学院________ 班级________ 学号________ 姓名________

密 封 线

东北大学考试试卷（A 闭卷）

2023—2024 学年 秋季 学期

课程名称：概率论与数理统计

总分	一	二	三	四	五	六

说明：考试不允许使用计算器；按题号在答题卡规定区域答题，超出答题区的答题无效。

$\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(2)=0.9772$, 上分位数: $z_{0.05}=1.645$, $z_{0.025}=1.96$, $t_{0.05}(9)=1.83$, $t_{0.025}(9)=2.62$, $t_{0.05}(8)=1.86$, $t_{0.025}(8)=2.31$, $\chi^2_{0.975}(4)=0.48$, $\chi^2_{0.975}(5)=0.83$, $\chi^2_{0.025}(4)=11.14$, $\chi^2_{0.025}(5)=12.83$

一．计算题 （共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

1. 设 A 和 B 为随机事件，$P(\overline{A})=0.7$，$P(B)=0.4$，$P(A|B)=0.5$，求 $P(A|\overline{AB})$.

2. 随机变量 X 服从均匀分布 $U(a,b)$，已知 $E(X)=0$，$D(X)=4/3$，求 $P(-1<X<3)$.

3. 随机变量 X 密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 随机变量 $Y=\dfrac{1}{X}$，求 Y 的密度函数 $f_Y(y)$.

二．计算题 （共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

1. 随机变量 X_1, X_2, X_3 独立同分布，均服从分布 $B(1, 1/4)$，$Y_1=\max(X_1, X_2)$，$Y_2=\max(X_1, X_3)$，$Y_3=\max(X_2, X_3)$，$Y=Y_1+Y_2+Y_3$，求 Y_1 的分布律和 $E(Y)$.

2. 某枪手每次射击中靶的概率为 1/3，该枪手独立重复射击 3 次，X 表示该枪手 3 次射击里中靶的总次数，Y 表示第 3 次射击是否中靶，若中靶，$Y=1$，否则，$Y=0$. 求 $Cov(X, Y)$.

3. 某歌剧院最多容纳 300 位观众，该歌剧院为观众开放的停车场有 90 个停车位，假设每位观众是否开车来歌剧院观看演出是相互独立的，每位观众开车的概率为 1/4，在歌剧院某次演出观众满员的情况下，用中心极限定理估算没有足够车位的概率。

三．计算题 （共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

随机变量(X, Y)的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}ax^2y, & 0<y\le x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 a 为常数，求：

1. 常数 a 的值及概率 $P(Y\le \dfrac{X}{2})$;

2. 边缘密度函数 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$；

3. 条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$，并判断 X 与 Y 的独立性。

四．计算题 （共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

总体 X 的密度函数 $f(x;\theta)=\begin{cases}a\theta^{-3}x^2, & -\theta\le x\le \dfrac{1}{2}\theta,\ \theta>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 a 为常数，θ 是未知参数，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自该总体的简单随机样本。求常数 a 的值和参数 θ 的矩估计。

总体 X 的密度函数 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{-2}, & 0<\theta\le x,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自该总体的简单随机样本。求参数 θ 的最大似然估计。

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X\sim P(\lambda)$ 的简单随机样本，参数 $\lambda>0$ 未知，记 $\overline{X}$ 为样本均值、S^2 为样本方差，常数 a 为何值时，$\dfrac{a^2}{2}\overline{X}+(1-a)S^2$ 是参数 λ 的无偏估计量。

五．计算题 （共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

1. 随机变量 $X\sim U(-1,2)$，随机变量 $Y=\begin{cases}a, & -1<X\le 0,\\ 1-a, & 0<X\le 1,\\ 1, & 1<X<2,\end{cases}$ 常数 a 为何值时，$D(Y)$达最小。

2. 随机变量(X, Y)的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2+y, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 求随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数。

六．计算题 （共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

1. 某生产线灌装饮料的容量（单位：毫升）服从正态分布 $N(\mu, 25)$，从该生产线随机抽取 9 瓶已灌装的饮料，测得这 9 瓶灌装量的样本均值为 502，样本标准差为 6，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，是否可认为该生产线每瓶灌装量的平均值小于 500.

2. 某批纱线的断裂强力（单位：厘牛顿）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从该批纱线随机抽取 5 段 1 米长的线，测得这 5 段线的断裂强力分别为 26，30，28，32，34，求该批纱线断裂强力方差的置信水平为 0.95 的置信区间（结果保留 1 位小数）。

学院________ 班级________ 学号________ 姓名________

密 封 线

东北大学考试试卷（B 闭卷）

2023—2024 学年 春季 学期

课程名称：概率论与数理统计

总分	一	二	三	四	五	六

说明：考试不允许使用计算器；按题号在答题卡规定区域答题，超出答题区的答题无效，
$\Phi(1)=0.8413$、$\Phi(1.645)=0.95$、$\Phi(1.96)=0.975$、$\Phi(2)=0.9772$，
上分位数：$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，$\chi^2_{0.05}(10)=18.307$，$t_{0.05}(15)=1.7531$，$t_{0.05}(16)=1.7459$。

一. 计算题（共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

1. 设 A,B 为两个随机事件，且 $P(A)=0.5, P(\overline{A}\cup B)=0.8$，求 $P(\overline{B}\mid A)$。

2. 设某公路经过的货车与客车的数量之比为 1∶2，货车与客车中途停车修理的概率分别为 0.03 和 0.01。现有一辆汽车中途停车修理，求该车是货车的概率。

3. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=a+b\arctan x, -\infty<x<+\infty$，求常数 a,b 和概率 $P(-1<X<1)$。

二. 计算题（共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

1. 设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{12x^2}{\pi^3}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求 $Y=\sin X$ 的密度函数。

2. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,1,4,9,-0.5)$，令 $Z=\dfrac{X}{2}-\dfrac{Y}{3}$，求 X 与 Z 的相关系数。

3. 在每次实验中，事件 A 发生的概率为 0.8，利用切比雪夫不等式估计，当 n 取多大时，才能使得在 n 次独立重复实验中，事件 A 发生的频率大于 0.7 小于 0.9 的概率至少为 0.9?

三. 计算题（共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

1. 某餐厅每天接待 300 名顾客，设每位顾客的消费额（单位：元）服从区间(20,100)上的均匀分布，且每位顾客的消费额是相互独立的。利用中心极限定理，估计该餐厅每天的营业额在平均营业额上下 800 元范围内的概率。

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 分别是来自正态总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$ 的简单随机样本，且两总体相互独立，令 $Z=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\overline{Y})^2$，求 $E(Z), D(Z)$。

3. 设随机变量 X 与 Y 同分布，且 $P(X=0)=\dfrac{1}{3}, P(X=1)=\dfrac{2}{3}$，$X$ 与 Y 的相关系数 $\rho(X,Y)=\dfrac{1}{2}$，求二维随机变量 (X,Y) 的分布律。

四. 计算题（共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}c(x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x\ge 0, y\ge 0 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

1. 求常数 c 和边缘密度函数 $f_X(x)$；

2. 求条件密度函数 $f_{Y|X}(y\mid x)$，并判断随机变量 X 与 Y 是否相互独立；

3. 求随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数。

五. 计算题（共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，其中 λ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_{50}$ 为来自该总体的简单随机样本，现得到一组样本观测值如下：

X	0	1	2	3	4
频数	17	20	10	2	1

1. 求参数 λ 的矩估计值；2. 求参数 λ 的最大似然估计值。

六. 计算题（共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

1. 设某日一台包盐机开工时随机抽取了 16 袋盐，称得它们重量的平均值为 503 克，标准差为 10 克，假设这批盐每袋的重量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求每袋盐平均重量的置信度为 0.95 的单侧置信下限（保留两位小数）。

2. 已知某种溶液中水分的含量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，要求其标准差不超过 0.6%。现在随机抽取了容量为 10 的样本，得到水分含量的样本标准差为 0.68%，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验假设 $H_0:\sigma^2\le 0.006^2; H_1:\sigma^2>0.006^2$。