材料力学

第三章 扭转



主讲人：吕杭原

邮箱：lvhy@mail.neu.edu.cn

办公室：新机械楼319

QQ：494489092

第三章 扭转

§3-1　扭转的概念和工程实例

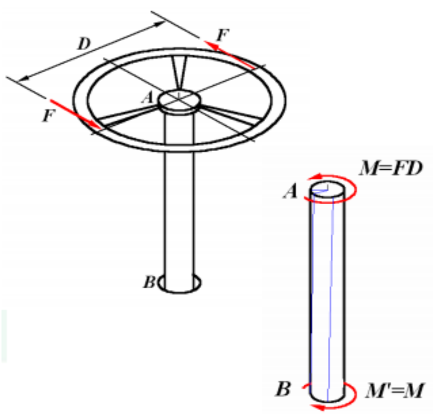
§3-2　外力偶矩的计算　扭矩和扭矩图

§3-3　纯剪切

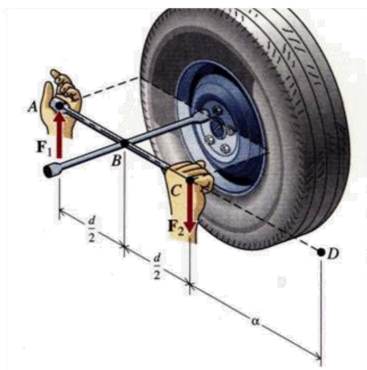
§3-1 扭转的概念和工程实例

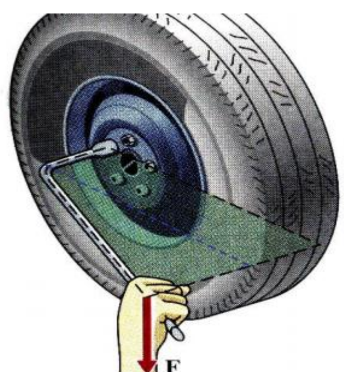
1、工程应用

汽车方向盘

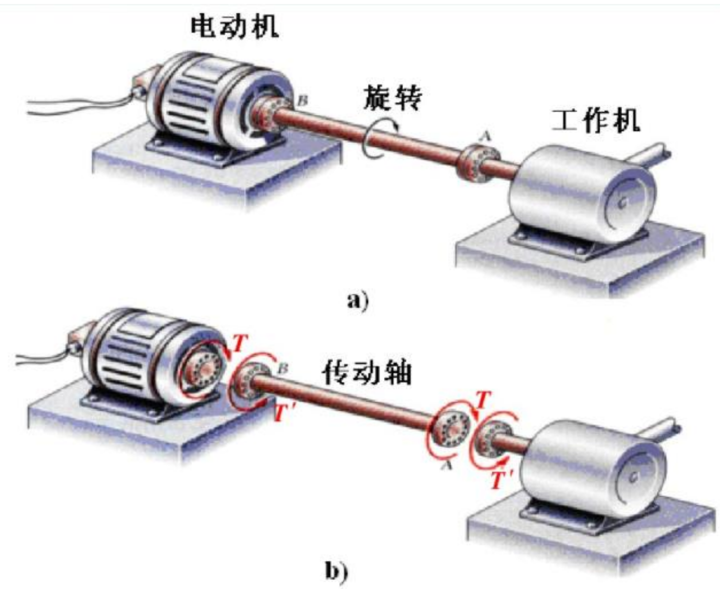


扳手





电机传动轴



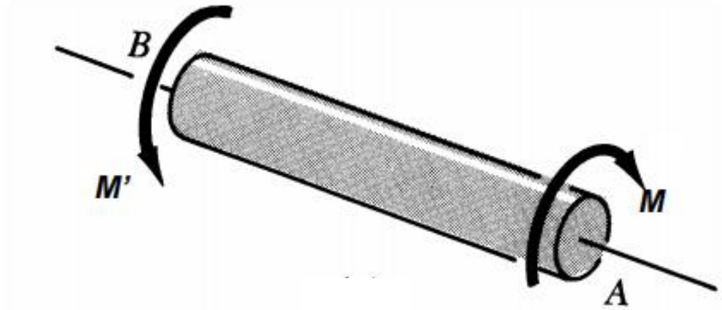
受扭转变形杆件通常为轴类零件，其横截面大都是圆形的，所以本章主要介绍圆轴扭转。

§3-1 扭转的概念和工程实例

2、定义

扭转：若杆件受到一对大小相等、方向相反的力偶作用，且力偶的作用面垂直于杆轴，则杆件发生扭转变形。

轴：主要发生扭转变形的杆件。如电动机的主轴，机器中的传动轴等。



§ 3-1 扭转的概念和工程实例

3、扭转的特点

受力特点：大小相等、方向相反的力偶，且力偶的作用面垂直于杆轴。

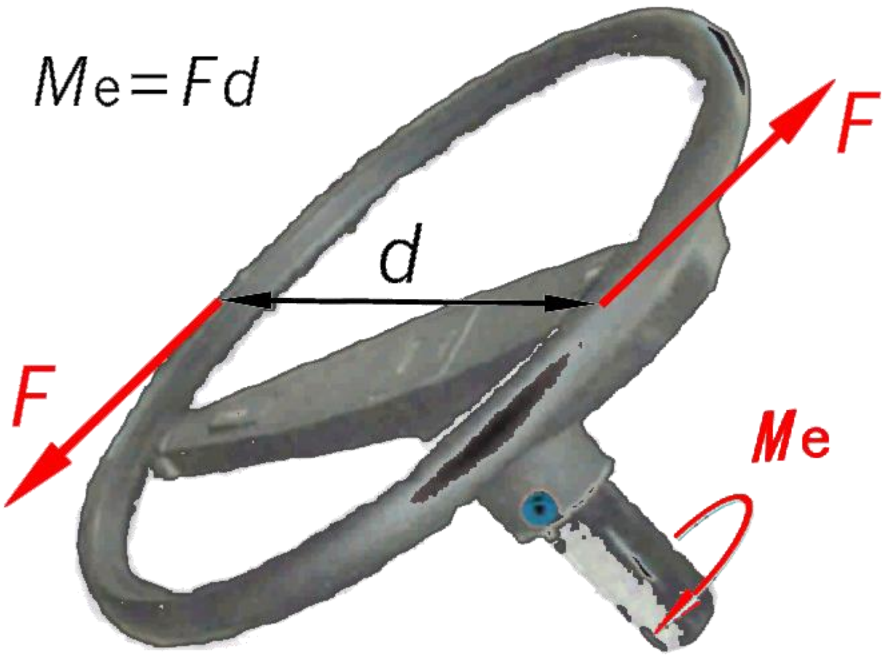
变形特点：横截面形状大小未变，各横截面绕轴线发生相对转动。

扭转角（φ）：任意横截面绕轴线相对转动的角位移

§3-2 外力偶矩的计算 扭矩和扭矩图

1．外力偶矩

（1）直接计算



§3-2 外力偶矩的计算 扭矩和扭矩图

（2）按输入功率和转速计算

已知:轴转速—n 转/分钟
输出功率—P 千瓦(KW)
求：力偶矩M_e

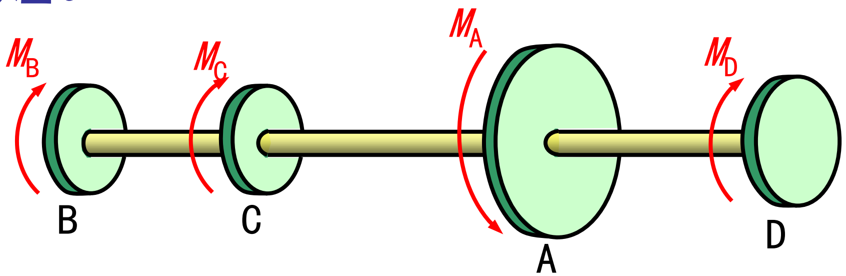
电机t秒输入功： $W = P \times t$

外力偶t秒作功完成： $W = M_e \times 2\pi \dfrac{n}{60} t$

$$m = 9549 \frac{P}{n} \quad (N.m)$$

$$m = 9.549 \frac{P}{n} \quad (KN.m)$$

例1 传动轴如图所示，主动轮A输入功率P_A=50kW，从动轮B、C、D输出功率分别为P_B=P_C=15kW，P_D=20kW，轴的转速n=300r/min，计算各轮上所受的外力偶矩。



解：计算外力偶矩

$$M_A = 9549\frac{P_A}{n} = 1592\,\mathrm{N\cdot m}$$

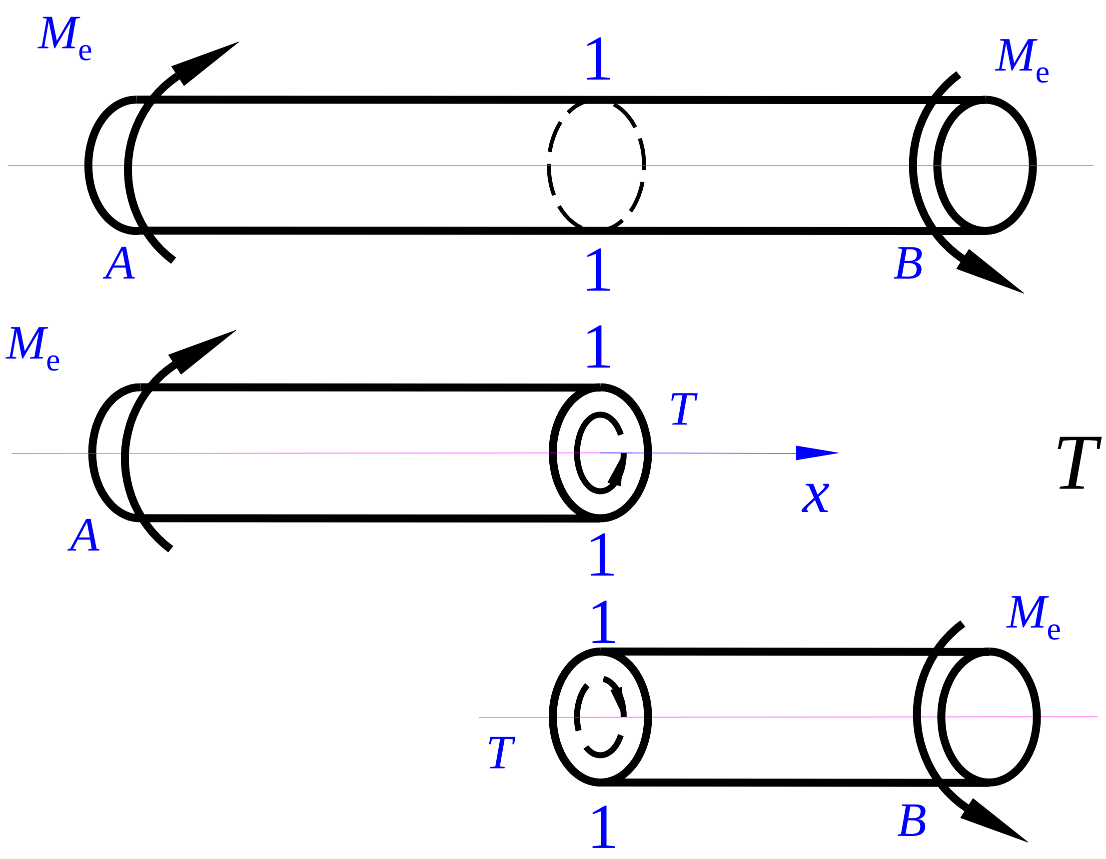
$$M_B = M_C = 9549\frac{P_B}{n} = 477.5\,\mathrm{N\cdot m}$$

$$M_D = 9549\frac{P_D}{n} = 637\,\mathrm{N\cdot m}$$

2. 扭矩与扭矩图

圆轴受扭时其横截面上的**内力偶矩**称为**扭矩**，用符号T表示。

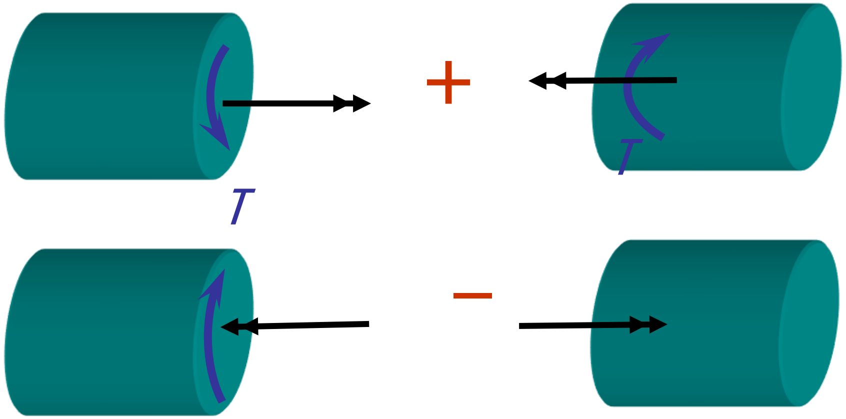
扭矩大小可利用**截面法**来确定。



$$T = M_e$$

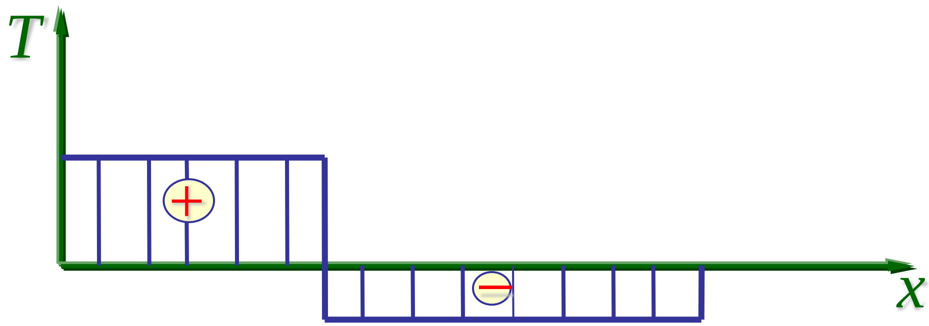
扭矩的符号规定：按右手螺旋法则判断。

右手的四指代表扭矩的旋转方向，大拇指代表其矢量方向，若其矢量方向与截面的外法线方向相同，则扭矩规定为正值，反之为负值。



扭矩图：扭矩沿杆件轴线变化规律的图线。

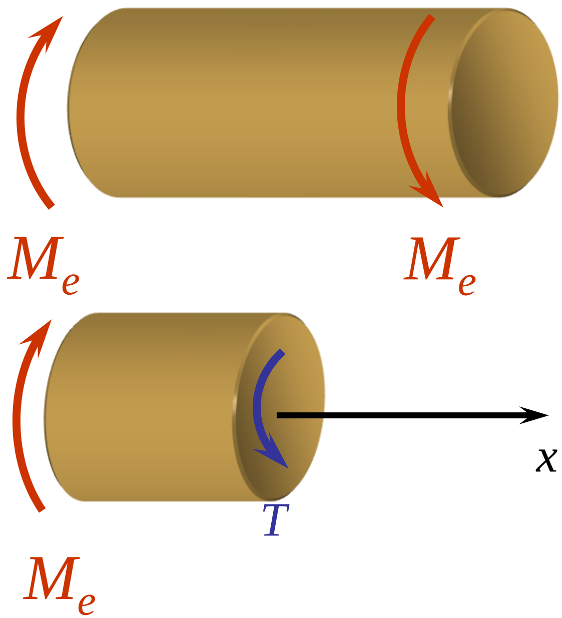
用平行于杆轴线的坐标 x 表示横截面的位置；用垂直于杆轴线的坐标 T 表示横截面上的扭矩，正的扭矩画在 x 轴上方，负的扭矩画在 x 轴下方.



目的： ①扭矩变化规律

②确定$|T|_{max}$值及其截面位置

强度计算（危险截面）

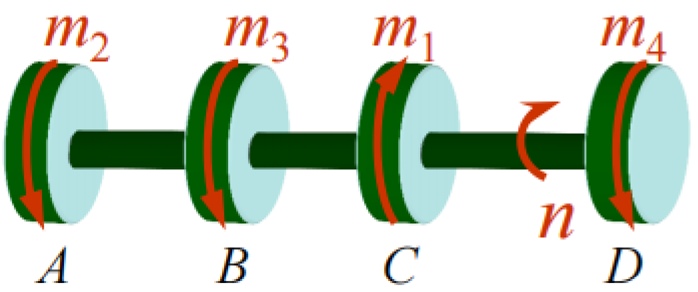


注意

设正法

用截面法求扭矩时，建议均假设各截面扭矩T为正，如果由平衡方程得到T为正，则说明是正的扭矩，如果为负，则是负的扭矩。在画轴的扭矩图，正的扭矩画在x轴上方，负的扭矩画在x轴下方。

例2 已知：n =300r/min，主动轮P_1=500kW，从动轮P_2=150kW，P_3=150kW，P_4=200kW，试绘制扭矩图。



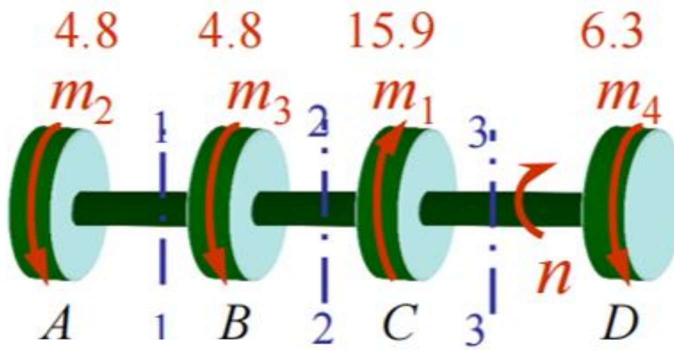
解：（1）计算外力偶矩

$$m_1 = 9.55\frac{P_1}{n} = 9.55\times\frac{500}{300} = 15.9(\mathrm{kN\cdot m})$$

$$m_2 = m_3 = 9.55\frac{P_2}{n} = 9.55\times\frac{150}{300} = 4.8\ (\mathrm{kN\cdot m})$$

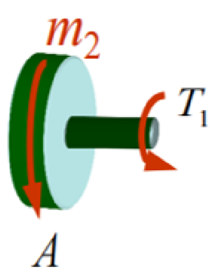
$$m_4 = 9.55\frac{P_4}{n} = 9.55\times\frac{200}{300} = 6.3\ (\mathrm{kN\cdot m})$$

解：（2）求扭矩



1-1 截面 $\sum M_x = 0$

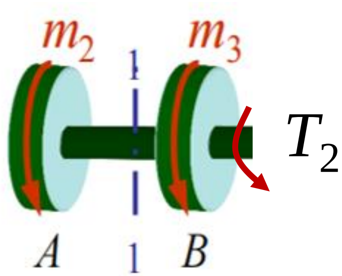
$T_1 + m_2 = 0 \quad T_1 = -m_2 = -4.8\,\mathrm{kN \cdot m}$



2-2 截面 $\sum M_x = 0$

$T_2 + m_2 + m_3 = 0 \quad T_2 = -m_2 - m_3$

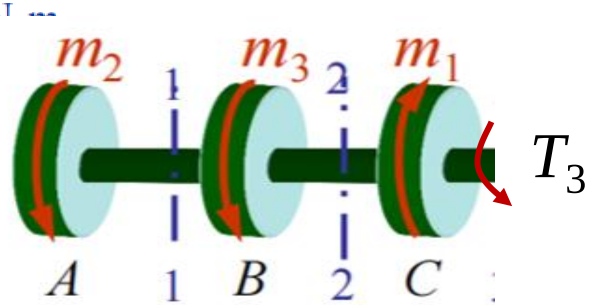
$= -(4.8 + 4.8) = -9.6\,\mathrm{kN \cdot m}$



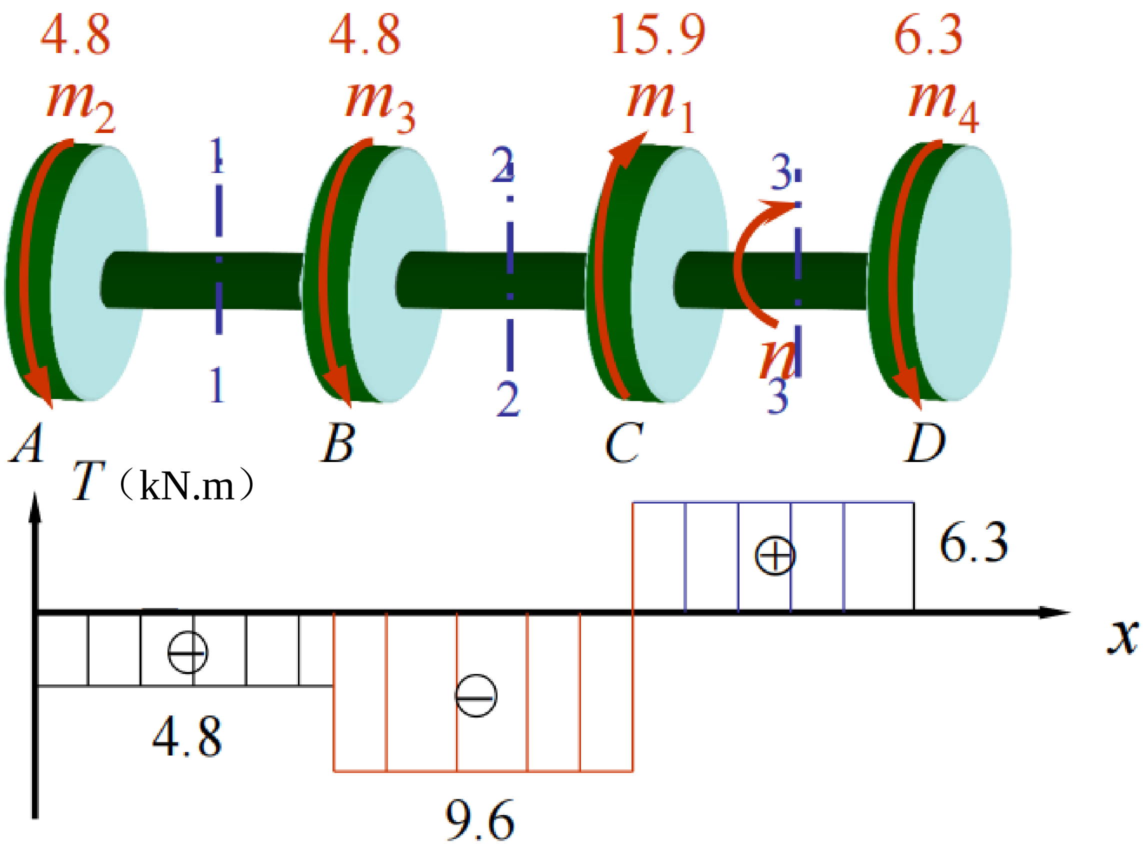
3-3 截面 $\sum M_x = 0$

$T_3 + m_2 + m_3 - m_1 = 0 \quad T_3 = m_1 - m_2 - m_3 = 16.9 - 4.8 \times 2 = 6.3\ \mathrm{kN \cdot m}$

$T_3 = m_4 = 6.3\ \mathrm{kN \cdot m}$



（3）绘制扭矩图



$T_1 = -4.8\,kN \cdot m$

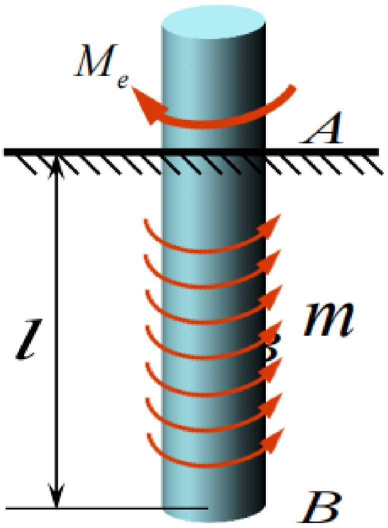
$T_2 = -9.6\,kN \cdot m$

$T_3 = 6.3\,kN \cdot m$

BC 段为危险截面：

$$|T|_{max} = 9.6\ kN \cdot m$$

例题3 已知钻探机杆的外径D=60mm，内d=50mm，功率P=7.35kW，转速n=180r/min ，钻杆入土深度l=40m。设土壤对钻杆的阻力是沿长度均匀分布的，试求单位长度上土壤对钻杆的阻力矩m。



解：

$$M_e = 9550\frac{P}{n} = 390\text{N.m}$$

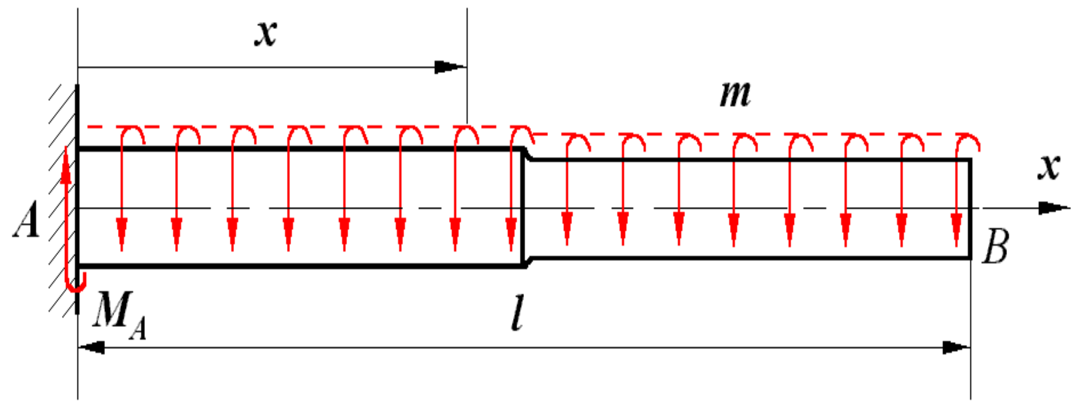
单位长度阻力矩

$$m = \frac{M_e}{l} = \frac{390\text{N}\cdot\text{m}}{40\text{m}} = 9.75\text{N}\cdot\text{m/m}$$

例4 试分析图示轴的扭矩 （m—轴单位长度内的扭力偶矩）

1、求约束反力

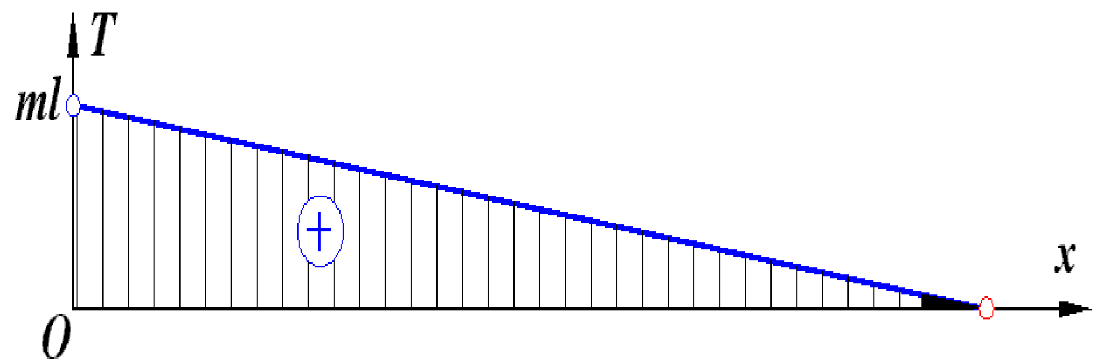
$$M_A = ml$$



2、截面法求扭矩

$$T + mx = M_A$$

$$T = m(l - x)$$



3、画扭矩图

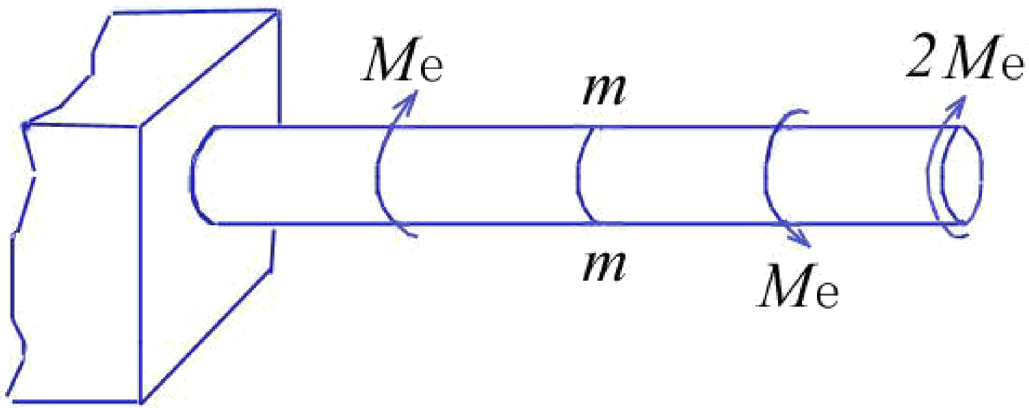
表示扭矩沿杆件轴线变化的图线（T–x曲线）—扭矩图

讨论：

受扭圆轴，其截面 m-m 上的扭矩 $T=$_____。

(A) $M_e + M_e = 2M_e$; (B) $M_e - M_e = 0$;

(C) $2M_e - M_e = M_e$; (D) $-2M_e + M_e = -M_e$ 。



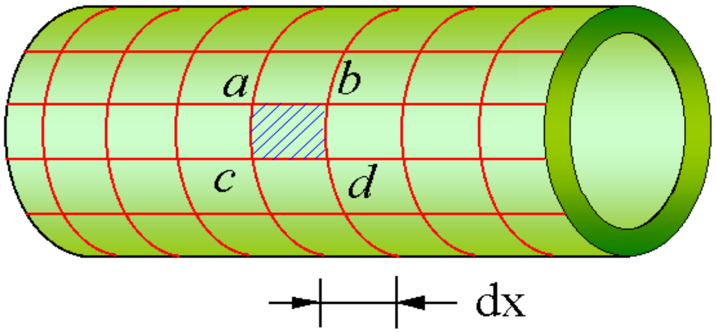
§3-3 纯剪切

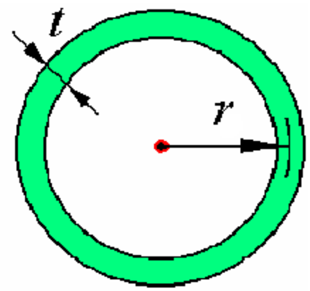
一、薄壁圆筒扭转实验

薄壁圆筒：壁厚 $t \leq \frac{1}{10} r$ （r：为平均半径）

1．实验：

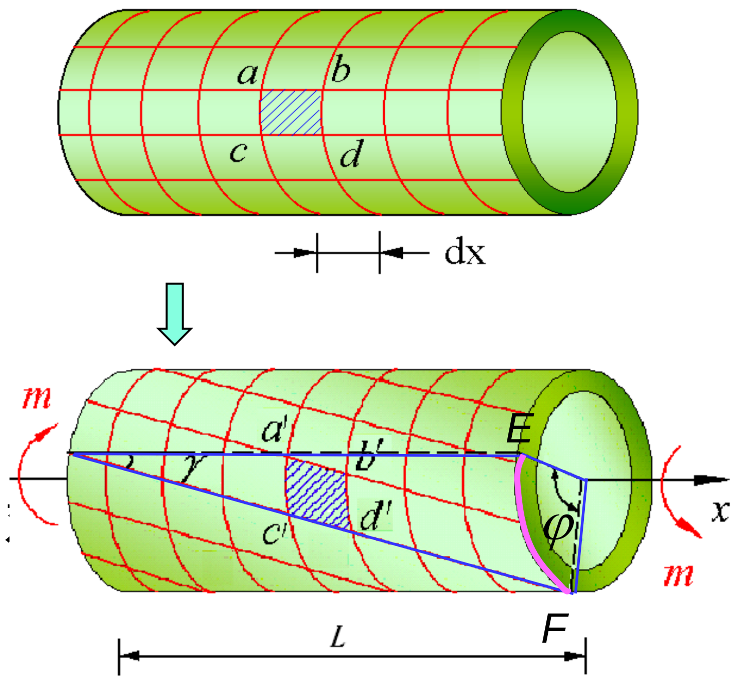
实验前： ①绘纵向线，圆周线；
②施加一对外力偶 m。





2. 实验后： ①圆周线不变；

②纵向线变成斜直线。



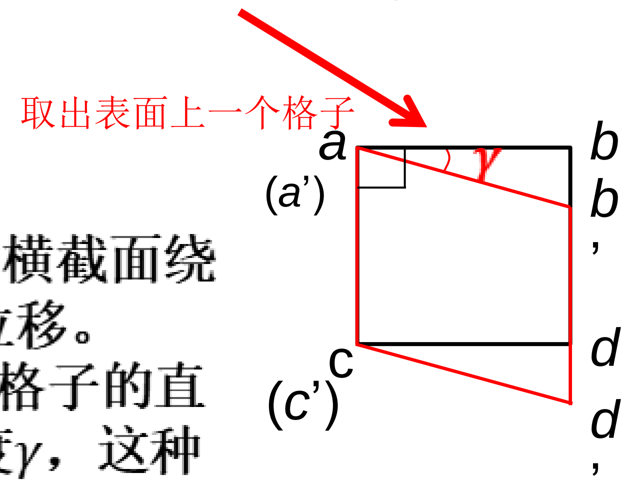
3. 结论：

①圆筒表面的各圆周线的形状、

大小和间距均未改 变，只是绕轴线作了相

②各纵向线均倾斜了同一微小角度 γ 。

③所有矩形网格均歪斜成同样大小的平行四边形。



4. φ 与 γ 的关系：

$$\gamma \cdot L = \varphi \cdot r$$

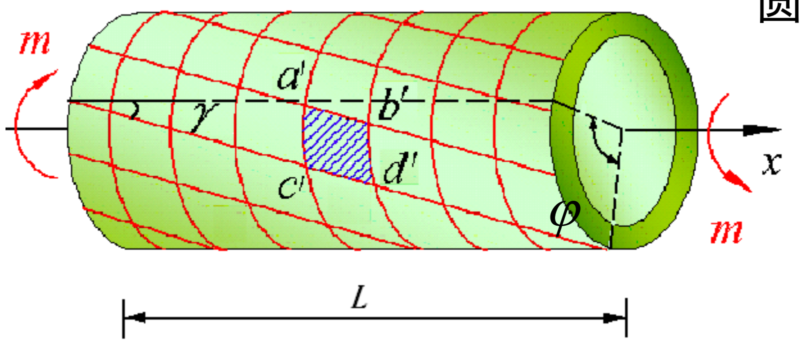
$$\therefore \quad \gamma = \varphi \cdot r/L$$

扭转角（φ）：任意横截面绕轴线相对转动的角位移。

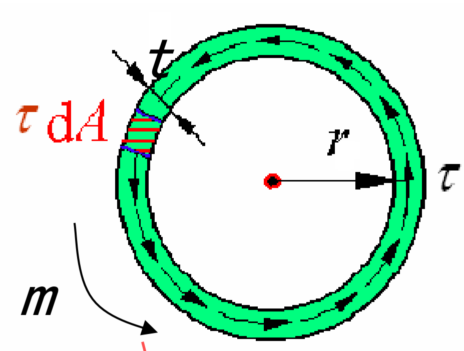
切应变（γ）：每个格子的直角都改变了相同角度γ，这种直角改变量γ称为切应变。

二、理论分析

根据实验现象分析：



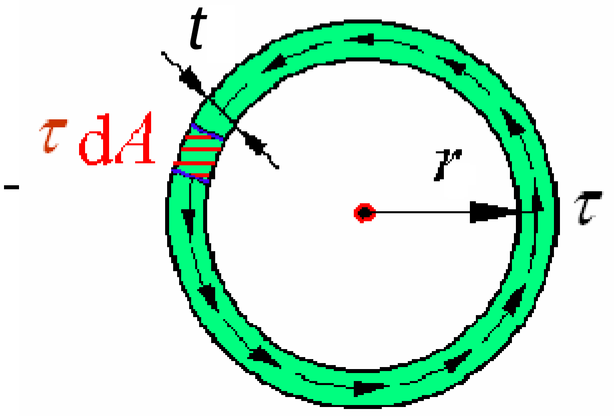
圆筒的横截面



（1）在小变形下，沿杆的轴线方向无变形，无正应力。

（2）因存在切应变，所以必有切应力。横截面上切应力均匀分布，垂直于半径，沿周向和圆筒壁厚大小不变，方向与该截面的扭矩方向一致。

三、薄壁圆筒剪应力τ



圆筒的横截面

静力学关系：截面上的应力之和等于内力——扭矩

$$\int_A \tau \cdot \mathrm{d}A \cdot r = T$$

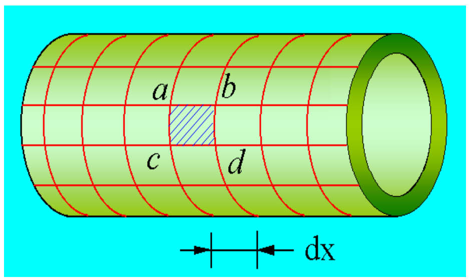
$$\therefore \quad \tau \cdot r \cdot \int_A \mathrm{d}A = \tau \cdot r \cdot 2\pi r \cdot t = T$$

$$\therefore \quad \tau = \frac{T}{2\pi r^2 t} = \frac{T}{Ar}$$

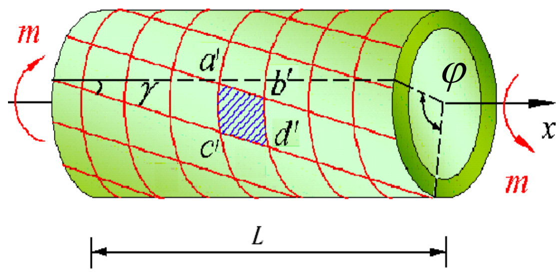
A=2πrt，为圆环面积

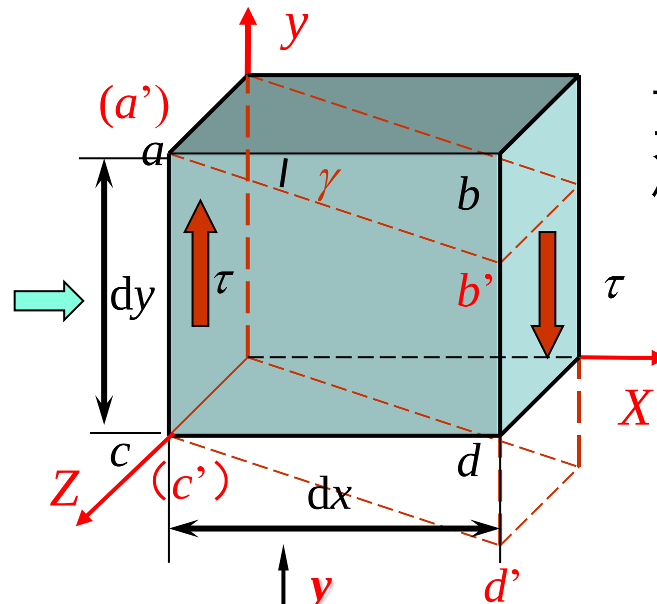
四、切应力互等定理

在单元体左、右面（圆筒的横截面）上只有切应力，其方向于轴平行。



截取abcd 正六面体



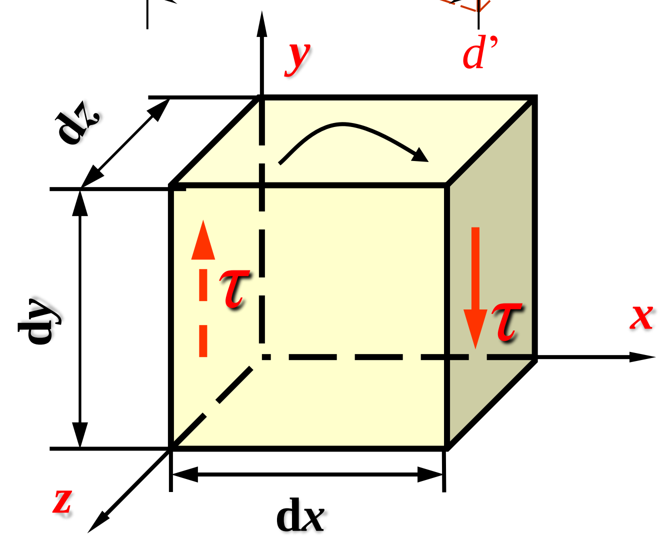


单元体

由平衡方程 $\sum F_y = 0$

可知，两侧面的内力元素 $\tau\,\mathrm{dy\,dz}$ 大小相等，方向相反，将组成一个力偶T。

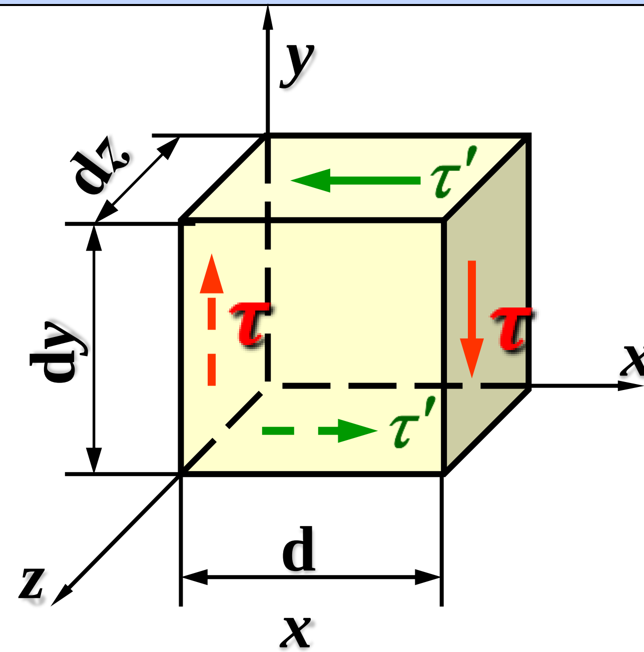
？单元体会不会转动



其矩为：$T=(\tau\,\mathrm{dy\,dz})\,\mathrm{dx}$

四、切应力互等定理

要满足单元体平衡不转动

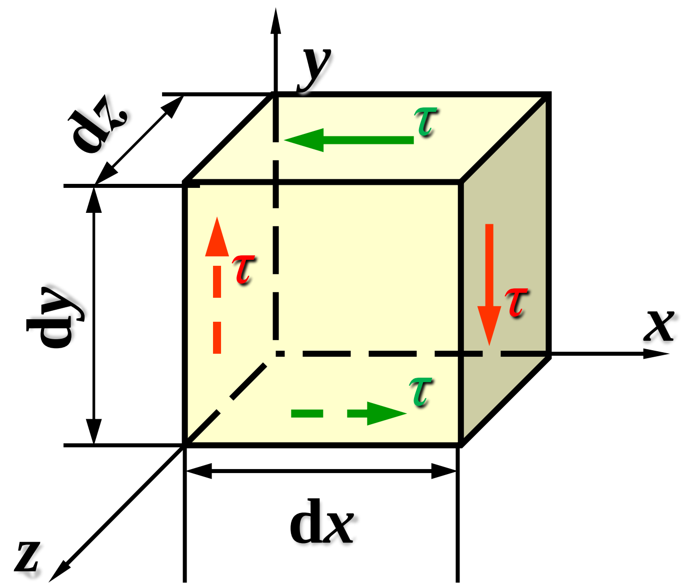


在单元体的上、下两平面上必有大小相等，指向相反的一对内力元素它们组成力偶，其矩为 $(\tau'\mathrm{d}x\mathrm{d}z)\mathrm{d}y$

由 $\sum M_z = 0$

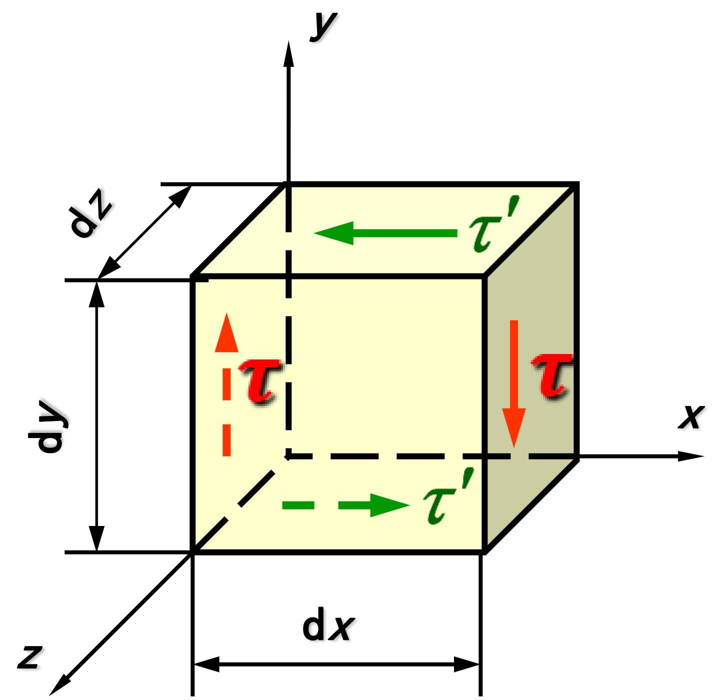
知 $(\tau'\mathrm{d}x\mathrm{d}z)\mathrm{d}y = (\tau\mathrm{d}y\mathrm{d}z)\mathrm{d}x$

得 $\tau' = \tau$



切应力互等定理内容

$$\tau' = \tau$$



该定理表明：单元体两个相互垂直平面上，切应力必然同时存在，且大小相等，同时指相（或背离）该两平面的交线.

纯剪切:单元体平面上只有切应力而无正应力作用的状况，称为纯剪切。

第三章 扭转

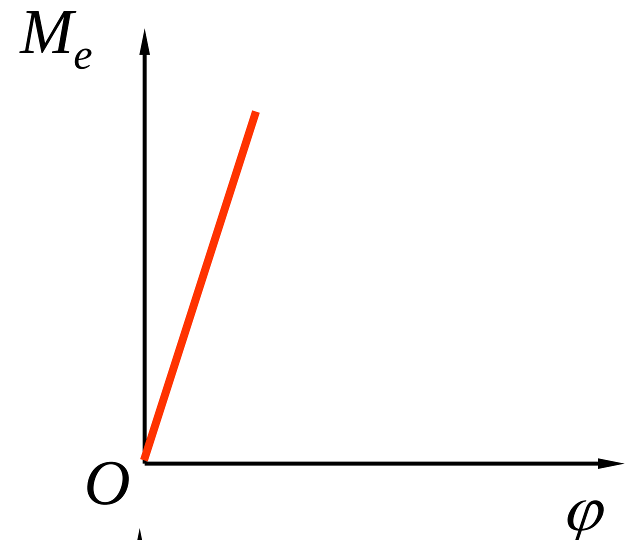
五、剪切胡克定律

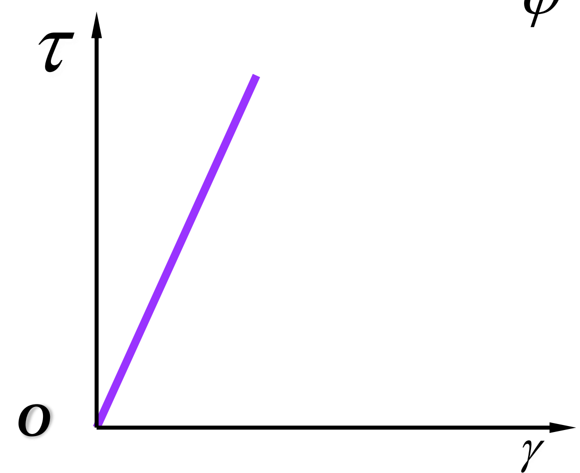
薄壁圆筒的扭转试验发现，当外力偶 M_e 在低于剪切比例极限时，扭转角φ与M_e （在数值上等于扭矩 T ）成正比。

$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 \delta} \qquad \gamma = \frac{r\varphi}{l}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$T = \boxed{2\pi r^2 \delta \tau} \qquad \varphi = \boxed{\frac{l}{r}}\gamma$$





从 T 与 φ 之间的线性关系，可推出 τ 与γ间的线性关系.

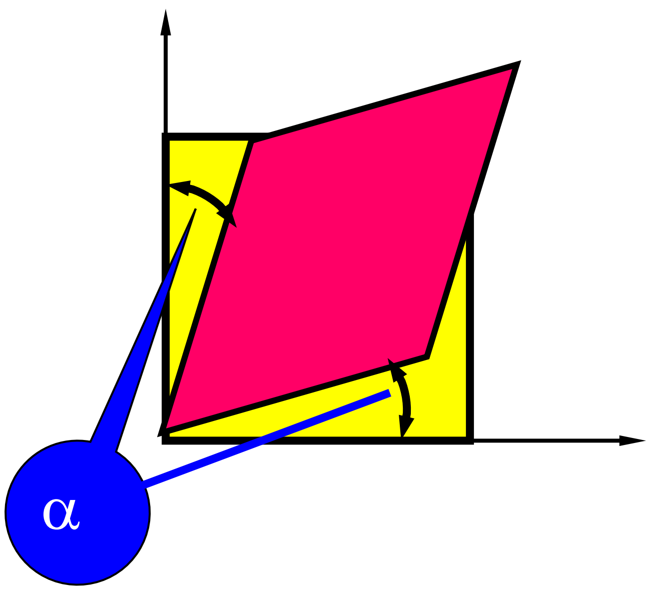
$$\boldsymbol{\tau = G\gamma}$$

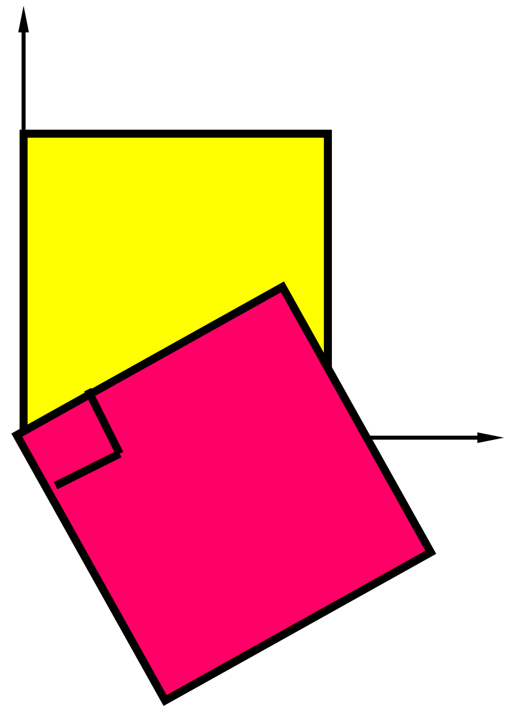
G 一切变模量,该式称为**材料的剪切胡克定律**.

弹性模量E，切变模量G与泊松比μ的关系

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

思考题：指出下面图形的切应变



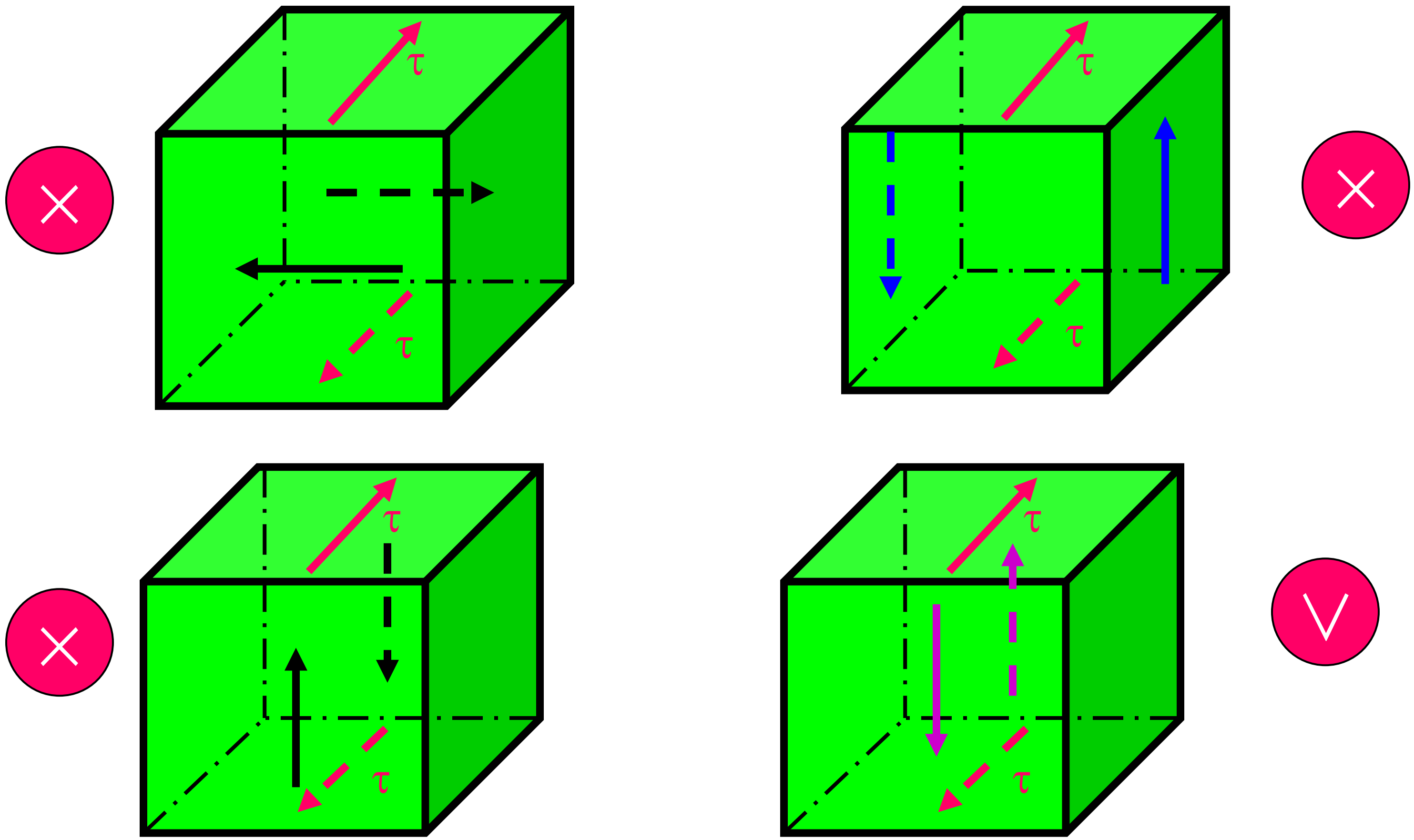


切应变为 2α

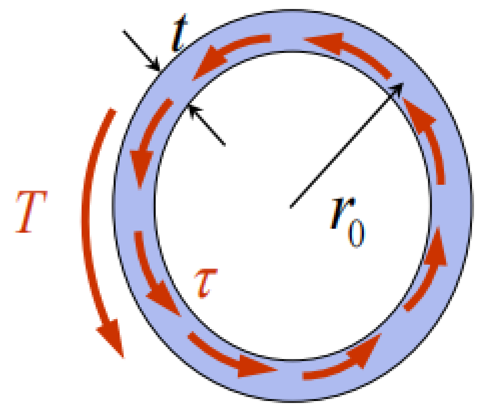
切应变为 0

思考题

已知单元体上，下面上的剪应力，判断单元体其它面上的剪应力。



例题 已知薄壁圆杆，r_0 =200mm，t=10mm，截面切应力 τ=20MPa，求杆件受到的扭矩T。



解：
$$\tau = \frac{T}{2\pi r_0^2 t}$$

$$T = 2\pi r_0^2 t \cdot \tau$$
$$= 2\pi \times 200^2 \times 10 \times 20$$
$$= 50.3 \times 10^6 \ \mathrm{N \cdot mm}$$
$$= 50.3 \ \mathrm{kN \cdot m}$$