第三章 向量组的线性相关性

本章引入n维向量的概念，讨论向量组的线性相关性，建立向量组的极大无关组和秩的概念，并给出矩阵秩的概念及其与向量组秩的关系.

§1 n维向量及其运算

定义3.1 由n个数$a_1, a_2, \ldots, a_n$组成的一个有序数组称为**n维向量**，记为

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ 或 } \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

行向量

可以看作$1\times n$的矩阵

列向量

可以看作$n\times 1$的矩阵

列向量也可写成：$\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$.

组成向量的数称为向量的分量，a_i称为向量α的第i个分量. 分量全是实数的向量称为实向量，分量为复数的向量称为复向量. 本课程中一般只讨论实向量.

如果向量的分量全是零(数字0)，称其为零向量，记为：$\boldsymbol{0}=(0, 0,\dots, 0)^T$.

在几何学中，我们把三维向量全体组成的集合

$$R^3=\{(x, y, z)^T \mid x, y, z \in R\}$$

称为三维向量空间.

类似地，我们把n维向量全体组成的集合

$$R^n=\{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in R\}$$

称为n维向量空间.

另有“n-1维超平面”的定义，参见教材P56.

行向量可以看成只有一行的矩阵，列向量可以看成只有一列的矩阵. 于是向量的相等、加减法、数与向量的乘积都按矩阵运算规则进行运算.

定义3.2 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 是两个n维向量, k 是实数, 则

(1) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 当且仅当 $a_i=b_i$, $(i=1, 2,\ldots,n)$; (向量相等)

(2) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1, a_2+b_2,\ldots, a_n+b_n)^{\mathrm{T}}$; (向量的加法运算)

(3) $k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1, ka_2,\ldots, ka_n)^{\mathrm{T}}$; (向量的数乘运算)

(4) $-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1, -a_2,\ldots, -a_n)^{\mathrm{T}}$; (负向量)

(5) $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=(a_1-b_1, a_2-b_2,\ldots, a_n-b_n)^{\mathrm{T}}$. (向量的减法运算)

向量的加法和数乘运算称为向量的**线性运算**.

对于任意的n维向量α, β, γ和任意实数k, l，容易验证向量的线性运算满足以下运算规律:

关于加法

(i) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$; (加法交换律)

(ii) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$; (加法结合律)

(iii) $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$; (关于零向量的加法)

(iv) $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$; (关于负向量的加法)

关于数乘

(v) $1\alpha=\alpha$; (数字1与向量的乘积)

(vi) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$; (数乘向量时，数的结合律)

(vii) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$; (数乘向量时，数的分配律)

(viii) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$. (数乘向量时，向量的分配律)

所有n维列(行)向量的全体，对其上所定义的加法和数乘两种运算，构成了一个n维线性空间，或称向量空间.

在解析几何中，曾引进向量的数量积

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta,$$

且在直角坐标系中，有

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

但是n维向量没有3维向量那样直观的长度和夹角的概念.我们可以按数量积的直角坐标计算公式来推广，先定义n维向量内积的概念，反过来定义n维向量的长度和夹角.

定义3.3 设有n维(实)向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2,\dots, a_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2,\dots, b_n)^T$, 令

$$[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n,$$

称$[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$为向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的内积.

注：内积是两个向量之间的一种运算，其结果是一个数.

内积也可以用矩阵运算表示，当α与β都是列向量时，有

$$[\alpha, \beta] = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha.$$

(实向量之间的)内积具有下列性质(其中α, β, γ为n维(实)向量，k为实数):

(1) $[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]$; (对称性)

(2) $[\alpha+\beta, \gamma] = [\alpha, \gamma]+[\beta, \gamma]$;

(3) $[k\alpha, \beta] = k[\alpha, \beta]$; (线性性)

(4) $[\alpha, \alpha] \geq 0$，而且，仅当$\alpha=\mathbf{0}$时，$[\alpha, \alpha]=0$. (正定性)

或称
非负性

利用这些性质还可以证明Schwarz(施瓦兹)不等式:

$$[\alpha, \beta]^2 \leq [\alpha, \alpha]\,[\beta, \beta].$$

关于Schwarz(施瓦兹)不等式:

$$[\alpha, \beta]^2 \leq [\alpha, \alpha]\,[\beta, \beta].$$

注: 上述Schwartz不等式是一个经典的、实用的不等式.

思考题: 考虑Schwartz不等式为何成立.

下面定义n维向量的长度和夹角.

定义3.4 设n维向量$\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$，称非负实数

$$\sqrt{[\alpha,\alpha]}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

为向量α的长度(或范数)，记为$|\alpha|$ (或$\|\alpha\|$).

当$|\alpha|=1$时，称α为单位向量.

当$\alpha\neq\mathbf{0}$时，$\dfrac{1}{|\alpha|}\alpha$是与α同方向的单位向量.

由Schwarz不等式可得: $|[\alpha, \beta]|\leq|\alpha|\,|\beta|$.

Schwartz不等式的另一形式

所以，对任意非零向量α和β都有

$$\left|\frac{[\alpha,\beta]}{|\alpha|\ |\beta|}\right|\leq 1$$

定义3.5 对任意非零向量α, β, 称

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{[\alpha, \beta]}{|\alpha|\ |\beta|}, \quad 0 \le \langle \alpha, \beta \rangle \le \pi$$

为向量α和β的夹角.

可见, $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow [\alpha, \beta]=0$,

于是有

定义3.6 若$[\alpha, \beta]=0$, 则称向量α与β正交.

注: 由定义3.5可知, 向量α与β的内积$[\alpha, \beta]$也可以表示成:

$$[\alpha, \beta] = |\alpha||\beta| \cos\langle\alpha, \beta\rangle.$$

§2 向量组的线性相关性

对于形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的m×n阶矩阵$\boldsymbol{A}$, 其若干个同维数的列向量(或行向量)组成的集合叫做**向量组**.

如: m×n 矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$对应n个m维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$称为**A的列向量组**. 即$\mathbf{A}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

m×n 矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$也对应m个n 维行向量

$$\beta_1=(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),$$

$$\beta_2=(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}),$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$\beta_m=(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}),$$

向量组$\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_m$, 称为矩阵**A的行向量组**, 即$A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_1 \\ \cdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix}$.

反之，由有限个向量组成的向量组也可构成一个矩阵.

定义3.7 对向量β和向量组：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$，若存在一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_s$，使：

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s, \tag{3.3}$$

则称向量β可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示，也称向量β是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的一个线性组合.

注：式(3.3)也可以写成以下矩阵乘积的形式：

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{\alpha}_2,\quad \ldots,\quad \boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \ldots \\ k_s \end{pmatrix},$$

或 $$\boldsymbol{\beta}=(k_1,\quad k_2,\quad \ldots,\quad k_s)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{\alpha}_s \end{pmatrix}.$$

对于线性方程组$Ax=\beta$, 若记

$$A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T,$$

则此方程组也可以用向量形式表示成:

$$(\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}=\beta,$$

也即

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n=\beta, \tag{3.4}$$

这说明:

线性方程组$Ax=\beta$有解. $\Longleftrightarrow$ β可被系数矩阵A的列向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表示.

例1 设$\beta^T=(2,-1,0,1)$, $\alpha_1{}^T=(1,1,0,0)$, $\alpha_2{}^T=(0,1,0,-1)$, $\alpha_3{}^T=(-1, 0, 0, 1)$, 问$\beta$能否由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.

解 设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$, 即

$$(2, -1, 0, 1)= (k_1-k_3, k_1+k_2, 0, -k_2+k_3).$$

于是有

$$\begin{cases} k_1-k_3=2 \\ k_1+k_2=-1 \\ -k_2+k_3=1 \end{cases}$$

解得: $k_1=1, k_2=-2, k_3=-1$. 即 $\beta= \alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$.

所以向量β可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.

注: 表示式也可写成

$$\beta=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{即} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

定义3.8 对于向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, 若存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_s$, 使:

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=\mathbf{0},$$

则称向量组α_1, α_2, …, α_s**线性相关**；否则，称向量组α_1, α_2, …, α_s**线性无关**.

换言之, 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关的充分必要条件是:

只要

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=\mathbf{0},$$

则必有$k_1= k_2 = \ldots = k_s= 0$ (即k_1, k_2, …, k_s全为数字零).

可见，向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关的充分必要条件是：齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_s\alpha_s=\mathbf{0}$$

有非零解.

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关的充分必要条件是：齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_s\alpha_s=\mathbf{0}$$

只有零解.

另外，显然地，

仅由一个向量α组成的向量组线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha=\mathbf{0}$.

例2 讨论向量组

$$\alpha_1^T=(1, 1, 0, 0), \alpha_2^T=(0, 1, 0, -1), \alpha_3^T=(-1, 0, 0, 1)$$

的线性相关性.

解 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0}$, 即

$$(k_1-k_3, k_1+k_2, 0, -k_2+k_3) = (0, 0, 0, 0),$$

也即

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ -k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

解得: $k_1=k_2=k_3=0$.

所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

例3 讨论向量组

$$\alpha_1^T=(1, 1, 2),\ \alpha_2^T=(0, 1, -1),\ \alpha_3^T=(2, 3, 3)$$

的线性相关性.

解 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0}$，即

$$(k_1+2k_3,\ k_1+k_2+3k_3,\ 2k_1-k_2+3k_3) = (0, 0, 0),$$

也即

$$\begin{cases} k_1+2k_3=0 \\ k_1+k_2+3k_3=0 \\ 2k_1-k_2+3k_3=0 \end{cases}$$

解得: $k_1= 2k_2= -2k_3$.

此时有多个(非零)解. 比如, 可取$k_1=2$, $k_2=1$, $k_3=-1$, 则有

$$2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=\mathbf{0}.$$

所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

例4 讨论n维向量组

$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \dots,\quad \mathbf{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

的线性相关性. (称此向量组为**n 维标准单位向量组**)

解 设 $k_1\mathbf{e}_1+k_2\mathbf{e}_2+\dots+k_n\mathbf{e}_n=\mathbf{0}$，即

$$(k_1, k_2, \dots, k_n)=\mathbf{0}.$$

所以得到

$$k_1=k_2=\dots=k_n=0.$$

因此，向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 线性无关.

注: n维标准单位向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 是线性无关的，而且任意n维向量 $\alpha=(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 都可被 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 线性表示，即有

$$\alpha=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+\dots+a_n\mathbf{e}_n.$$

例5 已知向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，向量$\beta_1, \beta_2, \beta_3$满足条件

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_3=\alpha_3+\alpha_1.$$

讨论向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的线性相关性.

解 设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=\mathbf{0}$，即

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=\mathbf{0}.$$

也即 $$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=\mathbf{0}.$$

由于向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，故由上式得到

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

解得: $k_1= k_2= k_3= 0.$

所以向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

定义3.9 一组两两正交的非零向量称为**正交向量组**. 由单位向量构成的正交向量组称为**规范正交向量组**.

注: n维标准单位向量组$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$就是一个规范正交向量组.

定理3.1 正交向量组必线性无关.

证明: 设$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$是正交向量组, 有一组数$k_1, k_2, \ldots, k_m$使

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \ldots + k_i\beta_i + \ldots + k_m\beta_m = \mathbf{0}.$$

用(向量组中的每个向量) β_i与上式两边做内积, 得

$$k_i\,[\beta_i, \beta_i\,] = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

由于$\beta_i \neq \mathbf{0}$, 所以$[\beta_i, \beta_i] > 0$, 因此, $k_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots, m)$.

所以,向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$线性无关. 证毕.

注: 线性无关的向量组未必是正交向量组.

定理3.2 若向量组有一个部分组线性相关，则此向量组线性相关.

证明 不妨设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s$中的一个部分组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性相关.

则存在不全为零的数$k_1, k_2, \dots, k_r$, 使:

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_r\alpha_r=\mathbf{0}.$$

所以有: $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_r\alpha_r+0\alpha_{r+1}+\dots+0\alpha_s=\mathbf{0}.$

而$k_1, k_2, \dots, k_r, 0, \dots, 0$不全为零，所以$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性相关.

证毕.

推论1 含有零向量的向量组必线性相关.

推论2 线性无关向量组的任一部分组也线性无关.

定理3.3 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\ (s\geq 2)$线性相关的充分必要条件是：其中至少有一个向量可被其余向量线性表示.

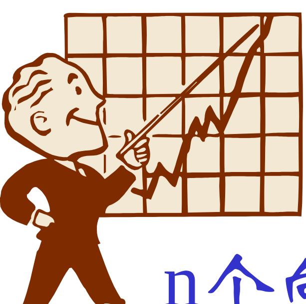
证明 必要性：设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关，则存在不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_s$，使：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=\mathbf{0}$.

不妨设$k_1\neq 0$，则有：$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3 - \cdots - \frac{k_s}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_s$

充分性：不妨设α_1可由$\alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性表示，即存在一组数$k_2, \ldots, k_s$使：$\alpha_1=k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s$，于是有

$$-\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=\mathbf{0},$$

这里$-1, k_2, \ldots, k_s$不全为零，所以$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关. 证毕.



两个向量线性相关的几何意义是这两向量共线；

三个向量线性相关的几何意义是这三向量共面；

n个向量线性相关的几何意义是它们在一个n-1维空间.

定理3.4 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性无关，而向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta$线性相关，则向量$\beta$可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性表示，且表示式唯一.

返回定理3.7

证明： 由已知条件，存在不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_r, l$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r+l\beta=\mathbf{0}. \tag{*1}$$

首先说明必有$l \neq 0$. 否则，若$l=0$，则由(*1)式可得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r=\mathbf{0}, \tag{*2}$$

由于向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性无关，故由(*2)式可得

$$k_1=k_2=\ldots=k_r=0, \tag{*3}$$

(*3)式联合假设条件$l=0$会得出：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta$线性无关.

这与题设条件矛盾. 所以必有$l \neq 0$. 于是可得

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{l}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{l}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_r}{l}\boldsymbol{\alpha}_r,$$ 即：β可由$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性表示.

又, 若β有关于$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$的两组线性表示式, 即

若有: $$\beta = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \ldots + t_r\alpha_r,$$

以及 $$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_r\alpha_r,$$

二者相减可得:

$$(t_1 - l_1)\alpha_1 + (t_2 - l_2)\alpha_2 + \ldots + (t_r - l_r)\alpha_r = \mathbf{0},$$

由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$的线性无关性可得:

$$t_1 - l_1 = t_2 - l_2 = \ldots = t_r - l_r = 0,$$

也即

$$t_1 = l_1,\ t_2 = l_2,\ \ldots,\ t_r = l_r\,.$$

因此, (β关于$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$的)表示式是唯一的.

证毕.

设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\cdots\\a_{1n}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\\cdots\\a_{2n}\end{pmatrix},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s=\begin{pmatrix}a_{s1}\\a_{s2}\\\cdots\\a_{sn}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\cdots\\a_{1n}\\b_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\\cdots\\a_{2n}\\b_2\end{pmatrix},\ldots,\boldsymbol{\beta}_s=\begin{pmatrix}a_{s1}\\a_{s2}\\\cdots\\a_{sn}\\b_s\end{pmatrix},$$

向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$称为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$的加长向量组.

注：以上定义中只叙述了在最后分量位置之后添加一个新分量的情形. 但是，实际上也可以(在任何相对应的位置)添加多个分量，所得到的新的向量组都称为原向量组的加长向量组.

定理3.5 线性无关向量组的加长向量组也线性无关.

证明：以下只证在每一向量的最后加长一个分量的情况，其它加长情况的证明也是类似的. 设α_1, α_2, …, α_s线性无关，其加长向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$满足条件

$$\beta_1^T=(\alpha_1^T, b_1), \beta_2^T=(\alpha_2^T, b_2), \ldots, \beta_s^T=(\alpha_s^T, b_s),$$

并考虑 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_s\beta_s=\mathbf{0}$，即

$$k_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \cdots \\ a_{1n} \\ b_1 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{2n} \\ b_2 \end{pmatrix}+\cdots+k_s\begin{pmatrix} a_{s1} \\ a_{s2} \\ \cdots \\ a_{sn} \\ b_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

或也可写成:

这是零向量

$$k_1\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ b_1 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_2 \\ b_2 \end{pmatrix}+\cdots+k_s\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_s \\ b_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix},$$

这是数字0

从而(观察上述方程组的前n行)可得:

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}.$$

再由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$的线性无关性,可得

$$k_1=k_2=\ldots=k_s=0.$$

所以$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s$线性无关. 证毕.

§3 向量组的秩

设有两个向量组分别为:

(I): $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$; (II): $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$.

定义3.10 若向量组(I)中的每个向量都可以由向量组(II)线性表示，则称向量组(I)可由向量组(II)线性表示;

若向量组(I)和向量组(II)可以互相线性表示，则称向量组(I)和向量组(II)等价.

向量组间的“等价” 关系具有下列性质:

(i)反身性：任何向量组都与自身等价;

(ii)对称性：若(I)与(II)等价，则(II)与(I)也等价;

(iii)传递性：若(I)与(II)等价, (II)与(III)等价, 则(I) 与(III)也等价.

若把向量组(I)记作: $\mathbf{A}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$,

把向量组(II)记作: $\mathbf{B}=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$,

向量组(II)可由向量组(I)线性表示，就是对每个向量β_j ($j=1, 2, \ldots, s$), 存在数$c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{rj}$, 使得

$$\beta_j = c_{1j}\,\alpha_1 + c_{2j}\,\alpha_2 + \ldots + c_{rj}\alpha_r = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \cdots \\ c_{rj} \end{pmatrix},$$

从而可得

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rs} \end{pmatrix},$$

可记作矩阵**C**

可见，矩阵B（即列向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$）可由矩阵A（即列向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$）线性表示的充分必要条件是：存在r×s矩阵C，使

$$B=AC,$$

C是这一线性表示的系数矩阵.

或也可写成

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)C.$$

注：此时，矩阵B的行向量组也可由矩阵C的行向量组线性表示，这一线性表示的系数矩阵是A.

思考：对于两个同阶矩阵A, B,……

矩阵A经过初等行变换变成矩阵B

A与B等价

由于初等变换可逆

矩阵B的每个行向量可由A的行向量组线性表示

此处箭头是单向的

?

?

矩阵A的每个行向量可由B的行向量组线性表示

A的行向量组与B的行向量组等价

结论： 如果A与B的行向量组等价，则矩阵A与B必等价.

(同理可证)如果A与B的列向量组等价，则矩阵A与B必等价.

注意：上述命题的逆命题不成立，即……

思考：对于两个同阶矩阵A, B

当矩阵A与B等价时，A的行向量组与B的行向量组未必等价！A的列向量组与B的列向量组未必等价！

原因：考虑“矩阵等价”的定义，见P43：定义2.4.

反例：考虑以下两个矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

对A做初等列变换(互换两列)得到B，因此A与B等价，然而...

A的行向量(1, 0)不能被B的行向量组：(0, 1), (0, 1) 线性表示，

(另可见：B的行向量(0, 1)也不能被A的行向量组(1, 0), (1, 0)线性表示). 故此时A的行向量组与B的行向量组不等价.

类似地，也可以构造两个矩阵等价但其列向量组之间不等价的算例.(自修)

回前页 下一定理

关于行向量的初等变换与行向量组之间的线性表示

矩阵**A**经过初等行变换变成矩阵**B**. $\Longleftrightarrow$ 矩阵**B**的每个行向量可由**A**的行向量组线性表示.

情形1:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_i\\ \cdots\\ \alpha_j\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_j\\ \cdots\\ \alpha_i\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}.$$

矩阵**A**可看作行向量组(I):

$\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n$.

矩阵**B**可看作行向量组(II):

$\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n$.

显然此时向量组(II)可被向量组(I)线性表示.

反之, 若组(II)和组(I)如上所示, 则以上初等行变换必可行.

关于行向量的初等变换与行向量组之间的线性表示(续)

情形2:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_i\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}\xrightarrow[k\neq 0.]{k\times r_i\,,}\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \cdots\\ k\boldsymbol{\alpha}_i\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}.$$

矩阵**A**可看作行向量组(I): $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_i, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$.

矩阵**B**可看作行向量组(II): $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, k\boldsymbol{\alpha}_i, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$.

此时, 易见向量组(II)可被向量组(I)线性表示. 这是因为

$$k\boldsymbol{\alpha}_i = 0\,\boldsymbol{\alpha}_1 + \ldots + 0\,\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + k\boldsymbol{\alpha}_i + 0\,\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \ldots + 0\,\boldsymbol{\alpha}_n\,.$$

而向量组(II)中的其余向量$\boldsymbol{\alpha}_k$ ($k=1,\ldots i-1, i+1,\ldots, n$)显然也可被向量组(I)线性表示.

反之, 若组(II)和组(I)如上所示, 则以上初等行变换必可行.

关于行向量的初等变换与行向量组之间的线性表示(续)

情形3:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_i\\ \cdots\\ \alpha_j\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\xrightarrow{r_j+kr_i\ ,}\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_i\\ \cdots\\ \alpha_j+k\alpha_i\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}.$$

返回

矩阵A可看作行向量组(I): $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n$.

矩阵B可看作行向量组(II): $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j+k\alpha_i, \ldots, \alpha_n$.

此时，可见向量组(II)可被向量组(I)线性表示. 这是因为

$$\alpha_j+k\alpha_i = 0\,\alpha_1+\ldots+k\alpha_i+\ldots+1\,\alpha_j+\ldots+0\,\alpha_n\ .$$

而组(II)中的其余向量α_k $(k\neq j)$显然也可被组(I)线性表示.

反之，若组(II)和组(I)如上所示，则以上初等行变换必可行.

前面章节的讨论中已经得到结论:

1. 正交向量组必线性无关.

2. 线性无关向量组未必是正交向量组.

但是……

定理3.6 如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关，则有规范正交向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$与之等价.

证 先正交化，即由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$构造(线性表示)一个正交向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. 具体做法如下：令

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

(然后，可先令) $\beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1$,

再令$[\beta_1, \beta_2] = 0$,

可得$k_{21} = -\dfrac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]}$.

即得：

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1,$$

(然后，可先令) $\beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$,

再令：

$[\beta_1, \beta_3] = 0$, $[\beta_1, \beta_2] = 0$,

$[\beta_2, \beta_3] = 0$,

可得：

$$k_{31} = -\frac{[\beta_1, \alpha_3]}{[\beta_1, \beta_1]}, \quad k_{32} = -\frac{[\beta_2, \alpha_3]}{[\beta_2, \beta_2]},$$

即得: $$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\beta_1,\alpha_3]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_3]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2,$$

类似地继续做下去 ……………………

$$\beta_m=\alpha_m-\frac{[\beta_1,\alpha_m]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_m]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2-\dots-\frac{[\beta_{m-1},\alpha_m]}{[\beta_{m-1},\beta_{m-1}]}\beta_{m-1}$$

以上过程中，实质可表达为	同时，此过程也可以看作:
$\beta_1=\alpha_1$,	$\beta_1=\alpha_1$,
$\beta_2=\alpha_2+k_{21}\beta_1$,	$\beta_2-k_{21}\beta_1=\alpha_2$,
$\beta_3=\alpha_3+k_{31}\beta_1+k_{32}\beta_2$,	$\beta_3-k_{31}\beta_1-k_{32}\beta_2=\alpha_3$,
……	……
$\beta_m=\alpha_m+k_{m1}\beta_1+\dots+k_{m,m-1}\beta_{m-1}$.	$\beta_m-k_{m1}\beta_1-\dots-k_{m,m-1}\beta_{m-1}=\alpha_m$.

可见: 向量组$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$与$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$等价.

由刚才的计算过程可知：向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$中的任意两个不同的向量$\beta_i, \beta_j\,(i \neq j)$满足关系：$[\beta_i, \beta_j]=0$.

综上可得：向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$是与$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$等价的正交向量组.

但须注意：此时的向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$还未必是单位向量组.

再将$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$单位化，取

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{|\beta_2|}\beta_2, \; \cdots, \; \varepsilon_m = \frac{1}{|\beta_m|}\beta_m,$$

则$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$是规范正交向量组，且与向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$等价. 证毕.

上述由线性无关向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$得到正交向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$的方法称为Schimidt(施密特)正交化过程.

例6 求与向量组$\alpha_1=(1, 1, 1)^T$, $\alpha_2=(1, 2, 3)^T$, $\alpha_3=(2, -1, 2)^T$等价的一个规范正交向量组.

解 先将向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$正交化，令

$$\beta_1=\alpha_1=(1, 1, 1)^T,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\beta_1, \alpha_3]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2, \alpha_3]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}-\frac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{0}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

再将向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$规范化，即取

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\boldsymbol{\beta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_3|}\boldsymbol{\beta}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$就是与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$等价的规范正交向量组.

定义3.11 若实方阵A满足$AA^T=E$，则称A是**正交矩阵**.

设$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\cdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$，即：$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是$A$的行向量组.

那么，$AA^T=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\cdots\\\alpha_n\end{pmatrix}(\alpha_1^T\quad\alpha_2^T\quad\cdots\quad\alpha_n^T)$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_1^T&\alpha_1\alpha_2^T&\cdots&\alpha_1\alpha_n^T\\\alpha_2\alpha_1^T&\alpha_2\alpha_2^T&\cdots&\alpha_2\alpha_n^T\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\alpha_n\alpha_1^T&\alpha_n\alpha_2^T&\cdots&\alpha_n\alpha_n^T\end{pmatrix},$$

于是可见：$AA^T=E$

当且仅当

$$\alpha_i\alpha_j^T=\begin{cases}0, & i\neq j\text{时},\\1, & i=j\text{时}.\end{cases}$$

可见：n阶实矩阵A为正交矩阵. ⟺ A的行向量组是一组规范正交向量组.

另一方面，若记$A=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$，即$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$是$A$的列向量组，则有

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \beta_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n)$$

$$=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\beta_1 & \beta_1^{\mathrm{T}}\beta_2 & \cdots & \beta_1^{\mathrm{T}}\beta_n\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\beta_1 & \beta_2^{\mathrm{T}}\beta_2 & \cdots & \beta_2^{\mathrm{T}}\beta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_n^{\mathrm{T}}\beta_1 & \beta_n^{\mathrm{T}}\beta_2 & \cdots & \beta_n^{\mathrm{T}}\beta_n\end{pmatrix},$$

于是可见：$A^{\mathrm{T}}A=E$

当且仅当

$$\beta_i^{\mathrm{T}}\beta_j=\begin{cases}0, & i\neq j\text{时},\\ 1, & i=j\text{时}.\end{cases}$$

可见：

n阶实矩阵A为正交矩阵. $\Longleftrightarrow$ A的列向量组是一组规范正交向量组.

综上可知，n阶实矩阵A是正交矩阵

$\Leftrightarrow A$的行向量组是规范正交向量组.

$\Leftrightarrow A$的列向量组是规范正交向量组.

例如，下列矩阵都是正交矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

思考题：请写出几个正交矩阵.

定义3.12 若向量组T中的某个部分组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$满足:

(i) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性无关;

(ii) 取向量组T中的任意向量β, 都有$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta$线性相关.

则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$是此向量组T的一个极大线性无关向量组, 简称为极大无关组.

例7 求向量组

$\alpha_1=(1, 0, 0)^T, \alpha_2=(0, 1, 0)^T, \alpha_3=(0, 0, 1)^T, \alpha_4=(1, 1, 1)^T$

的一个极大线性无关组.

解 由于$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，而且$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$就是一个极大线性无关组.

注：此题的解是不唯一的.

由于$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$也线性无关，而且$\alpha_3=\alpha_4-\alpha_1-\alpha_2$，

所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$也是一个极大线性无关组.

类似地，$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$和$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$都是极大线性无关组.

可见，一个向量组的极大线性无关组一般是不唯一的.

返回定义3.13

定理3.7 向量组与它的任一极大线性无关组等价.

证明思路: 对于向量组(I): $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_s$,

任取它的一个极大线性无关组, 不妨(做适当排序, 将这些向量放在前面)设为向量组(II): $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$.

以下往证向量组(I)与向量组(II)是等价的. 由于向量组(II)显然可以被向量组(I)线性表示, 因此以下只需证明向量 $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_s$ 均可以被向量组(II)线性表示.

任取 α_j ($j= r+1, \ldots, s.$), 由向量组(II)的极大无关性, 向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_j$$

是线性相关的. 由定理3.4知, α_j 可被向量组(II)线性表示.

定理3.4 ?

证毕.

推论 向量组中任意两个极大线性无关组等价.

定理3.8 若某个列向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性无关，则当

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)A = O \ (O\text{为零矩阵})$$

时(其中A是矩阵)，有A=O.

证明 设$A=(a_{ij})_{r\times s}$，则$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)A=O$ 可写为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

也即

$$\left(\sum_{k=1}^{r} a_{k1}\boldsymbol{\alpha}_k, \ \sum_{k=1}^{r} a_{k2}\boldsymbol{\alpha}_k, \ \cdots \ \sum_{k=1}^{r} a_{ks}\boldsymbol{\alpha}_k, \right) = \mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0).$$

于是 $$\sum_{k=1}^{r} a_{kj}\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0},$$

$$(j = 1, 2, \ldots, s)$$

由于$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性无关，

得$a_{kj}=0$, (对于所有的k, j)

故可得A=O. 证毕.

定理3.9 等价的线性无关向量组含有相同个数的向量.

证明 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$和$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$等价且都线性无关, 则存在s×r矩阵**A**和r×s矩阵**B**, 使

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)\mathbf{A},$$

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)\mathbf{B},$$

于是有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)\mathbf{A}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)\mathbf{BA},$$

即$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)\mathbf{E}_r=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)\mathbf{BA}$, 即得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)(\mathbf{E}_r-\mathbf{BA})=\mathbf{O}.$$

由定理3.8可得$\mathbf{E}_r-\mathbf{BA}=\mathbf{O}$, 也即$\mathbf{BA}=\mathbf{E}_r$;

同理(请思考原因)还可得: $\mathbf{AB}=\mathbf{E}_s$.

所以, **A**, **B**是方阵 (详见教材P41 例2.9), 即r = s. 证毕.

推论 一个向量组的(所有)极大线性无关组所含向量的个数是唯一的.

定义3.13 一个向量组的(每个)极大线性无关组所含向量的个数，称为向量组的秩.

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$的秩记为：$R\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$，或记为：$\mathrm{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$.

若一向量组的所有向量都是零向量，规定其秩为0.

易知，向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关$\Leftrightarrow R\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}=s$.

例7中向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$的秩$R\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}= 3$.

例7

定理3.10 若向量组$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s$可由向量组$\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_t$线性表示，则

$$R\{\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s\}\le R\{\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_t\}.$$

证明 记$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s$的极大线性无关组为：$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_p$，

$\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_t$的极大线性无关组为：$\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_q$，

则向量组$\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_p$可由$\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_q$线性表示. 于是，考虑合并的新向量组 T: $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_q$,

易知：$\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_q$是新向量组T的极大线性无关组.（因此$R\{T\}=q$.）

思考：$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_p$是否是T的极大无关组？

再由$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_p$线性无关，可知$p\le q$.

（否则，若$p>q$，则得$R\{T\}\ge p>q$，这与刚才结论$R\{T\}=q$矛盾.）

证毕.

推论1 等价的向量组具有相等的秩.

推论2 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$线性无关，且可由向量组$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$线性表示，则必有$p \le q$.

推论3 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$线性表示，且$p > q$，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$必然线性相关.

注：推论2的逆否命题.

推论4 任意n+1个n维向量必然线性相关.

证明思路：对于任意n+1个n维向量$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$，考虑(n维)标准单位向量$e_1, e_2, \dots, e_n$,(共n个)……，再根据推论3,……

注：推论4还可改为

"任意不少于n+1个的n维向量必然线性相关."

§4 矩阵的秩

第二章指出，任意矩阵都与标准形$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$等价，r就是矩阵$\mathbf{A}$的秩. 但由于r的唯一性没有证明，因此以下用另一种说法给出矩阵秩的定义.

定义3.14 在一个m×n矩阵A中，任选k个行与k个列($k\le m$，$k\le n$)，位于这些行、列交叉处的k^2个元素，按原相互位置关系所形成的k阶行列式称为A的一个k阶子式.

例：对于下面的6×5的矩阵A，

$$A=\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ a_{21} & * & a_{23} & a_{24} & * \\ a_{31} & * & a_{33} & a_{34} & * \\ * & * & * & * & * \\ a_{51} & * & a_{53} & a_{54} & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

其中蓝色元素对应的行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

就是A的一个3阶子式.

一个m×n矩阵的k阶子式共有 $C_m^k \cdot C_n^k$ 个.

定义3.15 设在矩阵A中(至少)有一个不等于0的r阶子式D，且A的所有r+1阶子式(如果存在的话)全等于0，那么D称为矩阵A的最高阶非零子式，r称为矩阵A的秩，记为R(A). 并且规定零矩阵的秩等于0.

由于$R(\mathbf{A})$就是$\mathbf{A}$的最高阶非零子式D的阶数，所以

若$\mathbf{A}$有某个s阶子式不等于0，则$R(\mathbf{A})\geq s$；

若$\mathbf{A}$的所有t阶子式全等于0，则$R(\mathbf{A})<t$;

对任意$m\times n$矩阵$\mathbf{A}$都有：$0\leq R(\mathbf{A})\leq \min\{m, n\}$;

$\mathbf{A}^T$的各阶子式与$\mathbf{A}$的各阶子式对应相等；(因为行列式转置值不变)

对任意矩阵$\mathbf{A}$都有：$R(\mathbf{A}^T)=R(\mathbf{A})$.

对n阶方阵$\mathbf{A}$，由于只有一个n阶子式$|\mathbf{A}|$，所以

$$|\mathbf{A}|\neq 0 \Leftrightarrow R(\mathbf{A}) =n;$$

$$|\mathbf{A}|=0 \Leftrightarrow R(\mathbf{A}) <n.$$

即：n阶方阵$\mathbf{A}$可逆$\Leftrightarrow R(\mathbf{A}) =n$.

所以，可逆矩阵(非奇异矩阵)也称为满秩矩阵；

不可逆矩阵(奇异矩阵)也称为降秩矩阵.

例8 求下列矩阵的秩.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 2 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

解 由于$|\mathbf{A}|=0$，但 $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\neq 0$，所以，$R(\mathbf{A})=2$.

由于$\mathbf{B}$的所有四阶子式全为0，但 $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}\neq 0$，

所以，$R(\mathbf{B})=3$.

可见(行)阶梯矩阵的秩等于其非零行的行数.

思考: 能否将矩阵A都“变换”为行阶梯形B，来判断A的秩？

定理3.11 初等变换不改变矩阵的秩.

证明 首先证明对矩阵做一次初等行变换不改变矩阵的秩. 设R(A)=r, 且D是A的某个r阶非零子式.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

假设红色分块子阵的行列式就是D

如果 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

情形(a1)
第i行与第j行均在D中

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

情形(a2)
第i行或第j行只有一个在D中

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

或 $\mathbf{A} \xrightarrow{kr_i,\ k\neq 0.} \mathbf{B}$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & & & & \\ a_{m1} & & & & & \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{ir} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & & & & & \\ a_{m1} & & & & & \end{pmatrix}$$

情形(b1) 第i行在D中，
B有r阶子式D_1，使$D_1=kD$

情形(b2) 第i行不在D中，
B有r阶子式D_1，使$D_1=D$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{ir} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

可见,如果A $\xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j}$ B 或 A $\xrightarrow{kr_i,\ k\neq 0.}$ B,

在B中一定能找到与D对应的r阶子式D_1满足D_1=D或D_1=-D或$D_1=kD$, ($k\neq0$), 所以$D_1\neq0$, 故此时R(**B**)≥r.

如果A $\xrightarrow{r_i+kr_j}$ B,

若A的第j行在D中但第i行不在D中，则D也是**B**的r阶非零子式，故此时R(**B**)≥r.

情形(c1)第j行在D中，第i行不在D中. 此时**B**有r阶子式D_1, 使D_1=D

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{ir}+ka_{jr} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

若A的第i行和第j行均在D中，则B中对应D的r阶子式$D_1=D\neq 0$，所以此时$R(\mathbf{B})\geq r$.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{ir}+ka_{jr} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

情形(c2) 第i行和第j行均在D中，此时B有r阶子式D_1，使$D_1=D$

若**A**的第i行在D中但第j行不在D中，则**B**中对应D的r阶子式$D_1=D+kD_2$，D_2也是**B**的r阶子式，而D_1、D_2至少有一个不等于零，所以，$R(\mathbf{B})\geq r$.

详见下图：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{ir}+ka_{jr} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

情形(c3) 第i行在D中，第j行不在D中，
此时$D_1=D+kD_2$，(只考虑$k\neq0$，因为$k=0$时$D_1=D$)

其中行列式D_1和D_2的取值情况为……

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{ir}+ka_{jr} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}}_{D_1} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}}_{D} + k\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}}_{D_2}$$

注： 由于$D_1=D+kD_2$，($D\neq 0$, $k\neq 0$)，所以D_1和D_2不能同时为0.

因此…….

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{ir}+ka_{jr} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

当$D_1 \neq 0$时，B有r阶子式$D_1 \neq 0$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{ir}+ka_{jr} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

当$D_1=0$时，必有$D_2 \neq 0$，**B**有r阶子式(红字部分对应的行列式) D_2不为零.

综上，对$\mathbf{A}$作一次初等行变换变成$\mathbf{B}$时有$R(\mathbf{B})\geq R(\mathbf{A})$.

又由于初等变换是可逆的，$\mathbf{B}$也可以作一次初等行变换变成$\mathbf{A}$，所以$R(\mathbf{A})\geq R(\mathbf{B})$，因此此时必有$R(\mathbf{B})=R(\mathbf{A})$.

由于对矩阵做一次初等行变换矩阵的秩不变，所以对矩阵做有限次初等行变换后，矩阵的秩也不变.

如果对$\mathbf{A}$作一次初等列变换变成$\mathbf{B}$，则对$\mathbf{A}^T$作一次初等行变换变成$\mathbf{B}^T$，所以此时$R(\mathbf{B}^T)=R(\mathbf{A}^T)$. 于是对$\mathbf{A}$做有限次初等列变换变成$\mathbf{B}$后也有

$$R(\mathbf{B}) = R(\mathbf{B}^T) = R(\mathbf{A}^T) = R(\mathbf{A}).$$ 证毕.

根据前面的思考，由"行列式转置值不变"可得

推论 若$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$，则$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{B})$.

这就给我们提供了求一般矩阵秩的有效方法.

例9 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -8 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -8 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -15 & -18 \\ 0 & 0 & 2 & 15 & 18 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -15 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故R(**A**)=3.

上述结果对分块矩阵也是成立的，即：对分块矩阵做分块矩阵的初等变换不改变分块矩阵的秩.

思考：能否用以上类似的方法确定向量组的秩?

事实上，……

定义：对于$m \times n$矩阵$\mathbf{A}$,

$\mathbf{A}$的行向量组的秩称为$\mathbf{A}$的行秩,

$\mathbf{A}$的列向量组的秩称为$\mathbf{A}$的列秩.

基本性质(对于$m \times n$矩阵$\mathbf{A}$):

$$\mathbf{A}\text{的行秩} \le m,$$

$$\mathbf{A}\text{的列秩} \le n.$$

进一步地，……

定理3.12 对于任意m×n矩阵A,

$$A\text{的行秩} = R(A) = A\text{的列秩}.$$

证明: 由于矩阵A可经过初等行变换变成行最简形矩阵B, 由于:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \underset{\text{经过(最多)三类初等行变换}}{\overset{\text{经过(最多)三类初等行变换}}{\rightleftarrows}} B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

可见: 每个β_i $(i=1,\ldots,m)$均可被向量组$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性表示, (思考)

因初等变换可逆,故每个α_i $(i=1,\ldots,m)$也可被向量组$\beta_1,\ldots,\beta_m$线性表示,

所以A的行向量组与B的行向量组等价.(故A的行秩= B的行秩)

又, 易见: 行最简形矩阵B的秩等于B的行秩.即R(B)= B的行秩.

又(由A与B的变换关系以及定理3.11知)R(A)=R(B), 因此

$$R(A) = R(B) = B\text{的行秩} = A\text{的行秩}.$$

由于$\mathbf{A}$的列向量组就是$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$的行向量组，

而对$\mathbf{A}$做初等列变换，对应于对$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$做初等行变换，故有

$$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\text{的行秩}=\mathbf{A}\text{的列秩}.$$

证毕.

注：定理3.12告诉我们，对于任意$m\times n$的矩阵$\mathbf{A}$，其行秩和列秩必相等.

以上理论也给我们提供了求向量组的秩的有效方法.

例10 讨论(列)向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ -1,\ 2,\ 1)^T,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,\ 4,\ 1,\ 2)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_4=(3,\ 1,\ 4,\ 3)^T$$

的线性相关性，并求其秩和一个极大无关组.

解 由于

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&-1&4&1\\1&2&1&4\\1&1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&-2&2&-2\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以, R(A)= 2. 于是, R$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$= 2.

因此, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性相关.

又因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以有R$\{\alpha_1, \alpha_2\}$= 2, 于是α_1, α_2线性无关.

再由R$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$=2可知:

α_1, α_2就是向量组的一个极大无关组.

注: 寻找列向量组的极大无关组, 一般要做初等行变换. 请思考原因.

例11 证明: $R(\mathbf{AB}) \le \min\{R(\mathbf{A}),\ R(\mathbf{B})\}$.

证明: 由于

$c_1 - c_2\mathbf{B}$

$$R(\mathbf{AB}) = R(\mathbf{AB}, \mathbf{O}) \le R(\mathbf{AB},\ \mathbf{A}),$$ 而 $(\mathbf{AB},\ \mathbf{A}) \sim (\mathbf{O}, \mathbf{A})$,

$$= R(\mathbf{O}, \mathbf{A})$$

$$= R(\mathbf{A}). \qquad (*1)$$

另一方面, 由于

$r_1 - \mathbf{A}r_2$

$$R(\mathbf{AB}) = R\left(\begin{pmatrix}\mathbf{AB}\\ \mathbf{O}\end{pmatrix}\right) \le R\left(\begin{pmatrix}\mathbf{AB}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\right),$$ 而 $\begin{pmatrix}\mathbf{AB}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\mathbf{O}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$,

$$= R\left(\begin{pmatrix}\mathbf{O}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\right) = R(\mathbf{B}). \qquad (*2)$$

综合(*1)、(*2)式即得: $R(\mathbf{AB}) \le \min\{R(\mathbf{A}),\ R(\mathbf{B})\}$. 证毕.

提示: 此题也可以不用分块矩阵来论证, 比如, 可根据向量组之间的线性表示关系直接论证. 请写出相应的证明.

关于矩阵秩的一些经典结论

命题1(P75: 15): 对于任意的$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in \mathrm{R}^{m\times n}$, 均有:

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leq R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$$

非常实用, 请认真思考.

命题2(PPT例题): 对于任意的$\boldsymbol{A}\in \mathrm{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in \mathrm{R}^{n\times p}$, 均有:

$$R(\boldsymbol{AB})\leq \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}.$$

非常实用, 已证明, 还有其他思路可证.

命题3 (P76: 19): 对于$\boldsymbol{A}\in \mathrm{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in \mathrm{R}^{n\times p}$, 若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则有:

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leq n.$$ (这里n为$\boldsymbol{A}$的列数, 也是$\boldsymbol{B}$的行数)

很实用. (也可在学完第四章以后再证)

命题4(P76: 20): 设$\boldsymbol{A}\in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵, 则有:

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n, \\ 1, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n-1. \end{cases}$$

课后练习

设4维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2, 2+a, 2, 2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3, 3, 3+a, 3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(4, 4, 4, 4+a)^{\mathrm{T}}$, 问$a$为何值时$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$线性相关?当$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余量用该极大线性无关组线性表出.

解　由于

$$|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$$

$$=(10+a)a^3$$

所以, $a=0$或$a=-10$时, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$线性相关.

当a=0时，由于

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

此时$R(\mathbf{A})=1$, α_1是一个极大线性无关组.

当a=-10时，由于

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&-6\\0&-10&0&10\\0&0&-10&10\\0&20&30&-50\end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 20 & 30 & -50 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见，当a=-10时，$R(\mathbf{A})=3$，α_1，α_2，α_3是一个极大线性无关组.