第十五章 量子物理

15- 6 德布罗意波、实物粒子的二象性

知识点：

1、德布罗意假说（物质波假说）

2、德布罗意关系式（德布罗意波长）

一、背景

1、Planck-Einstein光量子理论

量子理论是首先在黑体辐射问题上突破的，Planck提出了能量子的概念；Einstein 利用能量子假说提出了光量子的概念，从而解决了光电效应的问题；光量子概念在Compton散射实验中得到了直接的验证。

2、Bohr的量子论

Bohr把Planck-Einstein的量子概念创造性地用来解决原子结构和原子光谱的问题，成功解释了氢原子光谱。

3、X射线的双重本质

“同我(Louis Victor de Broglie)哥哥进行的这些长期讨论……对我非常有益，这些讨论使我深深考虑将波的观点和粒子的观点必须综合在一起的必要性。”

二、德布罗意假设

这种和实物粒子相联系的波称为德布罗意波或物质波 。

德布罗意假设:

不仅光具有波粒二象性，一切实物粒子(电子、原子、分子等)也都具有波粒二象性；具有确定动量 P 和确定能量 E 的实物粒子相当于频率为 ν 和波长为 λ 的波，满足：

$$E = mc^2 = h\nu$$

$$p = mv = \frac{h}{\lambda}$$

$$\begin{matrix} E \\ P \end{matrix} \xrightarrow{\;h\;} \begin{matrix} \nu \\ \lambda \end{matrix}$$

$$E = mc^2 = h\nu$$

$$p = m\upsilon = \frac{h}{\lambda}$$

三、德布罗意波长（德布罗意关系式）

$$p = m\upsilon = \frac{h}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

如果$\upsilon << c$， 则：

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon}$$

例 16： 计算经过电势差 $U=100\text{ V}$ 加速的电子的德布罗意波长（不考虑相对论效应）。

$$E=\frac{1}{2}m_0 v^2=eU,$$

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{m_o v}=\frac{h}{\sqrt{2em_o U}}$$

$$U=100\text{V},\qquad \lambda=0.1228\text{nm}$$

与 X 射线波长的数量级相当

1923年，德布罗意提出了作电子衍射实验的设想；

1924年，又提出用电子在晶体上作衍射实验的想法。

“在一定情形中，任一运动质点能够被衍射。穿过一个相当小的开孔的电子群会表现出衍射现象。正是在这一方面，有可能寻得我们观点的实验验证。”

★讨论

一颗子弹、一个足球

有没有波动性呢？

例17： 电子静止质量 $m_0=9.1\times10^{-31}\text{kg}$，以$v = 6.0\times10^6\text{m/s}$速率运动；质量 $m = 40\text{ g}$的子弹，以 $v = 1.0\times10^3\text{ m/s}$的速率运动，比较电子与子弹的德布罗意波长。

解： 电子和子弹的德布罗意波长分别为

$$\lambda_e = \frac{h}{m_0 v} = \frac{6.63\times10^{-34}}{9.1\times10^{-31}\times6\times10^6} = 1.2\times10^{-10}\text{m}$$

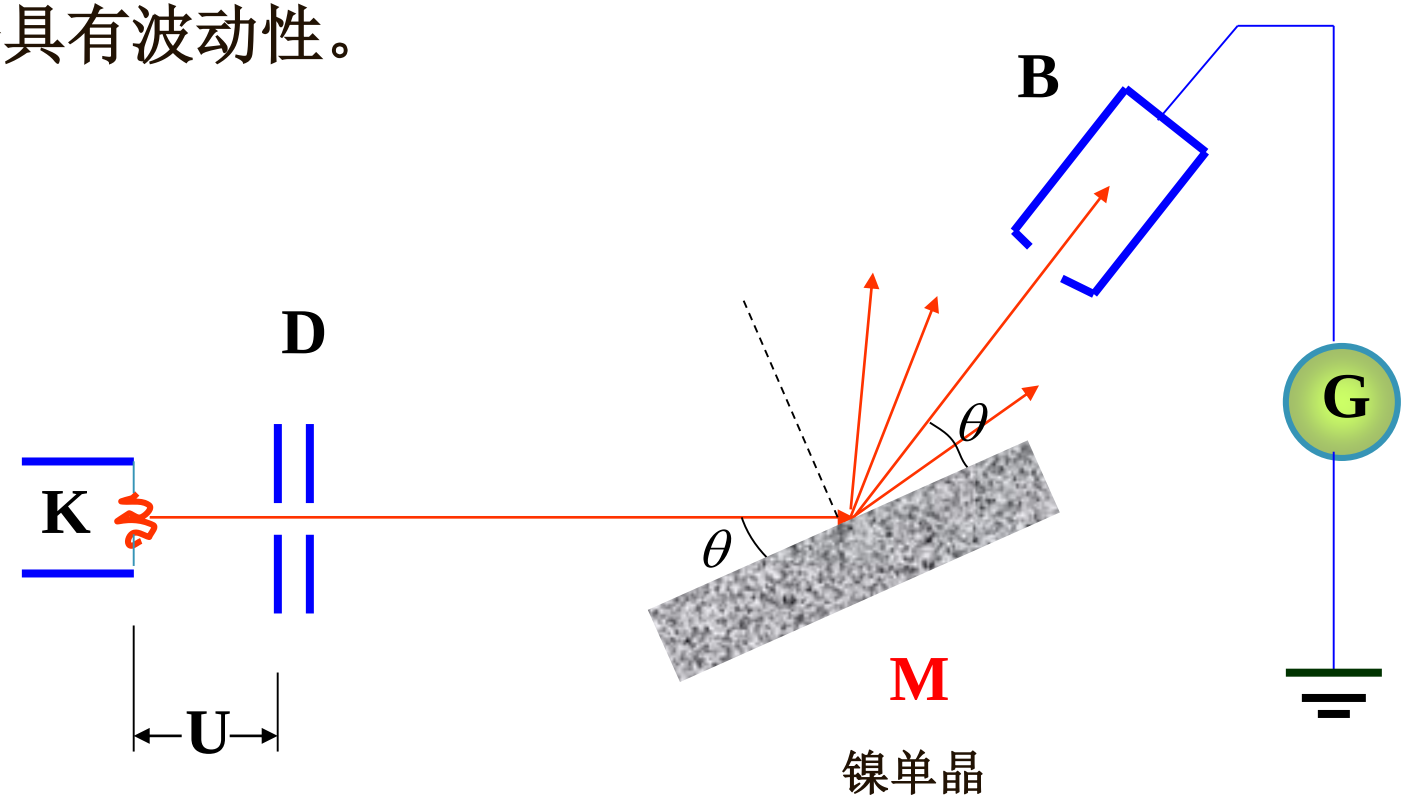
$$\lambda_{子弹} = \frac{h}{mv} = \frac{6.63\times10^{-34}}{40\times10^{-3}\times1.0\times10^3} = 1.66\times10^{-35}\text{m}$$

电子的德布罗意波长与 X 射线接近，其波动性不能忽略；而子弹的德布罗意波长小到实验难以测量的程度(人、足球的波长也是如此)。 **“宏观物体只表现出粒子性”**

四、德布罗意假设的实验证明

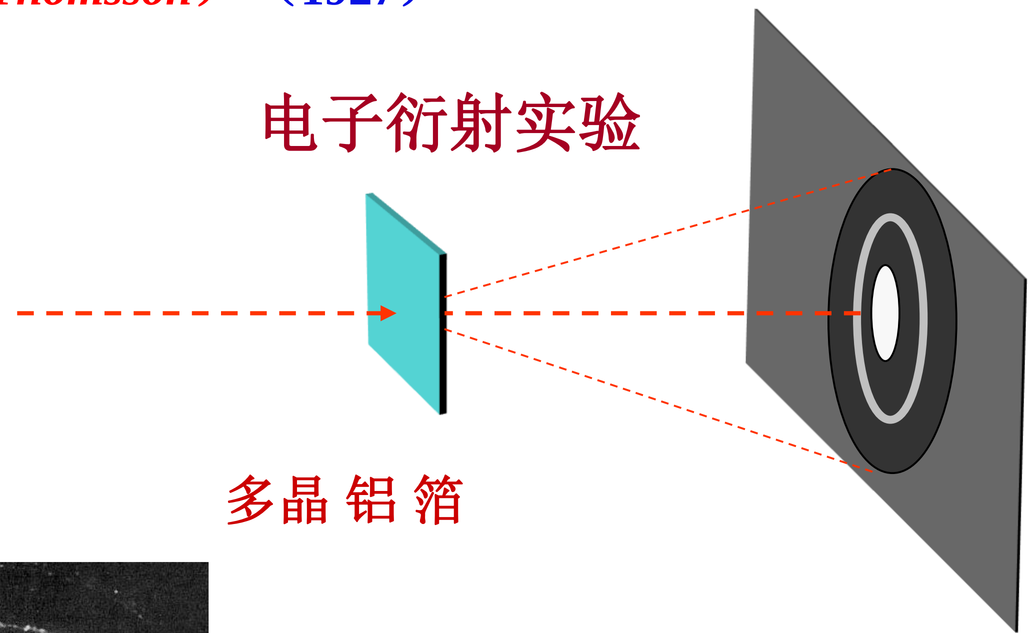
1、戴维孙（C. J. Davisson）－革末（L. H. Germer）实验（1927）

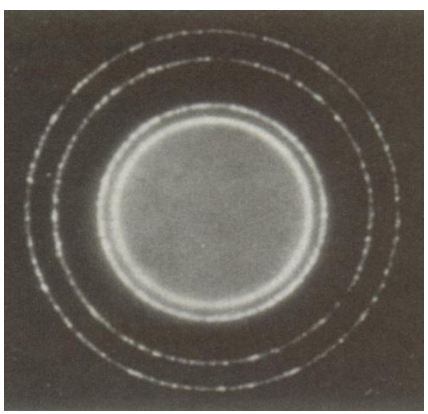
电子束在晶体表面散射实验时，观察到了和X射线在晶体表面衍射相类似的衍射现象——Bragg晶体衍射，从而证实了电子具有波动性。



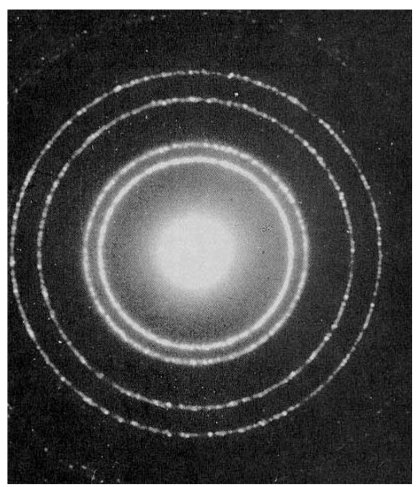
2、汤姆逊（*George Paget Thomsson*）（1927）

- 1927年，G.P.汤姆孙等令一电子束通过薄铝箔，结果发现，同X射线一样，也能得到清晰的电子衍射图样。





X射线衍射



电子衍射

大量实验证实除电子外，中子、质子以及原子、分子等都具有波动性，德布罗意公式对这些粒子也同样正确。

电子显微镜 (Electron Microscope, EM)

电子显微镜是根据电子光学原理，用电子束和电子透镜代替光束和光学透镜，使物质的细微结构在非常高的放大倍数下成像的仪器。电子显微镜直接放大倍数可达百万倍左右,分辨本领约0.1nm,用它可以看到病毒、单个分子以及金属材料的晶格结构等。

目前，最常用的电子显微镜有透射电子显微镜(TEM)和扫描电子显微镜(SEM)，根据不同的成像原理,有发射式电子显微镜、反射式电子显微镜、镜式电子显微镜等各种类型。各式电子显微镜广泛地应用于金属物理学、高分子化学、微电子学、生物学、医学以及工农业生产等各个领域。

第十五章 量子物理

15- 7 不确定关系

知识点：

坐标与动量的不确定性关系

位置与动量的不确定性关系 （注：不确定性关系，早期又称为测不准关系）

在经典力学中，质点（宏观物体或粒子）在任何时刻都有完全确定的位置、动量、能量等。由于微观粒子具有明显的波动性，以致于它的某些成对物理量（如位置坐标和动量、时间和能量等）不可能同时具有确定的量值。

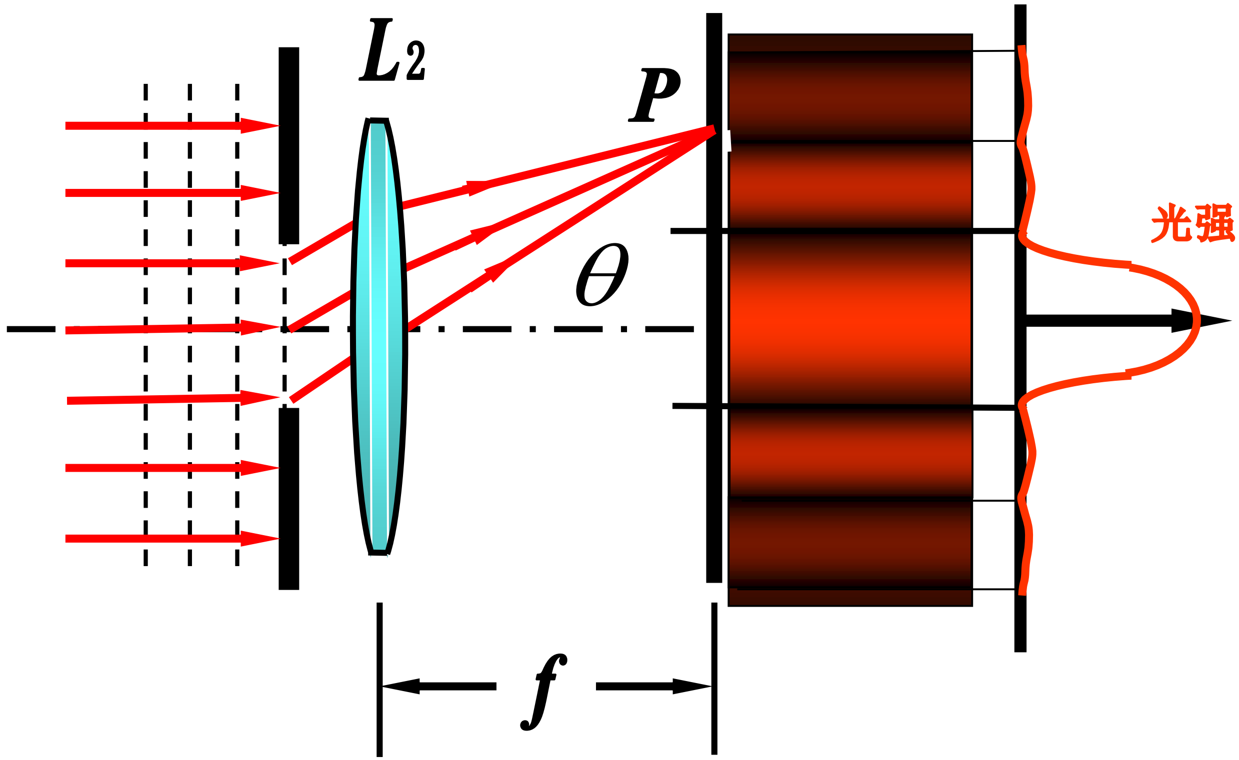
概念：不确定量

下面以电子单缝衍射为例讨论这个问题

位置与动量的不确定性关系

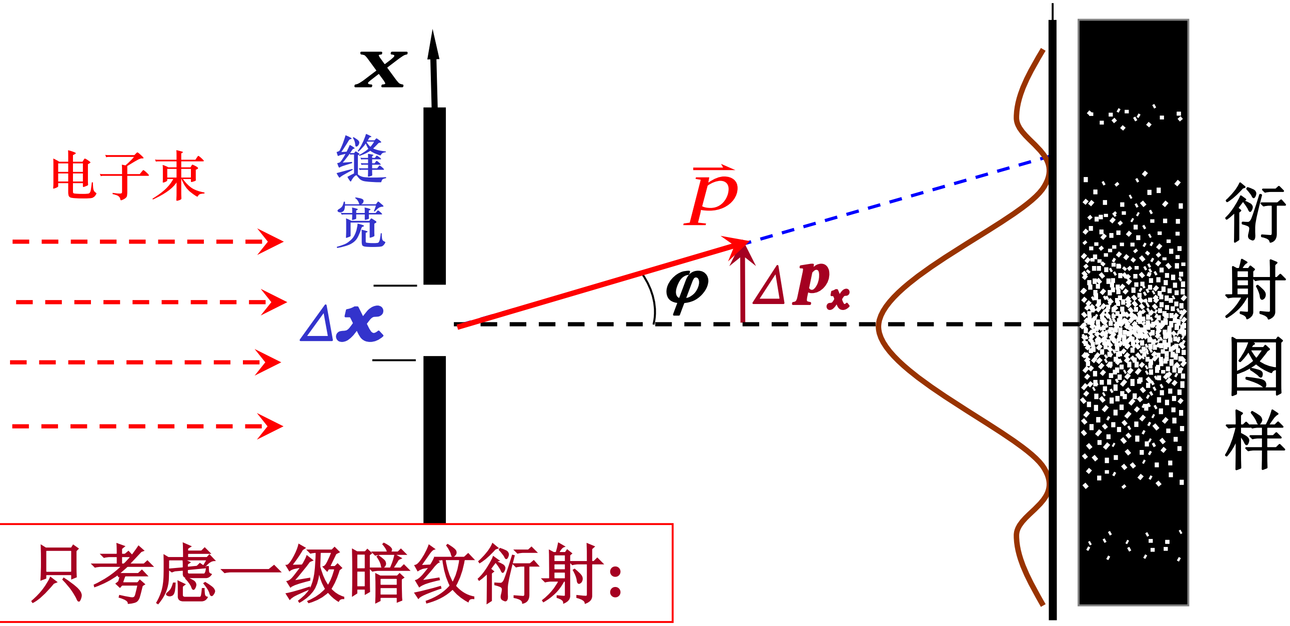
回 顾

光波的单缝的夫琅禾费衍射



暗纹中心
（干涉减弱）

$$b\sin\theta = \pm 2k\frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$



$$p = \frac{h}{\lambda}$$

只考虑一级暗纹衍射:

电子可在缝宽 Δx 范围的任意一点通过狭缝，电子坐标不确定量就是缝宽 Δx ，电子在 x方向的动量不确定量 Δp_x:

$$\Delta p_x = p \sin\varphi,$$

一级暗纹衍射:

$$b \sin\varphi = \Delta x \sin\varphi = \lambda,$$

$$\Delta p_x = p \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{h}{\Delta x}, \qquad \Delta x \Delta p_x = h$$

若考虑高级次衍射: $\Delta x \Delta p_x > h$ 一般有: $\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq h}$

位置与动量的不确定性关系

不确定性关系: $\begin{cases} \Delta x \cdot \Delta p_x \geq h \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \geq h \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geq h \end{cases}$

- 海森堡于 1927 年提出不确定原理;
- 对于微观粒子不能同时用确定的位置和确定的动量来描述 。

位置与动量的不确定性关系

严格的理论推导给出的位置与动量不确定性关系为:

不确定性关系:
$$\begin{cases} \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \dfrac{\hbar}{2} \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \dfrac{\hbar}{2} \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \dfrac{\hbar}{2} \end{cases}$$

约化普朗克常数

$$\boxed{\hbar = \frac{h}{2\pi}}$$

- 海森堡于 1927 年提出不确定原理;
- 对于微观粒子不能同时用确定的位置和确定的动量来描述 。

位置与动量的不确定性关系

不确定性关系：

$$\begin{cases} \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \dfrac{\hbar}{2} \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \dfrac{\hbar}{2} \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \dfrac{\hbar}{2} \end{cases}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

物理意义：1、 微观粒子不可能同时具有确定的位置和动量。

粒子位置的不确定量越小，动量的不确定量就越大，反之亦然。

因此，不可能用某一时刻的位置和动量描述其运动状态。

海森伯不确定关系告诉我们：微观粒子坐标和动量不能同时确定。粒子位置若是测得极为准确，我们将无法知道它将要朝什么方向运动；若是动量测得极为准确，我们就不可能确切地测准此时此刻粒子究竟处于什么位置。

位置与动量的不确定性关系

不确定性关系:

$$\begin{cases} \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \dfrac{\hbar}{2} \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \dfrac{\hbar}{2} \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \dfrac{\hbar}{2} \end{cases}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

物理意义:

2、不确定关系是由微观粒子的波粒二象性引起的，是微观粒子的“波粒二象”性的具体体现，而不是测量仪器对粒子的干扰，也不是仪器的误差所致。

3、对宏观粒子，因 h 很小，所以 $\Delta x \cdot \Delta p_x \to 0$ ，可视为位置和动量能同时准确。

例18: 已知

电子的质量 m_e 为 9.11×10^{-31} kg

一氢原子中的电子速度 v_x 的数量级为 $10^{6}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

若以氢原子的线度 10^{-10} m 作为电子的坐标不确定量 Δx

求 电子速度的不确定量

解法提要:

由不确定关系 $\Delta x\cdot\Delta P_x \geq \dfrac{\hbar}{2}$

因该电子速度远小于光速，可不考虑相对论效应，用 $p_x = m_e v_x$ 代入

$$\Delta p_x = m_e \Delta v_x$$

$$\Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2m_e\Delta x} = 0.58\times10^{6}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

说明：氢原子中电子速率不确定量与速率本身的数量级基本相同，因此原子中电子的位置和速度不能同时完全确定，也没有确定的轨道。

在微观领域内，粒子的轨道概念不适用！

例19: 质量 $m = 40\ \mathrm{g}$ 的子弹，以 $v = 1.0\times10^3\ \mathrm{m/s}$ 的速率飞行，求：（1）其德布罗意波长；

（2）若子弹位置的不确定量为 $0.10\ \mathrm{mm}$，求其速率的不确定量。

解: （1）子弹的De Broglie波长为：

$$\lambda_{\text{子弹}} = \frac{h}{mv} = \frac{6.63\times10^{-34}}{40\times10^{-3}\times1.0\times10^{3}} = 1.66\times10^{-35}\,\mathrm{m}$$

（2） $\Delta x = 0.10\mathrm{mm}$, $\qquad \Delta x\cdot\Delta P_x \geq \dfrac{\hbar}{2}$

$\Delta P_x = m\Delta v_x$, $\qquad \Delta v_x \geq \dfrac{\hbar}{2m\Delta x} = 1.32\times10^{-29}\ \mathrm{m/s}$

$v >> \Delta v_x$ 波动性可忽略

说明: 子弹速率的不确定范围很小，是微不足道的。
子弹的动量和位置都能精确地确定。
不确定性关系对宏观物体来说没有实际意义。

例 20: 一电子以初速度 $v_0 = 6\times10^6$ m/s，逆着场强方向飞入电场强度为 E=500 V/m 的均匀电场中，(飞行过程中，不考虑相对论效应），则该电子在电场中要飞行多长距离，可使得电子的德布罗意波长达到 0.1 nm。

解： 根据动能定理：$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = W = eU$， $U = Ed$

$$\Rightarrow E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2}m_0 v^2 - \frac{1}{2}m_0 v_0^2 = eEd$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{2m_0} - \frac{1}{2}m_0 v_0^2 = eEd$$

由德布罗意关系，有： $p = \dfrac{h}{\lambda}$， $\lambda = 0.1\text{nm}$

$$\Rightarrow d = 9.715\times10^{-2}\ \text{m}$$

例 21: 能量为 **15eV** 的光子，被处于基态的氢原子吸收，使氢原子电离发射一个电子，则此电子的德布罗意波长为多少？(不考虑相对论效应）

解： 把电子从氢原子基态轨道移至无限远处所需要的能量值，即电离能，

$$E_{电离} = E_{\infty} - E_1 = 13.6\,\mathrm{eV}$$

此电子获得的动能： $E_k = 15\,\mathrm{eV} - 13.6\,\mathrm{eV} = 1.4\,\mathrm{eV}$

$$E_k = \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{p^2}{2m_0} \Rightarrow p = \sqrt{2m_0 E_k}$$

德布罗意波长： $\lambda = \dfrac{h}{p} = 1.038\,\mathrm{nm}$

例 22: 设氦原子的动能等于氦原子处于温度为 T 的热平衡状态时的平均动能，氦原子的质量为m,
则此氦原子的德布罗意波长为多少？
(不考虑相对论效应)

解： 处于温度为 T 的热平衡状态时，
氦原子的平均动能为：

$$E_k = \frac{i}{2}kT = \frac{3}{2}kT$$

$$p = mv,\quad E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow p = \sqrt{2mE_k}$$

德布罗意波长：

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$$

例 23: 氦氖激光器所发出红光波长为 $\lambda = 632.8\text{nm}$ ，谱线宽度 $\Delta\lambda = 10^{-9}\text{nm}$ ，当这种光子沿x方向传播时，求光子的坐标 x 的不确定量 Δx 为多大?

解:

光子具有波粒二象性，其动量为: $p_x = \dfrac{h}{\lambda}$

其动量不确定量为: $\Delta p_x = \Delta(\dfrac{h}{\lambda}) = -\dfrac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda$ (注：只需考虑不确定量大小)

利用: $\Delta x \Delta p_x \geq h \;\Rightarrow\; \Delta x \Delta p_x \sim h \;\Rightarrow\; \Delta x \cdot \dfrac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda \sim h$

$$\Rightarrow \Delta x \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \approx 4\times10^5\text{m} = 400\text{km}$$

Δx 为波列长度，光子的位置不确定量也就是波列的长度。
原子在一次能级跃迁过程中发射一个光子或说发出一列波。