线性代数

线性代数是高等学校理工科各专业和经济管理类专业的一门重要基础课，也是在自然科学和工程技术各个领域中广泛应用的数学工具。

它不但是学习数值分析、最优化方法、离散数学和微分方程等数学课程的基础，也广泛地应用于工程学、计算机科学、物理学、生物学、经济学、统计学、力学、信号与信号处理、系统控制、通信、航空等学科和领域。

随着现代科技的飞速发展和计算机的广泛应用，线性代数在理论和应用上的重要性更加突出

第一章 行列式

行列式起源于线性方程组的求解问题, 早在1693年德国数学家Leibniz就使用了行列式, 1750年Cramer建立了求解线性方程组的行列式基本公式. 现在, 行列式已经是数学中的一个基本概念.

本章主要介绍n阶行列式的定义、性质及其计算方法, 最后介绍用n阶行列式求解n元线性方程组的Cramer法则. 本章的重点内容是行列式的计算, 主要是利用行列式性质计算行列式。

§1　二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式：

二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1.1)$$

分别消去变量x_2、x_1可得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21};$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，求得方程组(1.1)的解为：

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

称$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$为数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$ 所确定的**二阶行列式**，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ ，即：$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

上述二阶行列式的定义可用***对角线法则***记忆。于是有：

$$b_1 a_{22} - a_{12} b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11} b_2 - b_1 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

若记：
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} \mathrm{b}_1 & a_{12} \\ \mathrm{b}_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \mathrm{b}_1 \\ a_{21} & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}$$

则(1.1)的解为：$x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \quad x_2 = \dfrac{D_2}{D}$

例如：$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5\times 3 - 2\times 4 = 15 - 8 = 7$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2\times 6 - (-1)\times 3 = 12 + 3 = 15$$

例1 求解二元线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$$

解 由于

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 9 = -11 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -22 \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 11$$

因此 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{-22}{-11} = 2$， $x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{11}{-11} = -1$。

二、三阶行列式

类似地，设有9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad (1.2)$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1.3)$$

(1.3)式称为数表(1.2)所确定的**三阶行列式**.

例2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解 D= 12 – 6+12+36+12+2=68

注: 行列式是数(常数，或用符号表达)

例3 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & x^2 & 16 \\ 2 & x & 4 \end{vmatrix}=0$$

解 方程左端的三阶行列式

$D=4x^2+32+4x-16x-16-2x^2 \quad =2x^2-12x+16$

即 $2x^2-12x+16=0$， 解得 $x=2$ 或 $x=4$.

对三元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

若记：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则当系数行列式D≠0时，仍然有解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

我们会在以后证明此结论

§2 n阶行列式的定义

特别的，只由一个数a_{11}排成一行一列的表也可以定义

一阶行列式：

$$|a_{11}| = a_{11}$$

三阶行列式可由二阶行列式定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

同样的，二阶行列式也可以由一阶行列式定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}|$$

此处符号$|\,.\,|$代表行列式，而不是绝对值.

定义1.1 设有n^2个数，排成n行n列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

注意每个a_{ij}的标号规则

左侧：行标

右侧：列标

此表对应的如下形式的一个数值：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

称为此表对应的n阶行列式. 其中

a_{ij}(i=1, 2,…, n, j=1, 2,…, n)称为行列式的第i行，第j列元素.

A_{ij} (i=1, 2,…, n, j=1, 2,…, n)是……(见下页)

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}\ (j=1,2,\ldots,n),$$

而M_{1j}为D中划掉第一行和第j列的所有元素后，按原顺序排成的n−1阶行列式，即当

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}\text{时，}$$

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{2,1} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

并称M_{1j}是D的元素a_{1j}的余子式，A_{1j}是元素a_{1j}的代数余子式.

例如，对行列式：$D=\begin{vmatrix}3 & 4 & 1\\2 & -2 & 0\\1 & 4 & 3\end{vmatrix}$

有 $M_{12}=\begin{vmatrix}3 & 4 & 1\\2 & -2 & 0\\1 & 4 & 3\end{vmatrix}=-32$ ， $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=32.$

注意：对于n阶行列式($n\geq 4$)，所谓的“对角线法则”一般不再成立.

例4 计算n阶对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & & & \\ & a_{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_1 \end{vmatrix}$$

解 按定义有

$$D_n = a_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & \\ & a_{n-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_1 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_2 & \\ & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1$$

$$= a_n D_{n-1} = a_n a_{n-1} D_{n-2} = \cdots = a_n a_{n-1} \cdots a_3 D_2 = a_n a_{n-1} \cdots a_1$$

即，对角行列式等于对角线元素的乘积.

例5　计算n阶下三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　按定义有

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

即，下三角行列式等于对角线元素的乘积。

例6 计算n阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} & & & b_n \\ & & b_{n-1} & \\ & \iddots & & \\ b_1 & & & \end{vmatrix}$

解 按定义有

$$D_n = (-1)^{1+n} b_n \begin{vmatrix} & & b_{n-1} \\ & b_{n-2} & \\ \iddots & & \\ b_1 & & \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} & b_2 \\ b_1 & \end{vmatrix} = -b_2 b_1$$

$$= (-1)^{1+n} b_n D_{n-1} = (-1)^{n-1} b_n D_{n-1} = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} b_n b_{n-1} D_{n-2}$$

$$= \cdots = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)^2 b_n b_{n-1}\cdots b_3 D_2$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_n b_{n-1}\cdots b_1$$

§3 行列式的性质

给定的行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，称相应的行列式

$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为D的转置行列式，也记为D′.

性质1 行列式与其转置行列式相等，即$D=D^T$.

由此性质可知，行列式中的行与列具有相等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列同样成立，反之亦然.

证明思路： 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D^{T}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

采用归纳法证明本命题．当阶数$n=1$和$n=2$时可验证命题成立．

以下假设此命题对阶数不超过$n-1$情形均成立，则对于阶数为n的情形，根据定义以及归纳假设，我们有

$$
\begin{aligned}
D^T = a_{11} &\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} & a_{42} & \dots & a_{n2} \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & a_{3n} & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
-a_{21} &\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & a_{42} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{33} & a_{43} & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{3n} & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
+a_{31} &\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{42} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{43} & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\
+ (-1)^{1+n} a_{n1} &\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n-1,2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n-1,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

A_{11}中不含a_{12}

$$D^T = a_{11}A_{11}$$

诸项中只有第一项含a_{11}

$$-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

转置

$$+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

转置

$$+(-1)^{1+n}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

转置

考察各项系数. 以下以含a_{12}的项为例来说明含a_{12}的项恰为$a_{12}A_{12}$. 事实上, 由前面推导可知, 含a_{12}的项为

$$-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+(-1)^{1+n}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$=-a_{21}a_{12}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+a_{31}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{n1}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}\{a_{21}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}-a_{31}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{n}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}\}$$

上一步的各行列式再次转置为这些蓝色行列式.

观察上述红色括号{ }中的内容，可知……

$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

上一步的行列式转置得到此蓝色行列式.

$$= -a_{12}\mathrm{M}_{12} = a_{12}\mathrm{A}_{12}.$$

同理，其他各项均有类似结果. 因此可得:

$$\mathrm{D}^{\mathrm{T}} = a_{11}\mathrm{A}_{11} + a_{12}\mathrm{A}_{12} + \cdots + a_{1n}\mathrm{A}_{1n} = \mathrm{D}.$$

证毕.

根据性质1，对每个行列式的行所成立的性质，对这个行列式的列也是成立的.

例7　计算n阶上三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　由性质1可得：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即，上三角行列式也等于对角线元素的乘积.

性质2 行列式可按任一行(列)展开，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

性质2也称为

行列式按行(按列)展开定理

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

$$(j=1,2,\cdots,n)$$

其中，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ (i, j = 1, 2,…,n)，而M_{ij}为D中划掉第i行和第j列的所有元素后，按原顺序排成的n − 1阶行列式. 称M_{ij}是元素a_{ij}的余子式(形状见下页), A_{ij}是a_{ij}的代数余子式.

当

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$时，

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

性质2的证明思路：

采用归纳法证明本命题. 当阶数n=2时可验证命题成立.

以下假设此命题对阶数不超过n-1情形均成立，考虑阶数为n的情形. 根据定义我们有

$$\mathrm{D} = a_{11}\mathrm{A}_{11} + a_{12}\mathrm{A}_{12} + \cdots + a_{1\mathrm{n}}\mathrm{A}_{1\mathrm{n}}$$

也即:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D} = {} & a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\mathrm{n}} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mathrm{n}2} & a_{\mathrm{n}3} & \dots & a_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix} \\
& +(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
& +(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\
& +(-1)^{1+\mathrm{n}}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

把上面n个n-1阶行列式M_{1j}都按第i-1行展开(按假设这是成立的)，并将含a_{i1}的项合并在一起，可证明其值恰好为$a_{i1}A_{i1}$.

以下我们将以i=2为例，说明含a_{21}的值恰为$a_{21}A_{21}$. 含a_{21}的项为

$$(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2} a_{12} a_{21} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3} a_{13} a_{21} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{1+n} a_{1n} a_{21} \begin{vmatrix} a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2} a_{21} \{ a_{12} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \}$$

$$= (-1)^{1+2}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2}a_{21}M_{21} = a_{21}A_{21}$$

类似地，可证明含a_{22}的项合并后其值等于$a_{22}A_{22}$,…，含a_{2n}的项合并后其值等于$a_{2n}A_{2n}$.

类似地，可证明每个含a_{i1}的项值恰好等于$a_{i1}A_{i1}$. 因此有：

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{2n}A_{2n} \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \end{aligned}$$

i为1到n之间的任意整数

证毕.

例8 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-3\times 6(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-3\times 6\times(3-10)=126$$

性质3 若行列式某行(列)有公因子，则可以按行(列)提取公因子，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注1: 当然也可以将公因子“塞回”到某一行(列).

注2: 一行(列)提一个因子，多行(列)提多个因子.

推论 若行列式D的某一行(列)元素全为零时，则D值为零.

性质4 行列式的拆行相加性. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注：类似地，行列式的拆列相加性也成立.

注意：一般只能“一次拆一行(列)”，而不能“一次拆多行(列)”.

性质5 若行列式的某两行(列)对应元素全相等，则该行列式为零.

即：如果行列式D的第k行与第l行元素成立关系：

$$a_{kj} = a_{lj},\ j=1, 2, \ldots, n,$$

则必有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.7}$$

证明思路：

采用归纳法证明本命题. 当阶数n=2时, 式(1.7)显然成立.

假设式(1.7)对于任意n-1阶行列式成立. 于是, 在n阶的情形下, 对行列式D按第i行展开 $(i \neq k, l)$, 得到

$$D= a_{i1} A_{i1}+ a_{i2} A_{i2}+\ldots+ a_{in} A_{in}.$$

由于每个$A_{ij} = (-1)^{j+i} M_{ji}$ (i=1, 2,…, n), 其中M_{ij}为n-1阶行列式且(由前面的归纳假设知)有两行对应元素完全相同, 因此

$$A_{ij} = 0.$$

所以D=0.

证毕.

推论1 若行列式D的某两行(列)元素对应成比例，则D=0.

推论2 设$D=|a_{ij}|_n$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = D\cdot\delta_{ij}$$

其中，$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$

即: D的任一行元素与本行元素的代数余子式乘积之和= D;
D的任一行元素与其它行元素的代数余子式乘积之和= 0.

证明思路: 当$i=j$时，由性质2可知

$$a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = D.$$

当$i\neq j$时，以下不妨假设$i<j$. 则有

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

$$= a_{i1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \quad a_{in}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它是A j1

第j行

它是A jn

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

反用性质4:

拆行相加性

由性质5

证毕.

推论3 设$D=|a_{ij}|_n$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = D\cdot\delta_{ij}$$

其中，$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

即: D的任一列元素与本列元素的代数余子式乘积之和= D;

D的任一列元素与其他列元素的代数余子式乘积之和= 0.

性质6 行列式某行元素的若干倍加到另一行的对应元素，所得行列式值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6对于列的操作也是成立的. 即：行列式某列元素的若干倍加到另一列的对应元素，所得行列式值不变.

性质6在很多行列式的计算中都有广泛的应用.

关于性质6的证明较容易. 可自修或见黑板.

性质7 若行列式两行(列)互换，则行列式只改变正负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (i \neq j)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明思路: 只证第一个等式. 并记等式左边的行列式为D, 等式右边的行列式为D_1. 下面证明$D= -D_1$.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质6

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}-a_{i1} & a_{j2}-a_{i2} & \cdots & a_{jn}-a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质6

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}-a_{i1} & a_{j2}-a_{i2} & \cdots & a_{jn}-a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质6

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{由性质3}}{=} -D_1.$$

证毕.

补充： 关于Laplace (拉普拉斯)展开定理的一些知识

设n阶行列式为 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

在行列式D中取定k个行：第 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 行；再取定k个列：第 $j_1, j_2, \ldots, j_k$ 列. 位于这些取定的行、列交叉点上的元素共有 k^2 个. 保持它们之间相互位置关系不变而构成的一个k阶行列式记为N, 该行列式称为D的一个k阶子式.

在行列式D中去掉上面取定的k个行及k个列，余下的n-k个行与n-k个列上的元素保持彼此相互位置关系不变而构成的n-k阶行列式M叫作N的余子式.

$A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M$ 称为N的代数余子式.

例：由行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\5 & 6 & 7 & 8\\0 & -1 & 0 & 4\\0 & 1 & 0 & 3\end{vmatrix}$$

的第1、3两行元素构成的所有二阶子式共有6个，分别为

$$N_1=\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{vmatrix},\ N_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 0\end{vmatrix},\ N_3=\begin{vmatrix}1 & 4\\0 & 4\end{vmatrix},$$

$$N_4=\begin{vmatrix}2 & 3\\-1 & 0\end{vmatrix},\ N_5=\begin{vmatrix}2 & 4\\-1 & 4\end{vmatrix},\ N_6=\begin{vmatrix}3 & 4\\0 & 4\end{vmatrix},$$

这些二阶子式对应的代数余子式分别为

$$A_1=(-1)^{(1+3)+(1+2)}\begin{vmatrix}7 & 8\\0 & 3\end{vmatrix},\ A_2=(-1)^{(1+3)+(1+3)}\begin{vmatrix}6 & 8\\1 & 3\end{vmatrix},$$

$$A_3=(-1)^{(1+3)+(1+4)}\begin{vmatrix}6 & 7\\1 & 0\end{vmatrix},\ A_4=(-1)^{(1+3)+(2+3)}\begin{vmatrix}5 & 8\\0 & 3\end{vmatrix},$$

$$A_5=(-1)^{(1+3)+(2+4)}\begin{vmatrix}5 & 7\\0 & 0\end{vmatrix},\ A_6=(-1)^{(1+3)+(3+4)}\begin{vmatrix}5 & 6\\0 & 1\end{vmatrix}.$$

性质8 (Laplace展开定理) 若在n阶行列式D的元素中选定k个行，设这k行元素所构成所有k阶子式为$N_1, N_2,\ldots, N_m$，(其中m为组合数C_n^k)，这些k阶子式对应的代数余子式分别为：$A_1, A_2,\ldots, A_m$，则

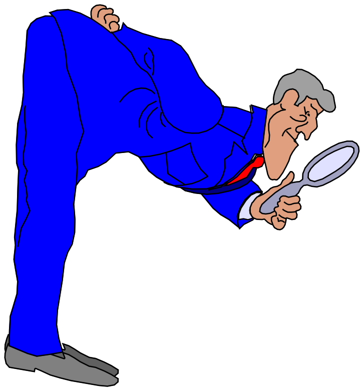
$$D= N_1 A_1 + N_2 A_2 +\ldots+ N_m A_m.$$

注：Laplace展开定理可以看作是性质2的推广.

推荐自修：

算例1. 教材P14：例1.7.

算例2 (强烈推荐). 教材P14--15：例1.8 (乘法公式).



§4 行列式的计算

一、利用行列式的性质把行列式化为三角行列式来计算行列式的值，是计算行列式的常用方法之一。

二、利用行列式的定义或性质二，结合其它性质，将行列式逐次降阶是计算行列式的另一常用方法。

例9 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

解法一

$$D \overset{c_1\leftrightarrow c_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_4-2r_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_4-3r_2 \\ r_3+5r_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 17 & -21 \\ 0 & 0 & -15 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 17 & -21 \\ 0 & 0 & -15 & 15 \end{vmatrix} \overset{r_3 \leftrightarrow r_4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -15 & 15 \\ 0 & 0 & 17 & -21 \end{vmatrix}$$

$$= 15\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 17 & -21 \end{vmatrix} \overset{r_4 - 17r_3}{=} 15\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 60.$$

解法二

$$D=\begin{vmatrix}2&3&1&2\\-5&2&-1&-3\\4&-1&0&-4\\1&3&2&7\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2+r_1\\r_4-2r_1}}{=}\begin{vmatrix}2&3&1&2\\-3&5&0&-1\\4&-1&0&-4\\-3&-3&0&3\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-3&5&-1\\4&-1&-4\\-3&-3&3\end{vmatrix}\overset{\substack{c_1-c_2\\c_3+c_2}}{=}\begin{vmatrix}-8&5&4\\5&-1&-5\\0&-3&0\end{vmatrix}$$

$$=-3\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-8&4\\5&-5\end{vmatrix}$$

=3×（40－20）＝60

例10 计算n阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & \dots & b \\ b & b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & \dots & \dots & b & a & b \\ b & \dots & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$

解

$$D \overset{c_1+c_2+\dots+c_n}{=} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & \dots & b \\ a+(n-1)b & b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)b & b & \dots & b & a & b \\ a+(n-1)b & b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

于是……

$$
D = \begin{vmatrix}
a+(n-1)b & b & b & \dots & \dots & b \\
a+(n-1)b & a & b & \dots & \dots & b \\
a+(n-1)b & b & a & b & \dots & b \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a+(n-1)b & b & \dots & b & a & b \\
a+(n-1)b & b & \dots & \dots & b & a
\end{vmatrix}
$$

$$
\overset{\substack{r_n - r_1 \\ \cdots \\ r_3 - r_1 \\ r_2 - r_1}}{=}
\begin{vmatrix}
a+(n-1)b & b & b & \dots & \dots & b \\
0 & a-b & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & a-b & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a-b
\end{vmatrix}
$$

$$
= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.
$$

例11（自修）计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

解

$$D\overset{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2\\ r_2-r_1}}{=}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}\overset{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}}{=}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{=}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4$$

例12 证明

(自修)

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & bz & az+bx \\ z & bx & ax+by \\ x & by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} x & ay & z \\ y & az & x \\ z & ax & y \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} y & z & bx \\ z & x & by \\ x & y & bz \end{vmatrix}$$

$$= a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

例13 设n为奇数，且满足$a_{ij}=-a_{ji}$ (i, j = 1,2,…,n)，求$D=|a_{ij}|$的值.

表示每个(i, j)位置元素为a_{ij}的行列式

解

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & \\ -a_{13} & -a_{12} & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & \end{vmatrix}=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & \\ a_{13} & a_{12} & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & \end{vmatrix}$$

$$=-D$$

所以，$D=0.$

注：奇数阶的反对称行列式值必为0，但偶数阶就未必了.

例14 计算 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & \ddots & & & & & \iddots & \\ & & a & & & b & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & c & & & d & & \\ & \iddots & & & & & \ddots & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}$

解法一

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & \\ 0 & & & & & & d \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} 0 & a & & & & & b \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a & b & & \\ & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c & & & & & d \\ c & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$
D_{2n}=a\begin{vmatrix}
a & & & & & & b & 0\\
 & \ddots & & & & \iddots & & \\
 & & a & b & & & & \\
 & & c & d & & & & \\
 & & \iddots & & & \ddots & & \\
c & & & & & & d & \\
0 & & & & & & & d
\end{vmatrix}
-b\begin{vmatrix}
0 & a & & & & & & b\\
 & & \ddots & & & & \iddots & \\
 & & & a & b & & & \\
 & & & c & d & & & \\
 & & \iddots & & & & \ddots & \\
 & c & & & & & & d\\
c & & & & & & & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
=ad\begin{vmatrix}
a & & & & & & b\\
 & \ddots & & & & \iddots & \\
 & & a & b & & & \\
 & & c & d & & & \\
 & \iddots & & & & \ddots & \\
c & & & & & & d
\end{vmatrix}
-bc\begin{vmatrix}
a & & & & & & b\\
 & \ddots & & & & \iddots & \\
 & & a & b & & & \\
 & & c & d & & & \\
 & \iddots & & & & \ddots & \\
c & & & & & & d
\end{vmatrix}
$$

$$
=(ad-bc)D_{2n-2}=(ad-bc)^2D_{2n-4}=\ldots=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^n
$$

解法二

此方法只适用于$a\neq 0$的情形

思考: 当$a=0$时应如何处理?

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a &&&&&& b \\ & \ddots &&&& \unicode{x22F0} & \\ && a && b && \\ &&& a\ \ b &&& \\ &&& c\ \ d &&& \\ && c && d && \\ & \unicode{x22F0} &&&& \ddots & \\ c &&&&&& d \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_{n+1}-\frac{c}{a}r_n \\ r_{n+2}-\frac{c}{a}r_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ r_{2n}-\frac{c}{a}r_1}}{=}\begin{vmatrix} a &&&&&& b \\ & \ddots &&&& \unicode{x22F0} & \\ && a && b && \\ &&& a\quad b &&& \\ &&& 0\quad d-bc/a &&& \\ && 0 && d-bc/a && \\ & \unicode{x22F0} &&&& \ddots & \\ 0 &&&&&& d-bc/a \end{vmatrix}=(ad-bc)^n$$

解法三

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & \cdots & & & & & \cdots & \\ & & a & & & b & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & c & & & d & & \\ & \cdots & & & & & \cdots & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}_{2n}$$

由I

展

$$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & \cdots & & & & & \cdots & \\ & & a & & & b & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & c & & & d & & \\ & \cdots & & & & & \cdots & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}_{2n-2}$$

$$
= \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right)^2 \begin{vmatrix} a & & & & & & b \\ & \cdots & & & & \cdots & \\ & & a & & & b & \\ & & & a & b & & \\ & & & c & d & & \\ & & c & & & d & \\ & \cdots & & & & \cdots & \\ c & & & & & & d \end{vmatrix}_{2n-4}
$$

$$
= \cdots \quad = \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right)^{\mathrm{n}-1} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right)^{\mathrm{n}}
$$

$$
= (ad - bc)^{\mathrm{n}}.
$$

(教材例1.12) 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}_n$$

解：将D_n按第一行展开，有

$$D_n = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}_n - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ & & \cdots & \cdots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

上式等号右端第二个行列式还可以继续化简，于是得到：

$$D_n = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & \cdots & \cdots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-2}$$

也即： $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$.

换言之即:$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$.

因此可知数列$\{D_n\}$为等差数列，其首项为$D_1 = 2$，公差是

$$D_2 - D_1 = 3 - 2 = 1.$$

因此得到 $D_n = n+1$.

例15 证明Vandermonde(范德蒙德)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

注：“$\prod$”表示求积.

证明： 用数学归纳法. 当n=2时,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1,$$

结论成立.

现假设对n-1阶Vandermonde行列式结论成立，以下观察n阶的情况.

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

从第n行起，每行都减去相邻上一行的a_1倍，直至第2行减去第1行的a_1倍，得到

$$D_n=$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&a_2-a_1&a_3-a_1&\cdots&a_n-a_1\\0&a_2^2-a_1a_2&a_3^2-a_1a_3&\cdots&a_n^2-a_1a_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2}&a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2}&\cdots&a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

在第1列展开，以后各列分别提取公因子，可得

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

由归纳假设

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

$$=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

证毕.

§5 Cramer法则

在本章之初，我们介绍了关于二、三元线性方程组的Cramer (克莱姆)法则. 本节我们将给出一般n元线性方程组的Cramer法则.

设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.11)$$

方程组(1.11)的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mathrm{n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mathrm{n}1} & a_{\mathrm{n}2} & \cdots & a_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix}.$$

若将系数行列式D中的第i列换成方程组(1.11)右端的常数项列$b_1, b_2, \ldots, b_n$, 就得到了一个新的行列式, 记为D_i. 易见:

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2\mathrm{n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{\mathrm{n}} & a_{\mathrm{n}2} & \cdots & a_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2\mathrm{n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mathrm{n}1} & b_{\mathrm{n}} & \cdots & a_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix},$$

$$\cdots,\qquad D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mathrm{n}1} & a_{\mathrm{n}2} & \cdots & b_{\mathrm{n}} \end{vmatrix}.$$

定理1.1 (Cramer法则) 若线性方程组(1.11)的系数行列式D≠0，则此方程组存在唯一解：

$$x_i = D_i / D,\ \ \mathrm{i}= 1, 2,\ldots, \mathrm{n}.$$

证明：首先证明解的存在性.为此构造行列式

$$\begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$= b_i D - a_{i1} D_1 - a_{i2} D_2 - \ldots - a_{in} D_n$$

所以

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\ldots+a_{in}\frac{D_n}{D}=b_i\,,\quad (i=1,2,\ldots,n)$$

这说明

$$x_1=D_1/D,\ x_2=D_2/D,\ \ldots,\ x_n=D_n/D,$$

是方程组(1.11)的解. 故解的存在性得证.

以下再证方程组解的唯一性.

设$x_{\mathrm{i}}=d_{\mathrm{i}}$ $(i=1, 2,\ldots, n)$ 是方程组(1.11)的一组解, 则

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ki}d_i=b_k,\qquad k=1,2,\ldots,n.$$

于是可得

$$d_1 D = \begin{vmatrix} a_{11}d_1 & a_{12} & \dots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21}d_1 & a_{22} & \dots & a_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mathrm{n}1}d_1 & a_{\mathrm{n}2} & \dots & a_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}d_i & a_{12} & \dots & a_{1\mathrm{n}} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}d_i & a_{22} & \dots & a_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}d_i & a_{\mathrm{n}2} & \dots & a_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1\mathrm{n}} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\mathrm{n}} & a_{\mathrm{n}2} & \dots & a_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix}$$

$$= D_1$$

因此得到

$$d_1 = \frac{D_1}{D}.$$

同理还可得

$$d_2 = \frac{D_2}{D}, \quad d_3 = \frac{D_3}{D}, \dots, \quad d_{\mathrm{n}} = \frac{D_{\mathrm{n}}}{D}.$$

从而解的唯一性得证.

证毕.

例16 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 12 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-3r_1 \\ r_4+2r_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ -5 & 0 & 11 & -10 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -5 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & 11 & -10 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_1+3c_3 \\ c_2+2c_3}}{=} -\begin{vmatrix} -35 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & -1 \\ 24 & 9 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -35 & -9 \\ 24 & 9 \end{vmatrix} = 99$$

同理可得：

$$D_1 = 297,\quad D_2 = -99,\quad D_3 = 198,\quad D_4 = 99$$

所以得：

$$x_1 = 3,\quad x_2 = -1,\quad x_3 = 2,\quad x_4 = 1$$

例17　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_3 + 9x_3 + 16x_4 = 1 \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 = -1 \end{cases}$$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}=1\times2\times1\times3\times2\times1=12$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&2&3&4\\1&4&9&16\\-1&8&27&64\end{vmatrix}=120\ ,D_2=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&3&4\\1&1&9&16\\1&-1&27&64\end{vmatrix}=-240$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&4\\1&4&1&16\\1&8&-1&64\end{vmatrix}=180\quad ,D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&-1\\1&4&9&1\\1&8&27&-1\end{vmatrix}=-48$$

所以得： $x_1=10,\ \ x_2=-20,\ \ x_3=15,\ \ x_4=-4$

线性方程组的常数项不全为零时，称为**非齐次线性方程组**，而常数项全为零的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为**齐次线性方程组**.

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$，一定是齐次线性方程组的解，此解也叫做齐次线性方程组的零解.

由Cramer法则有：

推论 如果齐次线性方程组的系数行列式$D \neq 0$，则齐次线性方程组只有零解.

Cramer法则只适用于方程个数与变量个数相等，而且系数行列式不等于零的那些线性方程组．对于一般线性方程组的求解问题将在第四章给出具体的讨论．

由于应用Cramer法则求解n元线性方程组，需要计算n＋1个n阶行列式．因此，当n比较大时，求解的计算量是很大的．所以在实际求解(大规模的)线性方程组时，很少采用此法．

作　业

习题一　第22页

一、二

三、2，3(5)~(12)，

4，6(1)，7

课堂练习

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$$

课堂练习答案

解

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=}\begin{vmatrix}10&2&3&4\\10&3&4&1\\10&4&1&2\\10&1&2&3\end{vmatrix}\overset{c_1\div 10}{=}10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2\\r_2-r_1}}{=}10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&1&-3&1\\0&-3&1&1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}-1&1&-3\\-1&-3&1\\-1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix}0&0&-4\\0&-4&0\\-1&1&1\end{vmatrix}=10\times 16=160$$