第三章 扭转



主讲人：吕杭原

邮箱：lvhy@mail.neu.edu.cn

办公室：新机械楼319

QQ：494489092

复习

1. 扭转特征

受力特征：在杆件两端垂直于杆轴线的平面内作用一对大小相等，方向相反的**外力偶**。

变形特征：横截面形状大小未变，只是绕轴线发生相对转动。

2. 外力偶矩

(KW)

$$m = 9549\frac{P}{n}(\mathrm{N\cdot m})$$

(r/min)

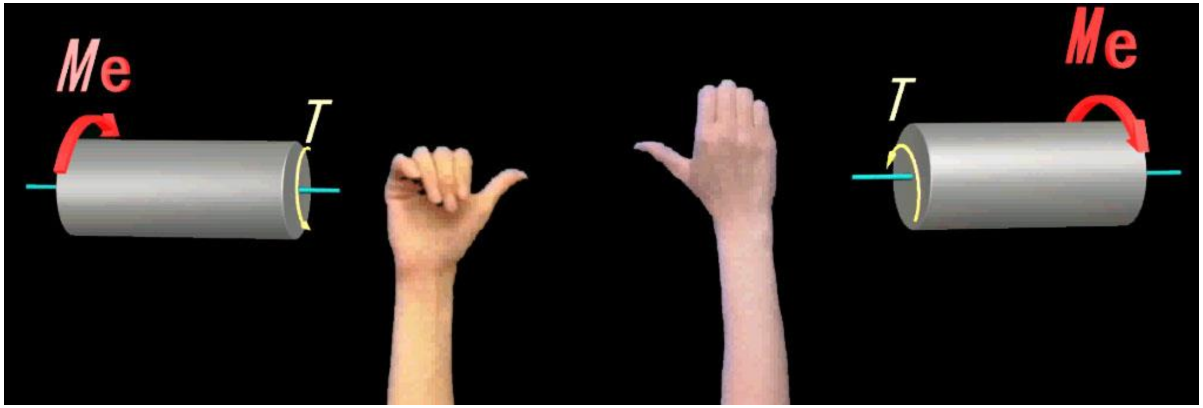
3. 扭矩与扭矩图

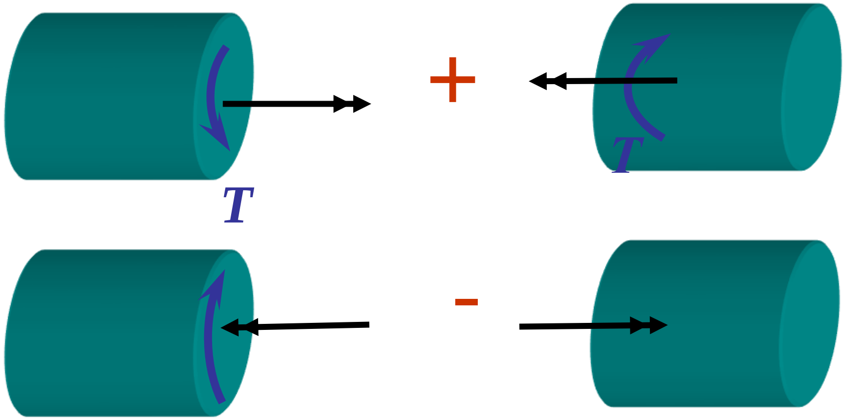
内力偶矩称为扭矩，用符号T表示

复习

扭矩的符号规定：按右手螺旋法则判断。

右手的四指代表扭矩的旋转方向，大拇指代表其矢量方向，若其矢量方向与截面的外法线方向相同，则扭矩规定为正值，反之为负值。



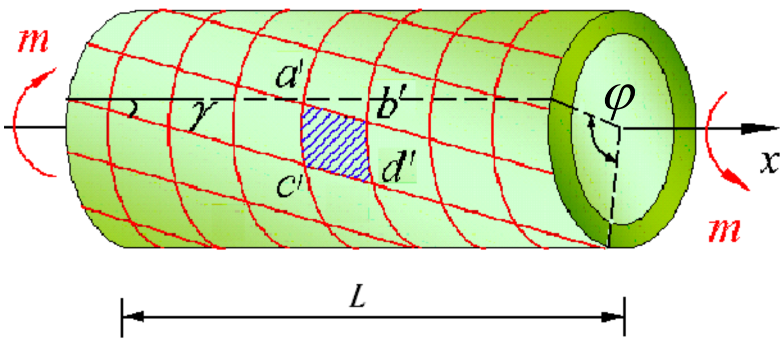


复习

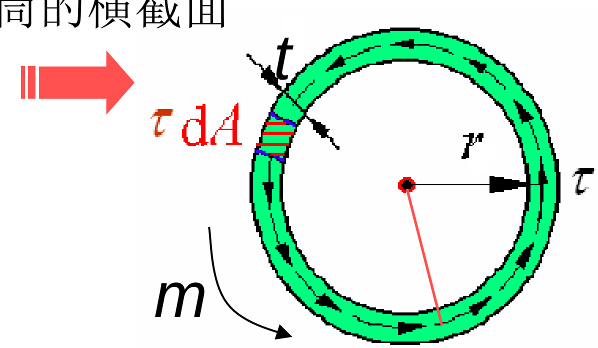
4、薄壁圆筒扭转实验

（1）在小变形下，沿杆的轴线方向无变形，无正应力。

根据实验现象分析：



圆筒的横截面



（2）因存在切应变，所以必有切应力。横截面上切应力均匀分布，垂直于半径，沿周向和圆筒壁厚大小不变，方向与该截面的扭矩方向一致。

（3）

$$\gamma \cdot L = \varphi \cdot r$$

$$\therefore \quad \gamma = \varphi \cdot r/L$$

（4）薄壁圆筒的切应力：

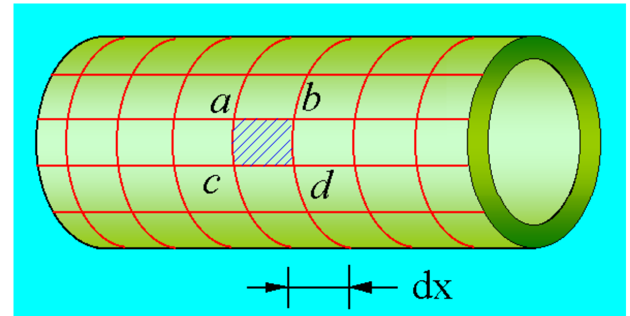
$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 \delta}$$

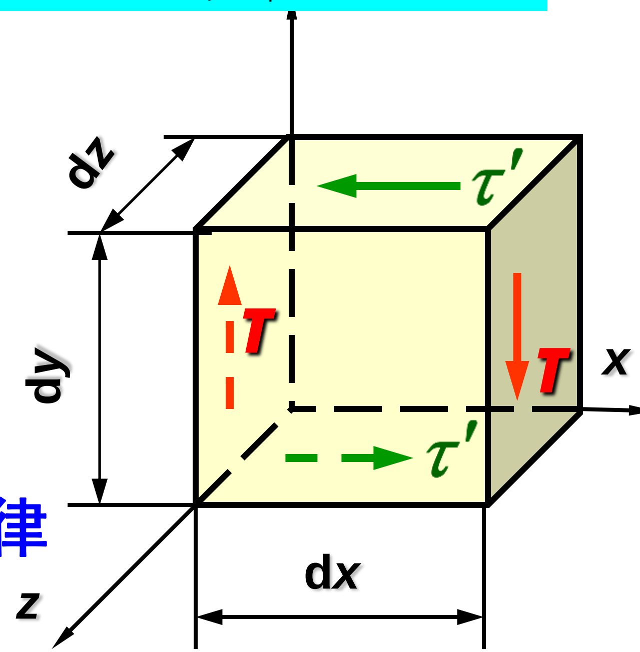
复习

5、切应力互等定理 $\tau' = \tau$

单元体两个相互垂直平面上，切应力必然同时存在，且大小相等，同时指相（或背离）该两平面的交线.

纯剪切:单元体平面上只有切应力而无正应力的应力状况，称为纯剪切.





6、剪切胡克定律 $\tau = G\gamma$

G 一切变模量,该式称为材料的剪切胡克定律

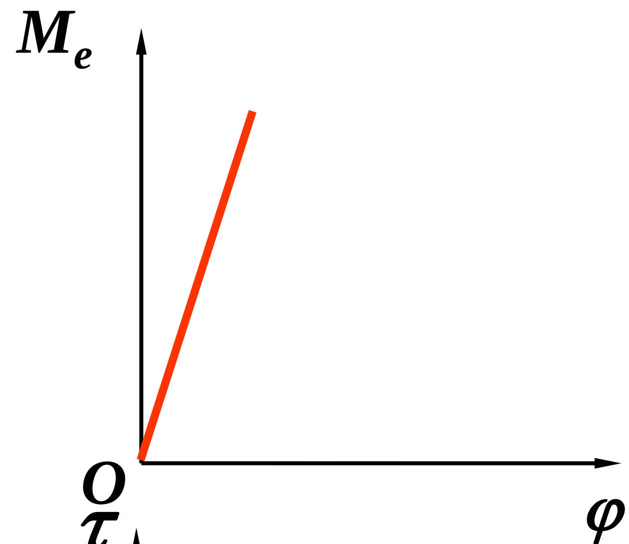
弹性模量E，切变模量G与泊松比μ的关系：

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

复习

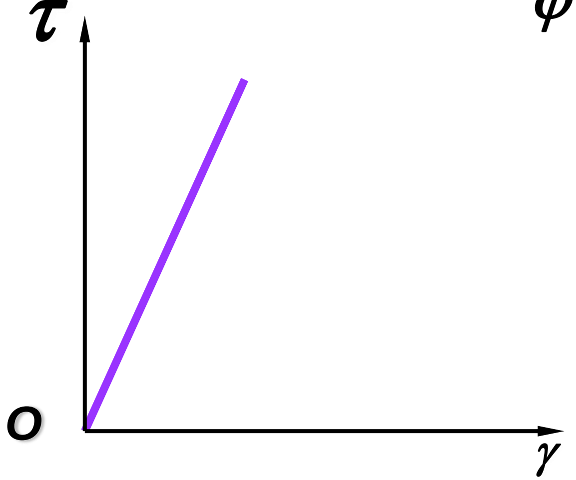
薄壁圆筒的扭转试验发现，当外力偶 M_e 在低于剪切比例极限时，与扭转角φ与M_e（在数值上等于 T ）成正比.

$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 \delta} \qquad \gamma = \frac{r\varphi}{l}$$



从 T 与 φ 之间的线性关系，可推出 τ 与γ间的线性关系.

$$\tau = G\gamma$$



G 一切变模量,该式称为材料的剪切胡克定律.

弹性模量E，切变模量G与泊松比μ的关系

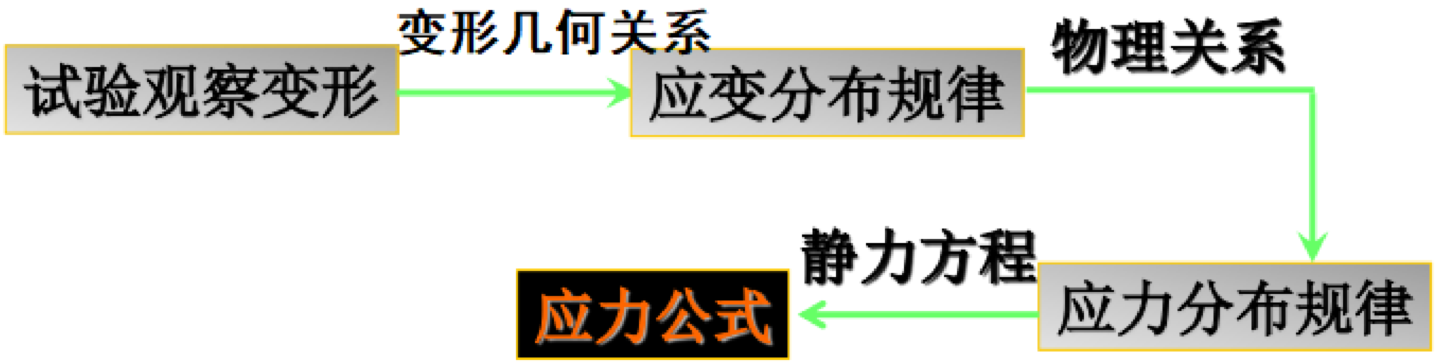
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

第三章 扭转

§3-4 圆轴扭转时的应力

§3-5 圆轴扭转时的变形

圆轴扭转分析应力具体分析步骤

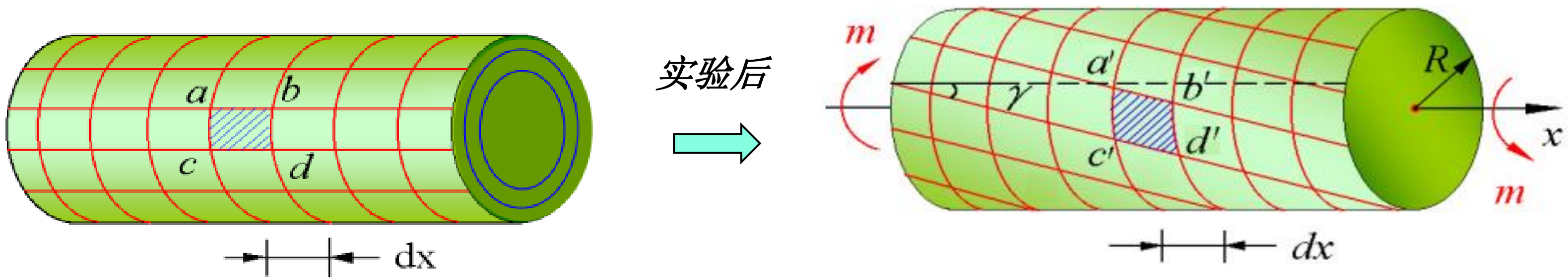


强度条件: 应力?
刚度条件: 变形? 应变?

§ 3-4 圆轴扭转时的应力

一、圆轴扭转实验

因为$\varepsilon = 0$，所以$\sigma = 0$
因为$\gamma \neq 0$，所以$\tau \neq 0$



1. 圆周线 —形状、大小、间距不变，各圆周线只是绕轴线转动了一个角度；
2. 纵向线 —倾斜了同一个角度，小方格变成平行四边形；（切应变均匀分布）
3. 轴向—— 无整体或局部伸长或缩短。（无轴向正应力）

平面假设：变形前的横截面，变形后仍为平面，且形状 、大小以及间距不变。

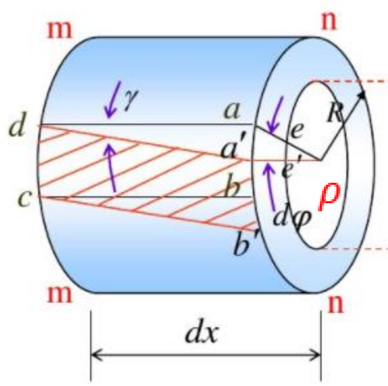
二、等直圆杆扭转时横截面上的应力

1. 变形几何关系：

现从圆轴中取出长为dx的微段，截面nn对截面mm的相对转角为$d\varphi$

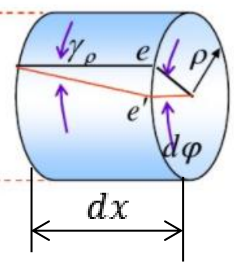
$$\tan\gamma \approx \gamma = \frac{aa'}{ad} = \frac{aa'}{dx} \qquad \overset{\frown}{aa'} = d\varphi \cdot R \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = R\frac{d\varphi}{dx}$$

$$\tan\gamma_\rho \approx \gamma_\rho = \frac{ee'}{dx} \qquad \overset{\frown}{ee'} = d\varphi \cdot \rho \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_\rho = \rho\frac{d\varphi}{dx}$$



圆轴表面

从圆轴内部抽出直径为ρ圆柱



圆轴内部

$$\boxed{\gamma_\rho = \frac{\rho d\varphi}{dx}}$$

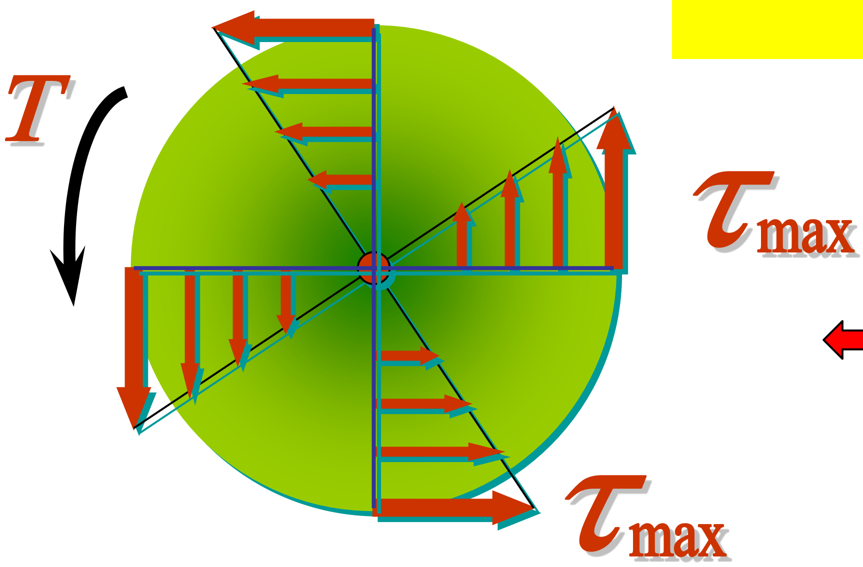
§ 3-4 圆轴扭转时的应力

二、等直圆杆扭转时横截面上的应力

2. 物理关系： ⇨ 胡克定律：

$$\tau = G \cdot \gamma$$

代入上式得：$\tau_{\rho} = G \cdot \gamma_{\rho} \therefore \tau_{\rho} = G \cdot \rho \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$

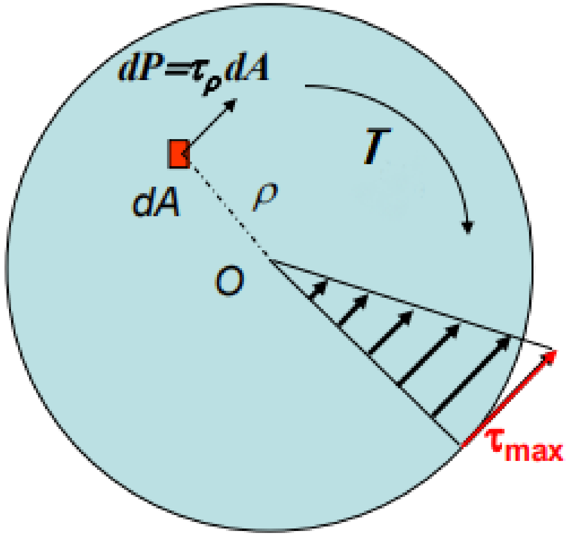


⇦ 切应力分布规律

§3-4 圆轴扭转时的应力

二、等直圆杆扭转时横截面上的应力

3. 静力学关系：



$$T=\int_A \rho\cdot\tau_\rho \mathrm{d}A$$

$$=\int_A G\rho^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}A$$

$$=G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\int_A \rho^2\mathrm{d}A$$ 令 $$I_p=\int_A\rho^2\mathrm{d}A$$

$$T=GI_p\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

I_P—为横截面的极惯性矩

代入物理关系式 $\tau_\rho=\rho G\frac{d\varphi}{dx}$ 得：

$$\tau_\rho=\frac{T\cdot\rho}{I_p}$$

§ 3-4 圆轴扭转时的应力

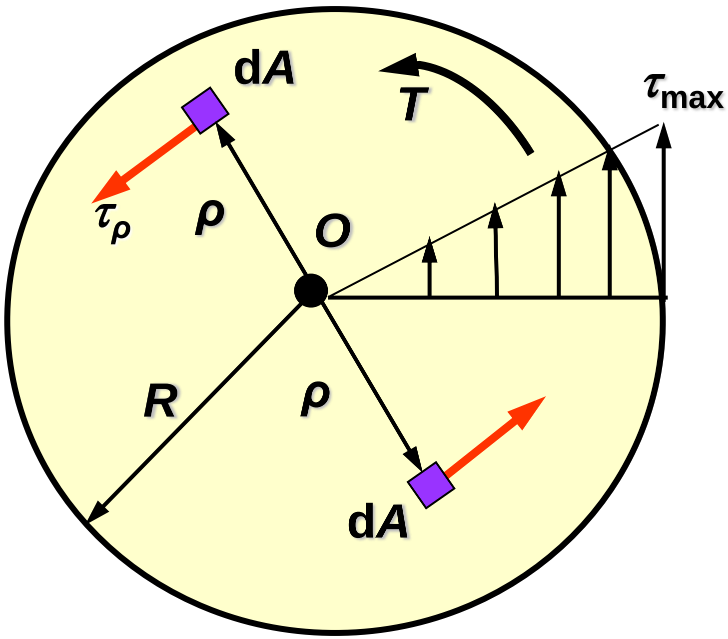
二、等直圆杆扭转时横截面上的应力

4、τ_{max}的计算

根据：$\tau_\rho = \dfrac{T \cdot \rho}{I_p}$

⇩

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{I_p} = \frac{T}{\dfrac{I_p}{R}} = \frac{T}{W_t}$$



其中：

$$W_t = \frac{I_p}{R}$$

W_t 称作抗扭截面系数，单位为m^3.

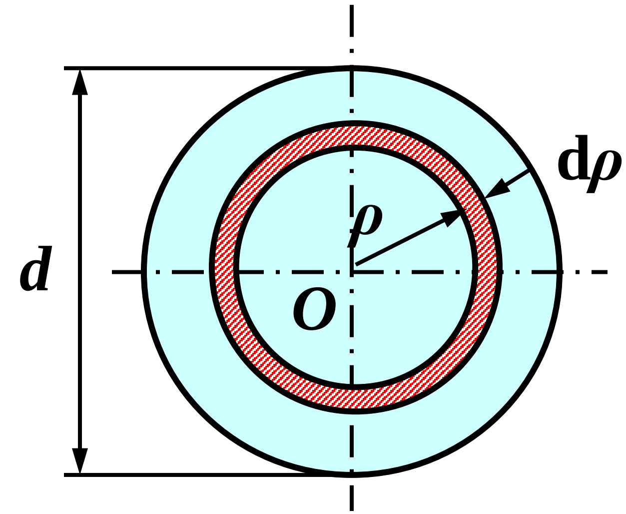
§3-4 圆轴扭转时的应力

5、极惯性矩和抗扭截面系数的计算

（1）实心圆截面

$$I_p=\int_A \rho^2 \mathrm{d}A=\int_0^{\frac{d}{2}}2\pi\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi d^4}{32}$$

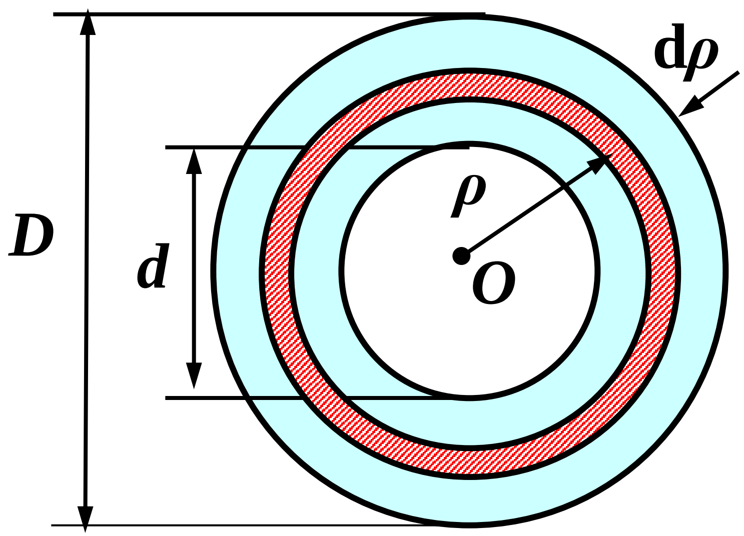
$$W_t=\frac{I_p}{\rho_{max}}=\frac{\pi d^4/32}{d/2}=\frac{\pi d^3}{16}$$



（2）空心圆截面

$$I_P=\int_{d/2}^{D/2}2\pi\rho^3 d\rho=\frac{\pi D^4(1-\alpha^4)}{32}$$

$$W_t=\frac{\pi D^3(1-\alpha^4)}{16}$$ 其中 $\alpha=\frac{d}{D}$



§3-4 圆轴扭转时的应力

三、圆轴扭转强度计算

1、 数学表达式

$$\tau_{\max}=\frac{T_{\max}}{W_t}\le[\tau]$$

2、强度条件的应用

强度校核：

$$\tau_{\max}=\frac{T_{\max}}{W_t}\le[\tau]$$

设计截面：

$$W_t\ge\frac{T_{\max}}{[\tau]}$$

确定许可核载荷：

$$T_{\max}\le W_t[\tau]$$

例1：一厚度为30mm、内直径为230mm 的空心圆管，承受扭矩T=180 kN·m 。试求管中的最大剪应力，使用：

(1) 薄壁管的近似理论；

(2) 精确的扭转理论。

解：(1) 利用薄壁管的近似理论可求得

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2\pi r^2 t} = \frac{180\times 10^3}{2\pi\times 0.13^2\times 0.03} = 56.5\text{MPa}$$

(2) 利用精确的扭转理论可求得

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{T}{\dfrac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)} = \frac{180\times 10^3}{\dfrac{\pi\times 0.29^3}{16}\left[1-\left(\dfrac{230}{290}\right)^4\right]} = 62.2\text{MPa}$$

例2：某汽车主传动轴钢管外径D=76mm，壁厚t=2.5mm，传递扭矩T=1.98kN·m，[t]=100MPa，试校核轴的强度。

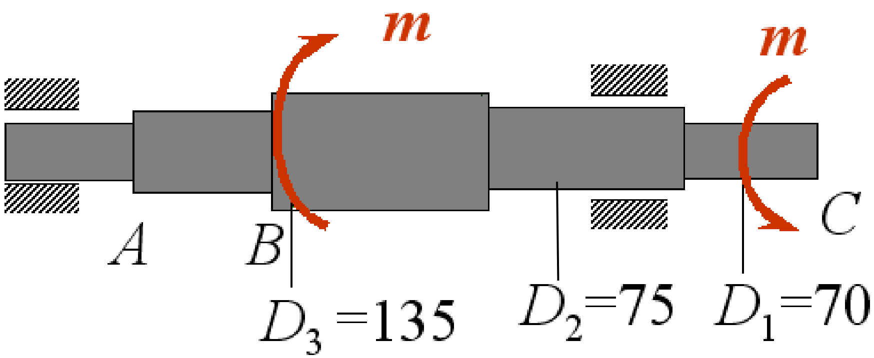
解：计算最大切应力： $\tau_{max} = \dfrac{T}{W_{\mathrm{t}}}$

计算截面参数： $\begin{cases} I_{\mathrm{p}} = \dfrac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4) = 77.1\times10^4 mm^4 \\ W_{\mathrm{t}} = \dfrac{I_{\mathrm{p}}}{D/2} = 20.3\times10^3 mm^3 \end{cases}$

由强度条件： $\tau_{max} = \dfrac{T}{W_{\mathrm{t}}} = 97.5MPa < [\tau]$

故轴的强度满足要求。

例3：功率为150kW，转速为15.4转/秒的电动机转子轴如图，许用剪应力 $[\tau]$=30M Pa，试校核其强度。

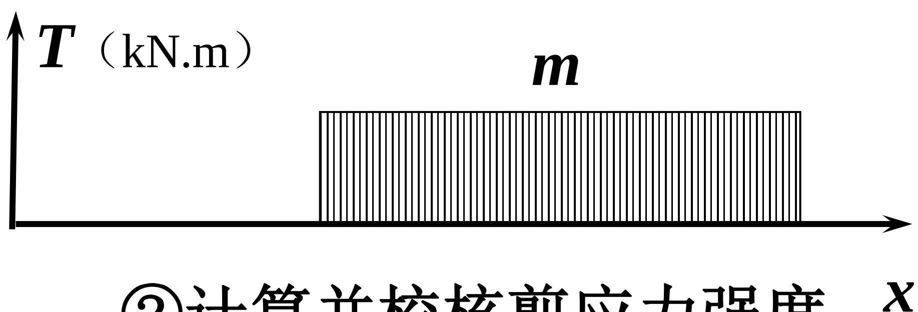


解：①求扭矩及扭矩图

$$T_{BC}=m=9549\frac{p}{n}$$

$$=9549\frac{150}{60\times15.4}$$

$$=1.55(kN\cdot m)$$

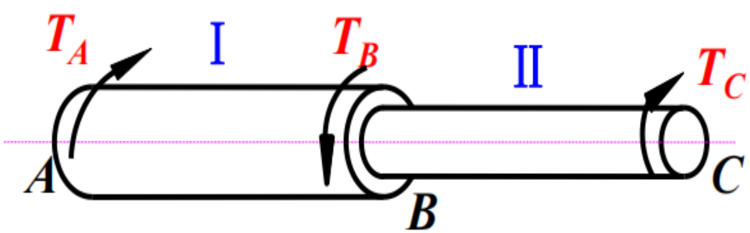


②计算并校核剪应力强度

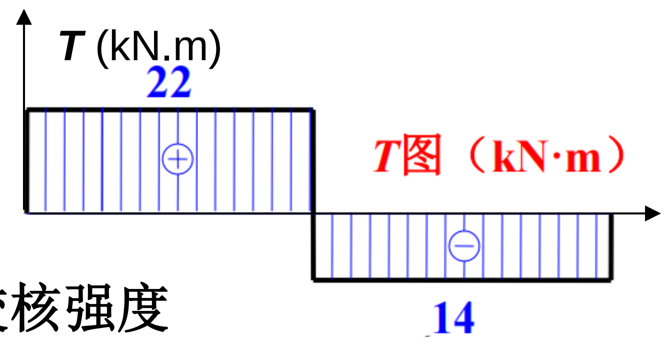
$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_t}=\frac{1.55\times10^3}{\pi\cdot0.07^3/16}=23\text{MPa}\le[\tau]$$

③此轴满足强度要求。

例4：图示阶梯状圆轴，AB段直径 d1=120mm，BC段直径 d2=100mm 。扭转力偶矩TA=22 kN•m，TB=36 kN•m，TC=14kN•m。材料的许用切应力[τ]=80MPa ，试校核该轴的强度。



解：**1.**作出轴的扭矩图



2.计算轴横截面上的最大切应力并校核强度

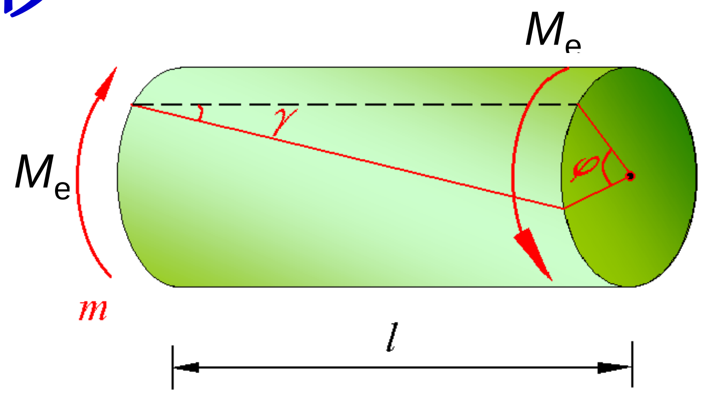
*AB*段
$$\tau_{1,\max}=\frac{M_{n1}}{W_{p1}}=\frac{22\times10^{6}\,\mathrm{N\cdot mm}}{\frac{\pi}{16}(120\mathrm{mm})^{3}}=64.8\mathrm{MPa}$$

*BC*段
$$\tau_{2,\max}=\frac{M_{n2}}{W_{p2}}=\frac{14\times10^{6}\,\mathrm{N\cdot mm}}{\frac{\pi}{16}(100\mathrm{mm})^{3}}=71.3\mathrm{MPa}<[\tau]=80\mathrm{MPa}$$

即该轴满足强度条件。

§3-5 圆轴扭转时的变形

一、扭转时的变形



由公式 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\dfrac{T}{GI_p}$ ➡ $d\varphi=\dfrac{T}{GI_P}dx$

$$\varphi=\int_l d\varphi$$

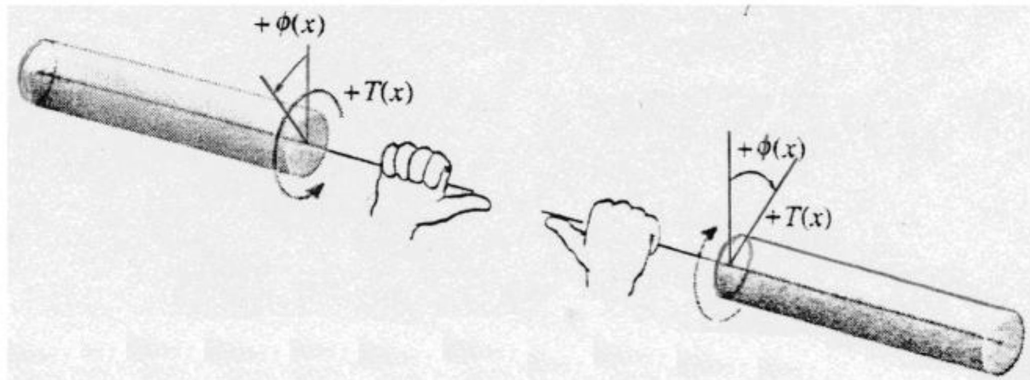
若两截面间间距为 l，扭矩 $T=M_e$ 为常值，轴为等直杆，则两截面间相对扭转角 φ 为

$$\varphi=\int_l \mathrm{d}\varphi=\int_0^l \frac{T}{GI_p}\mathrm{d}x=\frac{Tl}{GI_p}$$

对于阶梯轴，两端面间相对扭转角 φ 为

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i l_i}{GI_{pi}}$$ （代数和）

符号规定



单位

$$\underset{\text{rad}}{\varphi}=\frac{\overset{\text{N}\cdot\text{m}}{M_n}\,\overset{\text{m}}{l}}{\underset{\text{Pa}}{G}\,\underset{\text{m}^4}{I_P}}$$

$$\underset{\text{rad}}{\varphi}=\frac{\overset{\text{N}\cdot\text{mm}}{M_n}\,\overset{\text{mm}}{l}}{\underset{\text{MPa}}{G}\,\underset{\text{mm}^4}{I_P}}$$

二、单位长度扭转角θ

由于轴在扭转时各横截面上的扭矩可能不同，且轴的长度也不相同，因此在工程中，扭转轴的刚度用单位长度扭转角θ表示。

$$\theta=\frac{\varphi}{l}=\frac{T}{GI_P}\qquad(\mathrm{rad/m})$$

弧度转角度

$$\theta=\frac{\varphi}{l}=\frac{T}{GI_P}\times\frac{180^{\circ}}{\pi}\quad(^{\circ}/\mathrm{m})$$

GI_p—抗扭刚度，表示杆抵抗扭转变形能力的强弱。

三、刚度条件

机器传动轴扭转角过大会使机器运转时产生较大振动，影响机床加工精度。因此，除了需满足强度条件外，还需满足刚度条件。

$$\theta_{\max} \le [\theta]$$

θ_{max}最大的单位长度扭转角； $[\theta]$称为许用单位长度扭转角。

刚度计算的三方面： ① 校核刚度： $\dfrac{T_{\max}}{GI_P} \le [\theta]$

② 设计截面尺寸： $\dfrac{T_{\max}}{G[\theta]} \le I_P$

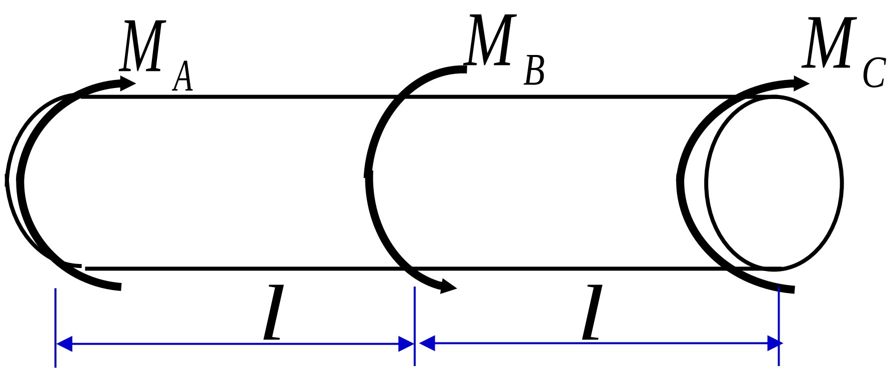
③ 计算许可载荷： $T_{\max} \le I_P G[\theta]$

例5：图示圆截面轴AC，承受扭力矩M_A，M_B与M_C 作用，试计算该轴的总扭转角φ_{AC}(即截面C对截面A的相对转角)，并校核轴的刚度。 已知M_A＝180N·m，M_B＝320 N ·m，M_C＝140N·m，I_ρ＝3.0×10^{5}mm^4，l=2m，G＝80GPa，[θ]＝0.5^0 / m。

解：1．扭转变形分析

利用截面法，得*AB*段、*BC*段的扭矩分别为：

T_1＝180 N·m， T_2＝-140 N·m



设其扭转角分别为φ_{AB}和φ_{BC}，则：

$$\phi_{AB}=\frac{T_1 l}{GI_\rho}=\frac{(180\,\mathrm{N\cdot m})(2\mathrm{m})}{(80\times10^9\,\mathrm{Pa})(3.0\times10^5\times10^{-12}\,\mathrm{m}^4)}$$

$$=1.50\times10^{-2}\,\mathrm{rad}$$

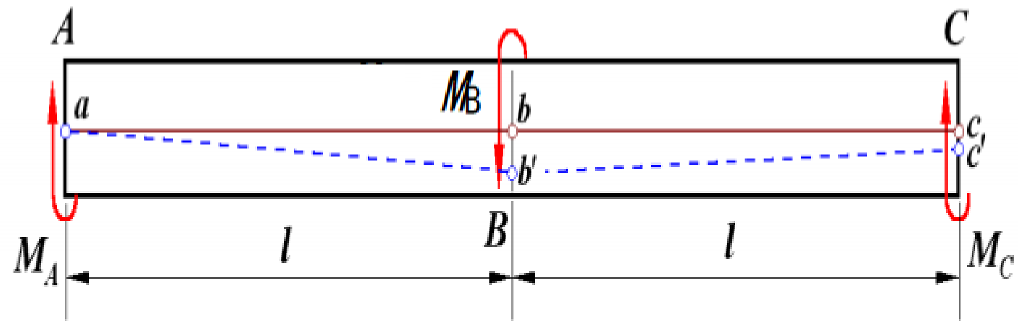
$$\phi_{BC}=\frac{T_2 l}{GI_\rho}=\frac{(-140\,\mathrm{N\cdot m})(2\mathrm{m})}{(80\times10^9\,\mathrm{Pa})(3.0\times10^5\times10^{-12}\,\mathrm{m}^4)}$$

$$=-1.17\times10^{-2}\,\mathrm{rad}$$

由此得轴AC的总扭转角为

$$\phi_{AC}=\phi_{AB}+\phi_{BC}=1.50\times10^{-2}\,\text{rad}-1.17\times10^{-2}\,\text{rad}$$

$$=0.33\times10^{-2}\,\text{rad}$$



2 刚度校核

$\theta_{AB}=\dfrac{T_{AB}}{GI_P}$　　$\theta_{BC}=\dfrac{T_{BC}}{GI_P}$,因为 $|T_{AB}|>|T_{BC}|$ 所以，$\theta_{max}=\theta_{AB}$

$$\theta_{AB}=\frac{T_1}{GI_\rho}=\frac{180\text{N}\cdot\text{m}}{(80\times10^9\,\text{Pa})(3.0\times10^5\times10^{-12}\,\text{m}^4)}\cdot\frac{180}{\pi}=0.43^0/\text{m}<[\theta]$$

可见，该轴的扭转刚度*符合要求*。

圆轴扭转强度和刚度条件：

强度 $\tau_{\max} = \dfrac{T_{\max}}{W_t} \leq [\tau]$ $W_t = \dfrac{\pi D^3(1-\alpha^4)}{16}$

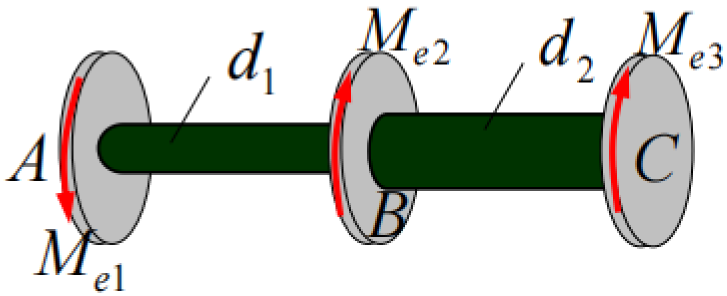
刚度 $\theta_{\max} = \dfrac{T_{\max}}{GI_P} \leq [\theta]$ $I_P = \dfrac{\pi D^4(1-\alpha^4)}{32}$

提高强度和刚度的措施：

（1） 减小$T_{\max}$

（2）增大W_t 和I_p

例6：传动轴的转速为n = 500r/min，主动轮A 输入功率N_1=400kW，从动轮B，C 分别输出功率N_2=160kW，N_3=240kW。已知[τ]=70MPa ,[θ]=1°/m ，G=80GPa。(1)试确定 AB 段的直径 d_1 和 BC 段的直径 d_2；(2)若 AB 和BC 两段选同一直径，试确定直径 d；(3)主动轮和从动轮应如何安排才比较合理?



（1）**解：**1、求外力偶矩

$$M_{e1} = 9549\frac{P_1}{n} = 9549\times\frac{400}{500} = 7640\mathrm{N\cdot m}$$

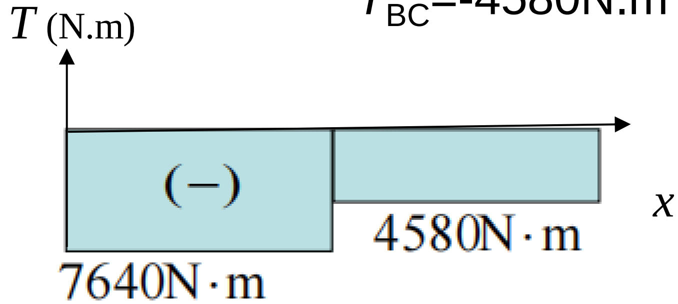
同理得：$M_{e2} = 3060\mathrm{N\cdot m}$

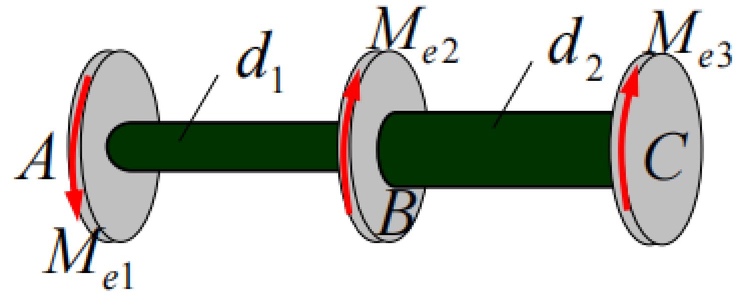
$$M_{e3} = 4580\mathrm{N\cdot m}$$

2、求扭矩，画扭矩图

通过截面法可得：T_{AB}=-7640N.m

T_{BC}=-4580N.m





3、按强度条件设计

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} \le [\tau] \qquad W_t = \frac{\pi D^3}{16}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_n}{\pi d_1^3} \le [\tau]$$

$$d_1 \ge \sqrt[3]{\frac{16 M_n}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 7640}{\pi \times 70 \times 10^6}}$$

$$= 82.2 \times 10^{-3}\,\text{m} = 82.2\,\text{mm}$$

$$d_2 \ge \sqrt[3]{\frac{16 M_n}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 4580}{\pi \times 70 \times 10^6}}$$

$$= 69.3 \times 10^{-3}\,\text{m} = 69.3\,\text{mm}$$

4、按刚度条件设计

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_P} \le [\theta] \qquad I_P = \frac{\pi D^4}{32}$$

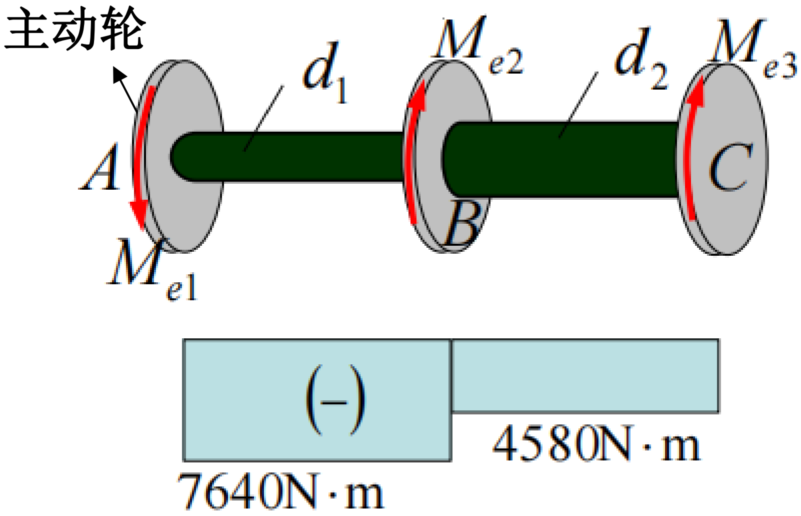
$$d_1 \ge \sqrt[4]{\frac{32M_n \times 180}{G\pi^2 \times [\phi']}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 7640 \times 180}{80 \times 10^9 \times \pi^2 \times 1}} = 86.4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} = 86.4\,\mathrm{mm}$$

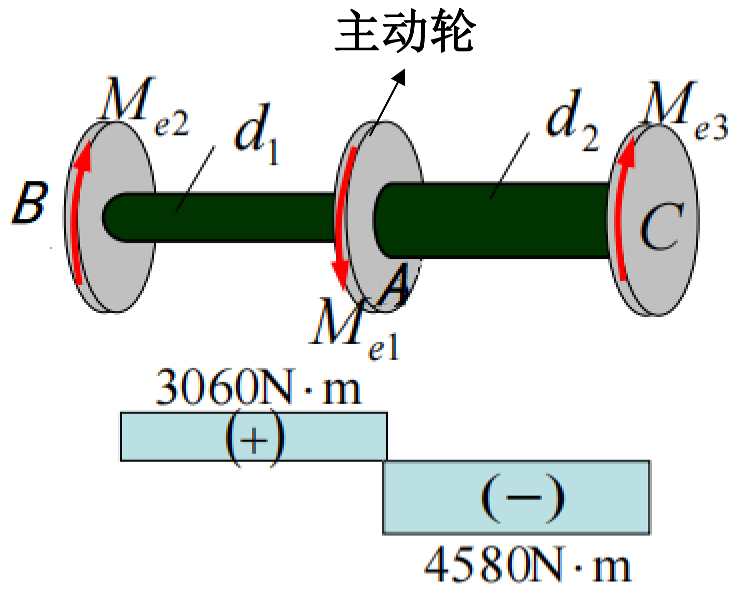
$$d_2 \ge \sqrt[4]{\frac{32M_n \times 180}{G\pi^2 \times [\phi']}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 4580 \times 180}{80 \times 10^9 \times \pi^2 \times 1}} = 76 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} = 76\,\mathrm{mm}$$

所以：d_1=86.4mm　　d_2=76mm

（2） 选同一直径时取 d_1= d_2=86. 4mm

（3）将主动轮装在两个从动轮之间：

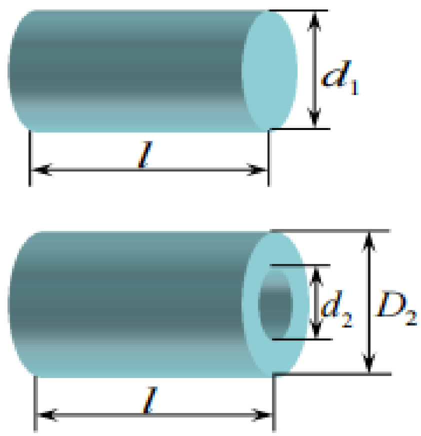




从扭矩图可看出，将主动轮装在两从动轮之间受力更合理。

随堂练习1

如图实心圆轴和空心圆轴，材料、扭转力偶M和长度l均相等，最大切应力也相等，若空心圆轴的内外径之比α=0.8，试求空心圆截面的外径和实心圆截面直径之比及两轴的重量比。



随堂练习2

已知：n =300r/min，主动轮P_1=500kW，从动轮P_2=150kW P_3=150kW，P_4=200kW， d =80mm，求轴内最大切应力。