第十四章 相对论

§ 14-3 狭义相对论的基本原理、洛伦兹变换

重点掌握：

1、狭义相对论基本原理
2、洛伦兹变换
3、相对论速度变换公式

一、狭义相对论的两个基本原理（重点）

1905年，26岁的爱因斯坦，不固守传统时空观和经典力学的观念，在对实验结果和前人工作进行仔细分析和研究的基础上，从一个全新的角度考虑所有问题，（《论动体的电动力学》）提出了狭义相对论的两个基本假设：

1、相对性原理 Relativity Principle

在所有惯性系中，一切物理定律的表示都是完全相同的，即具有完全相同的数学表达式，即在研究物理规律时，一切惯性系都是等价的。

2、光速不变原理 Principle of Constancy of Light Velocity

在所有惯性系中，真空中光沿各方向传播速率都相等，都等于一个恒量C，与光源和观察者的速度无关。

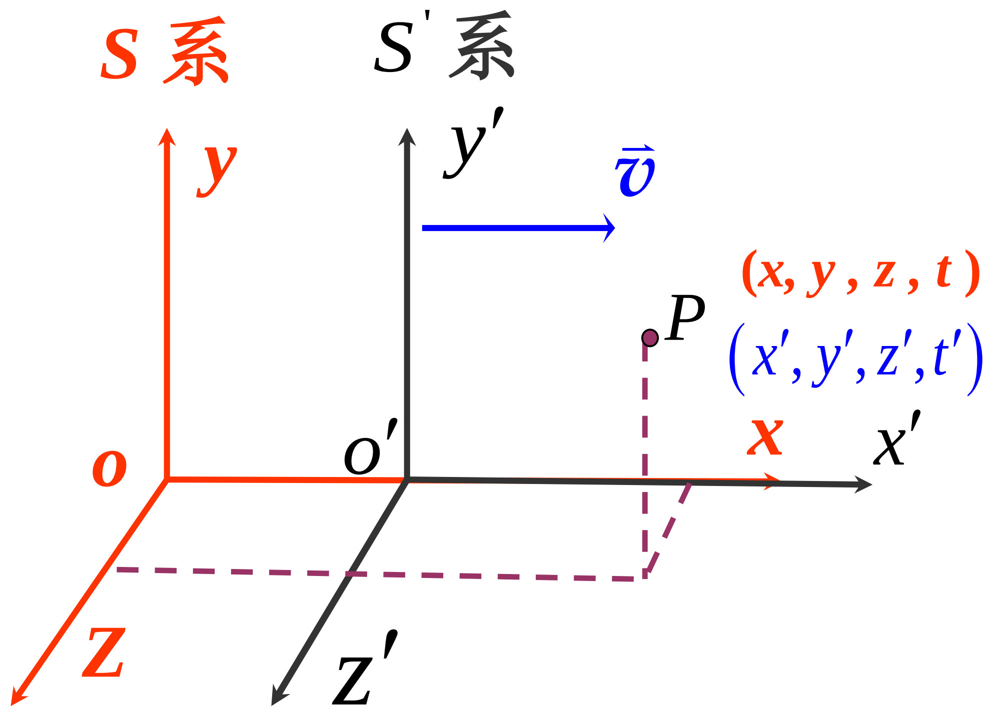
——光速具有各向同性，与光源运动无关，与观察者所处惯性系无关。

二、洛伦兹变换 Lorentz Transformation (重点)

当 $t=t'=0$ 时两坐标系的原点o与 o' 相重合

某事件在 S 系中的时空坐标为:（x, y, z, t）

同一事件在 S'系中的时空坐标为: (x', y', z', t')

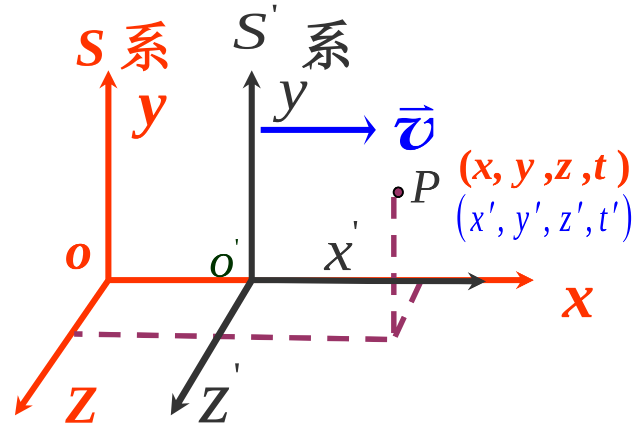


二、洛伦兹变换

当 $t = t' = 0$ 时两坐标系的原点 o 与 o' 相重合

某事件在 S 系中的时空坐标为（x, y, z, t）

同一事件在 S 系中的时空坐标为 (x', y', z', t')



正变换

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

→ 逆变换

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

洛伦兹变换

二、洛伦兹变换

令: $\beta = \dfrac{v}{c}$, 则:

正变换

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

逆变换

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \dfrac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

二、洛伦兹变换

$$\beta = \frac{v}{c}$$

正变换

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

逆变换

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

当 $v << c$ 时，
$\beta=(v/c) \rightarrow 0$，可得：

伽利略变换

正变换

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

逆变换

$$x = x' + vt'$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = t'$$

二、洛伦兹变换

结论： 在速度远小于光速 c 时，相对论结论与牛顿力学结论相同。

宇宙速度的数量级： $10^4\,\mathbf{m\cdot s^{-1}} \Rightarrow v^2/c^2 \to 10^{-8}$

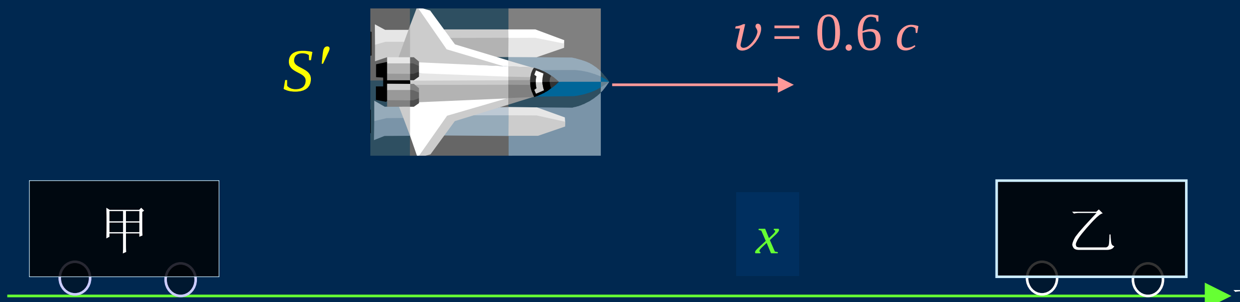
在宏观领域中用牛顿力学处理问题是足够精确了。

如果 $v > c$ ，则 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 为虚数

真空中的光速是一切客观实体的速度极限。

例1： 北京上海相距1000 km，北京站的甲车先于上海站的乙车1.0×10^{-3} s 发车。现有一艘飞船沿从北京到上海的方向从高空掠过，速率恒为 $v=0.6\,c$ 。

求 飞船系中测得两车发车的时间间隔，哪一列先开?



地面S系：事件1 (x_1， t_1) 事件2 (x_2， t_2)

解 • 地面S系: $\Delta x = x_2 - x_1 = 1000\ \text{km}$， $\Delta t = t_2 - t_1 = 1.0\times10^{-3}\ \text{s}$

• 飞船S'系: $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \dfrac{\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = -1.25\times10^{-3}\ \text{s}$

两独立事件的时序时序颠倒

例 2： 在 S 系中观察到两个事件同时发生在 x 轴上，其空间间隔是 1×10^3 m，在 S `系中观察到这两个事件的空间间隔是 $2\times10^3$ m，求在 $S$ `系中这两个事件的时间间隔。

正变换

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y'=y$$

$$z'=z$$

$$t'=\frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

解：

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta x'=x_2'-x_1'=\frac{(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}\Rightarrow\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{t-\frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta t'=t_2'-t_1'=\frac{(t_2-t_1)-\frac{\beta}{c}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{0-\frac{\beta}{c}\times1\times10^3}{\sqrt{1-\beta^2}}=-5.77\times10^{-6}\,s$$

例 3： 在 S 系中观察到两个事件发生在空间同一地点，第二事件发生在第一事件以后2s，在另一相对S 系运动的 S`系中观察到第二事件是在第一事件3s之后发生的，求在 $S$`系中这两个事件的空间间隔。

解：

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

正变换

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow 3 = \frac{2 - \frac{v}{c^2} \times 0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\boxed{\Delta x' = x_2' - x_1' = \frac{0 - c\beta \times 2}{\sqrt{1-\beta^2}} = -3\sqrt{5} \times 10^8 m}$$

三、相对论速度变换公式

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t'=\frac{t-\dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

设一质点**P**在空间运动，由速度的定义，从 **S** 和 S'系来看，其速度分别是：

S 系： $u_x=\dfrac{dx}{dt}$， $u_y=\dfrac{dy}{dt}$， $u_z=\dfrac{dz}{dt}$

S' 系： $u'_x=\dfrac{dx'}{dt'}$， $u'_y=\dfrac{dy'}{dt'}$， $u'_z=\dfrac{dz'}{dt'}$

$$dx'=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(dx-vdt),\qquad dt'=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(dt-\frac{v}{c^2}dx),$$

$$u'_x=\frac{dx'}{dt'}=\frac{dx-vdt}{dt-\dfrac{v}{c^2}dx}\longrightarrow \boxed{u'_x=\frac{u_x-v}{1-\dfrac{v}{c^2}u_x}}$$

三、相对论速度变换公式

问 题

当：$v << c$ 时，

情况如何

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

同理可得

$$u'_y = \frac{u_y}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \sqrt{1 - \beta^2}$$

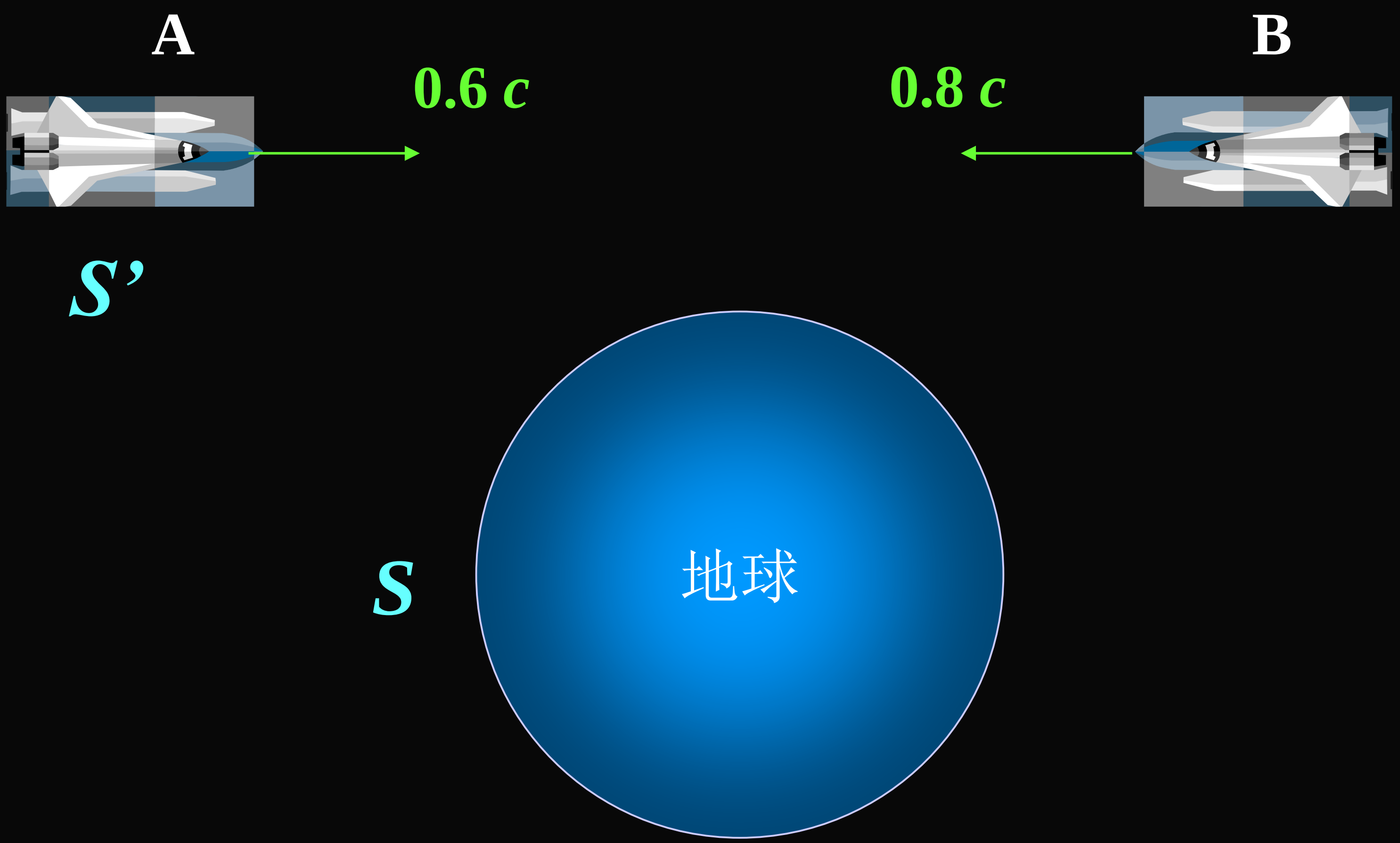
三、相对论速度变换公式

正变换	逆变换
$u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x}$	$u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x}$
$u'_y = \sqrt{1-\beta^2}\,\dfrac{u_y}{\left(1 - \dfrac{v}{c^2} u_x\right)}$	$u_y = \sqrt{1-\beta^2}\,\dfrac{u'_y}{\left(1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x\right)}$
$u'_z = \sqrt{1-\beta^2}\,\dfrac{u_z}{\left(1 - \dfrac{v}{c^2} u_x\right)}$	$u_z = \sqrt{1-\beta^2}\,\dfrac{u'_z}{\left(1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x\right)}$

例 4：

飞船 *A*、*B* 相对于地面分别以 0.6 *c* 和 0.8 *c* 的速度相向而行。

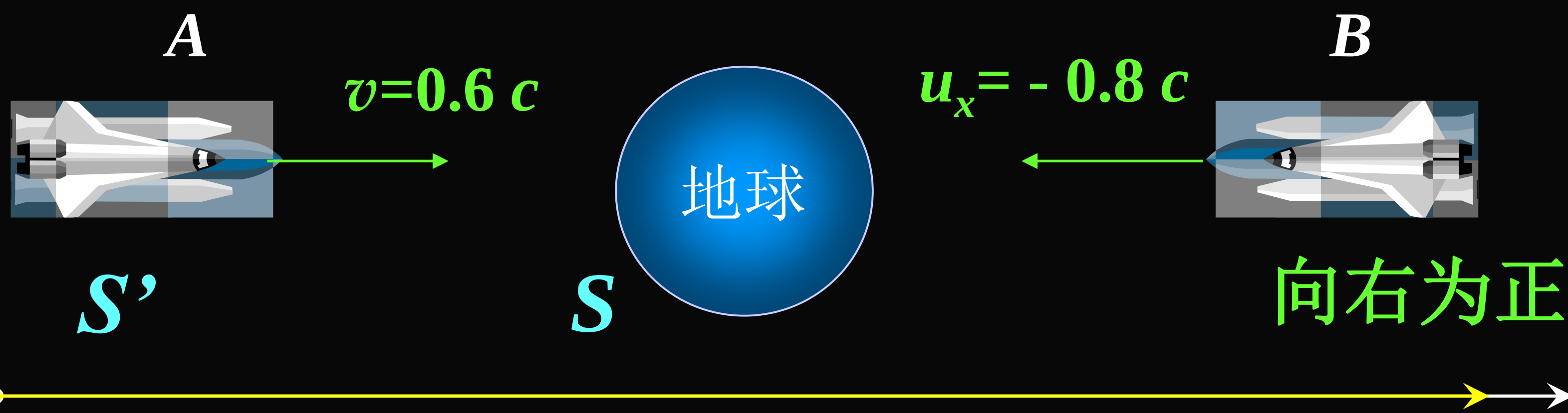
求：飞船 *A* 上测得飞船 *B* 的速度。



例 4:

飞船 A , B 相对于地面分别以 $0.6\ c$ 和 $0.8\ c$ 的速度相向而行。

求：飞船 A 上测得飞船 B 的速度。



解：地面为 S 系，飞船 A 为 S' 系 。

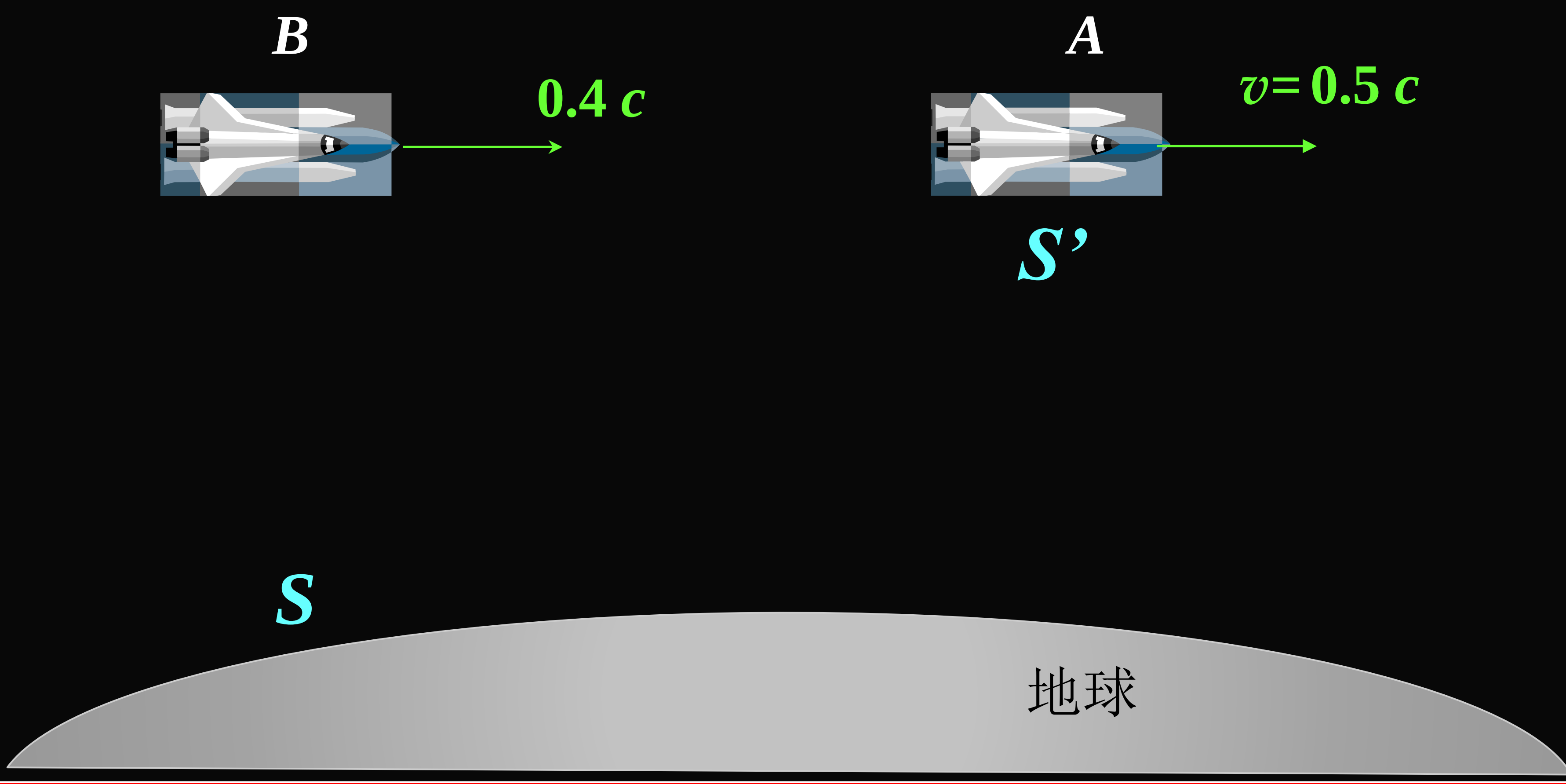
S' 系(飞船 A)测得飞船 B 的速度为

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{-0.8c-0.6c}{1+0.8\times0.6c/c^2}=-0.94c$$

例 5：飞船 A 相对于地面以速率 $0.5\,c$ 直线飞行，

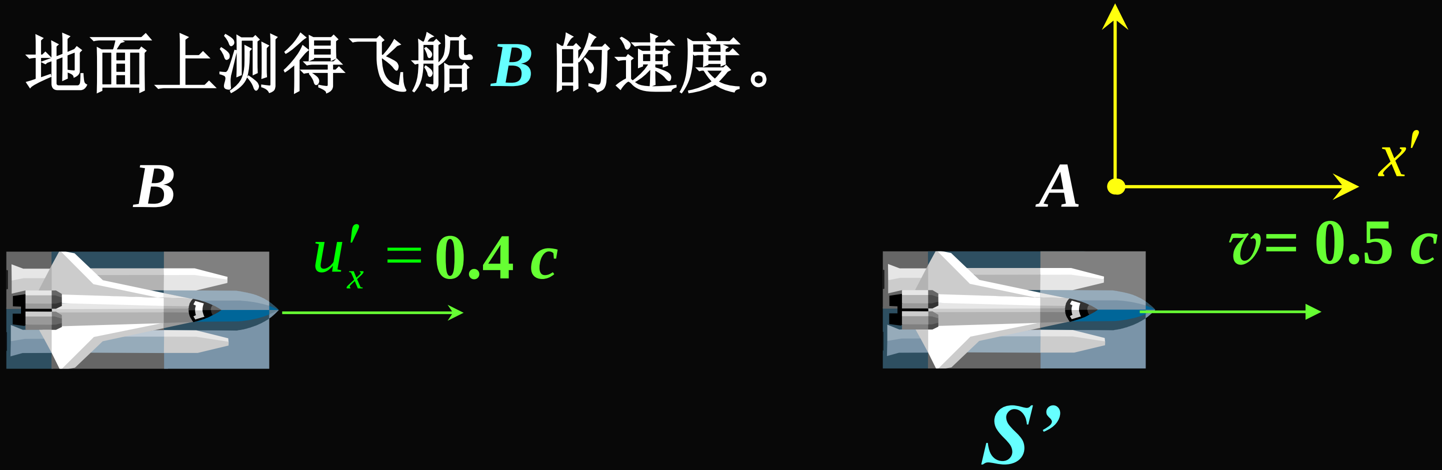
飞船 A 中测得飞船 B 以 $0.4\,c$ 的速率尾随而来，

求：地面上测得飞船 B 的速度。



例 5： 飞船 A 相对于地面以速率 $0.5\,c$ 直线飞行，飞船 A 中测得飞船 B 以 $0.4\,c$ 的速率尾随而来，

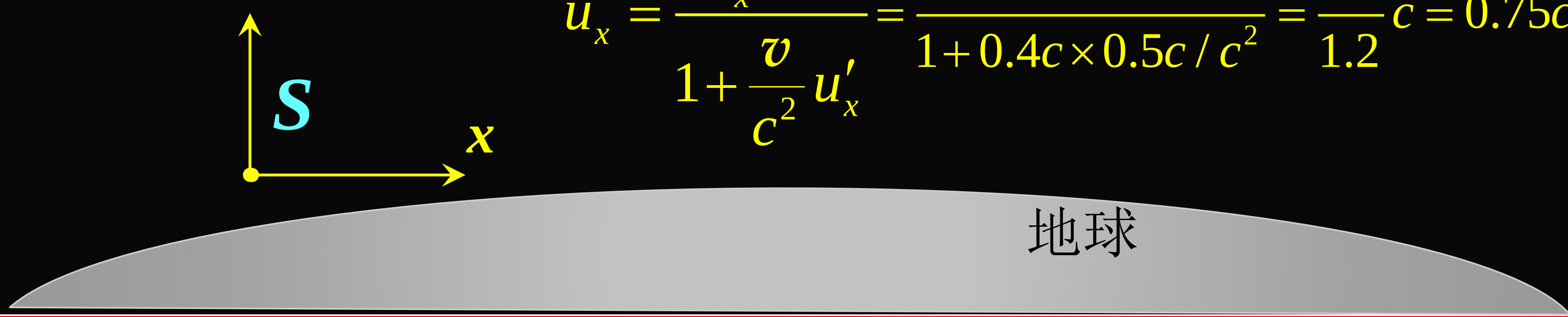
求： 地面上测得飞船 B 的速度。



解： 飞船 A 为 S' 系，测得飞船 B 速度： $u'_x = 0.4c$

地面为 S 系，测得飞船 B 的速度为：

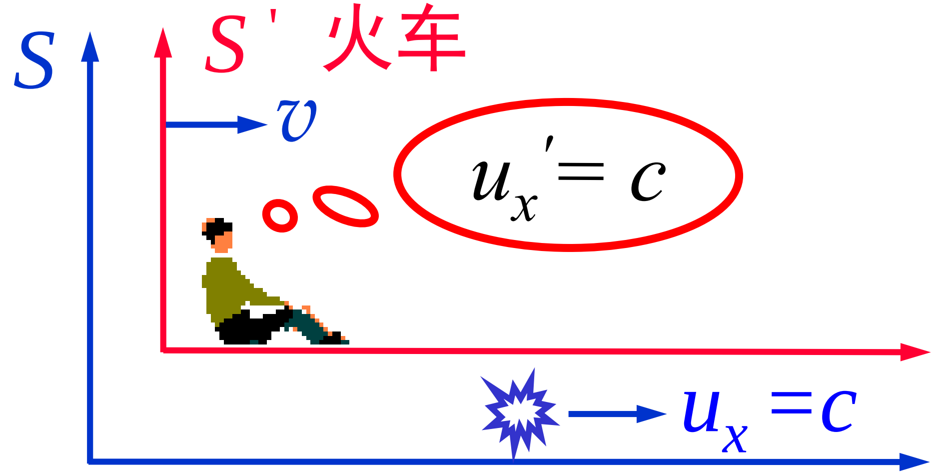
$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} = \frac{0.4c + 0.5c}{1 + 0.4c \times 0.5c / c^2} = \frac{0.9}{1.2} c = 0.75c$$



三、相对论速度变换公式

【例】追光实验

S : $u_x = c$



S' : $u'_x = ?$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c^2} c} = c$$

结论:

1) 爱因斯坦的理论是牛顿理论的发展;

2) 当 $v \ll c$，还原为伽利略变换;

绝对时空观是低速情况下，相对论时空观的近似。

3) 若 $v > c$，洛伦兹变换无意义。

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$ 出现虚数！ 速度有极限！！！

光速是一切物质运动速度的最大极限！