第八章　傅里叶变换与滤波器形状

- 傅里叶变换基础
- 频率响应与其他形式
- 频率响应和滤波器形状

8.1 傅里叶变换基础

- 离散时间傅里叶变换是数字信号分析的一个工具，
- DTFT把信号或滤波器从时域变换到频域，主要为了研究信号或滤波器的频率特性。

  - 信号——频谱：DTFT提供的信息

  - 滤波器——频率响应：DTFT得到的信息

频率响应：幅度响应、相位响应

- **信号 x[n] 的离散时间傅里叶变换DTFT**（Discrete Time Fourier Transform）

定义为：

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-jn\Omega}$$

- **其中Ω是数字频率。**

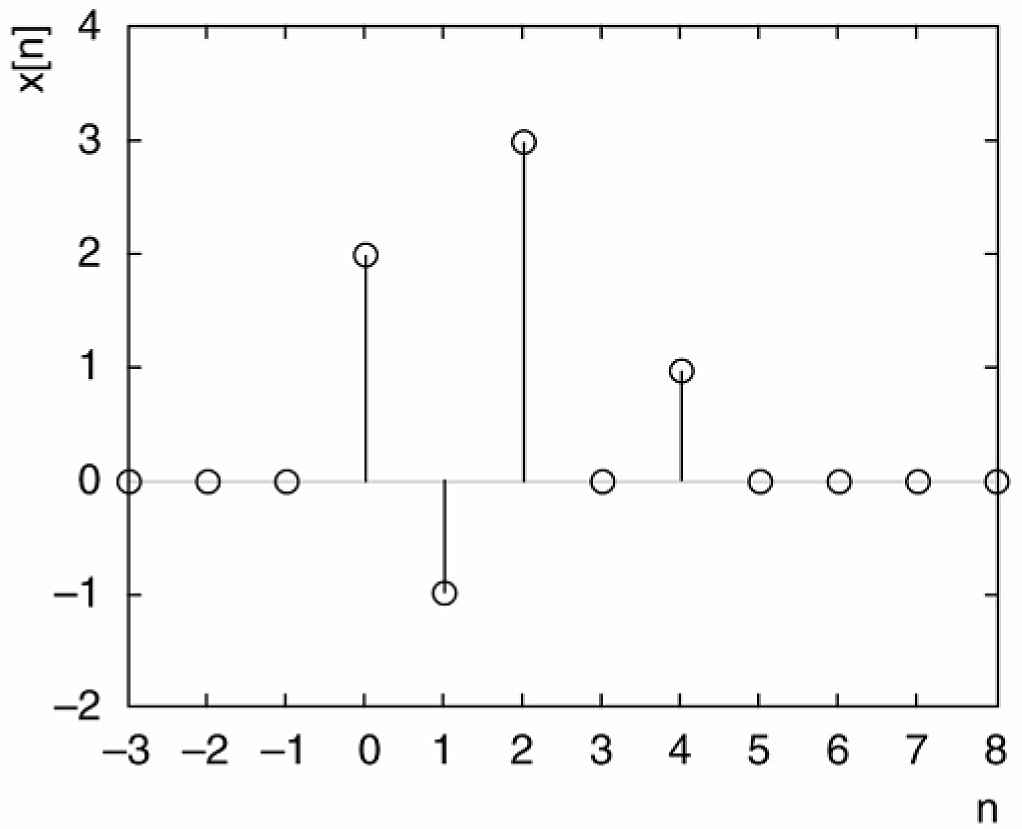
$$X(\Omega)=\mathbf{F}\{x[n]\}$$

X(Ω)反映了信号的频率

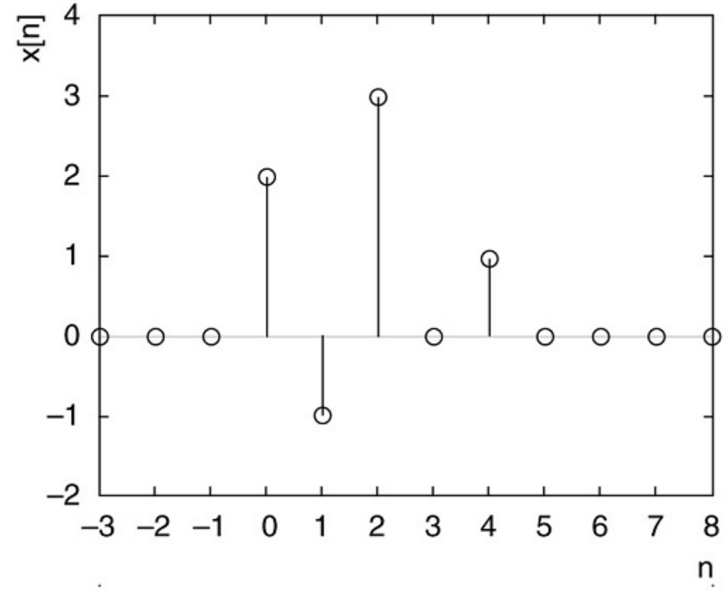
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\Omega}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\{\cos(\Omega n) - j\sin(\Omega n)\}$$

信号的傅里叶变换（DTFT)



例1 求信号的DTFT



$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega}$$

$$= x[0]e^{-j0\Omega} + x[1]e^{-j\Omega} + x[2]e^{-j2\Omega} + x[3]e^{-j3\Omega} + x[4]e^{-j4\Omega}$$

$$= 2 - e^{-j\Omega} + 3e^{-j2\Omega} + e^{-j4\Omega}$$

离散时间傅里叶变换（DTFT）的性质

- **时延特性**

若信号$x[n]$的$DTFT$存在，为$X(\Omega)$

则$x[n-n_0]$的$DTFT$为

$$F\{x[n-n_0]\}=e^{-jn_0\Omega}X(\Omega)$$

- **时延特性**

$$F\{x[n-n_0]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n-n_0]e^{-jn\Omega}$$

令： $m=n-n_0,\qquad n=m+n_0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[m]e^{-j(m+n_0)\Omega}=e^{-jn_0\Omega}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[m]e^{-jm\Omega}\right)$$

$$=e^{-jn_0\Omega}X(\Omega)$$

离散时间傅里叶变换（DTFT）的性质

- **周期性**

若信号$x[n]$的$DTFT$存在，为$X(\Omega)$

$$X(\Omega+2\pi)=X(\Omega)$$

$DTFT$是以2π为周期的

离散时间傅里叶变换（DTFT）的性质

- **周期性**

若信号$x[n]$的$DTFT$存在，为$X(\Omega)$

$$X(\Omega+2\pi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn(\Omega+2\pi)}$$

$$=e^{-jn2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega}\right)=X(\Omega)$$

$$e^{-jn2\pi}=\cos(2\pi n)-j\sin(2\pi n)=1$$

$DTFT$是以2π为周期的

傅里叶变换 Matlab代码

```
Fs = 1000; % Sampling frequency
T = 1/Fs; % Sampling period
L = 1500; % Length of signal
t = (0:L-1)*T; % Time vector

S = 0.7*sin(2*pi*50*t) + sin(2*pi*120*t);%输入信号

X = S + 2*randn(size(t));%输入信号+噪声
figure
plot(1000*t(1:50),X(1:50))
title("Signal Corrupted with Zero-Mean Random Noise")
xlabel("t (milliseconds)")
ylabel("X(t)")

Y = fft(X);%对X进行傅里叶变换
P2 = abs(Y/L);%求绝对值
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);

f = Fs*(0:(L/2))/L;
figure
plot(f,P1)
title("Single-Sided Amplitude Spectrum of X(t)")
xlabel("f (Hz)")
ylabel("|P1(f)|")
```

傅里叶变换 Python代码

```
import numpy as np

# 生成一个示例信号
Fs = 1000  # 采样频率
T = 1 / Fs  # 采样周期
L = 1000   # 信号长度
t = np.arange(0, L) * T  # 时间向量
f1 = 50  # 信号的频率
f2 = 120
x = 0.7 * np.sin(2 * np.pi * f1 * t) + 0.3 * np.sin(2 * np.pi * f2 * t)  # 合成信号

# 计算FFT
X = np.fft.fft(x)

# 计算频率轴
freqs = np.fft.fftfreq(len(x), d=T)

# 取FFT结果的前一半，因为FFT的结果是对称的
X_half = X[:L//2]
freqs_half = freqs[:L//2]

# 打印结果
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t, x)
plt.title('原始信号')
plt.xlabel('Time [s]')
plt.ylabel('Amplitude')

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(freqs_half, np.abs(X_half))
plt.title('频谱')
plt.xlabel('Frequency [Hz]')
plt.ylabel('Magnitude')
plt.grid()
plt.show()
```

差分方程与频率响应

根据差分方程定义

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

展开

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \ldots + b_M x[n-M]$$

对上式两侧做DTFT变换　　令：$Y(\Omega)$为$y[n]$的傅里叶变换，　$X(\Omega)$为$x[n]$的傅里叶变换

$$a_0 Y(\Omega) + a_1 e^{-j\Omega} Y(\Omega) + \ldots + a_N e^{-jN\Omega} Y(\Omega) = b_0 X(\Omega) + b_1 e^{-j\Omega} X(\Omega) + \ldots + b_M e^{-jM\Omega} X(\Omega)$$

$$(a_0 + a_1 e^{-j\Omega} + \ldots + a_N e^{-jN\Omega}) Y(\Omega) = (b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + \ldots + b_M e^{-jM\Omega}) X(\Omega)$$

得到频率响应为

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + \ldots + b_M e^{-jM\Omega}}{a_0 + a_1 e^{-j\Omega} + \ldots + a_N e^{-jN\Omega}}$$

$$Y(\Omega) = H(\Omega) X(\Omega)$$

频率响应

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{(b_0+b_1e^{-j\Omega}+\ldots+b_Me^{-jM\Omega})}{(a_0+a_1e^{-j\Omega}+\ldots+a_Ne^{-jN\Omega})}$$

$$Y(\Omega)=H(\Omega)X(\Omega)$$

频率响应和传输函数

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{(b_0+b_1e^{-j\Omega}+\ldots+b_Me^{-jM\Omega})}{(a_0+a_1e^{-j\Omega}+\ldots+a_Ne^{-jN\Omega})}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{(b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M})}{(a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N})}$$

频率响应和脉冲响应

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-jn\Omega}$$

滤波器的输入$x[n]$是脉冲函数$\delta[n]$,它的输出为脉冲响应$h[n]$
因为

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]e^{-jn\Omega}=1$$

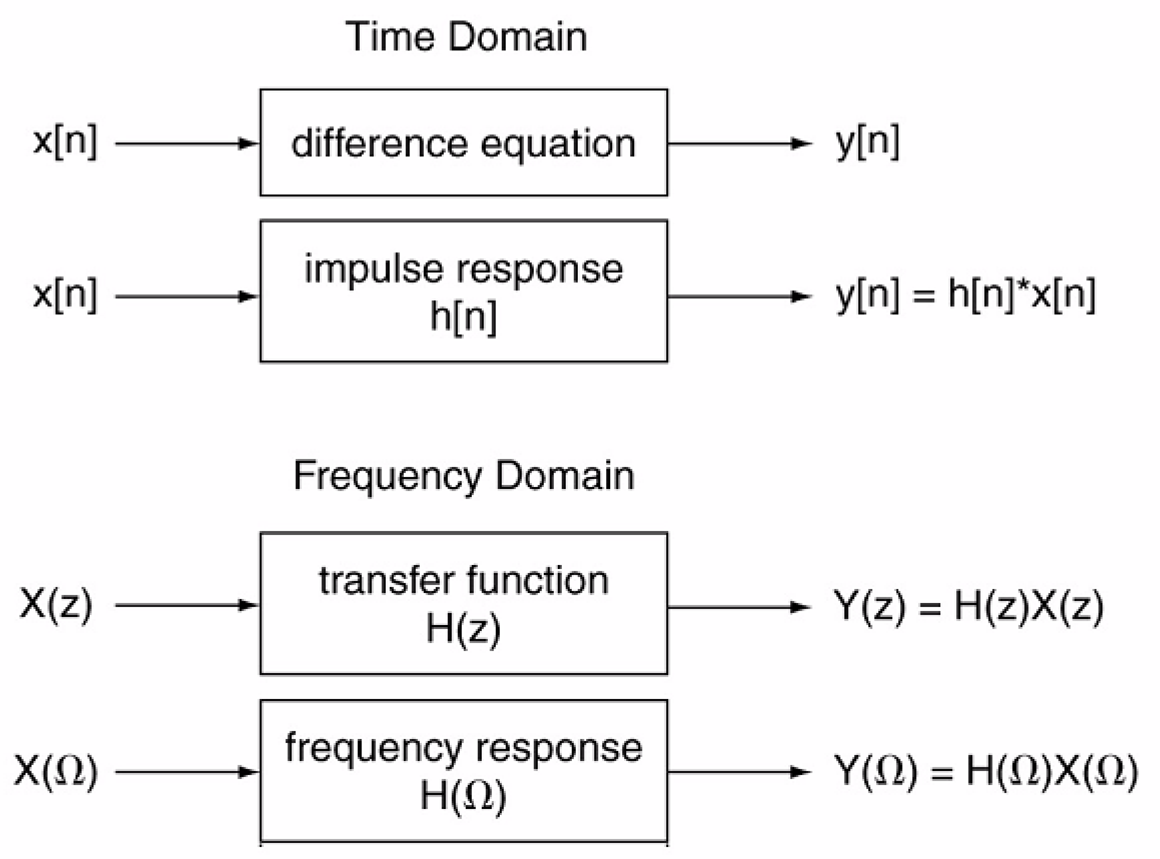
脉冲响应$h[n]=y[n]$,它的DTFT为

$$Y(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-jn\Omega}$$

滤波器的频率响应为

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-jn\Omega}}{1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-jn\Omega}$$

时域与频域



Time Domain
x[n]
difference equation
y[n]
x[n]
impulse response
h[n]
y[n] = h[n]*x[n]
Frequency Domain
X(z)
transfer function
H(z)
Y(z) = H(z)X(z)
X(Ω)
frequency response
H(Ω)
Y(Ω) = H(Ω)X(Ω)

数字滤波器的脉冲响应为

$$h[n]=5\delta[n]-\delta[n-1]+0.2\delta[n-2]-0.04\delta[n-3]$$

求频率响应。

因为

$$H(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-jn\Omega}$$

$$h[0]=5\delta[0]-\delta[-1]+0.2\delta[-2]-0.04\delta[-3]=5$$

$$h[1]=5\delta[1]-\delta[1-1]+0.2\delta[1-2]-0.04\delta[1-3]=\text{-}1$$

$$h[2]=5\delta[2]-\delta[2-1]+0.2\delta[2-2]-0.04\delta[2-3]=0.2$$

$$h[3]=5\delta[3]-\delta[3-1]+0.2\delta[3-2]-0.04\delta[3-3]=\text{-}0.04$$

滤波器的频率响应为

$$H(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-jn\Omega}=h[0]e^{0}+h[1]e^{-j\Omega}+h[2]e^{-j2\Omega}+h[3]e^{-j3\Omega}$$

$$=5\text{-}e^{-j\Omega}+0.2e^{-j2\Omega}\text{-}0.04e^{-j3\Omega}$$

幅度响应和相位响应

- 滤波器的幅度响应：描述增益值与数字频率的关系。

- 滤波器的相位响应：描述相位与数字频率的关系。

滤波器的频率响应$H(\Omega)$是复数，可用极坐标表示为

$$H(\Omega)=\left|H(\Omega)\right|e^{j\theta(\Omega)}=R(\Omega)+jI(\Omega)$$

$\left|H(\Omega)\right|$：表示频率响应的大小，称为滤波器在数字频率Ω处的增益，它是无量纲的。

如果用分贝dB表示，可写成 $20\log\left|H(\Omega)\right|$

$\theta(\Omega)$：相位差

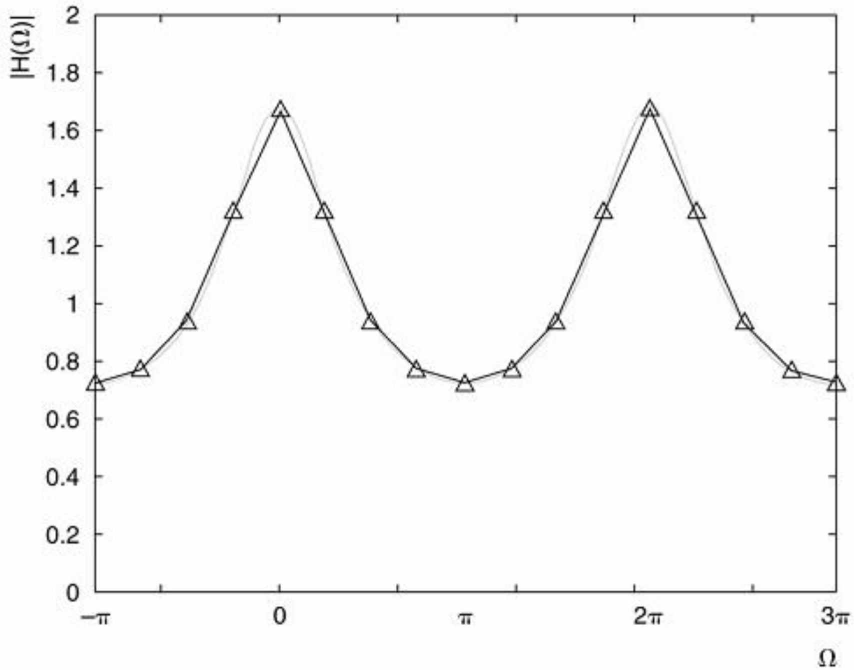
$$\theta(\Omega)=\tan^{-1}[\frac{I(\Omega)}{R(\Omega)}$$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

$$\left|Y(\Omega)\right| = \left|H(\Omega)\right|\left|X(\Omega)\right|$$

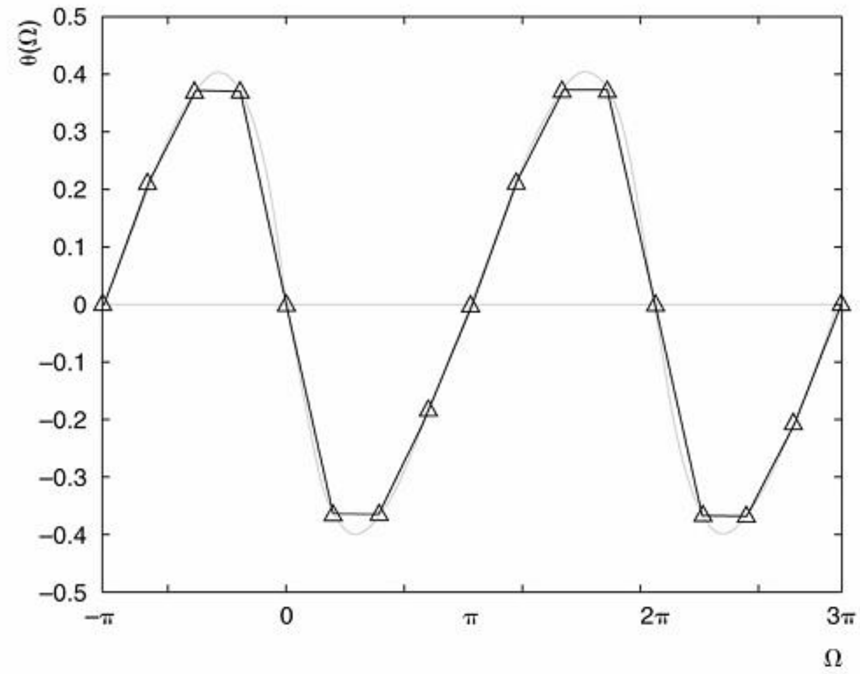
例

滤波器的幅度响应



(a) Magnitude Response

滤波器的相位响应



(b) Phase Response

模拟频率 f 和数字频率Ω

$$f = \Omega \frac{f_s}{2\pi}$$

作业

例　　　　　数字滤波器的差分方程为

$$y[n]=1.5y[n-1]-0.85y[n-2]+x[n]$$

求频率响应并画出曲线

$$y[n]=1.5y[n-1]-0.85y[n-2]+x[n]$$

差分方程两侧做傅里叶变换（DTFT）

令

$$F[y[n]\}=Y(\Omega), \qquad F[x[n]\}=X(\Omega)$$

$$y[n]-1.5y[n-1]+0.85y[n-2]=x[n]$$

$$Y(\Omega)-1.5e^{-j\Omega}Y(\Omega)+0.85e^{-j2\Omega}Y(\Omega)=X(\Omega)$$

$$(1\text{-}1.5e^{-j\Omega}+0.85e^{-j2\Omega})\ Y(\Omega)=X(\Omega)$$

$$\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{1}{1\text{-}1.5e^{-j\Omega}+0.85e^{-j2\Omega}}=H(\Omega)$$

频率响应

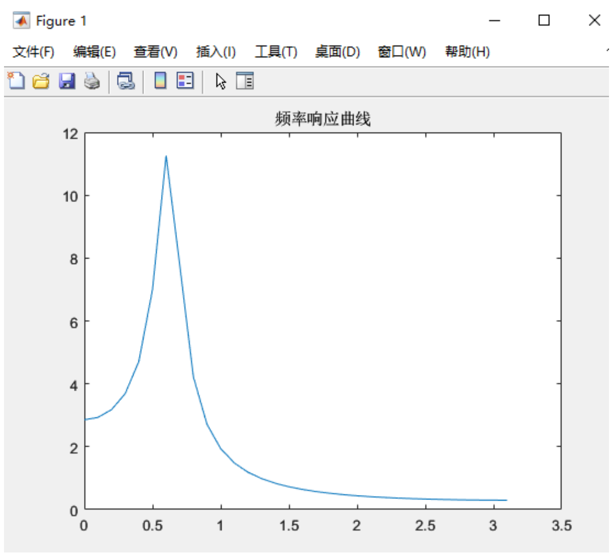
例， 求差分方程频率响应并画出曲线

%解差分方程 y[n]=1.5y[n-1]-0.85y[n-2]+x[n], n>0

解

Matlab代码

```
t=0:0.1:pi;
HH=(1-1.5*exp(-i*t)+0.85* exp(-i*t*2)).^-1
H=abs(HH);
plot(t,H);title('频率响应曲线')
```



例， 求差分方程频率响应并画出曲线

%解差分方程 y[n]=1.5y[n-1]-0.85y[n-2]+x[n], n>0

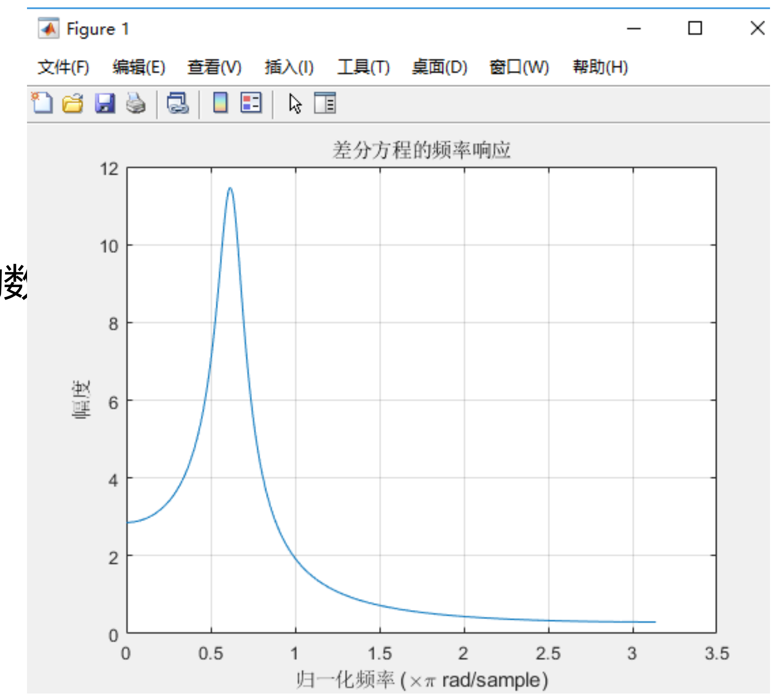
解

Matlab代码：

```
b = [1]; % 分子系数
a = [1, -1.5, 0.85]; % 分母系数

% 计算频率响应
[H, f] = freqz(b, a, 1024); % 1024 是频率点的数

% 绘制频率响应
figure;
plot(f, abs(H));
title('差分方程的频率响应');
xlabel('归一化频率 (\times\pi rad/sample)');
ylabel('幅度');
grid on;
```



Python 代码

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.signal import freqz

# 定义滤波器系数
b = [1]  # 分子系数
a = [1, -1.5, 0.85]  # 分母系数

# 计算频率响应
w, h = freqz(b, a, worN=8000)

# 绘制幅度响应
plt.figure()
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(0.5 * np.pi * w / np.max(w), 20 *
np.log10(np.abs(h)))
plt.title('幅度响应')
plt.xlabel('归一化频率 (×π rad/sample)')
plt.ylabel('幅度 (dB)')
plt.grid()

# 绘制相位响应
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(0.5 * np.pi * w / np.max(w), np.unwrap(np.angle(h)))
plt.title('相位响应')
plt.xlabel('归一化频率 (×π rad/sample)')
plt.ylabel('相位 (radians)')
plt.grid()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

作业

求下面数字滤波器的形状

$$H[z]=\frac{1}{1-0.5z^{-8}}$$

解:

$$H[z]=\frac{1}{1-0.5z^{-8}}$$

$$H(\Omega)=\frac{1}{1-0.5e^{-j8\Omega}}$$

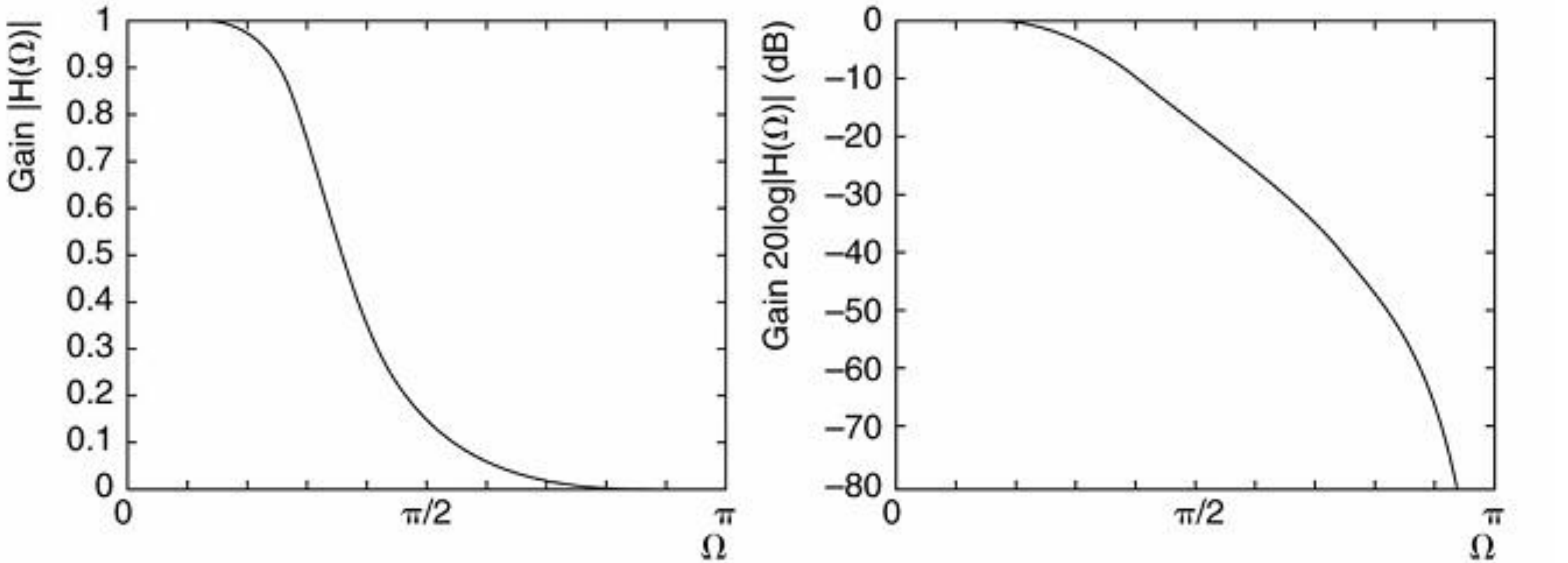
求下面数字滤波器的形状

$$H[z]=\frac{1}{1-0.5z^{-8}}$$

Matlab代码

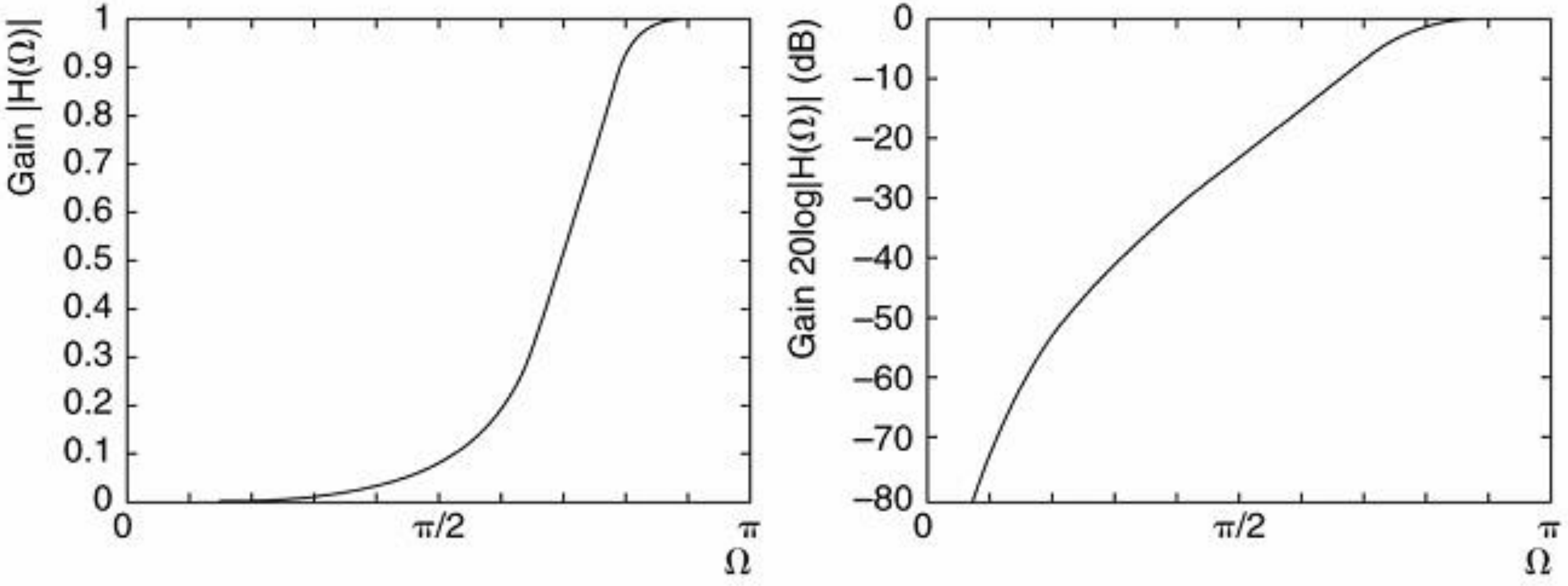
```
t=0:0.1:pi;
HH=(1-0.5*exp(-i*t*8)).^-1
H=abs(HH)
plot(t,H);title('频率响应曲线')
```

低通滤波器



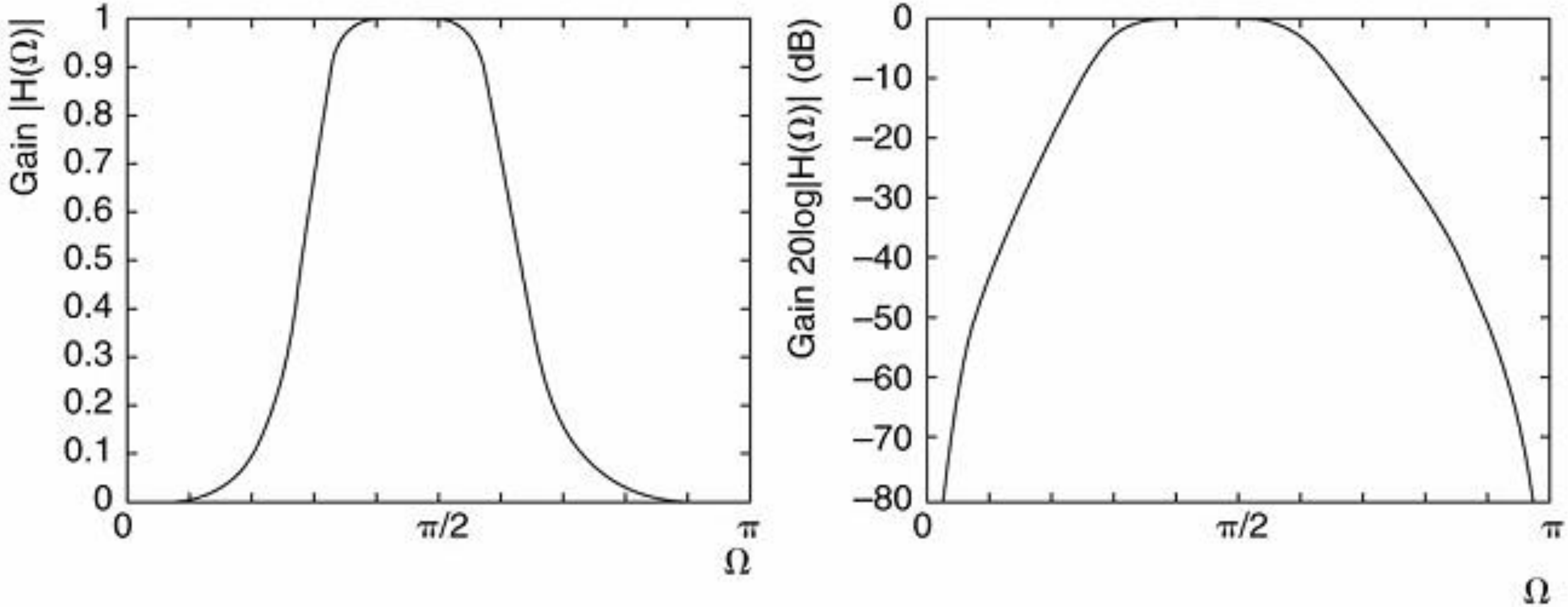
(a) Low Pass Filter

高通滤波器



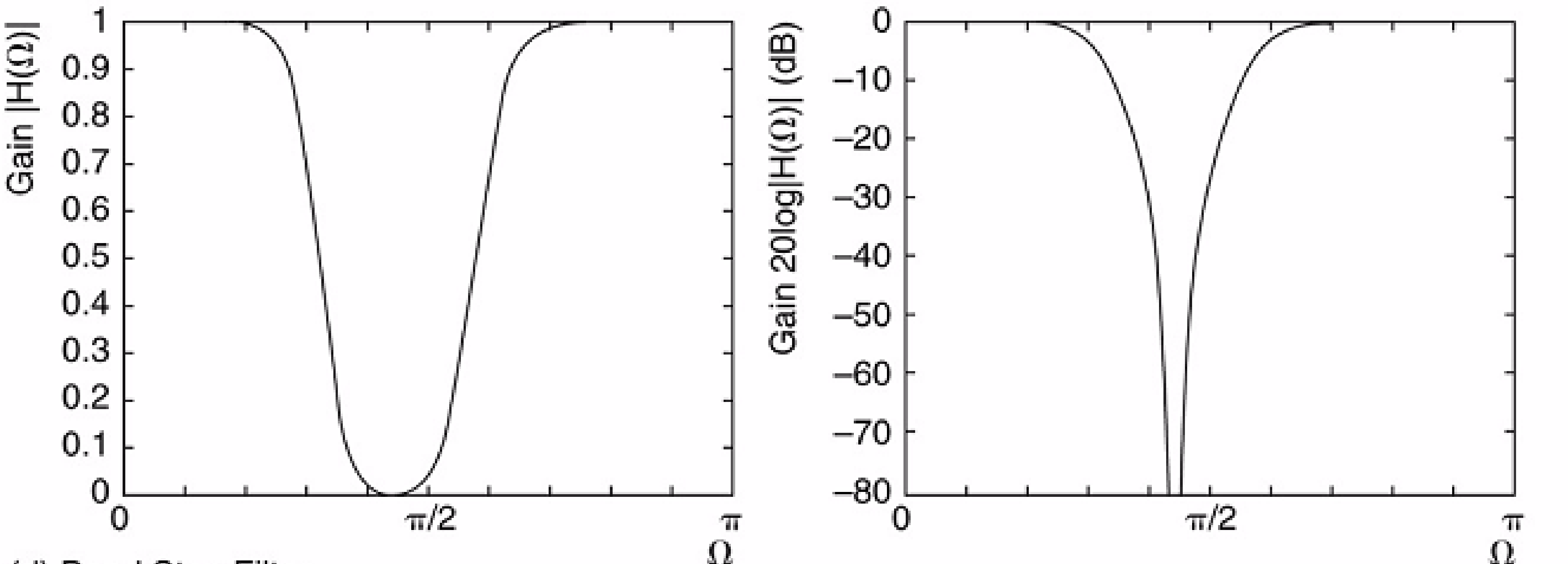
(b) High Pass Filter

带通滤波器



(c) Band Pass Filter

带阻滤波器



(d) Band Stop Filter

练习

1，讨论下面解差分方程的稳定性，并说明其对输入信号做什么处理?

$y[n]-0.95y[n-1]+0.9025y[n-2]=1/3[x[n]+x[n-1]+x[n-2]]$,

$n>=0$，$y[-1]=-2$, $y[-2]=-3$, $x[-1]=1$, $x[-2]=1$

2，讨论下面解差分方程的稳定性，并说明其对输入信号做什么处理?

$y[n]=1/15[x[n]+x[n-1]+x[n-2]]$,

$n>=0$，$y[-1]=0$, $y[-2]=0$, $x[-1]=0$, $x[-2]=0$

1，讨论下面解差分方程的稳定性，并说明其对输入信号做什么处理?

y[n]-0.95y[n-1]+0.9025y[n-2]=1/3[x[n]+x[n-1]+x[n-2]],

n>=0，y[-1]=-2, y[-2]=-3, x[-1]=1, x[-2]=1

解

1. **求差分方程的特征方程及特征根**：
   - 对于给定的差分方程$y[n]-0.95y[n-1]+0.9025y[n-2]=\frac{1}{3}[x[n]+x[n-1]+x[n-2]]$，其齐次部分为$y[n]-0.95y[n-1]+0.9025y[n-2]=0$。
   - 设$y[n]=r^n$，代入齐次差分方程得到特征方程$r^2-0.95r+0.9025=0$。
   - 根据一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的求根公式$r=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，这里$a=1$，$b=-0.95$，$c=0.9025$，则

     $$r=\frac{0.95\pm\sqrt{(-0.95)^2-4\times1\times0.9025}}{2\times1}=\frac{0.95\pm\sqrt{0.9025-3.61}}{2}=\frac{0.95\pm\sqrt{-2.7075}}{2}。$$
   - 或者我们可以将特征方程因式分解为$(r-0.95)^2=0$，得到特征根$r_1=r_2=0.95$。
2. **判断稳定性**：
   - 对于一个线性时不变（LTI）离散系统，其稳定性的充要条件是系统的所有特征根的模$|r_i|<1$。
   - 由于特征根$r_1=r_2=0.95$，$|r_1|=|r_2|=0.95<1$，所以该系统是稳定的。

3. **分析系统对输入信号的处理**：

- 对给定的差分方程两边同时取Z变换，根据Z变换的性质

  $$Z\{y[n-k]\}=z^{-k}Y(z)-z^{-k}\sum_{i=0}^{k-1}y[-i-1]z^{i}\text{和}Z\{x[n-k]\}=z^{-k}X(z)-z^{-k}\sum_{i=0}^{k-1}x[-i-1]z^{i}\text{。}$$

- $Y(z)-0.95(z^{-1}Y(z)+y[-1])+0.9025(z^{-2}Y(z)+y[-1]z^{-1}+y[-2])=\frac{1}{3}(X(z)+z^{-1}X(z)+z$

  。

- 已知$y[-1]=-2$，$y[-2]=-3$，$x[-1]=1$，$x[-2]=1$，代入上式：

  - $Y(z)-0.95z^{-1}Y(z)+0.95\times 2+0.9025z^{-2}Y(z)+0.9025\times(-2)z^{-1}+0.9025\times(-3)=\frac{1}{3}($

    。

  - 整理

    $$Y(z)(1-0.95z^{-1}+0.9025z^{-2})=\frac{1}{3}(X(z)+z^{-1}X(z)+z^{-2}X(z))-1.9+1.805z^{-1}+2.7075$$

    。

  - 系统函数$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\frac{1}{3}(1+z^{-1}+z^{-2})}{1-0.95z^{-1}+0.9025z^{-2}}$。

- 从系统函数$H(z)$的形式来看，分母的阶数为2，分子的阶数为2，这是一个二阶的滤波器。

- 分子是$1+z^{-1}+z^{-2}$，它对不同频率的信号有一定的加权作用，分母$1-0.95z^{-1}+0.9025z^{-2}$决定了系统的极点位置。由于系统是稳定的，且分子的系数分布表明该系统对输入信号进行了低通滤波处理。因为随着频率的增加，分子和分母的组合使得高频信号的增益相对低频信号的增益减小，从而起到了抑制高频信号、通过低频信号的作用。

综上，该系统是稳定的，对输入信号起到了低通滤波的作用。

在离散系统中，对于系统函数$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\frac{1}{3}(1+z^{-1}+z^{-2})}{1-0.95z^{-1}+0.9025z^{-2}}$，其分子$\frac{1}{3}(1+z^{-1}+z^{-2})$的系数分布表明该系统对输入信号进行了低通滤波处理，原因如下：

从Z变换与频率响应关系角度

- 在Z变换中，$z=e^{j\omega}$，其中ω是数字频率。将$z=e^{j\omega}$代入分子$\frac{1}{3}(1+z^{-1}+z^{-2})$可得

  $$H(e^{j\omega})=\frac{1}{3}(1+e^{-j\omega}+e^{-j2\omega})。$$

- 对其进行化简，根据欧拉公式$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$，$e^{-j\theta}=\cos\theta-j\sin\theta$，可得

  $$H(e^{j\omega})=\frac{1}{3}(1+\cos\omega-j\sin\omega+\cos 2\omega-j\sin 2\omega)。$$

- 其幅度响应$|H(e^{j\omega})|=\frac{1}{3}\sqrt{(1+\cos\omega+\cos 2\omega)^2+(\sin\omega+\sin 2\omega)^2}$。当$\omega=0$（对应直流或低频）时，$|H(e^{j0})|=1$；随着$\omega$增加，$|H(e^{j\omega})|$的值逐渐减小，这意味着低频信号的增益相对较大，高频信号的增益相对较小，所以起到了低通滤波的作用。

傅里叶变换：时域与频域的奇幻之桥

在数学的奇妙世界里，傅里叶变换宛如一座神秘的桥梁，横跨在时域与频域之间。

想象一下，生活中的信号如同一场复杂的交响乐，时域里，我们看到的是音符随着时间的流淌依次奏响，是信号随时间的连续变化。而傅里叶变换就像一位神奇的指挥家，将这复杂的旋律拆解重组。它把时域中看似杂乱无章的信号，转换到频域之中，让我们看到隐藏在其中的不同频率的 “音符”。

原本随时间起伏的波形，在傅里叶变换的作用下，分解成了一系列不同频率、不同振幅的正弦波和余弦波。这些波就像是组成音乐的基本元素，通过傅里叶变换，我们能清晰地分辨出它们各自的 “声音”。从时域到频域，傅里叶变换为我们开启了一扇全新的认知之窗，让我们得以洞察信号背后更深层次的奥秘。

作 业

《数学传感技术与机器人控制》的第6章 1、2、3、4、5、6