第四章 线性方程组

本章我们讨论线性方程组有解的判定，研究线性方程组解的结构和求解的方法并介绍向量空间的初步知识.

§1 线性方程组解的判定

线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4.1)$$

其中，称b_i $(i=1, 2,\ldots, m)$为常数项，x_j $(j=1, 2,\ldots, n)$表示n个未知量，a_{ij} $(i=1, 2,\ldots, m;\ j=1, 2,\ldots, n)$表示第$i$个方程中第$j$个未知量的系数.

如果$b_1=b_2=\ldots=b_m=0$，则称(4.1)为齐次线性方程组；否则，称(4.1)为非齐次线性方程组.

若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则线性方程组(4.1)可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}.$$

称$\boldsymbol{A}$为线性方程组(4.1)的系数矩阵, $\boldsymbol{\beta}$为方程组的常向量. 矩阵$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta})$称为线性方程组(4.1)的增广矩阵.

注:

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

若记

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$$

则线性方程组(4.1)也可写成向量形式:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}.$$

如果一组数$c_1, c_2,\ldots, c_n$满足

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+c_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta},$$

则称$\boldsymbol{\eta}=(c_1, c_2,\ldots, c_n)^T$是方程组(4.1)的一个解向量，简称方程组(4.1)的一个解.

解线性方程组就是求出它的解集合. 若两线性方程组有相同的解集合，就称它们是同解线性方程组.

问题：如何判断线性方程组(4.1)有解？

方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_n\alpha_n=\beta$ 有解

$\Updownarrow$

β可由$\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n$线性表示

$\Updownarrow$

向量组$\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n$与向量组$\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n, \beta$等价

$\Updownarrow$

$R\{\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n\}=R\{\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n, \beta\}$

$\Updownarrow$

系数矩阵 $R(A) = R(A \mid \beta)$ 增广矩阵

定理4.1 线性方程组(4.1)有解 $\Leftrightarrow$ $R(A)=R(A \mid \beta)$.

线性方程组(4.1)有解$\Leftrightarrow$其系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩.

例1 问线性方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ 3x_1-x_2-4x_3=3 \end{cases}$ 是否有解？

解 由于

$$(\mathbf{A}|\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & -10 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$R(\mathbf{A})=2$,

$R(\mathbf{A} \mid \boldsymbol{\beta})=3$,

可见$R(\mathbf{A})=2$, $R(\mathbf{A} \mid \boldsymbol{\beta})=3$, $R(\mathbf{A})\neq R(\mathbf{A} \mid \boldsymbol{\beta})$, 所以方程组无解.

例2 判断下面线性方程组是否有解

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1, \\ 2x_1+6x_2-6x_3=3, \\ x_1+4x_2-2x_3=2. \end{cases}$$

解 由于

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3-r_2 \\ r_1-r_2 \\ r_2\times 1/2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见, $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta})=2$. 所以, 此方程组有解.

如果方程组(4.1)有解，假设R(**A**)=R(**A** ┆ **β**)=r. 由于任何矩阵都可以经过初等行变换化为行最简形矩阵，且非零行数就是矩阵的秩，不妨设增广矩阵经初等行变换化为行最简形矩阵：

r列

n列

$$(\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) \overset{\text{行变换}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} & d_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right) \quad (4.2)$$

r行

m行

当r≤n时，行最简形的一般形式.

这些列未必在前r列，但不妨这样表达.

更具体地,……

当r=n时, (4.2)式成为

$$(\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) \overset{\text{行变换}}{\sim} \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}}^{r\text{列}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \vdots & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\ \cdots\\0\end{array}}\right\} r\text{行} \\ \vphantom{\begin{array}{c}0\\ \cdots\\0\end{array}} \end{array}.$$

由于对增广矩阵做初等行变换对应线性方程组解不变, 所以此时(r=n时)线性方程组(4.1)有唯一解:

$$x_1 = d_1,\ x_2 = d_2, \ldots,\ x_n = d_n.$$

当r<n时，有

r列　n列

$$
(\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) \overset{\text{行变换}}{\sim}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} & \vdots & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} & \vdots & d_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} & \vdots & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0
\end{pmatrix}
\qquad (4.2)
$$

由(4.2)式可知，线性方程组(4.1)的同解方程组为：

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \end{cases}$$

将后面n-r个变量移到等式右侧，改写成

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \end{cases} \quad (4.3)$$

$\boldsymbol{\eta}$也是
方程组(4.1)
的解

如果$\boldsymbol{\eta}=(k_1, k_2,\dots, k_n)^{\mathrm{T}}$是方程组(4.3)的解，则有

$$\begin{cases} k_1 = d_1 - c_{1,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{1n}k_n \\ k_2 = d_2 - c_{2,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{2n}k_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_r = d_r - c_{r,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{rn}k_n \end{cases}$$

于是线性方程组(4.3)(或说，线性方程组(4.1))的解可以写成

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{1n}k_n \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{2n}k_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{rn}k_n \\ x_{r+1} = k_{r+1} \\ x_{r+2} = k_{r+2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = k_n \end{cases} \tag{4.4}$$

$$
\begin{cases}
x_1 = d_1 - c_{1,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{1n}k_n \\
x_2 = d_2 - c_{2,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{2n}k_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_r = d_r - c_{r,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{rn}k_n \\
x_{r+1} = k_{r+1} \\
x_{r+2} = k_{r+2} \\
\cdots\cdots\cdots \\
x_n = k_n
\end{cases}
\tag{4.4}
$$

反之，对任意的数k_{r+1}，$k_{r+2}, \ldots$，k_n，式(4.4)都是方程组(4.3)的解.

所以，当k_{r+1}，$k_{r+2}, \ldots$，k_n取任意实数时，(4.4)式是方程组(4.3)(也是方程组(4.1))的通解（也即全体解).

因此，当r<n时，线性方程组(4.1)有无穷多解.

定理4.2 对于n元线性方程组(4.1),
当$R(A)=R(A \vdots \beta)=n$时，方程组(4.1)有唯一解;
当$R(A)=R(A \vdots \beta)=r<n$时，方程组(4.1)有无穷多个解，且此时它的通解中包含$n-r$个任意参数.

思考：这里的r和n分别代表什么?

对于齐次线性方程组$Ax=0$，由于$\beta=0$，所以总有$R(A)=R(A \vdots \beta)$，故方程组$Ax=0$总有解. 再由定理4.2可得

定理4.3 对于n元齐次线性方程组$Ax=0$,
当$R(A)=n$时，此方程组只有零解;
当$R(A)=r<n$时，此方程组有无穷多个解(当然有非零解)，且其通解中包含$n-r$个任意参数.

例3 以下方程组中，参数λ和μ取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = \mu \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + \lambda x_4 = 4 \end{cases}$$

无解？有唯一解？有无穷多解？在有无穷多解时求出通解.

解 由于

$$(\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & \mu \\ 2 & -1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & \lambda & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & \mu-1 \\ 0 & -3 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \lambda-3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3+3r_2 \\ r_4-r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & \mu-1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3\mu-3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 2-\mu \end{pmatrix},$$

可见，当$\lambda=1$, $\mu\neq 2$时，$R(\mathbf{A})=3$, $R(\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\beta})=4$，此时无解.

而当$\lambda\neq 1$时，必有 $R(\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) = R(\mathbf{A})=4$，此时有唯一解.

当$\lambda=1$, $\mu=2$时, $R(\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) = R(\mathbf{A}) = 3$,有无穷多解. 此时

$$(\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是此时方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 3+3c \\ x_2 = -5-10c \\ x_3 = 3+6c \\ x_4 = c, \qquad c \in R \end{cases}$$

或写成向量形式...

(接上页)也可写成向量形式:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in R$$

注: 观察以上通解的结构, 会发现:

向量$(3, -5, 3, 0)^T$本身“恰好”也是这个线性方程组的解;

向量$(3, -10, 6, 1)^T$“恰好”是这个方程组对应的齐次线性方程组的解.

以上现象并非巧合. 我们以后将讨论这一问题.

例4 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2-3x_3=0 \end{cases}$ 何时有非零解？

解 由于

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda-4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

注意：接下来，一般不做：$r_3-\dfrac{1}{\lambda-4}r_2$，除非确定$\lambda \neq 4$.

$$\overset{\substack{r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_3-(\lambda-4)r_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2\lambda-5 \end{pmatrix}$$

所以，$\lambda=5/2$ 时，齐次线性方程组有非零解.

§2 线性方程组解的结构

当线性方程组有解时，解不一定是唯一的．那么，线性方程组解之间有什么关系？这就是解的结构问题．

一、齐次线性方程组解的结构

齐次线性方程组如果有非零解，那么一定有无穷多解．为了讨论齐次线性方程组解的结构，先介绍齐次线性方程组解的两个性质．

性质4.1 设ξ_1, ξ_2是齐次线性方程组$Ax=0$的两个解向量，则$\xi_1+\xi_2$也是齐次线性方程组$Ax=0$的解向量.

证明思路 由$A\xi_1=0$, $A\xi_2=0 \Rightarrow A(\xi_1+\xi_2)=0$.

性质4.2 设ξ是齐次线性方程组$Ax=0$的解向量，k是任意常数，则$k\xi$也是齐次线性方程组$Ax=0$的解向量.

证明思路 由$A\xi=0 \Rightarrow A(k\xi)=0$.

由此可知：若ξ_1, ξ_2,…, ξ_s都是齐次线性方程组$Ax=0$的解向量，则$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_s\xi_s$也是方程组$Ax=0$的解向量.

若用S表示n元齐次线性方程组$Ax=0$的解向量组成的集合，则由性质4.1和性质4.2可得：

1. 如果$\xi_1, \xi_2 \in S$，则$\xi_1+\xi_2 \in S$；
2. 如果$\xi \in S$, $k \in R$，则$k\xi \in S$.

也即：集合S对向量的线性运算是封闭的.

定义4.1 设$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$是齐次线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$的一组解向量，如果满足

1. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$线性无关；
2. $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$的任意解都可由$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$线性表示，

则称$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$是齐次线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$的一个基础解系.

可见，齐次线性方程组的基础解系，实质上就是其解集合S的极大无关组. 所以，基础解系一般是不唯一的.

如果$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$是齐次线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$的一个基础解系，则此方程组的所有解(即通解)可表示为：

$$\mathbf{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_s\xi_s,$$

其中，$k_1, k_2, \ldots, k_s$为任意常数.

也即：$S=\{ k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_s\xi_s \mid k_1, k_2, \ldots, k_s\text{为任意常数}\}$.

问题1: 任意n元齐次线性方程组$Ax=0$是否必有基础解系？

问题2: 满足何种条件的n元齐次线性方程组$Ax=0$有基础解系？

问题3: 当n元齐次线性方程组$Ax=0$有基础解系时，基础解系含有多少个解向量?

问题4: 当n元齐次线性方程组$Ax=0$有基础解系时，如何求基础解系?

关于以上诸问题，以下的定理给出了结论.

定理4.4 对n元齐次线性方程组**Ax=0**，如果R(**A**)=r<n，则它有基础解系，且基础解系含有n-r个解向量.

证明 由于R(**A**)=r，不妨设矩阵**A**做初等行变换变成如下行最简形矩阵

$$\mathbf{A}\overset{\text{行变换}}{\sim}\begin{array}{c}\overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \cdots\quad 0}}^{\text{r列}}\hphantom{\quad c_{1,r+1}\quad \cdots\quad c_{1,n}}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{r行}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

于是得到同解的齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n \\
x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

将$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$分别取值为

$$
\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
$$

共取了n-r个向量

思考1: 为啥这么取?

思考2: 其他取法?

代入到(4.5)式，依次(对应)可得(n-r个) $x_1, x_2, \ldots, x_r$的值

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \begin{pmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \end{pmatrix},
$$

于是得到方程组(4.5)(也就是**Ax=0**)的n-r个解向量：

$$
\xi_1 = \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},
$$

显然，$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

设 $\xi=(t_1, t_2, \ldots, t_r, t_{r+1}, t_{r+2}, \ldots, t_n)^T$ 是(4.5)的任一解，则

$t_{r+1}\xi_1+t_{r+2}\xi_2+\ldots+t_n\xi_{n-r}-\xi$ 也是(4.5)的一个解，

而且

$$t_{r+1}\xi_1+t_{r+2}\xi_2+\ldots+t_n\xi_{n-r}-\xi=(d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, 0, \ldots, 0)^T. \quad (*)$$

$d_1, d_2, \ldots, d_r$ 是一些数，后面会考虑其取值情况.

由方程组(4.5)

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \end{cases} \quad (4.5)$$

可得: $d_1=d_2=\ldots=d_r=0$，于是由(*)式可得

$$t_{r+1}\xi_1+t_{r+2}\xi_2+\ldots+t_n\xi_{n-r}-\xi=\mathbf{0},$$

也就是

$$\xi = t_{r+1}\xi_1+t_{r+2}\xi_2+\ldots+t_n\xi_{n-r}.$$

所以，ξ能由$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$线性表示.

综上所述，可知$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$是齐次线性方程组**Ax=0**的一个基础解系.

证毕.

注：以上证明的第一部分给出了构造齐次线性方程组**Ax=0**的(一个)基础解系$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$的一个方法.

例5 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-3x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+4x_2+x_3-2x_4+5x_5=0 \\ 4x_1+8x_2-3x_3-6x_4-x_5=0 \\ x_1+2x_2-3x_3-x_4-8x_5=0 \end{cases}$$

的一个基础解系和通解.

解 由于

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 5 \\ 4 & 8 & -3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -8 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-4r_1 \\ r_4-r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_1+r_2 \\ r_3-3r_2 \\ r_4+2r_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -28 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_4+r_3 \\ r_3 \div(-14) \\ r_1-3r_3 \\ r_2-6r_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见R($\mathbf{A}$)=3，故基础解系含有2个解向量，且原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_5=0 \\ x_3+3x_5=0 \\ x_4-2x_5=0 \end{cases} ,即 \begin{cases} x_1=-2x_2+x_5 \\ x_3=-3x_5 \\ x_4=2x_5 \end{cases}$$

分别取

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此……

可得方程组的基础解系:

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\2\\1\end{pmatrix}.$$

所以，方程组的通解是: $\mathbf{x}=c_1\xi_1+c_2\xi_2$，其中 c_1, c_2 是任意常数.

注意: 此题也可以直接由方程组:

$$\begin{cases} x_1=-2x_2+x_5 \\ x_3=-3x_5 \\ x_4=2x_5 \end{cases}$$

得解:

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = -3c_2 \\ x_4 = 2c_2 \\ x_5 = c_2, \quad c_1, c_2 \in R \end{cases}$$

写成向量形式就是:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in R$$

例6 设3×5矩阵**A**的秩R(**A**)=2，且满足**AB**=**O**. 求齐次线性方程组**Ax**=**0**的通解. 其中

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&2\\0&0&1\\2&4&5\end{pmatrix}$$

解 由已知可得：

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix}=0,\quad A\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\\4\end{pmatrix}=0,\quad A\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\\5\end{pmatrix}=0.$$

所以，

$$\xi_1=(1, 0, 1, 0, 2)^T,\ \ \xi_2=(0, 1, 3, 0, 4)^T,\ \ \xi_3=(0, 0, 2, 1, 5)^T$$

是$\mathbf{Ax=0}$的三个解向量，且ξ_1, ξ_2, ξ_3线性无关.

又由于$R(\mathbf{A})=2$，所以$\mathbf{Ax=0}$的基础解系含有三个向量.

因此，ξ_1, ξ_2, ξ_3就是$\mathbf{Ax=0}$的一个基础解系，

故此齐次线性方程组的通解为：

$$\mathbf{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3,\ \text{其中}k_1, k_2, k_3\text{是任意常数.}$$

自修：P84：例4.5，P83：例4.4.

二　非齐次线性方程组解的结构

设

$$\mathbf{Ax}=\beta \tag{4.6}$$

是非齐次线性方程组, 则称齐次线性方程组

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{0} \tag{4.7}$$

为(4.6)对应的齐次线性方程组, 或称为(4.6)的导出组.

非齐次线性方程组有解时, 其解具有如下性质:

性质4.3 非齐次线性方程组$Ax=\beta$的任意两个解的差是它的导出组$Ax=0$的解.

证明思路 由$A\eta_1=\beta$, $A\eta_2=\beta \Rightarrow A(\eta_1-\eta_2)=0$.

性质4.4 非齐次线性方程组$Ax=\beta$的一个解与其导出组$Ax=0$的一个解之和仍是方程组$Ax=\beta$的解.

证明思路 由$A\eta=\beta$, $A\xi=0 \Rightarrow A(\eta+\xi)=\beta$.

性质4.5 如果η_0是非齐次线性方程组$Ax=\beta$的某个解,那么方程组$Ax=\beta$的任意解η都可以表示为

$$\eta=\eta_0+\xi,$$

其中ξ是导出组 $Ax=0$的一个解.

证明思路 只要取$\xi=\eta-\eta_0$,……

利用性质4.4和性质4.5可得如下非齐次线性方程组解的结构

定理4.5 对n元非齐次线性方程组$\mathbf{A}x=\beta$，设$R(\mathbf{A} \mid \beta)=R(\mathbf{A})=r$. 若$\eta_0$是它的某个解，$\xi_1$，$\xi_2$，…，$\xi_{n-r}$是对应的齐次线性方程组$\mathbf{A}x=\mathbf{0}$的一个基础解系，则线性方程组$\mathbf{A}x=\beta$的全部解为

$$\eta_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2+\dots+c_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中c_1, c_2, …, c_{n-r}是任意常数.

注1: 上式中的全部解$\eta_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2+\dots+c_{n-r}\xi_{n-r}$称为非齐次线性方程组$\mathbf{A}x=\beta$的通解(或一般解).

注2: 称η_0为非齐次线性方程组$\mathbf{A}x=\beta$的一个特解.

例7 问λ为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-3x_4=1 \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=2 \\ 3x_1-4x_2+x_3+x_4=\lambda \end{cases}$$

有解？并(在线性方程组有解时)求此线性方程组的通解.

解 由于

$$(A\vdots\beta)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_1+2r_2 \\ r_3-2r_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$(A \vdots \beta) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

可见, $\lambda = 3$时, $R(\mathbf{A} \vdots \beta) = R(\mathbf{A}) = 2$, 方程组$\mathbf{Ax}=\beta$有解. 且有同解方程

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 7x_4 + 1 \\ x_2 = x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

取$x_3=x_4=0$, 得方程组$\mathbf{Ax}=\beta$的一个特解为: $\eta_0=(1, 0, 0, 0)^T$.

导出组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系为:$\xi_1=(1, 1, 1, 0)^T$, $\xi_2=(-7, -5, 0, 1)^T$.

所以, 线性方程组$\mathbf{Ax}=\beta$的通解为:

$$\mathbf{x}=\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2,\ k_1, k_2 \in R.$$

注意此处为齐次方程组的解, 易写错.

注：此题的另一解法：当λ=3时，也可以由同解方程

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 7x_4 + 1 \\ x_2 = x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

直接得方程组的通解：

$$\begin{cases} x_1 = k_1 - 7k_2 + 1 \\ x_2 = k_1 - 5k_2 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2, \quad k_1, k_2 \in R \end{cases}$$

写成向量形式就是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in R$$

其中, $\boldsymbol{\eta}_0=(1, 0, 0, 0)^T$是方程组$\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的一个特解;

而$\boldsymbol{\xi}_1=(1, 1, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{\xi}_2=(-7, -5, 0, 1)^T$是齐次方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一个基础解系.

例8 设列向量α_1, α_2线性无关，且有 $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_4=\alpha_1-\alpha_2$, $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4$. 若$A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$，求线性方程组$Ax=\beta$的通解.

解 由已知可得$R(A)=2$，所以$Ax=0$的基础解系包含4-2个解向量，也即两个解向量.

又由于$Ax=\beta$可写成: $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$,

于是，$\eta_0=(1, 2, 3, 4)^T$是方程组$Ax=\beta$的一个特解;

导出组$Ax=0$也即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$,

由题设条件$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_4=\alpha_1-\alpha_2$, 可得

$$2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-0\alpha_4=0, \quad \alpha_1-\alpha_2-0\alpha_3-\alpha_4=0,$$

因此$\xi_1=(2,1,-1,0)^T, \xi_2=(1,-1,0,-1)^T$是导出组的一个基础解系.

所以，方程组$Ax=\beta$的通解为: $x=\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2$, $k_1, k_2\in R$.

§4 向量空间

如果齐次线性方程组有非零解，那么解集合S必含有无穷多个解向量．但只要能找到齐次线性方程组的一个基础解系，集合S就可以表示成基础解系的所有线性组合．这就是向量空间的基本性质．

定义4.2 设V是非空的n维向量集合，如果集合V对向量的加法和数乘运算是封闭的，则称集合V是向量空间．

所谓"集合V对向量的加法和数乘运算是封闭的"，是指：

1、如果$\alpha, \beta \in V$，则$\alpha+\beta \in V$；

2、如果$\alpha \in V, k \in R$，则$k\alpha \in V$.

例如，由所有n维向量组成的集合R^n对向量的线性运算封闭．所以，R^n是一个向量空间．

齐次线性方程组**Ax=0**的解集合S对向量的线性运算封闭．所以S是一个向量空间，称为齐次线性方程组的解空间．

非齐次线性方程组**Ax=b**的两个解的和不是解，故其解集合U不是向量空间．

由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$的所有线性组合组成的集合，即

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid k_i\in R\}$$

对向量的线性运算封闭，是一个向量空间，称为由向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$生成(或称张成的)的向量空间．

例9 问集合

$$V_1=\{(0,a_2,a_3,\cdots,a_n)\mid a_2,a_3,\cdots,a_n\in R\}$$

$$V_2=\{(1,a_2,a_3,\cdots,a_n)\mid a_2,a_3,\cdots,a_n\in R\}$$

是不是向量空间？

解 $\forall\boldsymbol{\alpha}=(0, a_2, a_3,\ldots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(0, b_2, b_3,\ldots, b_n)\in \mathrm{V}_1$, $k\in\mathrm{R}$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(0, a_2+b_2,\ a_3+b_3,\ \ldots, a_n+b_n)\in \mathrm{V}_1,$$

$$k\boldsymbol{\alpha}=(0, ka_2,\ ka_3,\ \ldots, ka_n)\in \mathrm{V}_1,$$

所以，V_1是向量空间.

由于对$\boldsymbol{\alpha}=(1, a_2, a_3,\ldots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(1, b_2, b_3,\ldots, b_n)\in \mathrm{V}_2$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(2, a_2+b_2,\ a_3+b_3,\ \ldots, a_n+b_n)\notin \mathrm{V}_2,$$

所以，V_2不是向量空间.

定义4.3 设有向量空间V和U，若V⊂U，则称V是U的子空间.

易见，由n维向量组成的向量空间都是R^n的子空间.

定义4.4 在向量空间V中，如果有r个向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性无关，且V中任意向量都可以由它们线性表示，那么称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$为V的一个基，$r$称为V的维数，V称为$r$维向量空间.

由正交向量组构成的基称为向量空间的正交基，由规范正交向量组构成的基称为向量空间的规范正交基.

如果向量空间V没有基，那么V的维数是0.

0维向量空间仅含零向量.

例如，n维标准单位向量组$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2,\ldots$，$\mathbf{e}_n$就是向量空间R^n的一个规范正交基，所以R^n是n维向量空间．由向量组的等价性, 任意n个线性无关的n维向量都是R^n的一个基．

n元齐次线性方程组$\mathbf{Ax=0}$的基础解系就是方程组解空间S的一个基. 如果系数矩阵$\mathbf{A}$的秩为r, 那么$\mathbf{S}$是$n-r$维向量空间．

向量组α_1，$\alpha_2,\ldots$，α_m的极大线性无关向量组就是向量空间$L(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_m)$的一个基，向量组$\alpha_1$，$\alpha_2,\ldots$，$\alpha_m$的秩就是向量空间$L(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_m)$的维数.

向量空间$V_1=\{(0, a_2, a_3,\ldots, a_n)^{\mathrm{T}}\,|a_i\in \mathrm{R}\}$的一个基可取为$\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3,\ldots, \mathbf{e}_n$，所以向量空间$V_1$是$n-1$维向量空间.

如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$是向量空间V的一个基，则向量空间V可表示为：

$$V=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r \mid k_1, k_2, \ldots, k_r \in R\}$$

即：V是由基所生成的向量空间．这就比较清晰地显示出向量空间V的构造．

如果向量空间V是R^n的子空间，则V的维数不会超过n；而且，当V的维数为n时，一定有$V=R^n$.

定义4.5 如果在向量空间V中取定一个基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$，则V中任一向量α可表示为:

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_r\alpha_r,$$

称$(x_1, x_2, \ldots, x_r)^T$为向量α在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$下的坐标.

一般地，向量ξ在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的坐标为$(x_1, x_2, \ldots x_n)^T$，也可表示为：

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

可见，坐标是由向量及基的选取唯一确定的.

例10 求线性空间R^3中向量$\alpha=(2, -4, 0)^T$在基:

$$\eta_1=(1, 1, 1)^T,\ \eta_2=(1, 1, -1)^T,\ \eta_3=(1, -1, -1)^T$$

下的坐标.

只做初等行变换

解 由于

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1 & -4\\ 1 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

所以, $R(\eta_1, \eta_2, \eta_3)= 3$, 即$\eta_1, \eta_2, \eta_3$线性无关,

故η_1, η_2, η_3是向量空间R^3的一个基.

此外, 上式也表明方程组$x_1\eta_1+x_2\eta_2+x_2\eta_3 =\alpha$的解为

$$(x_1, x_2, x_3)^T = (1, -2, 3)^T.$$

所以, $\alpha = \eta_1 - 2\eta_2 + 3\eta_3$.

即，向量α在基η_1, η_2, η_3下的坐标是$(1, -2, 3)^T$.

也可以写成： $$\alpha = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$和$\beta_1, \beta_2, \beta_3$是线性空间$R^3$的两个基，设$\beta_i$在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的坐标为$(c_{1i}, c_{2i}, c_{3i})^T$, $(i=1, 2, 3)$，则有

$$\beta_i = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ c_{3i} \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3$$

则合起来就有：

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \qquad (4.7)$$

简记为

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C,$$

这里矩阵C称为由基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$到基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的过渡矩阵.

此过渡矩阵是可逆的(请思考原因). (4.7)式称为基变换公式.

如果由基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$到基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的过渡矩阵为$\mathbf{C}$, 也即

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\mathbf{C},$$

又, 对于向量ξ, 如果:

$$\xi\text{在基}\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\text{下的坐标为}\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)^T,$$

$$\xi\text{在基}\beta_1, \beta_2, \beta_3\text{下的坐标为}\mathbf{y}=(y_1, y_2, y_3)^T,$$

即: $\xi=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\mathbf{x} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\mathbf{y}$.

则有坐标变换公式:

$$\mathbf{x}=\mathbf{C}\mathbf{y}.$$

例11 求向量空间R^3中由基$\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(-1,1,0)^T$, $\alpha_3=(-1,-1,1)^T$到基$\mathbf{e}_1=(1,0,0)^T$, $\mathbf{e}_2=(0,1,0)^T$, $\mathbf{e}_3=(0,0,1)^T$的过渡矩阵，并求向量$\beta=(1,2,3)^T$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标.

解 设由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$的过渡矩阵为$\mathbf{C}$，由于

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mathbf{C}=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=\mathbf{E},$$

所以，过渡矩阵为：

$$\mathbf{C}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

由于β在基$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$下的坐标为$\mathbf{y}=(1,2,3)^T$，所以$\beta$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为：

$$\mathbf{x}=\mathbf{Cy}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\5\\3\end{pmatrix}$$

思考题: 由基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$到基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的过渡矩阵C为什么必然是可逆矩阵?