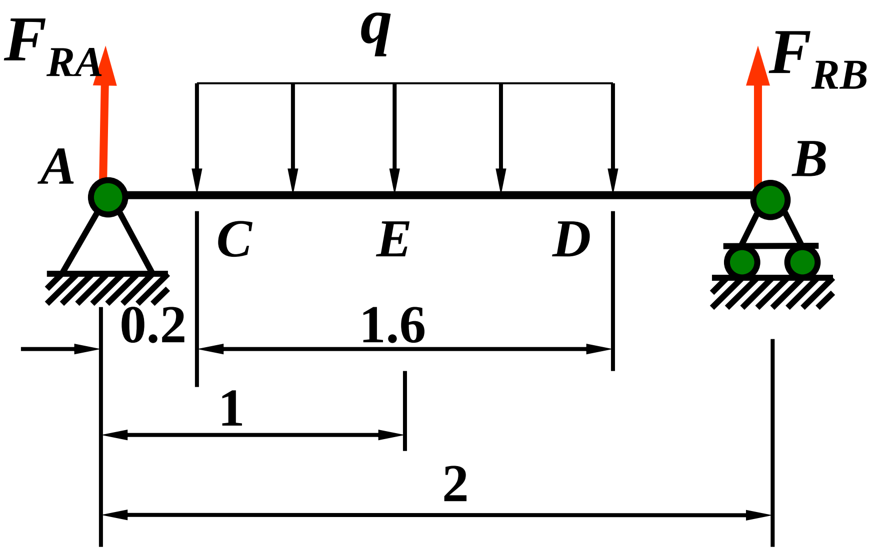
其极值点在 $F_S = 0$ 的中点*E*处的横截面上。

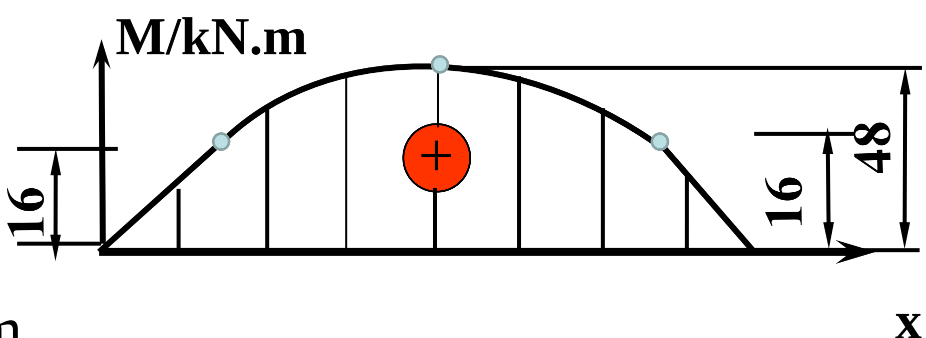
$$M_E = F_{RA} \times 1 - \frac{q}{2}(1-0\cdot 2)^2 = 48\text{kN}\cdot\text{m}$$

DB段 向下倾斜的直线 $M_B = 0$

全梁的最大弯矩梁中 E点的横截面上.

$M_{max} = 48\text{kN}\cdot\text{m}$

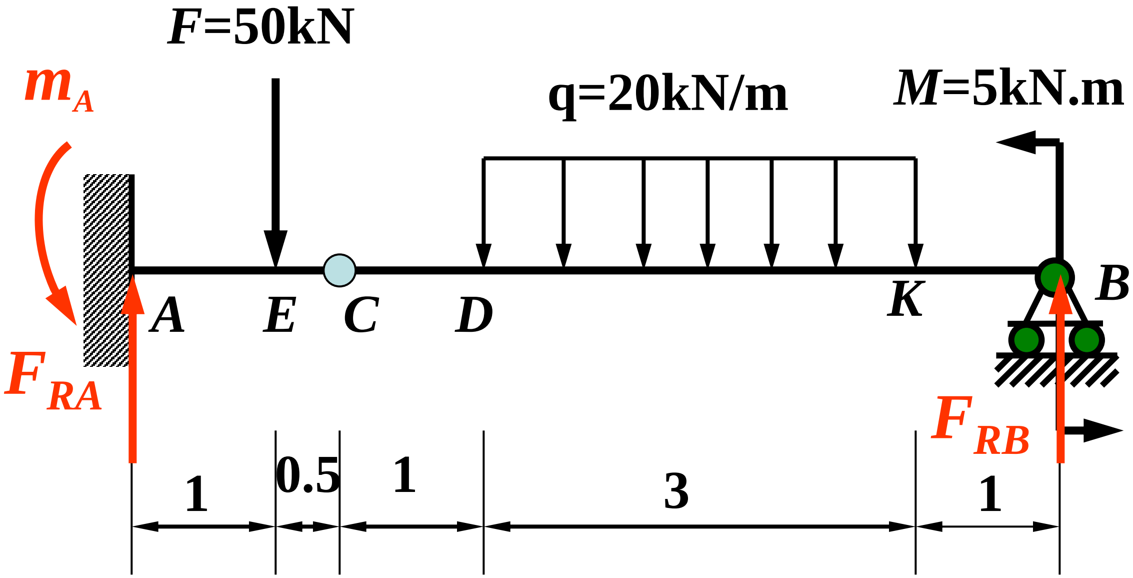




例题3 用简易法作此组合梁的剪力图和弯矩图，C为铰链处。

解 （1）支座反力为

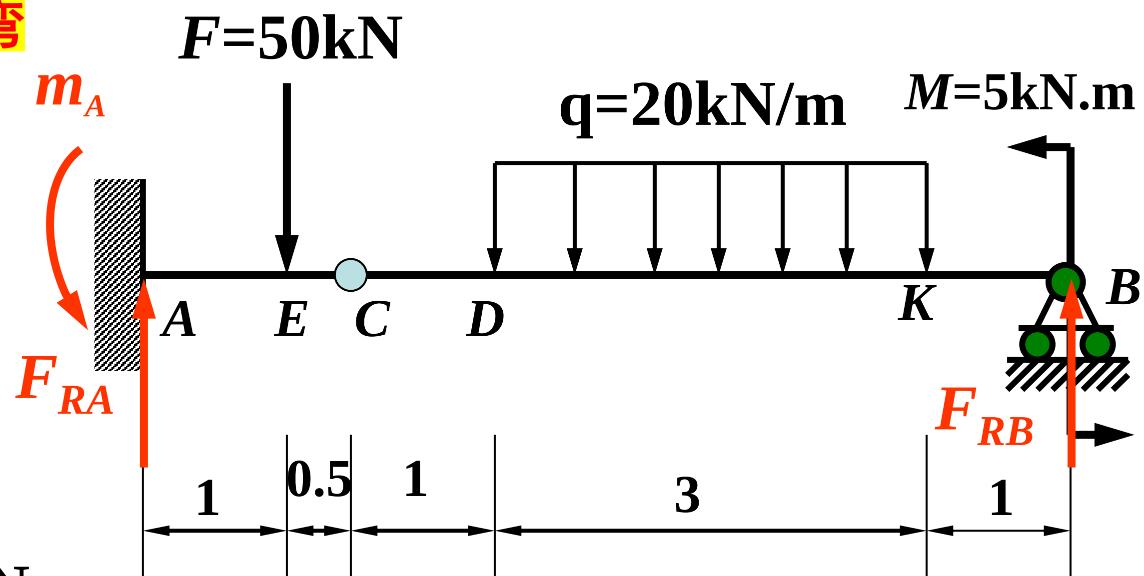
$F_{RA} = 81\ \text{kN}$
$F_{RB} = 29\ \text{kN}$
$m_A = 96.5\ \text{kN.m}$



将梁分为 *AE*，*ED*，*DK*，*KB* 四段。

(1)剪力图

0平斜弯



AE段　水平直线

ED 段　水平直线

DK 段　斜的直线，q<0，向下倾斜

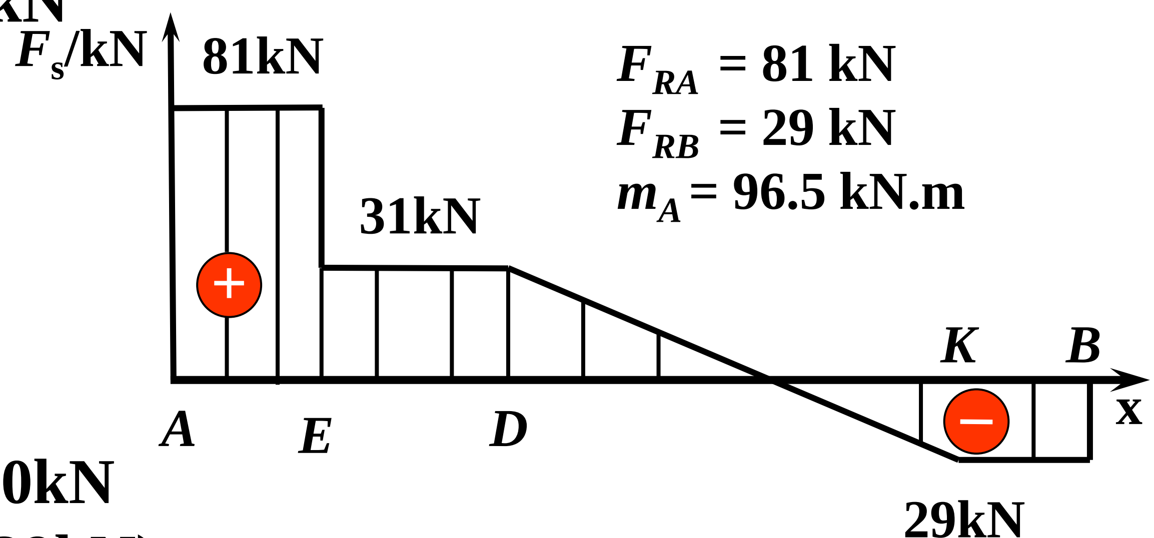
KB 段　水平直线

$F_{SA右} = F_{SE左} = R_A = 81\text{kN}$

$F_{SE右} = F_{RA} - F = 31\text{kN}$

$F_{SK} = -F_{RB} = -29\text{kN}$

$F_{SB左} = -F_{RB} = -29\ \text{kN}$



$F_{RA} = 81\ \text{kN}$

$F_{RB} = 29\ \text{kN}$

$m_A = 96.5\ \text{kN.m}$

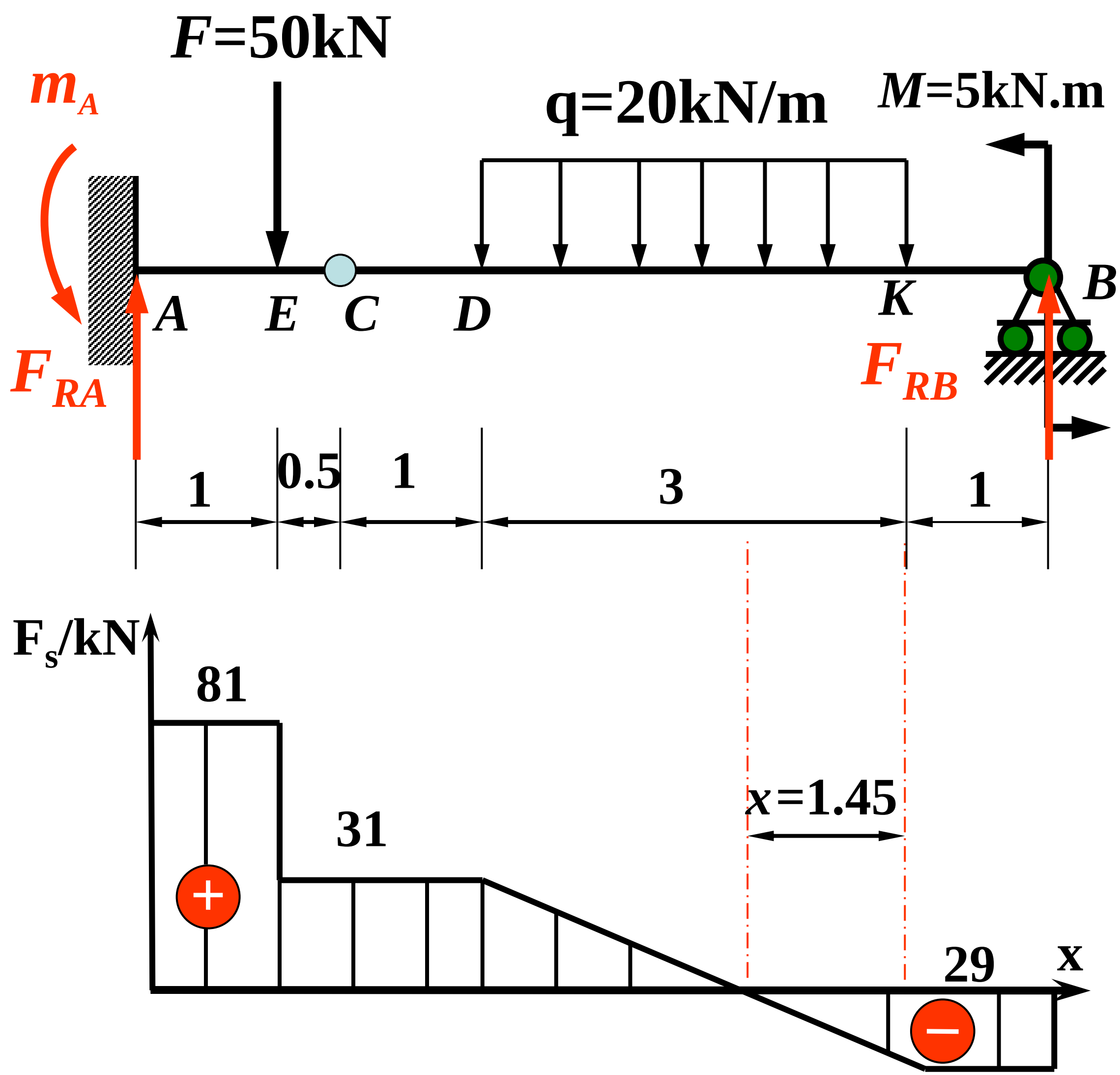
$(F_{SK} - F_{SD} = -20 \times 3 = -60\text{kN}$

$F_{SK} = -60 + 31 = -29\text{kN})$

设距K截面为 x 的截面上剪力 $F_S = 0$.即

$$F_{Sx} = -F_{RB} + qx = 0$$

$$x = \frac{R_B}{q} = 1.45\text{m}$$



(2)弯矩图

Fs>0，所以AE，EC，CD 梁段均为向上倾斜的直线

$$M_{A右}=-m_A=-96.5\text{kN}\cdot\text{m}$$

（逆时针向下跳跃）

$$M_E-M_A=81\times1kN.m$$

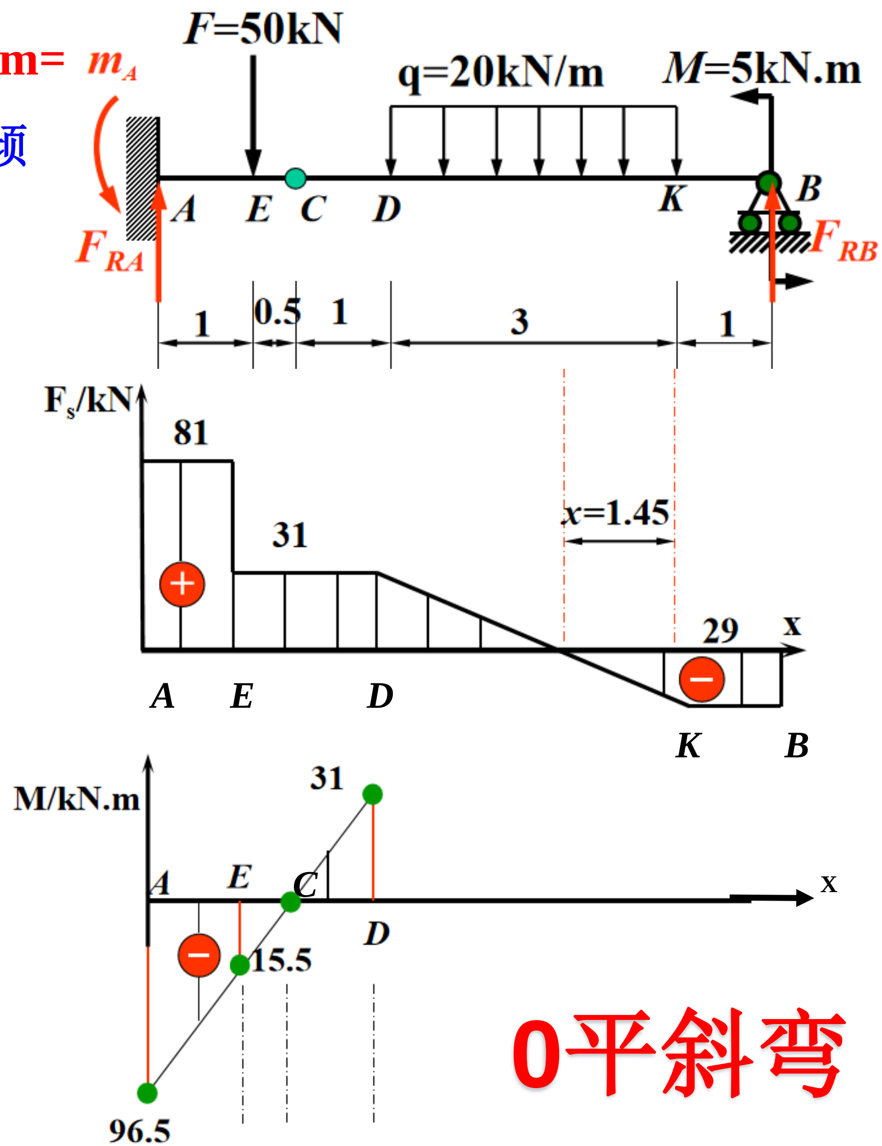
$$\therefore M_E=-96.5+81=-15.5kN.m$$

$$M_D-M_E=31\times1.5=46.5kN.m$$

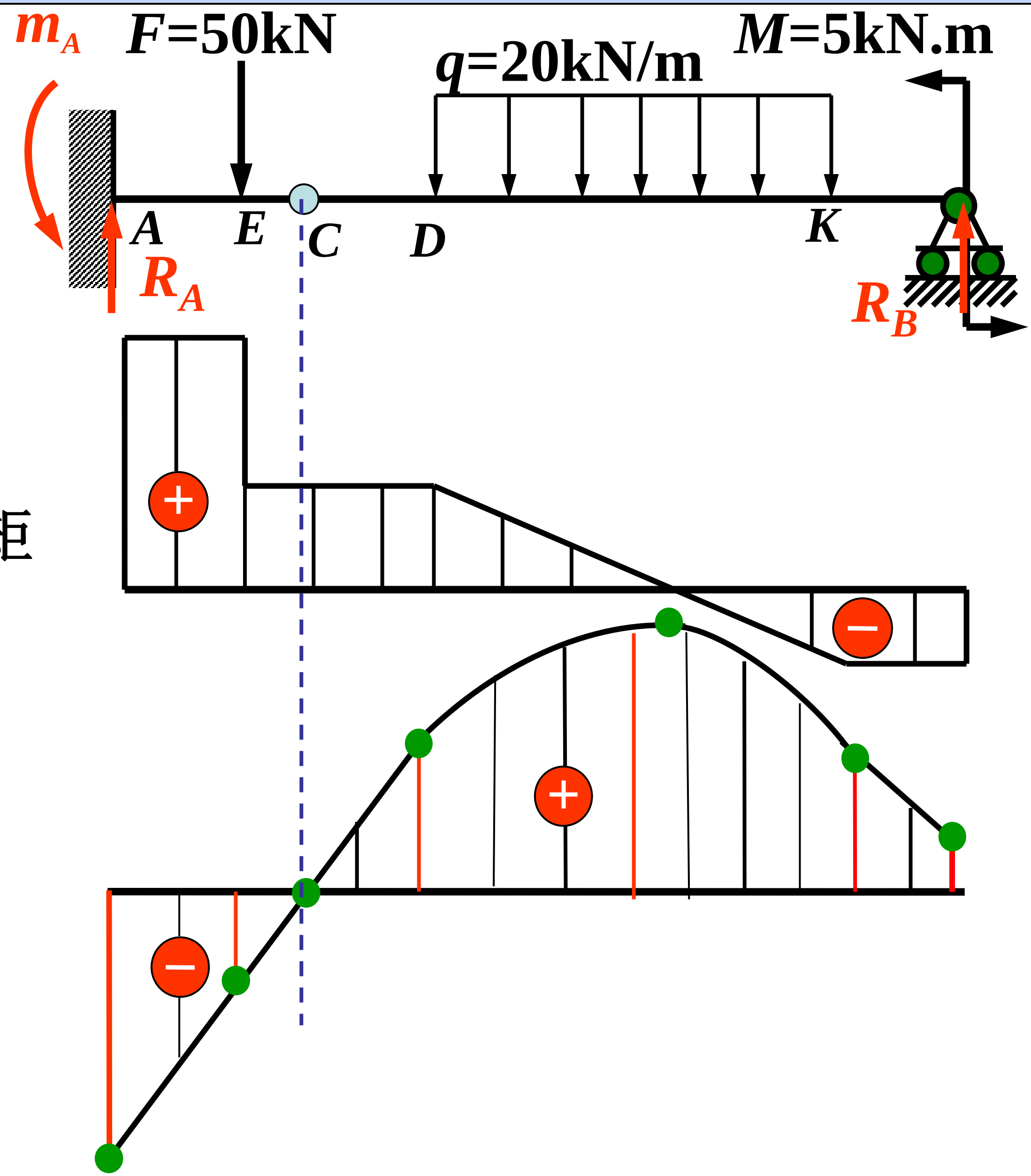
$$\therefore M_D=46.5+(-15.5)=31kN.m$$

$$M_C-M_E=31\times0.5=15.5kN.m$$

$$\therefore M_C=0kN.m$$

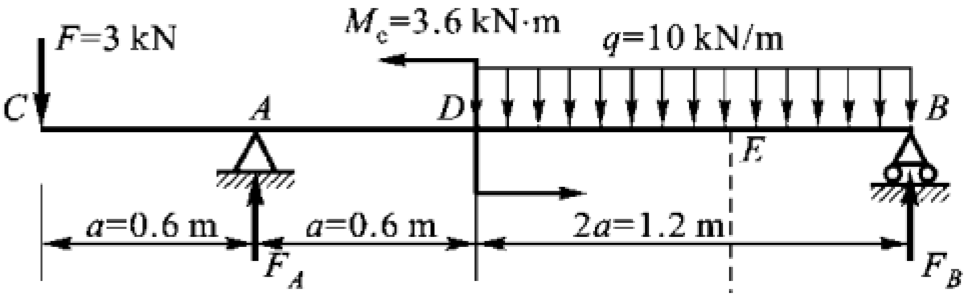


0平斜弯



中间铰链传递剪力(铰链左，右两侧的剪力相等)；但不传递弯矩(铰链处弯矩必为零).

课堂练习：例4 一外伸梁如图所示，试作此梁的剪力图和弯矩图



解： （1）求支座反力

$$\sum M_B = 0$$

$$F \cdot 4a - F_A \cdot 3a + M_e + \frac{q(2a)^2}{2} = 0$$

$$F_A = \frac{4F}{3} + \frac{M_e}{3a} + \frac{2qa}{3}$$

$$= \frac{4(3\times10^3\ \mathrm{N})}{3} + \frac{3.6\times10^3\ \mathrm{N\cdot m}}{3\times(0.6\ \mathrm{m})} + \frac{2(10\times10^3\ \mathrm{N/m})\times(0.6\ \mathrm{m})}{3}$$

$$= 10\times10^3\ \mathrm{N} = 10\ \mathrm{kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-F - 2qa + F_A + F_B = 0$$

$$F_B = F + 2qa - F_A$$

$$= 3\times10^3\ \mathrm{N} + 2(10\times10^3\ \mathrm{N/m})\times(0.6\ \mathrm{m}) - 10\times10^3\ \mathrm{N}$$

$$= 5\times10^3\ \mathrm{N} = 5\ \mathrm{kN}$$

第四章 弯曲内力

对于集中力的方向：顺势而为

0平斜弯

将梁分为 *CA*，*AD*，**DB** 三段

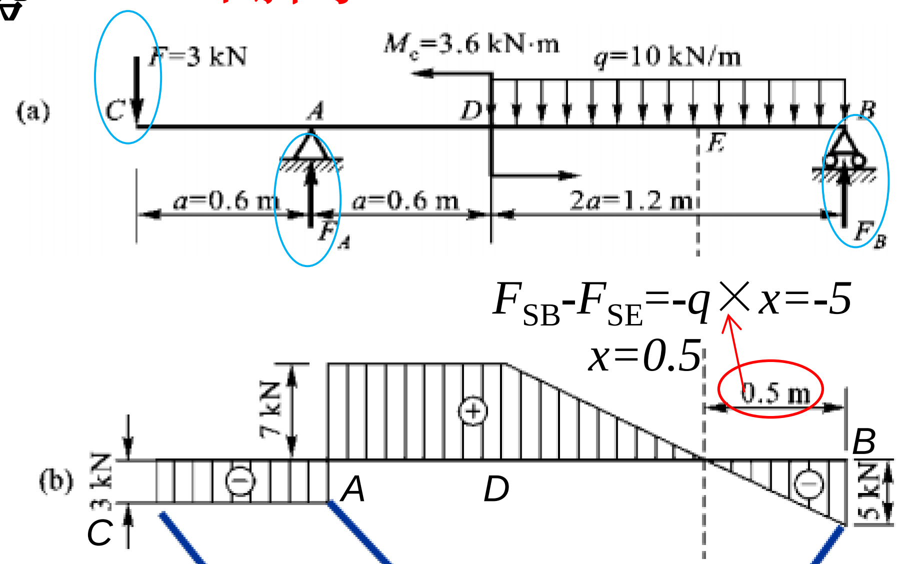
（2）作剪力图

CA段：水平直线

AD段：水平直线

DB段：斜直线，q<0，

向下倾斜



有突变的位置

$$F_{SCA}=-F=-3\ \mathrm{kN}$$

$$F_{SAD}=F_{SD}=-F+F_A=7\ \mathrm{kN}$$

$$F_{SB左}=-F_B=-5\ \mathrm{kN}$$

或：$F_{SB左}$-F_{SD}=-10×1.2=-12kN

$F_{SB左}$=-5kN

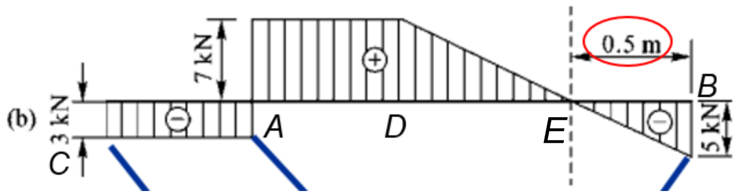
（3）作弯矩图

CA段：斜向下直线

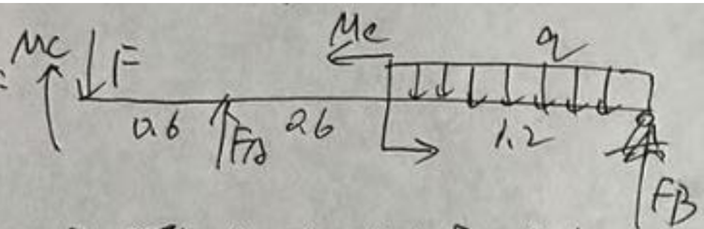
AD段：斜向上直线

D处有突变：大小为-Me

DB段：上凸抛物线，最高点为E点



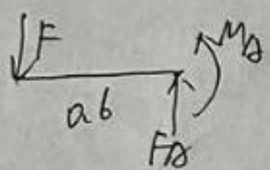
M_C:



$M_C - F\cdot(0.6+0.6+1.2) + F_A\cdot(0.6+1.2) - M_e - q\cdot 1.2\times\left(\frac{1.2}{2}\right) = 0.$

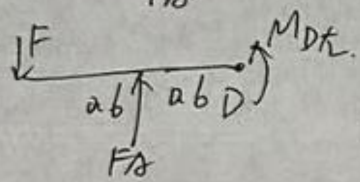
$\Rightarrow M_C = 0$

M_A:



$M_A + F\cdot 0.6 = 0$　$\therefore M_A = -1.8\,kN\cdot m.$

$M_{D左}$:



$M_{D左} + F\cdot 1.2 - F_A\cdot 0.6 = 0$

$\Rightarrow M_{D左} = 2.4\,kN\cdot m.$

$M_{D右} = M_{D左} - M_e = 2.4 - 3.6 = -1.2\,kN\cdot m.$

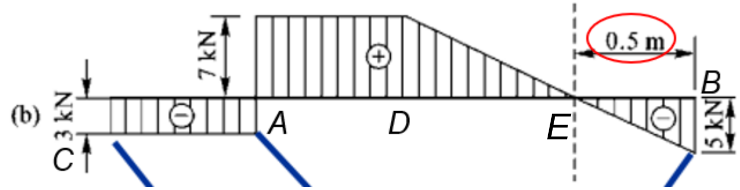
（3）作弯矩图

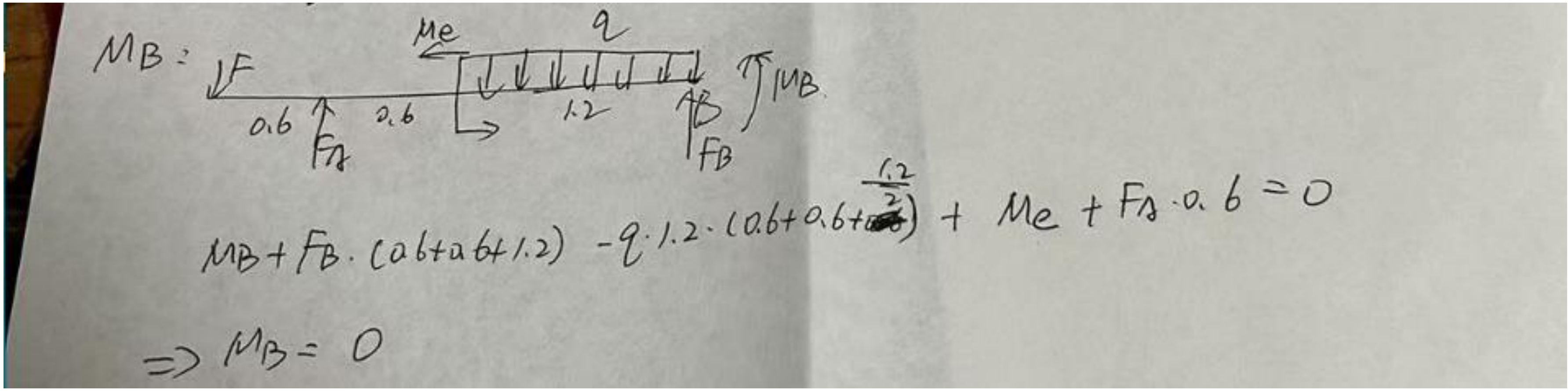
CA段：斜向下直线

AD段：斜向上直线

D处有突变：大小为-Me

DB段：上凸抛物线，最高点为E点





（3）作弯矩图

CA段：斜向下直线

AD段：斜向上直线

D处有突变：大小为-Me

DB段：上凸抛物线，最高点为E点