例 1： 已知：$t_0=0,\quad x_0=0,\quad v_0<0$

求：初相位 $\varphi_0=?$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$
$$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi_0)$$

解： $0=A\cos\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0=\pm\dfrac{\pi}{2}$

$$\boxed{(-\pi\le\varphi_0<\pi)}$$

$$\because v_0=-A\omega\sin\varphi_0<0$$

$\therefore \sin\varphi_0>0,$ 取 $\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}$

$$x=A\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

二、简谐振动的运动学特征

例 2: 一沿 x 轴作简谐振动的弹簧振子，振幅为 A，周期为 T，振动方程用余弦函数表示，如果该振子的初相为 $\frac{4}{3}\pi$，则 $t_0 = 0$ 时，质点的位置在：

（A）过 $x = \frac{1}{2}A$ 处，向负方向运动；

（B）过 $x = \frac{1}{2}A$ 处，向正方向运动；

（C）过 $x = -\frac{1}{2}A$ 处，向负方向运动；

（D）过 $x = -\frac{1}{2}A$ 处，向正方向运动。

例 3： 一质点做沿 x 轴作简谐振动，$t_0 = 0$ 时的运动状态如下：

1）位于负最大位移处；

2）经过平衡位置向 x 轴的负方向运动；

3）经过平衡位置向 x 轴的正方向运动；

4）经过1/2最大位移处且向 x 轴的正方向运动。

求： 用旋转矢量法确定各种情况下的初相。$0 \le \varphi_0 < 2\pi$

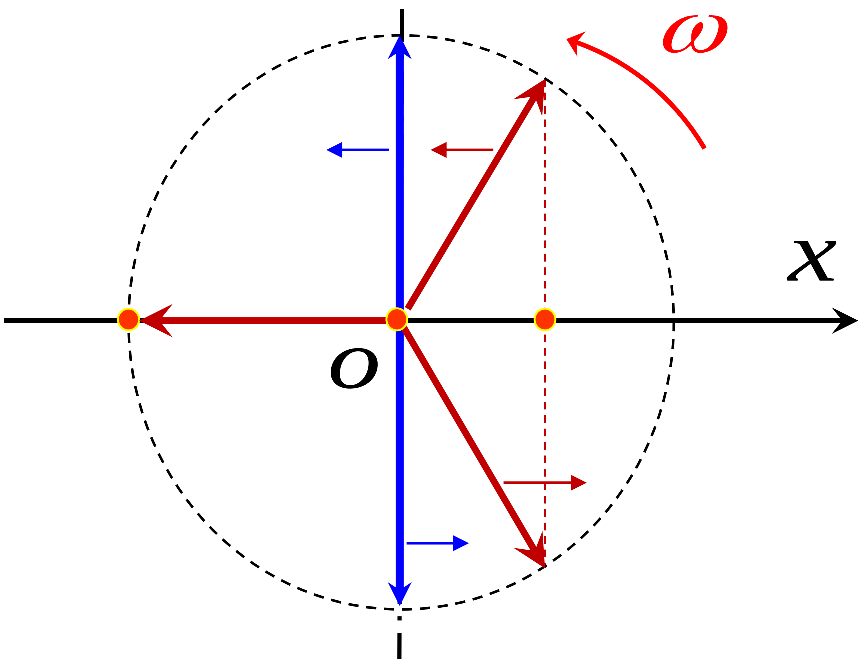
解：

1) $\varphi_0 = \pi$

2) $\varphi_0 = \dfrac{1}{2}\pi$

3) $\varphi_0 = \dfrac{3}{2}\pi$

4) $\varphi_0 = \dfrac{5}{3}\pi$



例 4: 一质点沿 *x* 轴作简谐振动，其简谐运动方程为：

$$x = 0.20\cos(\pi t + \frac{\pi}{3})\ (\mathrm{m}),$$

求： 由初始状态 $t_0=0$ 运动到 $x = -0.10\mathrm{m}$ 位置处所需最短时间。

解：

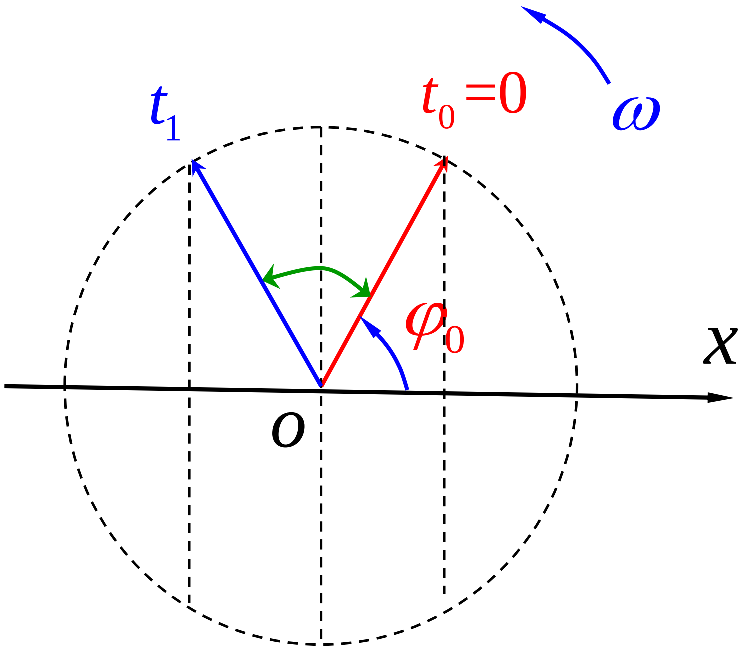
$$\boxed{\omega = \pi\ (\mathrm{rad}\cdot \mathrm{s}^{-1})}$$

$$t_0 = 0,\quad \varphi_0 = \frac{\pi}{3},$$

$$t_1,\quad x = -0.10\mathrm{m} = -\frac{A}{2},$$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{1}{3}\mathrm{s},$$



例 5: 一质点沿 x 轴作简谐振动，振幅为 A=10cm，周期为 T=2s。当 t_0=0 时，位移为 x_0= - 5cm，且向 x轴负方向运动。

求： 1）简谐振动方程；

2）何时物体第一次运动到 x = 5cm 处？

3）再经过多少时间物体第二次运动到 x = 5cm 处？

解： 1) 设简谐振动方程为: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, $\boxed{A=10\ \text{cm},}$ $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})}$

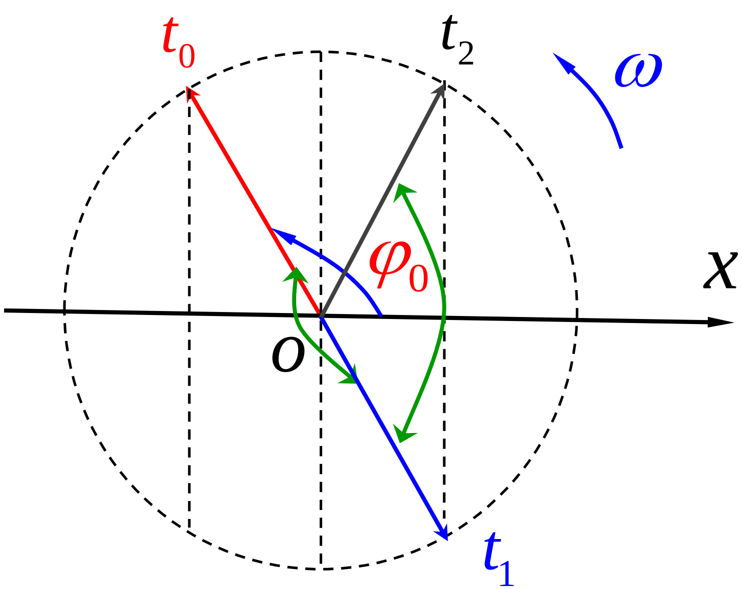
$$t_0 = 0,\quad x_0 = -\frac{A}{2},\quad v_0 < 0,\quad \Rightarrow \varphi_0 = \frac{2}{3}\pi,$$

$$\boxed{\Rightarrow x = 10\cos(\pi t + \frac{2}{3}\pi)\ (\text{cm}),}$$

2) $\Delta\varphi = \pi,\ \Delta t = t_1 - t_0 = \dfrac{\Delta\varphi}{\omega} = 1\,\text{s},$

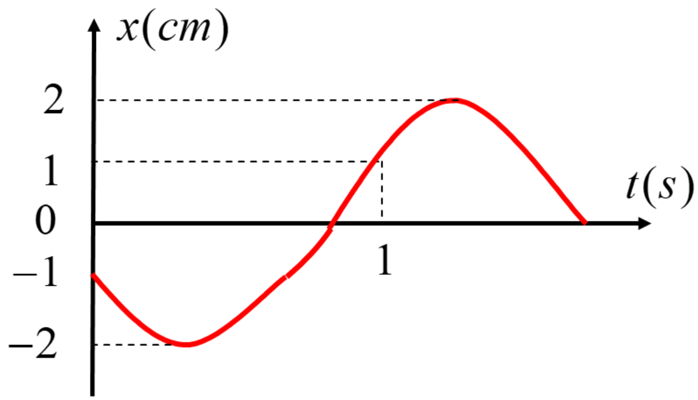
$t_1 = 1\,\text{s},$

3) $\Delta\varphi' = \dfrac{2}{3}\pi,\quad \Delta t' = t_2 - t_1 = \dfrac{\Delta\varphi'}{\omega} = \dfrac{2}{3}\,\text{s},$



例 6：一质点沿 x 轴作简谐振动，已知振动曲线如图所示，

求：简谐运动方程。



解：设简谐振动方程为：$x = A\cos(\omega t+\varphi_0)$，

$A=2\text{cm}$，

$t_0=0,\quad x_0=-\dfrac{A}{2},\quad v_0<0,\quad \Rightarrow \varphi_0=\dfrac{2}{3}\pi,$

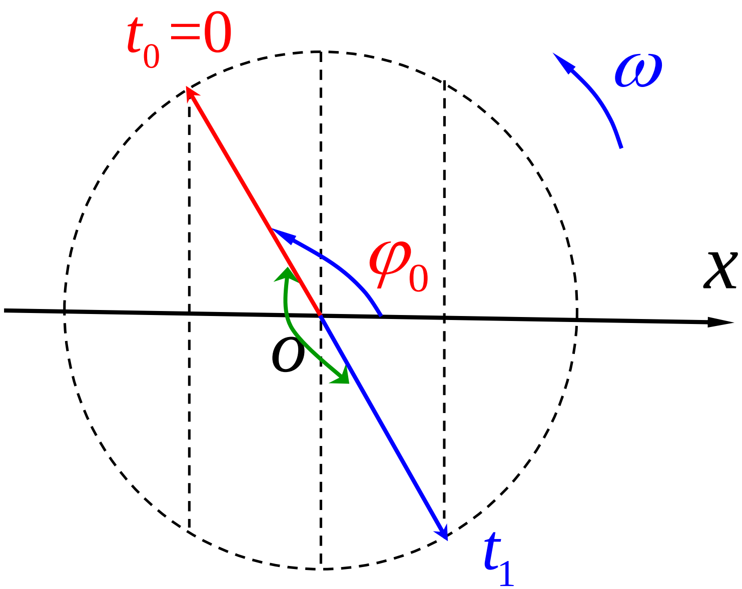
$(0\le\varphi_0<2\pi)$

$t_1=1s,\quad x_1=+\dfrac{A}{2},\quad v_0>0,\quad \Rightarrow \varphi_1=\dfrac{5}{3}\pi,$

$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_0=\pi,\quad \Delta t=t_1-t_0=t_1=1\,\text{s},$

$\omega=\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\pi\ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}),$

$$\boxed{\Rightarrow x=2\cos(\pi t+\frac{2}{3}\pi)\ (\text{cm}),}$$



例 7： 一质点沿 x 轴作简谐振动，已知振动曲线如图所示，

求： 1）质点的振动方程；2）$t_0 = 0$ 时质点的速度和加速度。

解： 1）设简谐振动方程为：$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$，

$A=4\text{cm}$，$T=4\text{s}$，$\Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}\ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$

$t_0 = 0$，$x_0 = \dfrac{A}{2}$，$v_0 > 0$，$\Rightarrow \varphi_0 = -\dfrac{1}{3}\pi$，

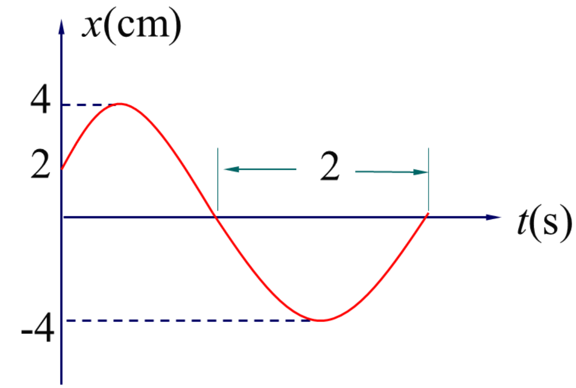
$$\boxed{\Rightarrow x = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{1}{3}\pi\right)\ (\text{cm})}，\quad \boxed{(-\pi \le \varphi_0 < \pi)}$$

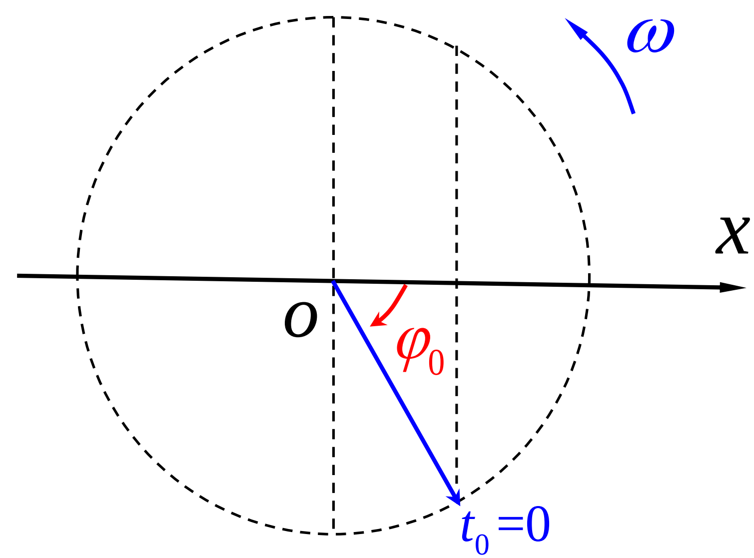
2）$v = \dfrac{dx}{dt} = -2\pi\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t - \dfrac{1}{3}\pi\right)$，

$a = \dfrac{dv}{dt} = -\pi^2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t - \dfrac{1}{3}\pi\right)$，

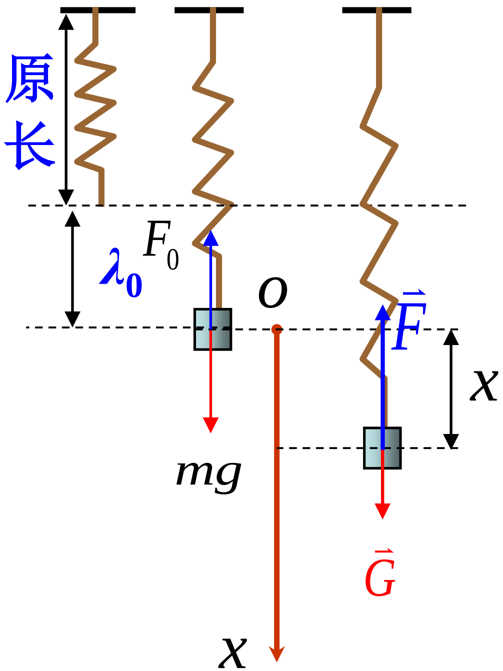
$t_0 = 0$，$\Rightarrow v_0 = 2\pi\sin\left(\dfrac{1}{3}\pi\right) = \sqrt{3}\pi\ (\text{m/s})$

$a_0 = -\pi^2\cos\left(\dfrac{1}{3}\pi\right) = -\dfrac{\pi^2}{2}\ (\text{m/s}^2)$





例 8: 一劲度系数为 k 的轻弹簧，上端固定，下端悬挂质量为 m 的物体，平衡时弹簧伸长 λ_0，用手向下拉物体，然后无初速释放，证明物体作简谐振动，并求振动周期。



解: 平衡时：$mg = F_0 = k\lambda_0$

建坐标如图，取平衡位置作为坐标原点，

当物体位移为 x 时：

$$\vec{G} = mg\vec{i}, \qquad \vec{F} = -k(x+\lambda_0)\vec{i},$$

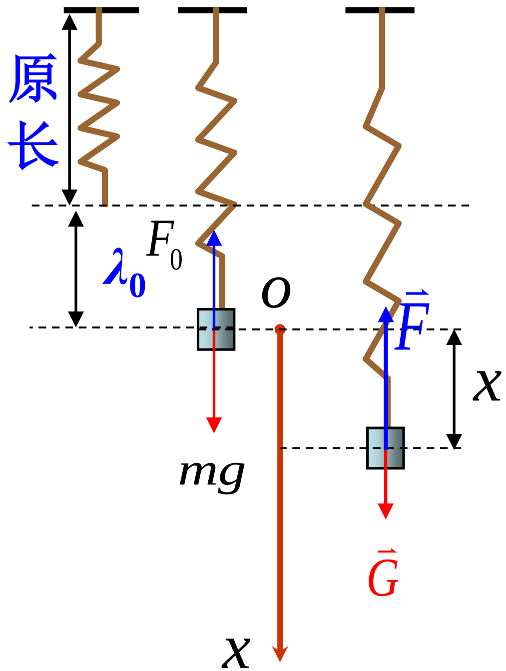
$$\Rightarrow \vec{F}_{合} = \vec{G} + \vec{F} = [mg - k(x+\lambda_0)]\vec{i} = -kx\vec{i}$$

$$= m\vec{a} = ma_x\vec{i} = m\frac{dv_x}{dt}\vec{i} = m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$$

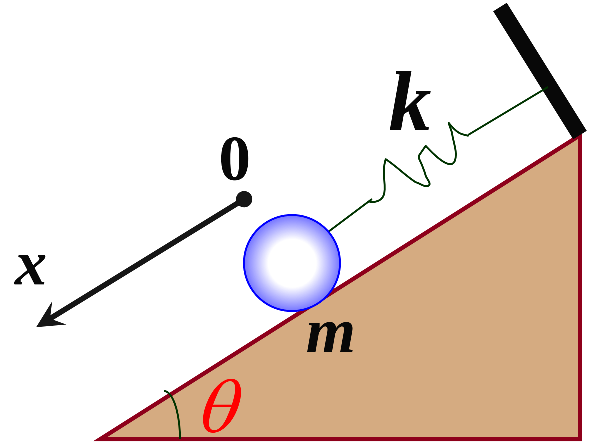
$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

例 8: 一劲度系数为 k 的轻弹簧，上端固定，下端悬挂质量为 m 的物体，平衡时弹簧伸长 λ_0，用手向下拉物体，然后无初速释放，证明物体作简谐振动，并求振动周期。



另，光滑斜面上的弹簧振子

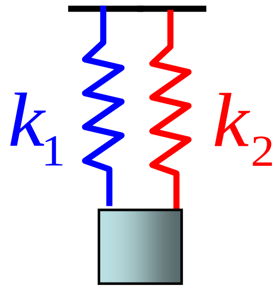


$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

弹簧振子无论水平、斜置、竖直悬挂，系统均作简谐振动，其频率相同。

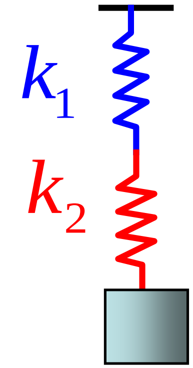
1、轻弹簧并联：

$$k = k_1 + k_2$$



2、轻弹簧串联：

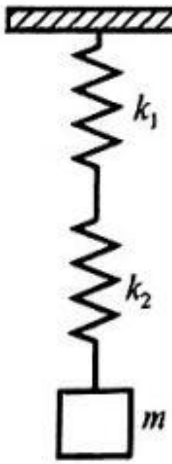
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$



劲度系数分别为 k_1 和 k_2 的两个轻弹簧串接在一起，下面挂着质量为 m 的物体，构成一个垂直悬挂的谐振子，如图所示，则该系统的振动周期为

(A) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(k_1+k_2)}{\cancel{2}k_1k_2}}$　　(B) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$

(C) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{2mk_1k_2}}$　　(D) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k_1+k_2}}$



活页册：
8.机械振动（一）
4题

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$$

例 9： 一质量为 m 的比重计，放在密度为 ρ 的液体中，已知比重计圆管的直径为 d。

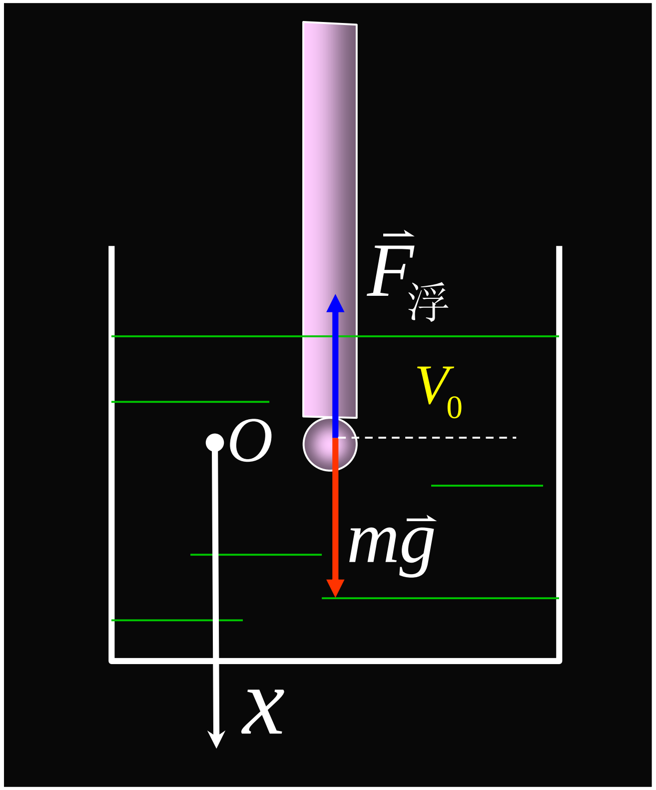
证明：比重计平衡后，沿竖直方向轻推比重计后，证明比重计在竖直方向的振动为简谐振动，并计算其周期。

解： 取平衡位置为坐标原点

平衡时： $$mg - F_{浮} = 0$$

$$F_{浮} = \rho V_0 g$$

其中 V_0 为比重计平衡时的排水体积



例 9： 一质量为 m 的比重计，放在密度为 ρ 的液体中，已知比重计圆管的直径为 d。

证明： 比重计平衡后，沿竖直方向轻推比重计后，证明比重计在竖直方向的振动为简谐振动，并计算其周期。

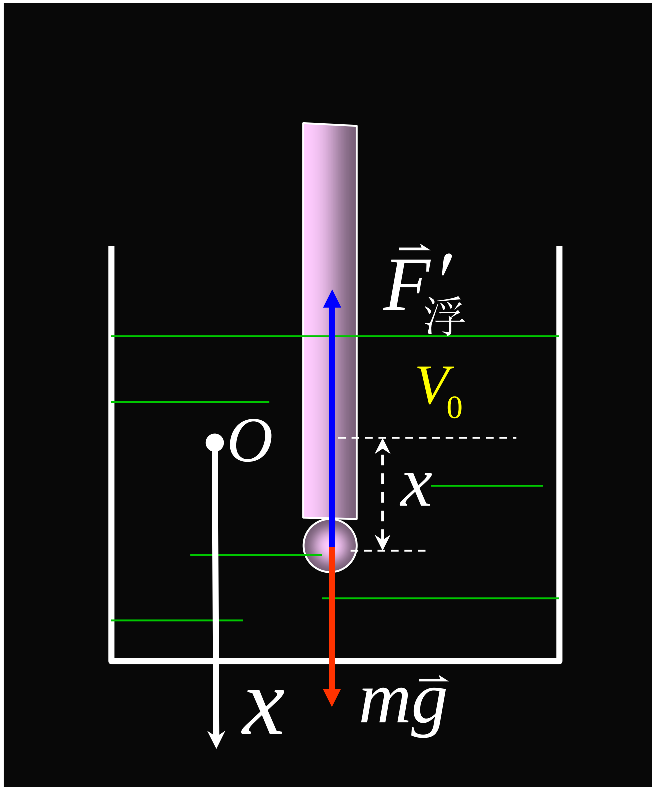
解： 平衡时：$mg = \rho V_0 g$

位移为 x 时：$\vec{F}_{合} = \vec{G} + \vec{F}'_{浮} = m\vec{a}$

$$mg - \rho g V = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

其中 V 为比重计的排水体积

$$mg - \left[V_0 + \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 x\right]\rho g = m\frac{d^2x}{dt^2}$$



例 9： 一质量为 m 的比重计，放在密度为 ρ 的液体中，已知比重计圆管的直径为 d。

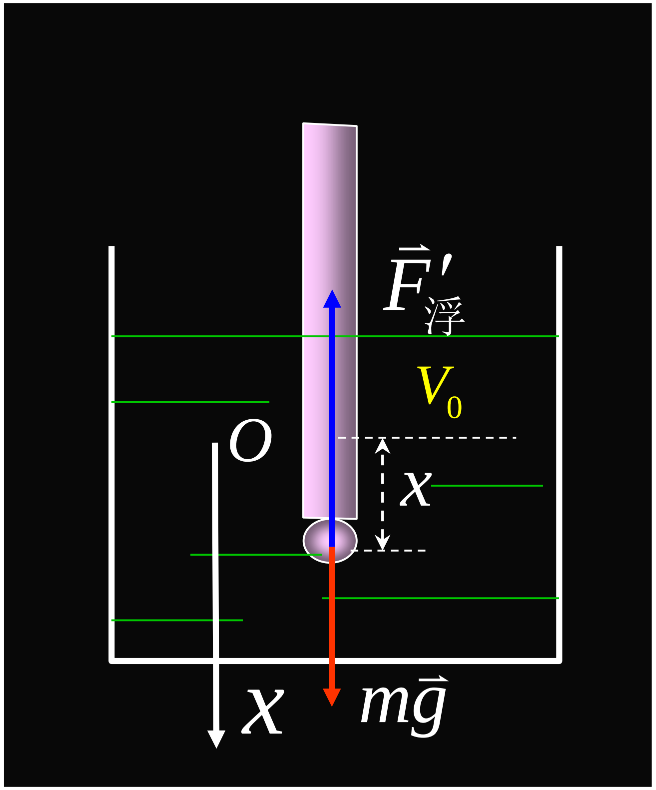
证明： 比重计平衡后，沿竖直方向轻推比重计后，证明比重计在竖直方向的振动为简谐振动，并计算其周期。

解：

$$-\rho g\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{\pi d^2\rho g}{4m}\right)x=0$$

$$\omega=\frac{d}{2}\sqrt{\frac{\pi\rho g}{m}},\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4}{d}\sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}$$



例 10： 如图所示，振动系统由一劲度系数为 k 的轻弹簧、一半径为 R、转动惯量为 J 的定滑轮和一质量为 m 的物体（质点）所组成。使物体沿竖直方向略偏离平衡位置后放手，任其振动，

证明： 物体作简谐振动，并计算其周期。

解： 取平衡位置为坐标原点，

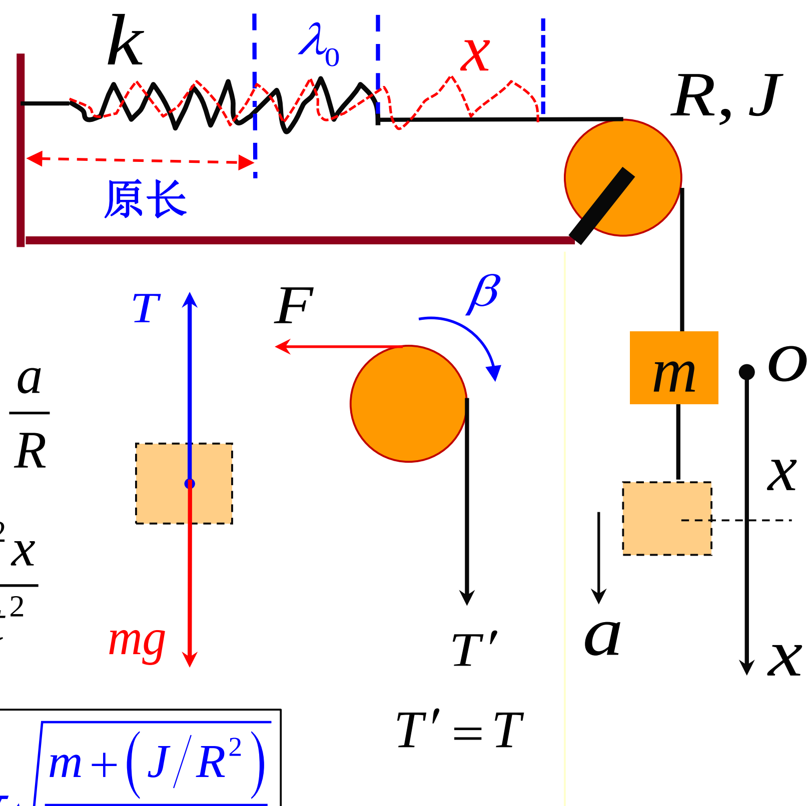
1）平衡时，设弹簧伸长量为λ_0

则： $mg = k\lambda_0$

2）位移 x 时： $mg - T = ma$

$$M_z = M_F + M_{T'} = J_z\beta \Rightarrow -k(\lambda_0 + x)R + TR = J\beta = J\frac{a}{R}$$

联立得： $-kx = \left(m + \frac{J}{R^2}\right)a = \left(m + \frac{J}{R^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2}$

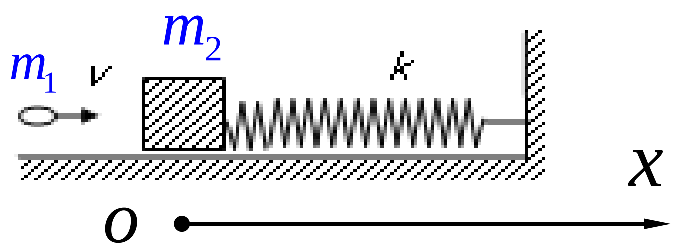


$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m + (J/R^2)}x = 0,$$

$$\boxed{\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m + (J/R^2)}{k}}}$$

例 11： 如图所示，质量为**0.02kg**的子弹,以速度v = **200m·s⁻¹**水平射入木块，并陷入木块中，使弹簧压缩而作简谐振动．木块的质量为**4.98kg**，弹簧的劲度系数k = **5×10²N·m⁻¹**，不计桌面摩擦，若以子弹射入瞬间为计时起点，弹簧原长处为坐标原点，向右为x轴正向，**求：** 简谐振动方程。

解： 1）过程 1：碰撞



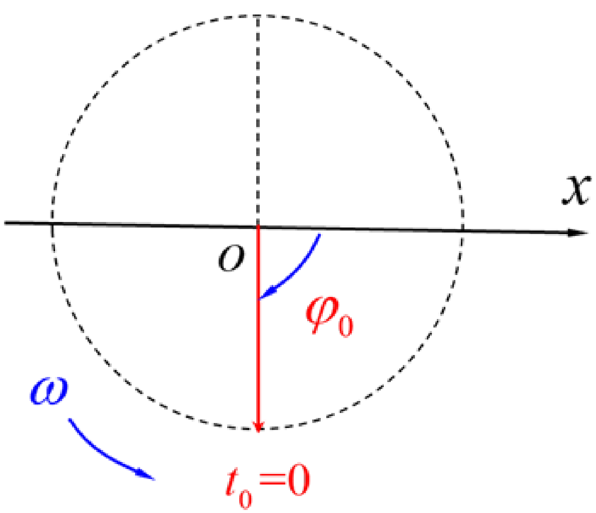
$$m_1 v = (m_1 + m_2) v_0 \Rightarrow v_0 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v = 0.8\ (\mathrm{m/s})$$

2）过程 2：振动

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 10\ (\mathrm{rad \cdot s^{-1}})$$

$$t_0 = 0, x_0 = 0, v_0 = 0.8,$$

$$A = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 0.08\ (\mathrm{m}), \qquad \varphi_0 = -\frac{\pi}{2},$$



$$x = 0.08\cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right)\ (\mathrm{m})$$

例 12： 一弹簧振子作简谐振动，当其偏离平衡位置的位移的大小为振幅的一半时，
其动能为振动总能量的多少？

解：

$$x = \frac{1}{2}A$$

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}kA^2$$

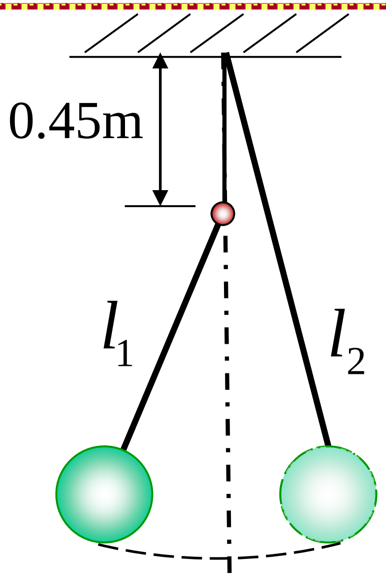
$$E = E_k + E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kA^2 \quad \Rightarrow E_k = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}kA^2$$

$$\Rightarrow \frac{E_k}{E} = \frac{3}{4}$$

例 13：一单摆的悬线长 $l=1.5$ m，在顶端固定点的铅直下方 **0.45 m**处有一小钉，如图设单摆在左右两边摆动均较小，

求：单摆的左右两边振幅之比 $\dfrac{A_1}{A_2}$ 为多少？

解：设质点质量为m



$$l_1 = 1.5 - 0.45 = 1.05(\mathrm{m}), \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1}}$$

$$l_2 = 1.5(\mathrm{m}), \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l_2}}$$

简谐运动系统机械能守恒 $\quad E = \dfrac{1}{2} m \omega^2 A^2$

$$\frac{1}{2} m(\omega_1 A_1)^2 = \frac{1}{2} m(\omega_2 A_2)^2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = 0.84$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

例 14: 已知一质点同时参与两个同方向、同频率的简谐振动，

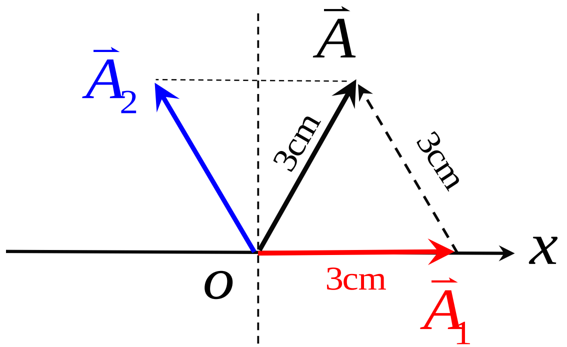
已知其中一个分振动 x_1 的方程为：$x_1(t)=3\cos(2\pi t)(\mathrm{cm})$,

合振动的方程为：$x(t)=3\cos(2\pi t+\dfrac{\pi}{3})(\mathrm{cm})$,

求： 另一个分振动 x_2 的振幅和初相位.

解： 利用旋转矢量处理

取 $t_0=0$ 时刻



分振动x_1：$A_1=3\mathrm{cm}$, $\varphi_{01}=0$,

合振动x：$A=3\mathrm{cm}$, $\varphi_0=\dfrac{\pi}{3}$

分振动x_2：$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2$, $\vec{A}_2=\vec{A}-\vec{A}_1$

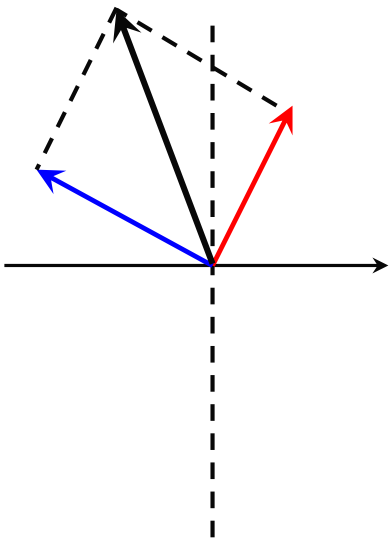
$$A_2=3\mathrm{cm},\quad \varphi_{02}=\frac{2\pi}{3}$$

例 15: 已知一质点同时参与两个简谐振动：

$$x_1(t)=3\cos(2\pi t+\frac{\pi}{3})(\text{cm}),\quad x_2(t)=4\cos(2\pi t+\frac{5\pi}{6})(\text{cm}),$$

求： 合振动的振幅与初相。

解： $A_1=3\text{cm},\quad \varphi_{01}=\frac{\pi}{3},\quad A_2=4\text{cm},\quad \varphi_{02}=\frac{5\pi}{6}$



$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})}$$

$$A=\sqrt{3^2+4^2+2\times3\times4\cos(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3})}=5(\text{cm})$$

$$\tan\varphi_0=\frac{A_1\sin\varphi_{01}+A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01}+A_2\cos\varphi_{02}}=-2.344$$

$$\varphi_0=113^0=0.63\pi(\text{rad})$$

二、简谐振动的合成

2、两个同方向不同频率简谐振动的合成

频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐振动的合成

其合振动的振幅时而加强、时而减弱的现象叫拍

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos 2\pi\nu_1 t + A_1 \cos 2\pi\nu_2 t$$

$$x = \left(2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t\right) \cos 2\pi \frac{\nu_2 + \nu_1}{2} t$$

振幅部分

合振动频率

1、钢琴等乐器的调音；

2、利用“拍”的方法测量未知的频率。

振幅 $A = \left|2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t\right|$ 随 t 缓慢变化

合振动可看作振幅缓慢变化的简谐振动

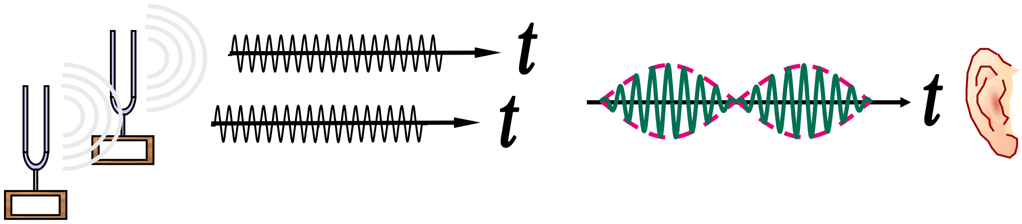
$$\nu' = |\nu_2 - \nu_1|$$

拍频（振幅变化的频率）

例:

$\nu_1 = 385\ \text{Hz}$

$\nu_2 = 383\ \text{Hz}$



听到的音频 $\nu = 384\ \text{Hz}$

拍频 $\nu' = 2\ \text{Hz}$