



第七章 应力和应变分析、强度理论



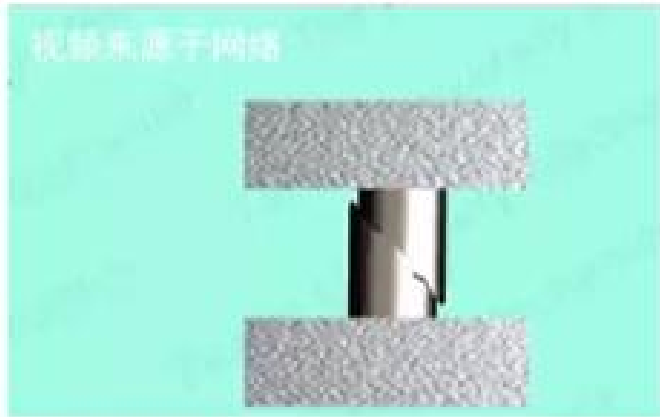
第七章 应力状态和强度理论

- § 7-1 应力状态概述
- § 7-2 平面应力状态分析-解析法
- § 7-3 平面应力状态分析-图解法
- § 7-4 三向应力状态分析
- § 7-5 广义虎克定律
- § 7-6 复杂应力状态的应变能密度
- § 7-7 强度理论
- § 7-8 莫尔强度理论

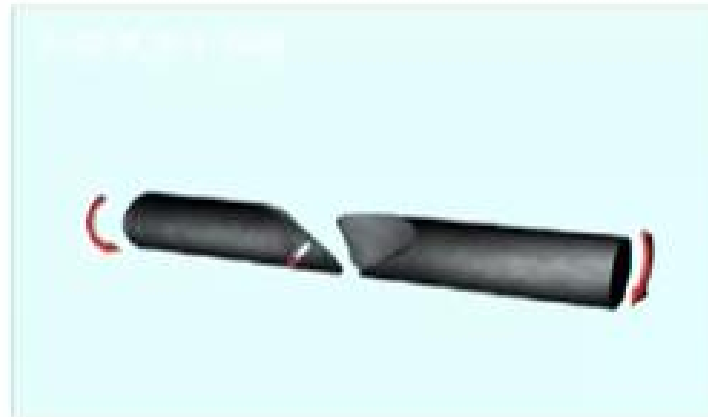
§ 7-1 应力状态概述

一、问题的提出

轴向压缩



扭转



脆性材料轴向压缩以及扭转破坏时，断裂面发生在斜截面：
对于发生在斜截面破坏的强度问题如何校核？



§ 7-1 应力状态概述

对于斜截面方位发生破坏，横截面上的正应力强度条件或者切应力强度条件不再适用。

这种复杂情况下的强度问题，需要综合考虑破坏位置的正应力和切应力，全方位的讨论一点应力的情况，并确定出最大应力，因此提出了应力状态的概念。

§ 7-1 应力状态概述

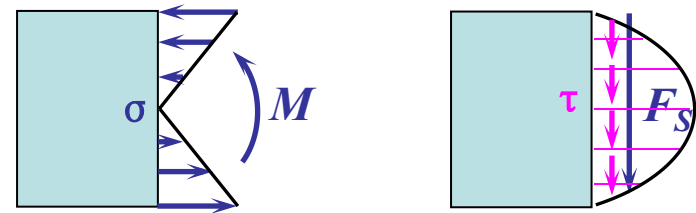
二、应力状态

通过受力构件内某一点的各个截面上的应力情况，称为这**一点的应力状态**。

同一面上不同点的应力各不相同；

同一点不同方向面上的应力也是各不相同

一点的应力表达式可以有无穷多种，这无穷多种应力表达就表示了该点的应力状态。



横力弯曲

应 力

哪一个面上？
哪一点？

哪一点？
哪个方向面？



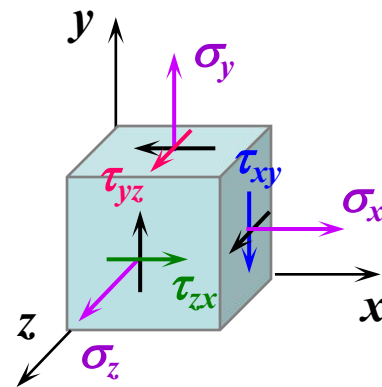
§ 7-1 应力状态概述

三、一点应力状态的描述

1、单元体应力性质

围绕该点截取一个微小正六面体。

- (1) 单元体各面上应力均匀分布；
- (2) 单元体内相互平行的截面上, 应力相同；
- (3) 满足切应力互等定理。



§ 7-1 应力状态概述

三、一点应力状态的描述

2、单元体应力符号规定

每个微面上的应力可以分解为1个正应力和2个切应力。正应力：

$$\sigma_x$$

$$\sigma_y$$

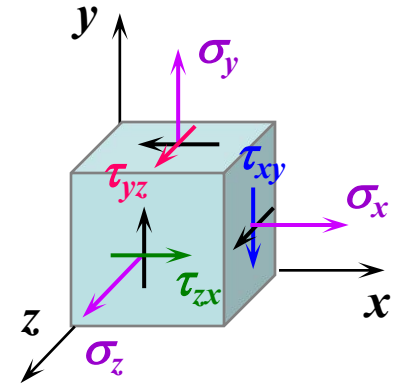
$$\sigma_z$$

各侧面上的切应力：

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$



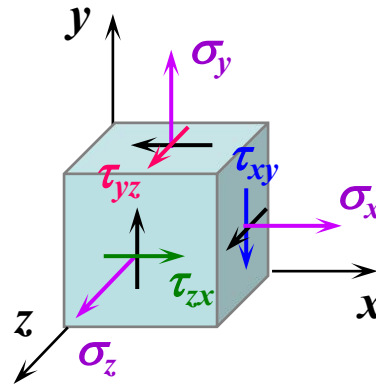
正应力有一个角标：角标既表示正应力作用平面的法线方向，也表示正应力方向。

切应力有两个角标：第一个角标表示切应力作用平面的法线方向，第二个角标表示切应力方向。

应力正负号规定：正应力以拉应力为正。切应力正面正方向，负面负方向，切应力为正。

§ 7-1 应力状态概述

思考：一点的应力状态指受力构件内某一点的所有截面上的应力情况，图示单元体是否能描述一点的应力状态？



只要知道单元体三对相互垂直面上的应力，其它任意截面上的应力均可用截面法求出，因此用单元体三个互相垂直平面上的应力可以表示一点的应力状态。



§ 7-1 应力状态概述

3、应力状态的分类

主平面: 单元体上切应力为零的平面

主单元体: 各侧面上切应力均为零的单元体

主应力: 主平面上的正应力

通过受力构件的任意点一定可以找到三对互相垂直的主平面，其上对应三个主应力。

主应力按代数值大小排列

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$



§ 7-1 应力状态概述

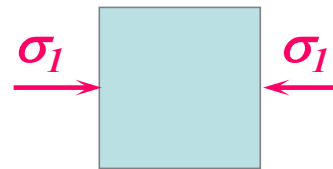
3、应力状态分类

(1) 单向状态

只有一个主应力不等于0，另外两个主应力都等于0的情况



单向应力状态



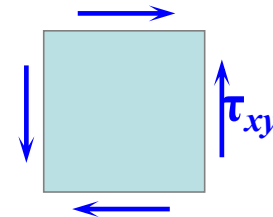
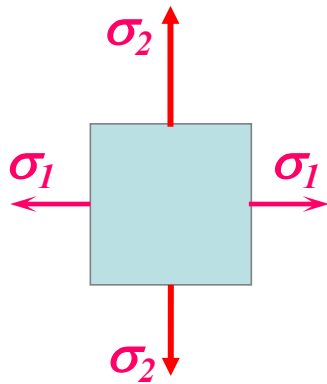
单向应力状态



§ 7-1 应力状态概述

(2) 平面应力状态（二向应力状态）

有两个主应力不等于0，另一个主应力等于0的应力状态

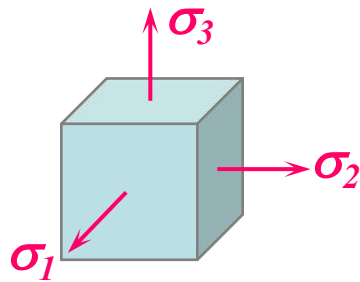


纯剪切应力状态



§ 7-1 应力状态概述

(3) 空间应力状态（三向应力状态）

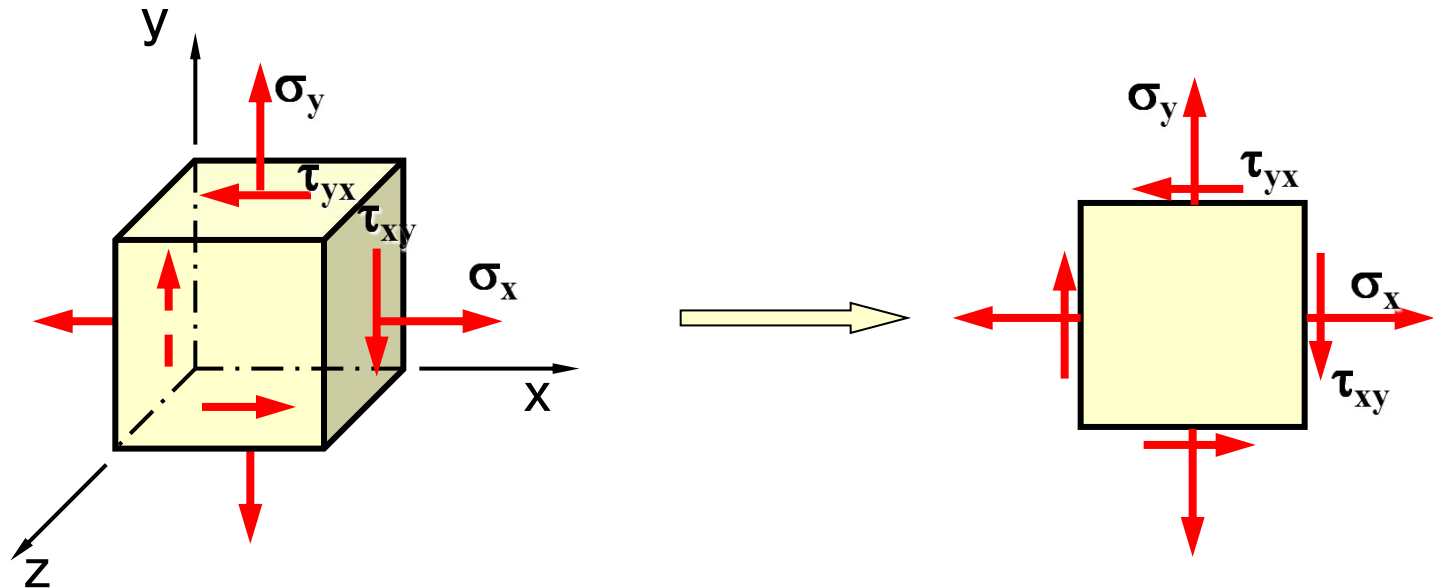


三向主应力都不等于0的应力状态称为空间应力状态或三向应力状态。

平面应力状态和空间应力状态统称为复杂应力状态。

§ 7-2 平面应力状态分析-解析法

平面应力状态的普遍形式：



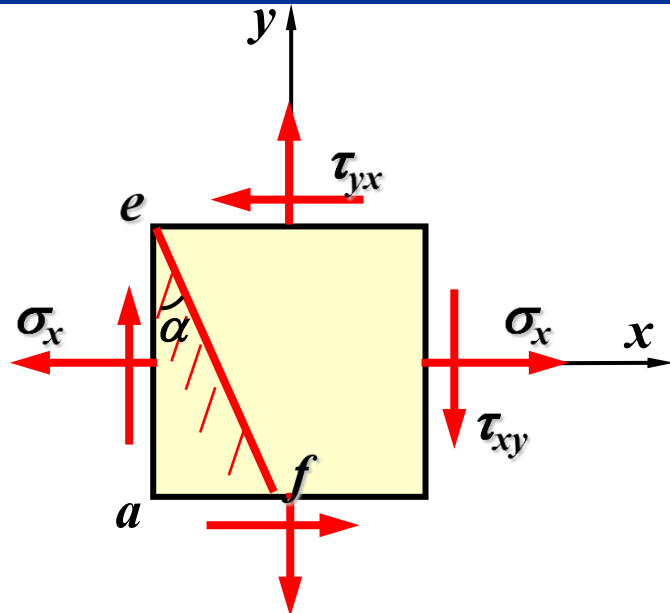
单元体上有 σ_x, τ_{xy} 和 σ_y, τ_{yx}



§ 7-2 平面应力状态分析-解析法

一、任意斜截面上的应力

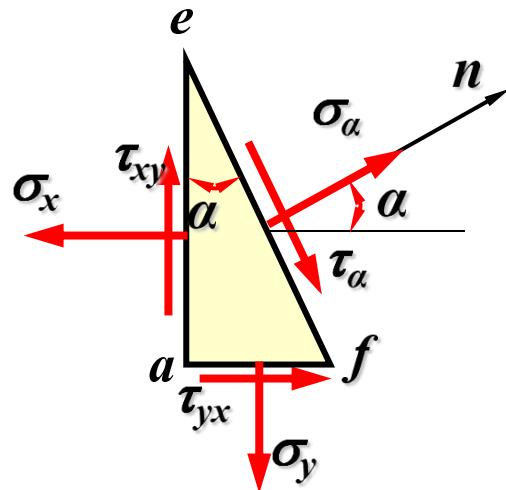
假想地沿斜截面 ef 将单元体截开,留下左边部分的单元体 eaf 作为研究对象



符号规定: σ_a , 与截面外法线同向为正;

τ_a , 绕研究对象内任一点顺时针转向为正;

α , 从 x 轴到外法线 n 逆时针转为正。





§ 7-2 平面应力状态分析-解析法

设斜截面面积为 S , 由分离体平衡得:

$$\begin{aligned}\Sigma F_n = 0, & \sigma_\alpha S - \sigma_x S \cos \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} S \sin \alpha \cos \alpha \\ & - \sigma_y S \sin \alpha \sin \alpha + \tau_{yx} S \cos \alpha \sin \alpha = 0\end{aligned}$$

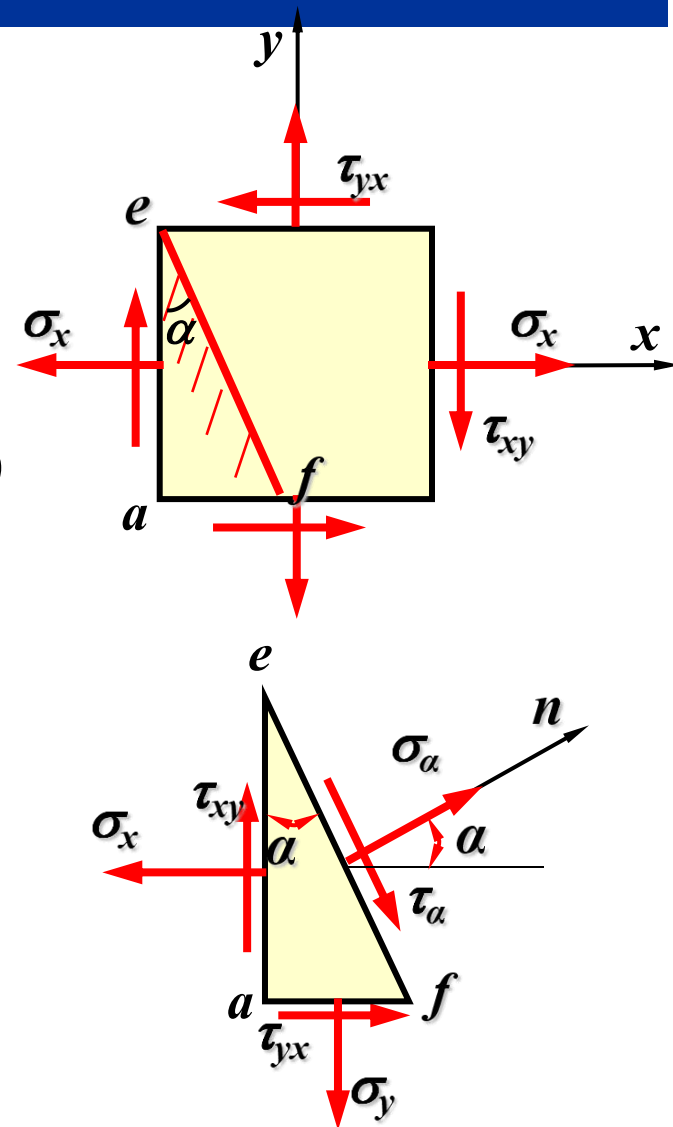
$$\begin{aligned}\Sigma F_\tau = 0, & \tau_\alpha S - \tau_{xy} S \cos \alpha \cos \alpha - \sigma_x S \cos \alpha \sin \alpha \\ & + \tau_{yx} S \sin \alpha \sin \alpha + \sigma_y S \sin \alpha \cos \alpha = 0\end{aligned}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

一定要把相应的正负号代入





§ 7-2 平面应力状态分析-解析法

公式适用条件：

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

公式推导过程中，使用了切应力互等定理，只有两个相互垂直的面上才符合这个条件，因此上述公式适用于已知两个互相垂直的平面上的应力求斜截面上的应力。

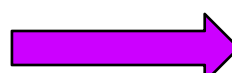


§ 7-2 平面应力状态分析-解析法

公式适用条件：

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\alpha+90^{\circ}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_{\alpha+90^{\circ}} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$


$$\begin{cases} \sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+90^{\circ}} = \sigma_x + \sigma_y = \text{常数} \\ \tau_{\alpha} = -\tau_{\alpha+90^{\circ}} \end{cases}$$

正应力和切应力都是 α 的函数，随截面方位的改变而变化。一定存在极值应力。

结论：任意两个相互垂直截面上的正应力之和为常数，切应力符合切应力互等定理。



§ 7-2 平面应力状态分析—解析法

二、极值应力

$$\text{令 } \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0\right] = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

由此可解得两个角度： $\alpha_0, (\alpha_0 \pm \frac{\pi}{2})$

根据上式可以求出相差 90° 的两个角。它们对应的是两个相互垂直的平面，其中一个为极大正应力所在的平面，另一个为极小正应力所在的平面。

$\alpha_0 \pm \frac{\pi}{2}$ 表示的是一对平行面，这对平行面上的应力相等，计算时只需要取其中的一个值即可。习惯上用绝对值较小的角度来表示截面位置。（ α_0 有可能为正值也有可能为负值）



§ 7-2 平面应力状态分析—解析法

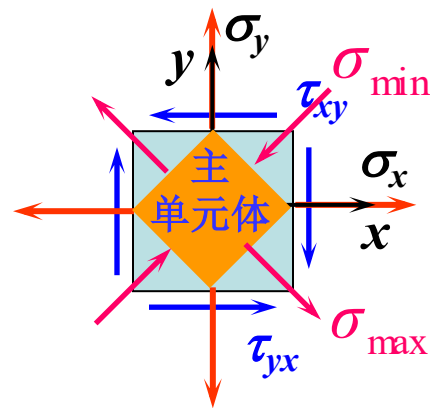
二、极值应力

$$\text{令 } \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0\right] = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

由此可解得两个角度： $\alpha_0, (\alpha_0 \pm \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$\tau_{\alpha_0} = 0 \Rightarrow$ 极值正应力就是主应力，
所在平面为主平面。



★ 主应力方位的确定（应力为代数值）：

- (1) 当 $\sigma_x \geq \sigma_y$ 时， α_0 绝对值较小的一个是 σ_x 与 σ_{\max} 之间的夹角
- (2) 当 $\sigma_x < \sigma_y$ 时， α_0 绝对值较大的一个是 σ_x 与 σ_{\max} 之间的夹角

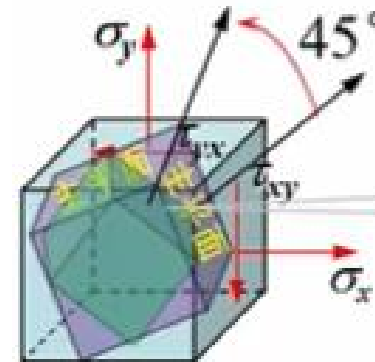
§ 7-2 平面应力状态分析—解析法

$$\text{令 } \frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha_1 - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha_1 = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

由此可解得两个角度： $\alpha_1, (\alpha_1 + \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{cases} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{1}{\tan 2\alpha_1} \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 + \frac{\pi}{4}$$

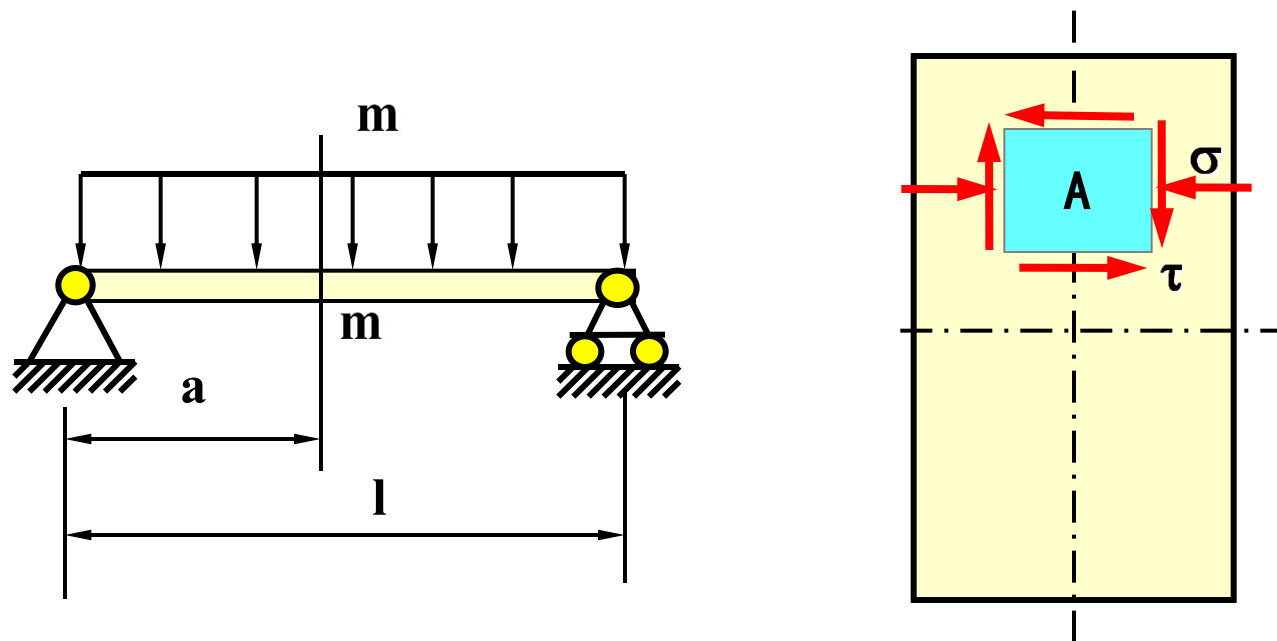


极值切应力平面

★ 极值切应力面与主平面成 45° 角

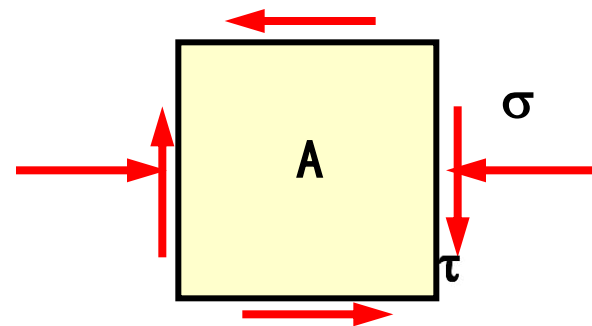
§ 7-2 平面应力状态分析-解析法

例7-1 简支梁如图所示.已知 m 截面上A点的弯曲正应力和切应力分别为 $\sigma = -70\text{MPa}$, $\tau = 50\text{MPa}$.确定A点的主应力及主平面的方位.



解: 把从A点处截取的单元体放大如图

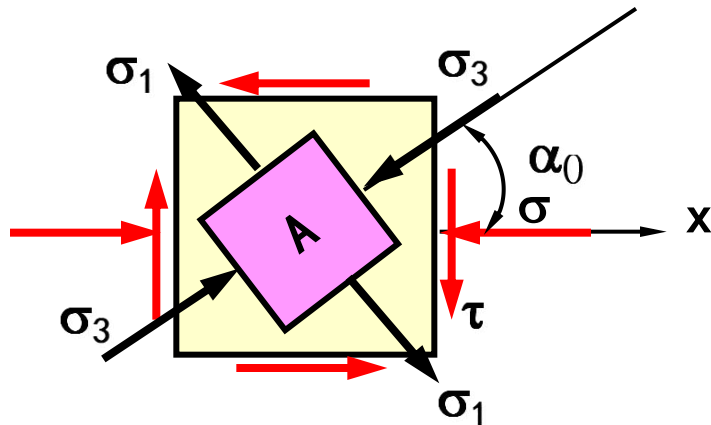
$$\sigma_x = -70, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 50$$





§ 7-2 平面应力状态分析-解析法

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha_0 &= -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \\ &= -\frac{2 \times 50}{(-70) - 0} = 1.429 \\ \alpha_0 &= 27.5^\circ \\ &= -62.5^\circ\end{aligned}$$



因为 $\sigma_x < \sigma_y$, 所以 $\alpha_0 = 27.5^\circ$ 与 σ_{\min} 对应

$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 26\text{MPa} \\ -96\text{MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 26\text{MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -96\text{MPa}$$



§ 7-2 平面应力状态分析-解析法

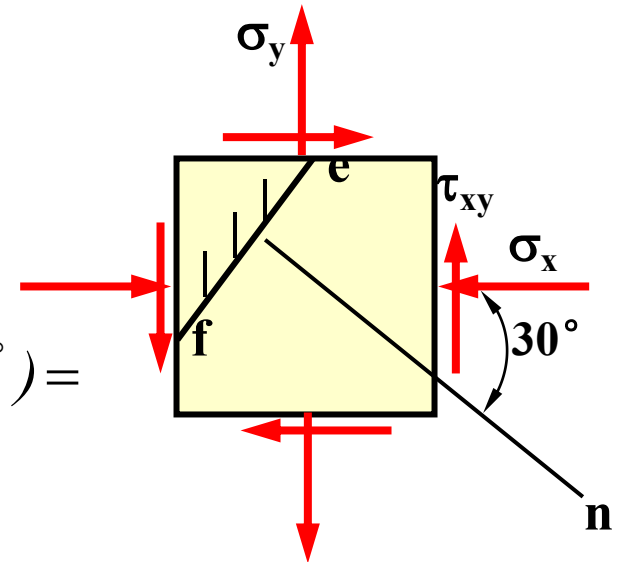
例7-2 图示单元体，已知 $\sigma_x = -40\text{MPa}$ ， $\sigma_y = 60\text{MPa}$ ， $\tau_{xy} = -50\text{MPa}$ 。试求 ef 截面上的应力情况及主应力和主单元体的方位。

(1) 求 ef 截面上的应力

$$\sigma_{-30^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha =$$

$$\frac{-40 + 60}{2} + \frac{-40 - 60}{2} \cos(-60^\circ) - (-50) \sin(-60^\circ) =$$

$$-58.3\text{MPa}$$



$$\tau_{-30^\circ} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha =$$

$$\frac{-40 - 60}{2} \sin(-60^\circ) + (-50) \cos(-60^\circ) = 18.3\text{MPa}$$



§ 7-2 平面应力状态分析-解析法

(2) 求主应力和主单元体的方位

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-50)}{-40 - 60} = -1$$

$$2\alpha_0 = \begin{matrix} -45^\circ \\ 135^\circ \end{matrix} \quad \alpha_0 = \begin{matrix} -22.5^\circ \\ 67.5^\circ \end{matrix}$$

$$\sigma_x = -40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 60 \text{ MPa}$$

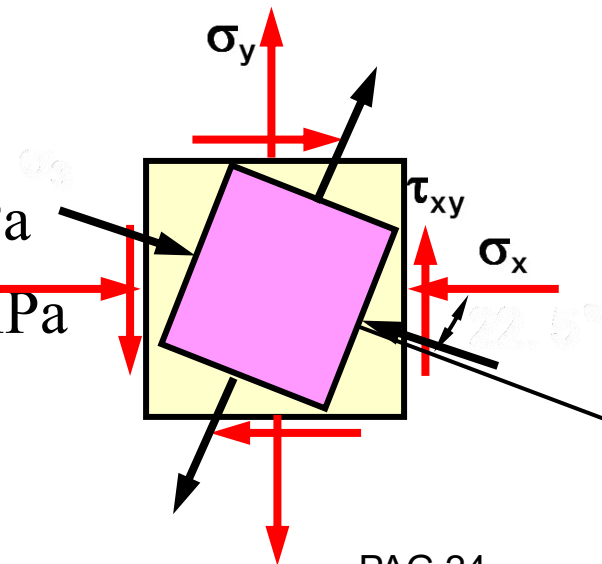
$$\tau_x = -50 \text{ MPa}$$

$$\alpha = -30^\circ$$

因为 $\sigma_x < \sigma_y$ ，所以 $\alpha_0 = -22.5^\circ$ 与 σ_{\min} 对应

$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \begin{cases} 80.7 \text{ MPa} \\ -60.7 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 80.7 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -60.7 \text{ MPa}$$



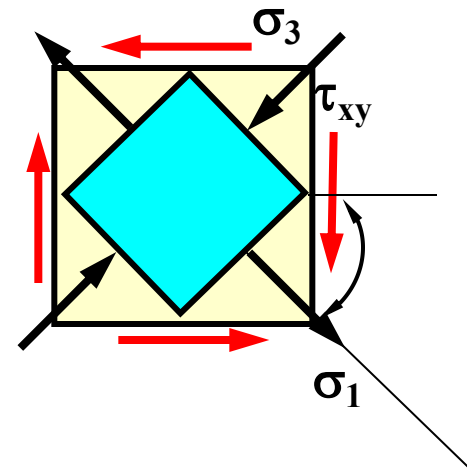
§ 7-2 平面应力状态分析-解析法

例7-3 求平面纯剪切应力状态的主应力及主平面方位。

解 (1) 求主平面方位

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\infty$$

$$2\alpha_0 = \begin{matrix} -270^\circ \\ -90^\circ \end{matrix} \quad \alpha_0 = \begin{matrix} -135^\circ \\ -45^\circ \end{matrix}$$



因为 $\sigma_x = \sigma_y$,

所以 $\alpha_0 = -45^\circ$ 与 σ_{\max} 对应

(2) 求主应力

$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \tau$$

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$

§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

应力圆

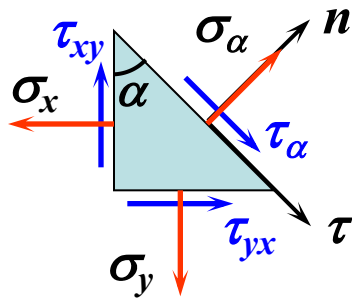
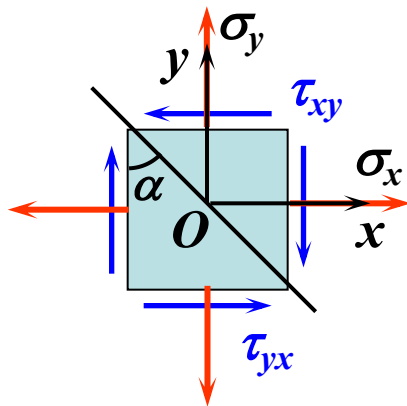
应力圆也叫莫尔圆。

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

先平方再相加，消去方程中的 2α ，得：

$$\left(\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

若 σ_{α} 、 τ_{α} 以为变量，上式的轨迹为圆，称为圆方程。

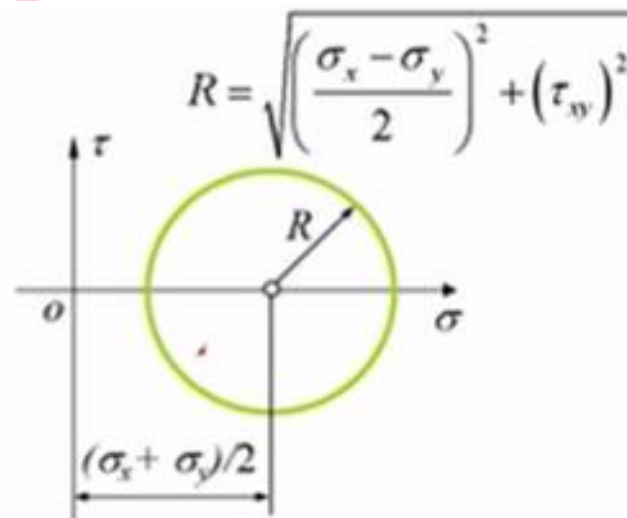


§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

$$\left(\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

1、圆心的坐标

$$C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$$



2、圆的半径

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

当斜截面随方位角 α 变化时，其上的应力 σ_{α} ， τ_{α} 在 σ - τ 直角坐标系内的轨迹是一个圆。

此圆习惯上称为**应力圆**或**莫尔圆**。



§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

1、应力圆的画法

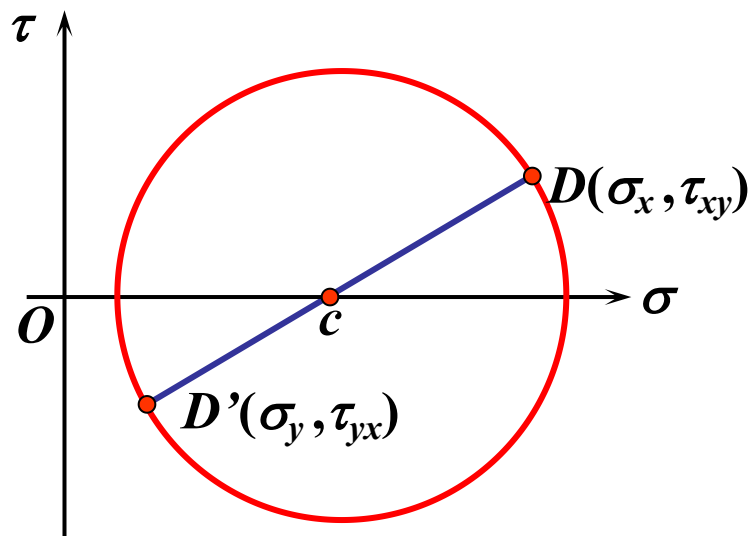
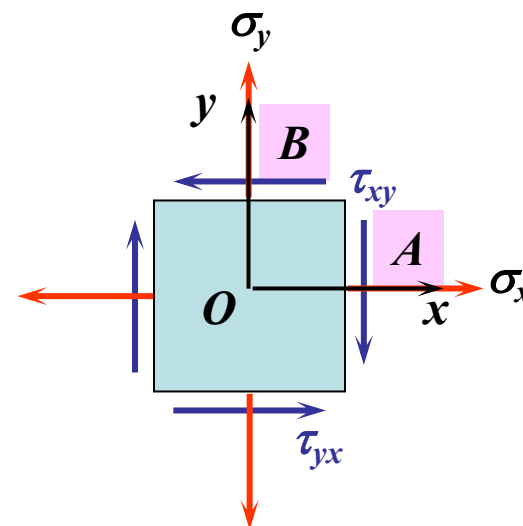
(1) 选比例尺, 建应力坐标系;

(2) 在坐标系内画出点

$$D(\sigma_x, \tau_{xy}) \quad D'(\sigma_y, \tau_{yx});$$

(3) DD' 与 σ 轴的交点 C 是圆心;

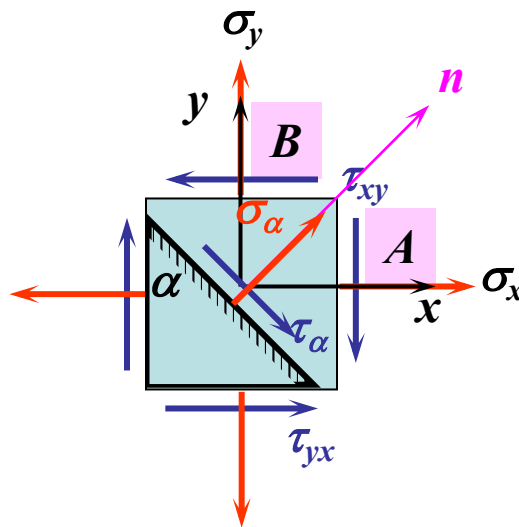
(4) 以点 c 为圆心, 以 DD' 为直径画圆 (应力圆);



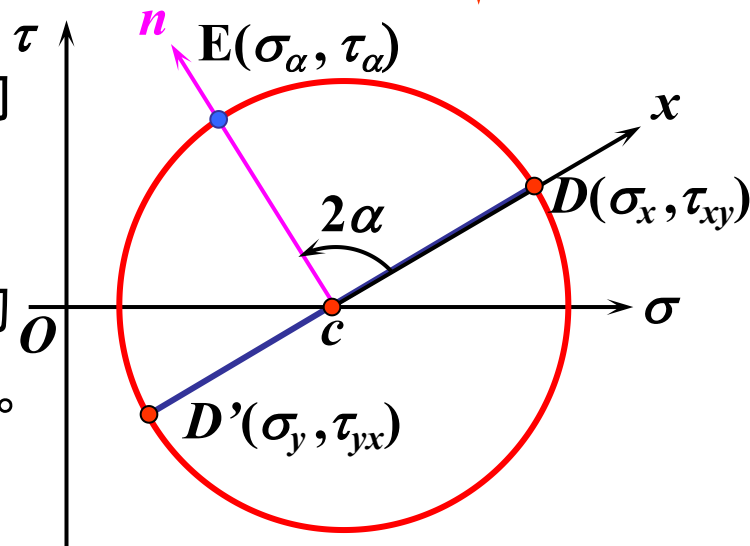
§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

2、单元体与应力圆的对应关系

- (1) **点面对应** — 应力圆上某一点的坐标值 $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ 对应着单元体某一斜截面上的正应力和切应力, 即 α 面上的应力 $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$;



- (2) **转向对应** — 半径旋转方向与 α 面法线旋转方向一致;
- (3) **二倍角对应** — 半径转过的角度是 α 面旋转角度的两倍。

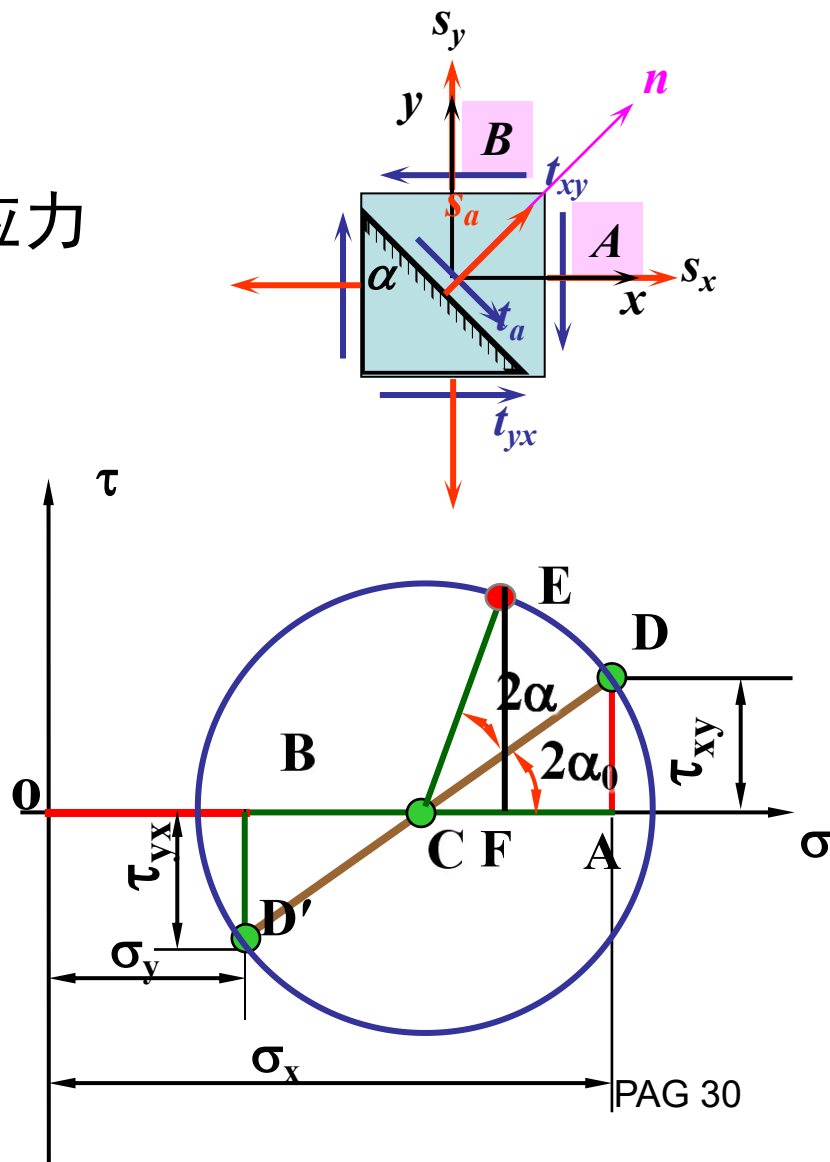


§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

3、应力圆的应用

(1)求单元体上任一截面上的应力

从应力圆的半径 CD 按方位角 α 的转向转动 2α 得到半径 CE。圆周上 E 点的坐标就依次为斜截面上的正应力 σ_α 和切应力 τ_α 。



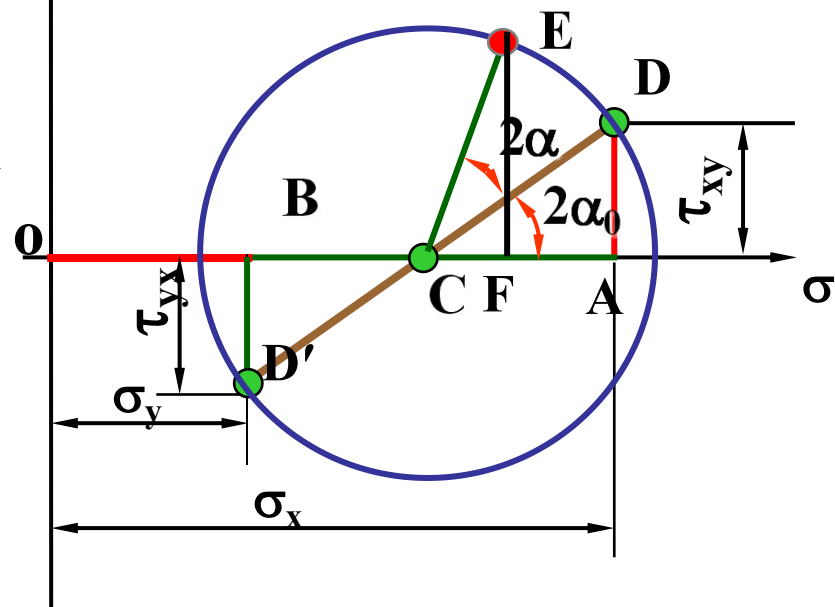
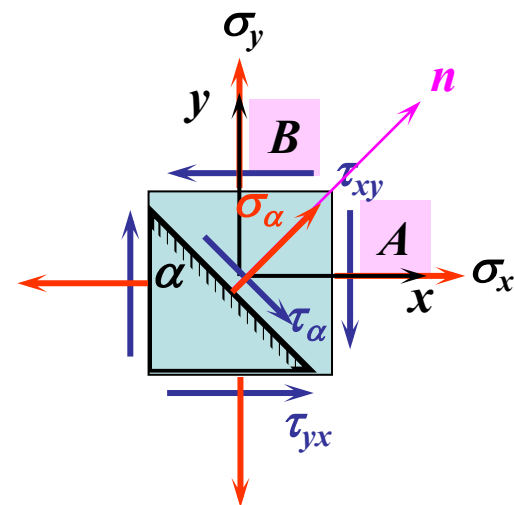


§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

证明:

$$\begin{aligned}
 \overline{OF} &= \overline{OC} + \overline{CF} = \overline{OC} + \overline{CE} \cos(2\alpha_0 + 2\alpha) \\
 &= \overline{OC} + \overline{CD} \cos 2\alpha_0 \cos 2\alpha - \overline{CD} \sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha \\
 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = \sigma_\alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{FE} &= \overline{CE} \sin(2\alpha_0 + 2\alpha) \\
 &= \overline{CD} \sin 2\alpha_0 \cos 2\alpha + \overline{CD} \cos 2\alpha_0 \sin 2\alpha \\
 &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \tau_\alpha
 \end{aligned}$$





§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

单元体与应力圆对应关系

对应关系	单元体	应力圆
点面对应	单元体某平面	应力圆某点
应力坐标对应	单元体某个面上的应力分量	应力圆某点的坐标
二倍角对应	单元体两平面间的夹角	应力圆两对应点所夹的中心角
转向对应	单元体两平面法线旋转方向	应力圆两点半径旋转方向

(2) 主应力、主平面与极大切应力
主应力大小：

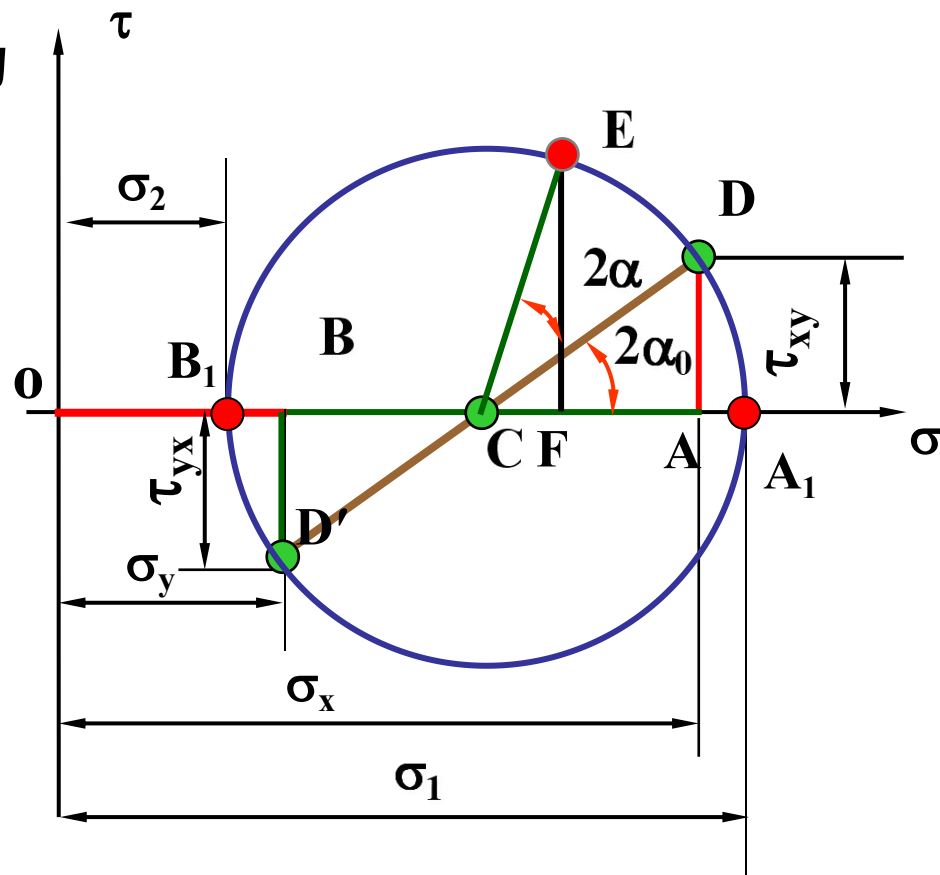
$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sigma_{min} = \overline{OB_1} = \overline{OC} - \overline{CB_1} \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\end{aligned}$$

主平面方位:

$$\tan(-2\alpha_0) = \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\tan(2\alpha_0) = \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

α_0 确定后, σ_1 对应的主平面方位即确定





§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

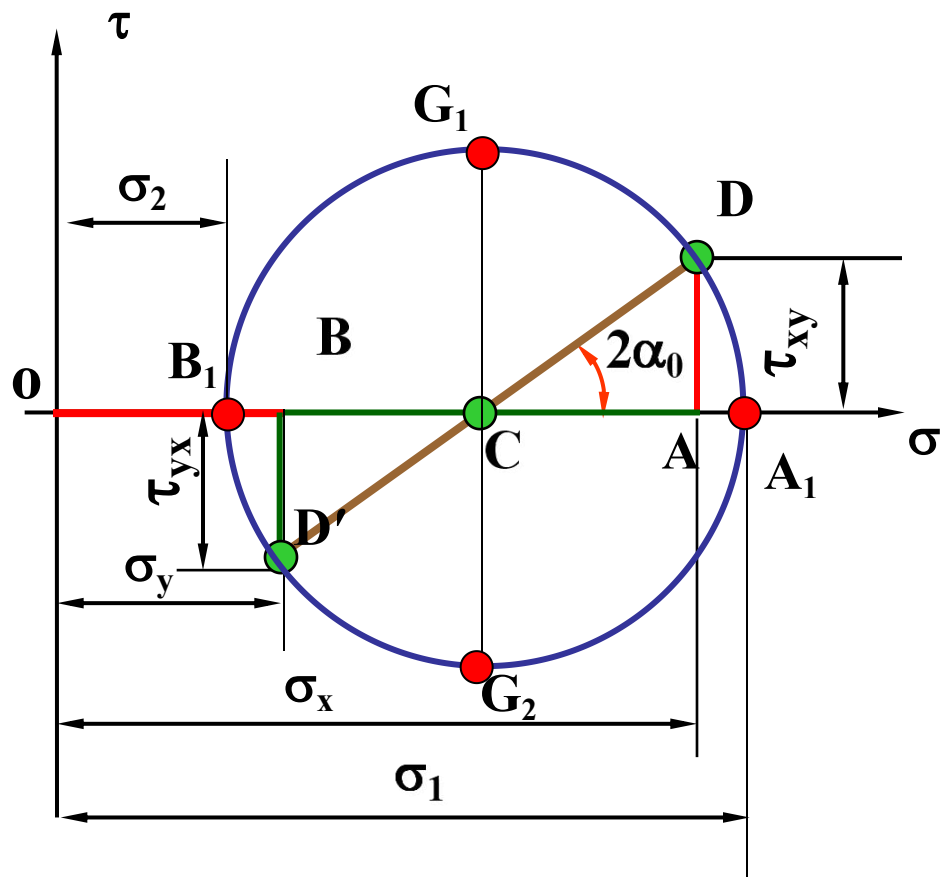
极大切应力

$$\tau_{max} = \overline{CG_1} = +\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{min} = \overline{CG_2} = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

极大极小切应力等于
应力圆的半径

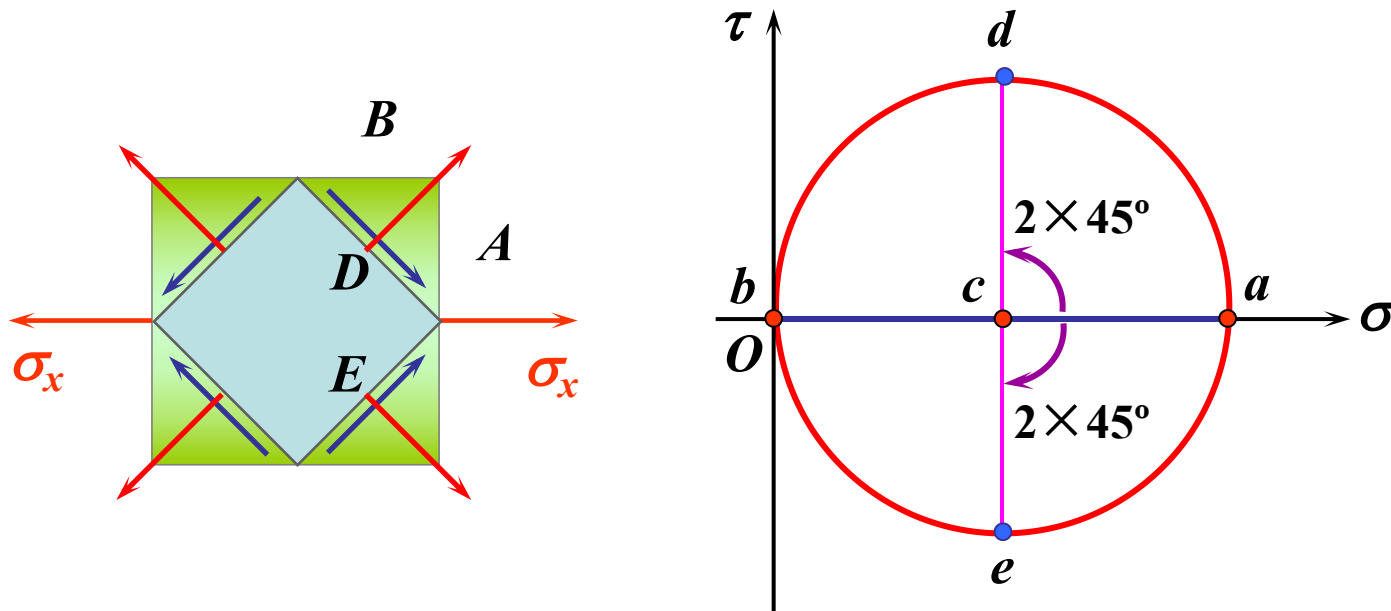
$$\begin{cases} \tau_{max} \\ \tau_{min} \end{cases} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$





§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

单向拉伸应力状态



✦ 45° 方向面有 τ_{\max} , σ 不是最大值



§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

例7-5 求图示单元体的主应力及主平面的位置。(单位:MPa)

解:(1) 建立应力坐标系

(2) 在坐标系内画出两点 $a(-80, 30)$ $b(0, -30)$

(3) 计算圆心坐标和半径

$$Oc = \frac{(\sigma_A + \sigma_B)}{2} = -40$$

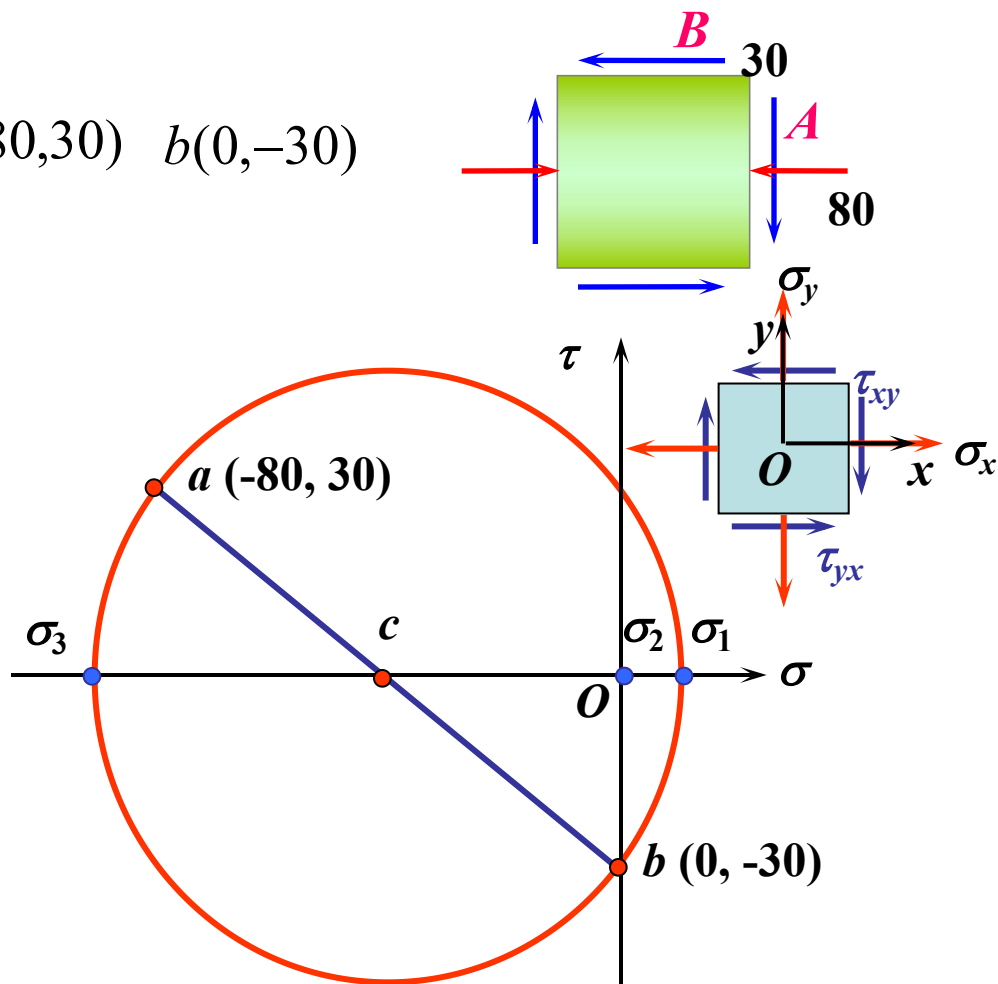
$$R = bc = 50$$

(4) 计算主应力

$$\sigma_1 = Oc + R = 10$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = Oc - R = -90$$





§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

例7-5 求图示单元体的主应力及主平面的位置。(单位:MPa)

(5) 计算主平面的方位角

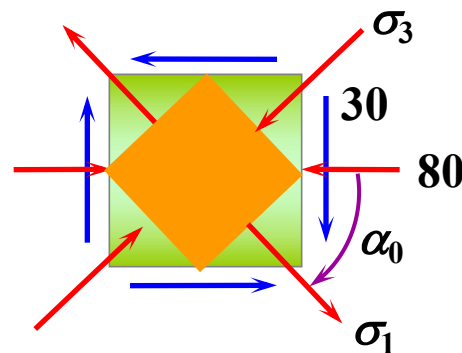
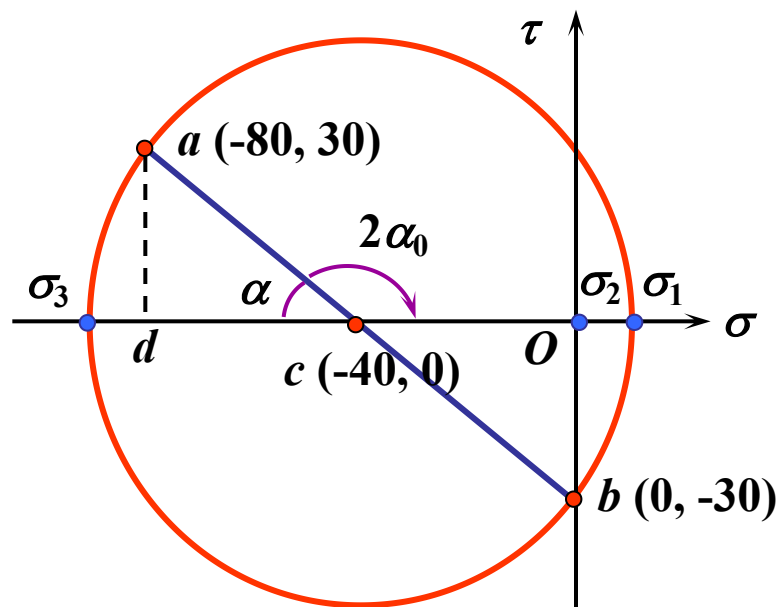
$$\tan \alpha = \frac{ad}{dc} = \frac{30}{40} \Rightarrow \alpha = 36.86^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = -\frac{180^\circ - 36.86^\circ}{2} = -71.57^\circ$$

(6) 画主单元体

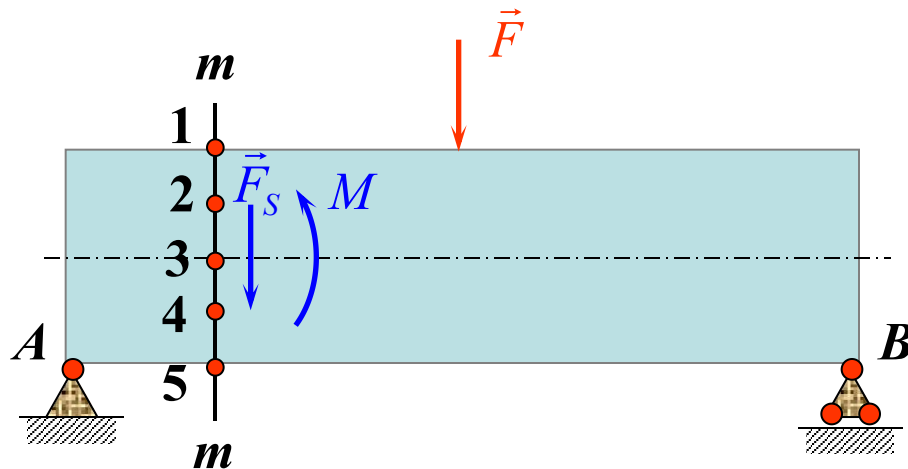
a 点对应于单元体的右侧面;

将右侧面顺时针转 α_0 , 既是主单元体最大拉应力所在面。



§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

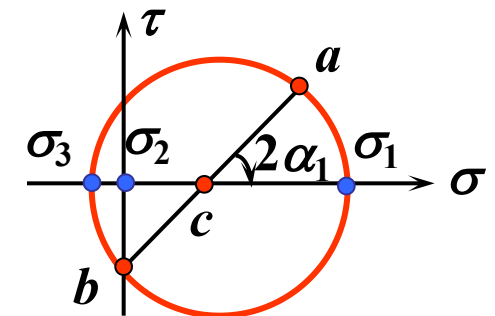
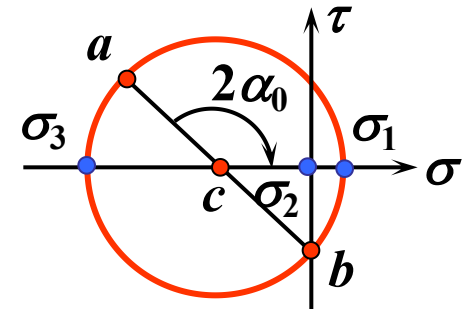
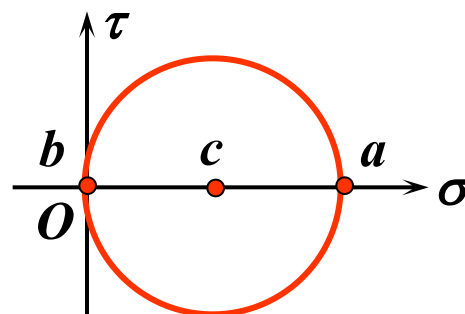
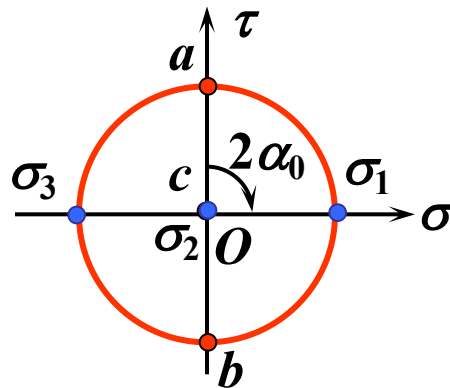
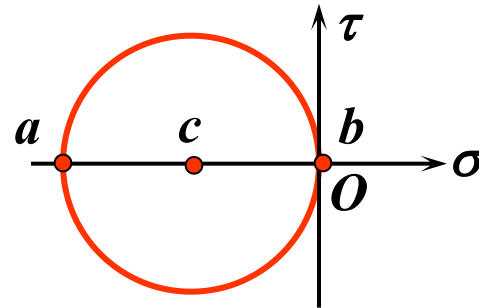
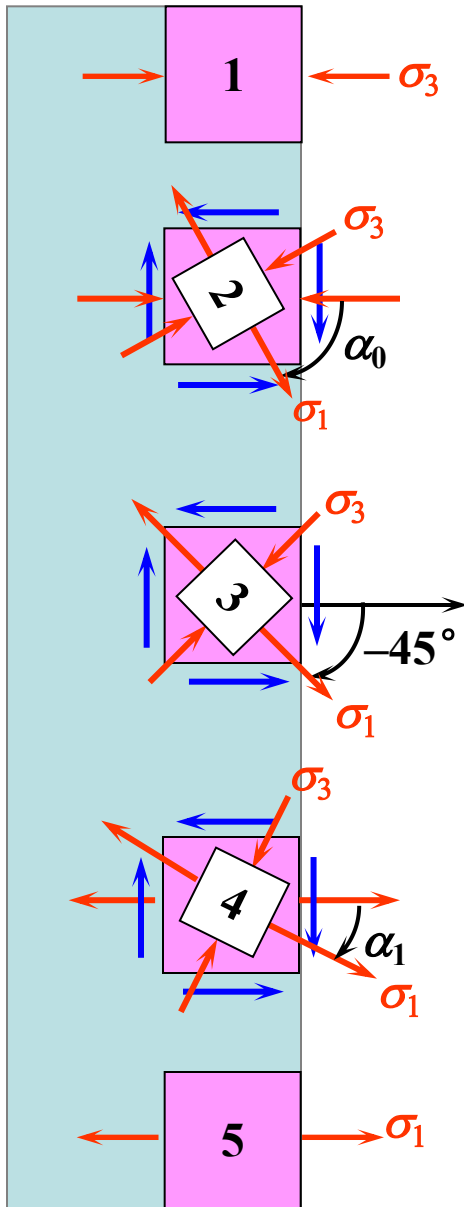
例7-6 图示矩形截面简支梁的中截面处作用一集中力, 试确定 **m-m**截面上各点主应力及主平面位置。



单元体: $\sigma_x = \frac{My}{I_z}$ $\tau_{xy} = \frac{F_s S_z^*}{bI_z}$

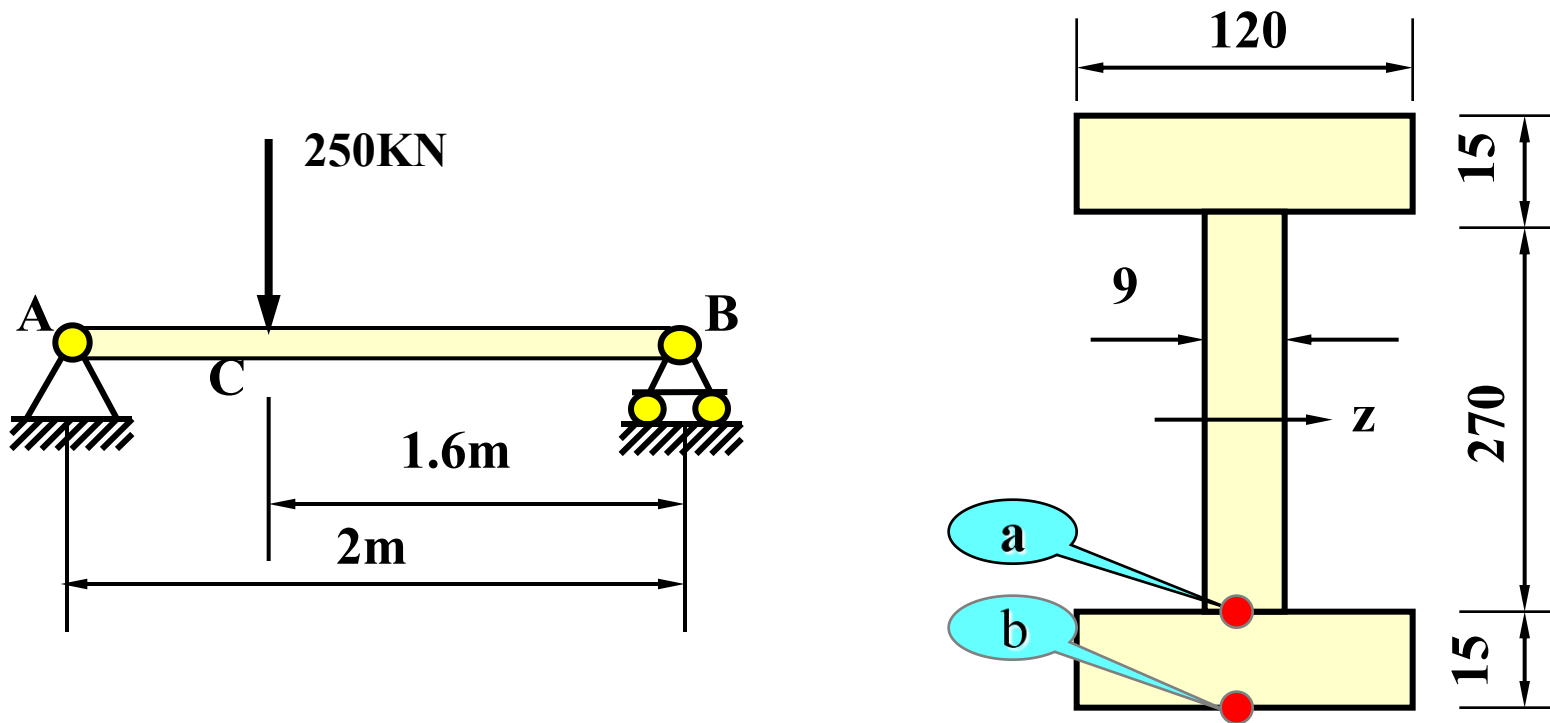
$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \quad \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

§ 7-3 平面应力状态分析-图解法



§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

例7-7 两端简支的焊接工字钢梁及其荷载如图所示，梁的横截面尺寸示于图中。试绘出截面 c 上 a, b 两点处的应力圆，并用应力圆求出这两点处的主应力。





§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

解: (1) 首先计算支反力, 并作出梁的剪力图和弯矩图

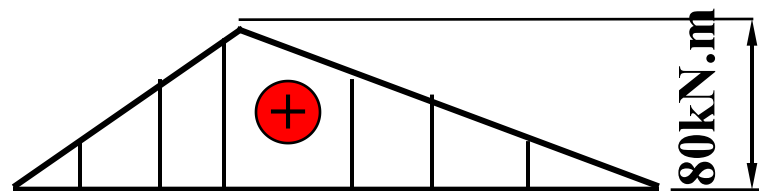
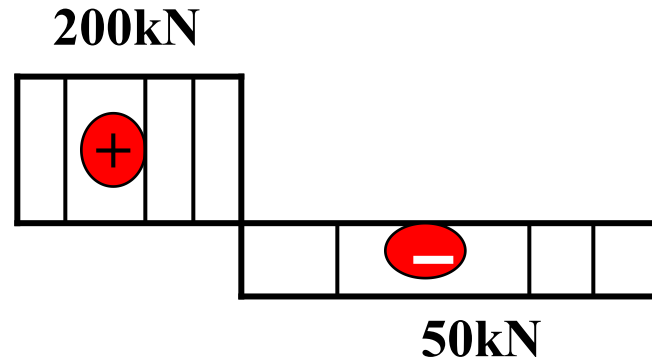
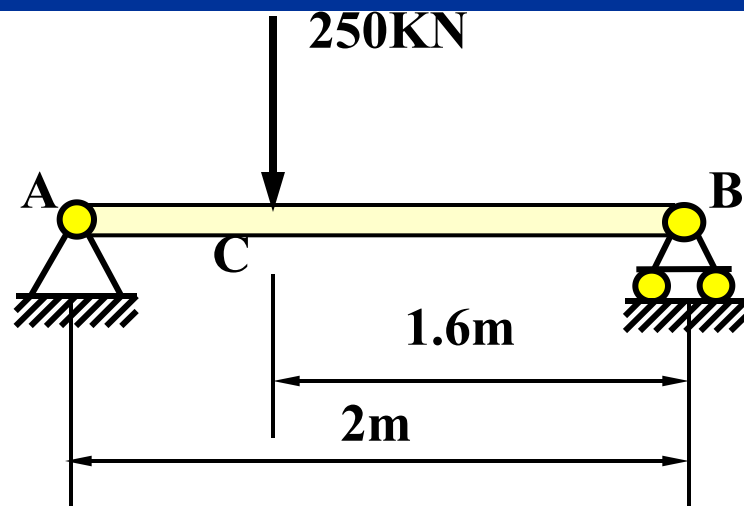
$$F_{S\max} = F_{C\text{左}} = 200 \text{ kN}$$

$$M_{\max} = M_C = 80 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \quad \tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z d}$$

$$I_z = \frac{120 \times 300^3}{12} - \frac{111 \times 270^3}{12}$$
$$= 88 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$y_a = 135 \text{ mm}$$



§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

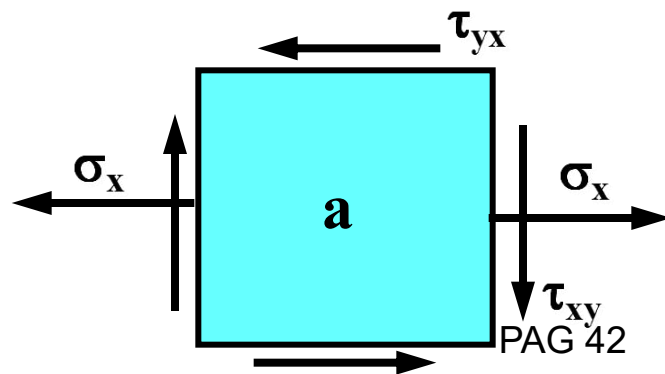
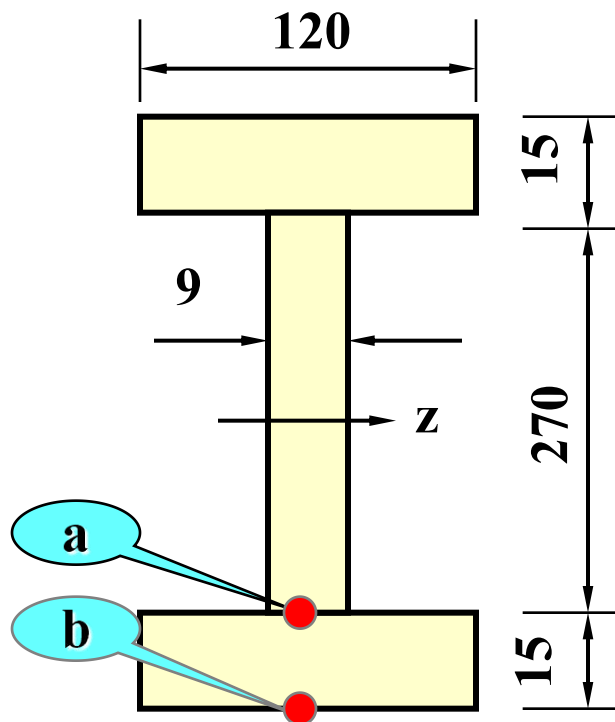
(2)横截面 C上a 点的应力为

$$\sigma_a = \frac{M_c}{I_z} y_a = 122.5 \text{MPa}$$

$$S_{za}^* = 120 \times 15 \times (150 - 7.5) = 256000 \text{mm}^3$$

$$\tau_a = \frac{F_s S_{za}^*}{I_z d} = 64.6 \text{MPa}$$

a点的单元体如图所示





§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

(3) 做应力圆

$$\sigma_x = 122.5 \text{ MPa}, \tau_{xy} = 64.6 \text{ MPa}$$

由 σ_x, τ_{xy} 确定 D 点

由 σ_y, τ_{yx} 确定 D' 点

以 DD' 为直径作应力圆

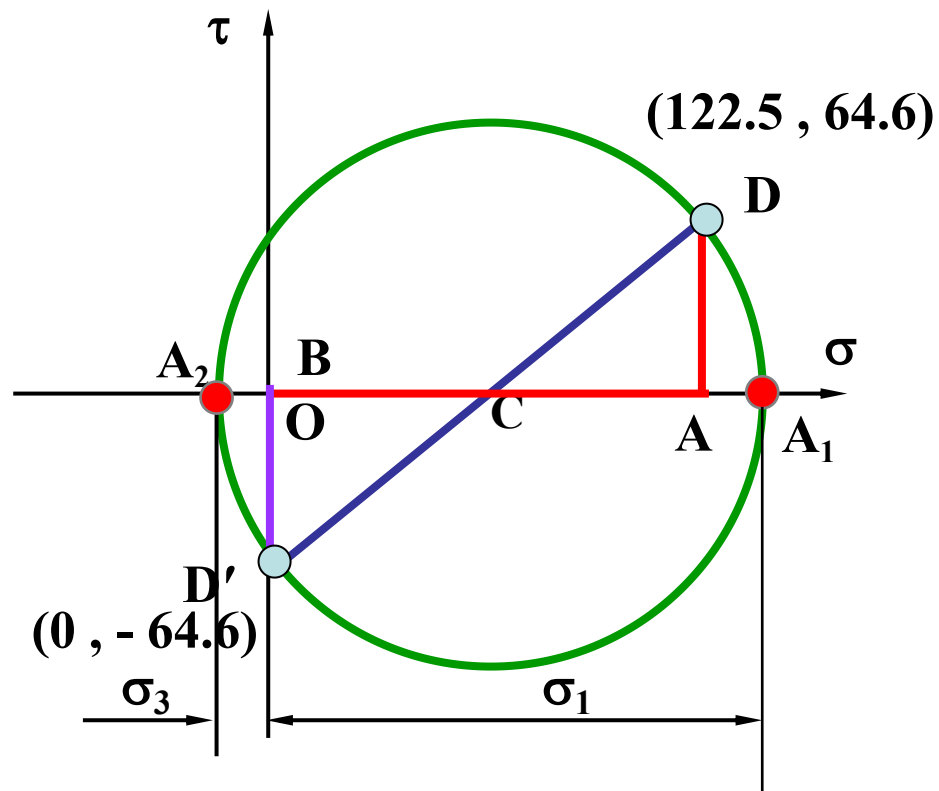
$$\sigma_1 = OA_1 = 150 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = OA_2 = -27 \text{ MPa}$$

A₁ 点对应于单元体上 σ_1 所在的主平面

$$2\alpha_0 = -45^\circ$$

$$\alpha_0 = -22.5^\circ$$





§ 7-3 平面应力状态分析-图解法

(4) 横截面 C 上 b 点的应力

$$y_b = 150\text{mm}$$

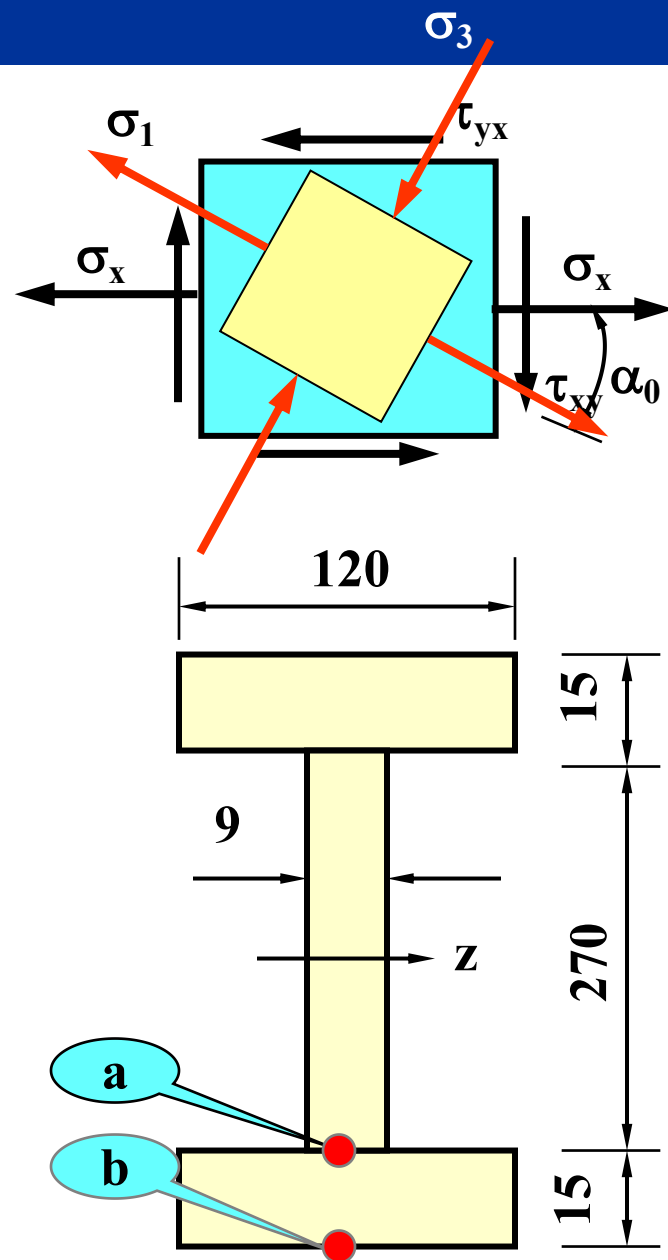
$$\sigma_b = \frac{M_c}{I_z} y_b = 136.5\text{MPa}$$

$$\tau_b = 0$$

b 点的三个主应力为

$$\sigma_1 = 136.5\text{MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

σ_1 所在的主平面就是 x 平面，
即梁的横截面 C

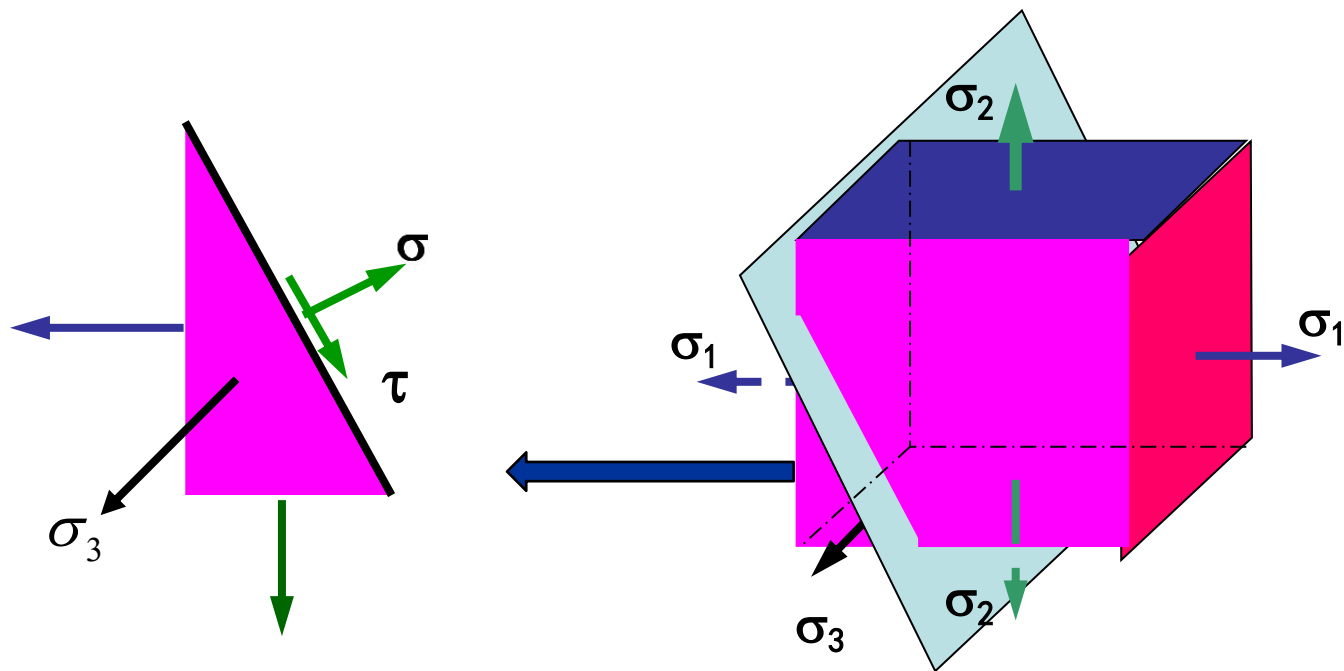
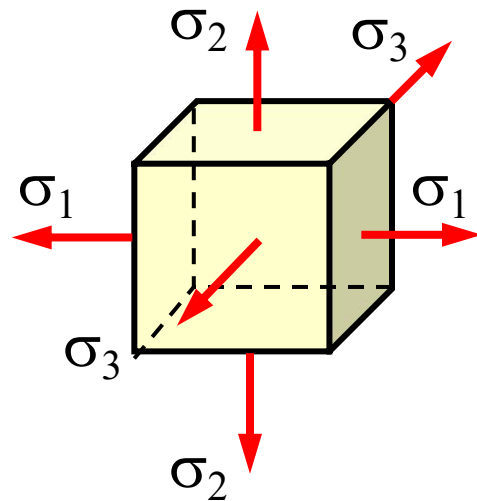


§ 7-4 三向应力状态分析

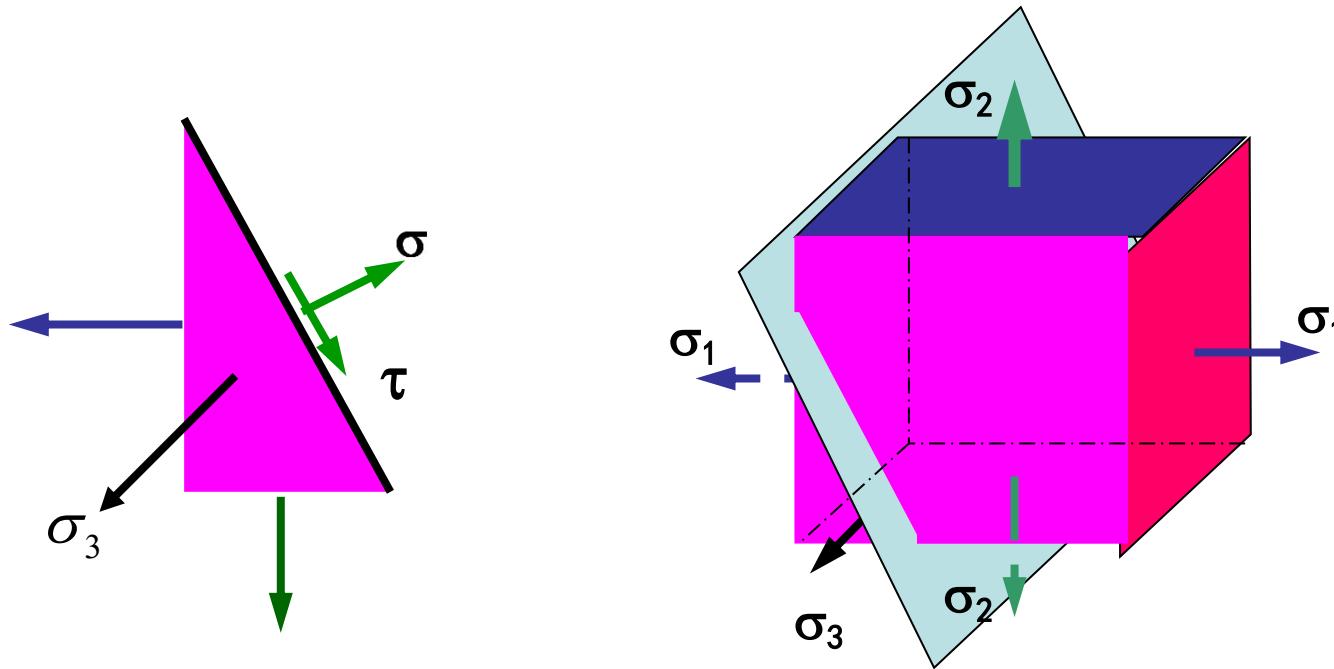
空间应力状态下的最大正应力和最大切应力

问题的提出：已知受力物体内某一点处三个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ，确定过该点的任意截面上的正应力和切应力。

首先研究与其中一个主平面（例如主应力 σ_3 所在的平面）垂直的斜截面上的应力



§ 7-4 三向应力状态分析



主应力 σ_3 所在的两平面上是一对自相平衡的力，因而该斜面上的应力 σ ， τ 与 σ_3 无关，只由主应力 σ_1 ， σ_2 决定

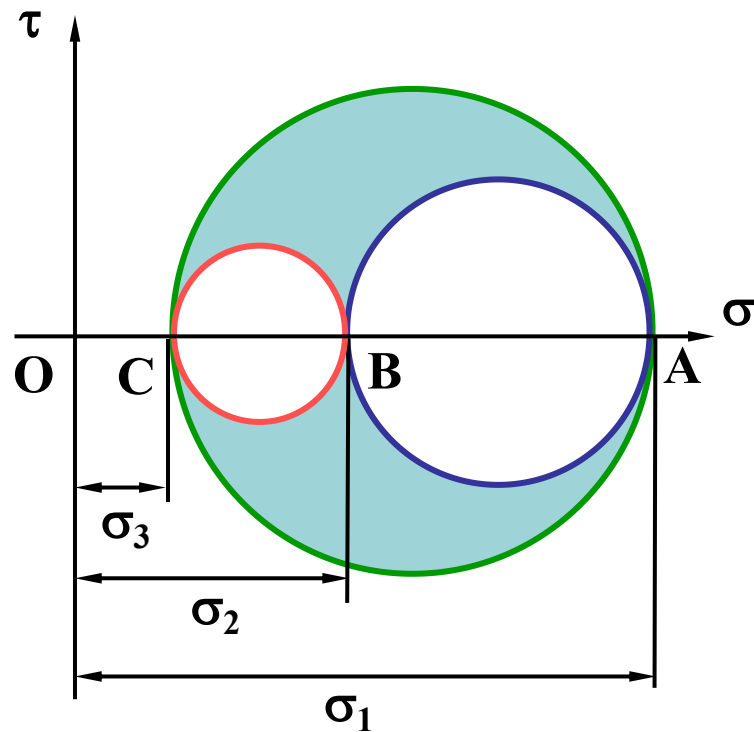


§ 7-4 三向应力状态分析

与主应力 σ_3 所在的主平面垂直的斜截面上的应力可用由 σ_1 ， σ_2 做出的应力圆上的点表示。

与主应力 σ_2 所在主平面垂直的斜截面上的应力 σ ， τ 可用由 σ_1 ， σ_3 作出的应力圆上的点来表示。

与主应力 σ_1 所在主平面垂直的斜截面上的应力 σ ， τ 可用由 σ_2 ， σ_3 作出的应力圆上的点来表示



三向应力圆



§ 7-4 三向应力状态分析

任意截面上应力 σ 和 τ 对应的 D 点必位于上述三个应力圆所围成的阴影内。

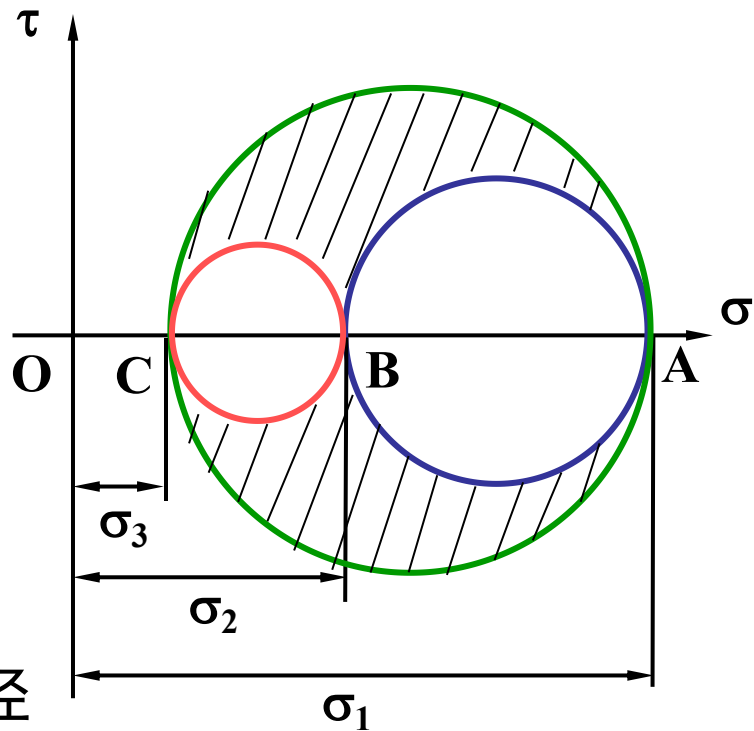
该点处的最大正应力(指代数值)应等于最大应力圆上A点的横坐标 σ_1

$$\sigma_{max} = \sigma_1$$

最大切应力则等于最大的应力圆的半径

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

最大切应力所在的截面与 σ_2 所在的主平面垂直，并与 σ_1 和 σ_3 所在的主平面成 45° 角。





§ 7-4 三向应力状态分析

例7-8 求图示单元体的主应力及最大切应力。(单位:MPa)

解:(1) 单元体左右侧面为主平面 $\sigma''' = 50$

(2) 建立应力坐标系, 画应力圆

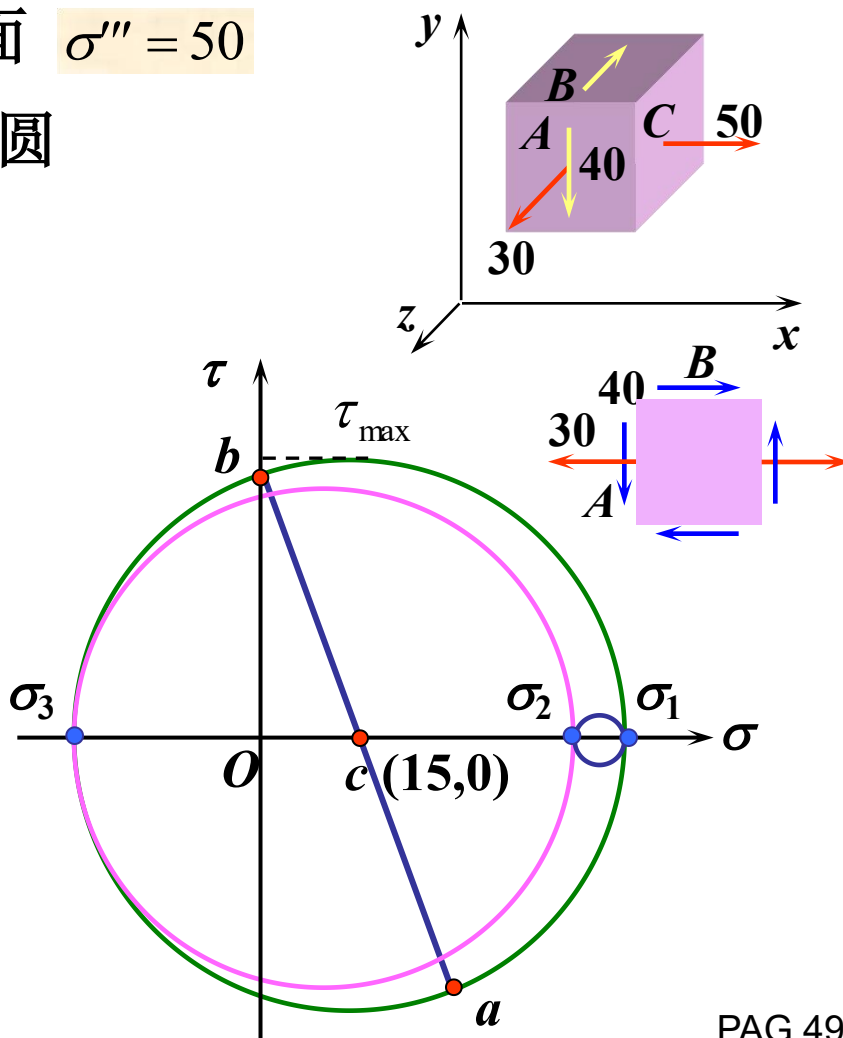
画点 $a(30, -40)$, $b(0, 40)$

$$R = \sqrt{15^2 + 40^2} = 43$$

$$\begin{cases} \sigma' \\ \sigma'' \end{cases} = oc \pm R = 15 \pm 43 = \begin{matrix} 58 \\ -28 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 58; \sigma_2 = 50; \sigma_3 = -28$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 43 = R$$





§ 7-5 广义胡克定律

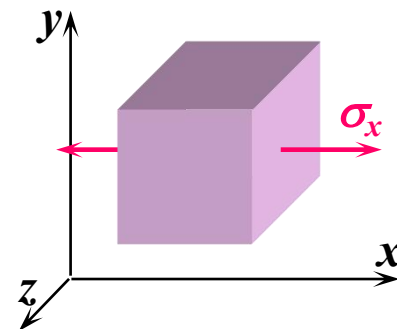
一、各向同性材料的广义胡克定律

1、单向拉压的应力应变关系(胡克定律)

当应力
不超过
比例极
限时

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}; \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

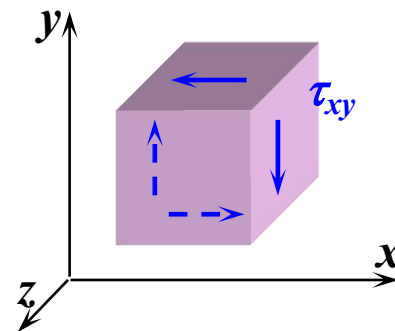
$$\gamma_{ij} \approx 0 \quad (i, j = x, y, z)$$



2、纯剪切的应力应变关系(剪切胡克定律)

切应变 $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{yz} = \gamma_{zx} \approx 0$

$$\varepsilon_i \approx 0 \quad (i = x, y, z)$$





§ 7-5 广义胡克定律

3、复杂应力状态下的应力应变关系(广义胡克定律)

最一般情况空间应力状态下，描述一点的应力状态需要九个应力分量，如图所示：

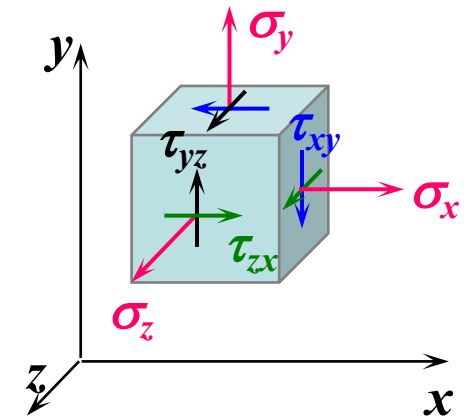
根据切应力互等定理

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

则独立的应力分量只有六个。

对于各向同性材料：

小变形及弹性范围内，线应变只和正应力有关，与切应力无关；而切应变只和切应力有关，而与正应力无关。



σ_x	σ_y	σ_z
τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
ε_x	ε_y	ε_z
γ_{xy}	γ_{xz}	γ_{yz}



§ 7-5 广义胡克定律

3、复杂应力状态下的应力应变关系(广义胡克定律)

σ_x 作用下 x 方向的线应变为 $\frac{\sigma_x}{E}$

σ_y 作用下 x 方向的线应变为 $-\mu \frac{\sigma_y}{E}$

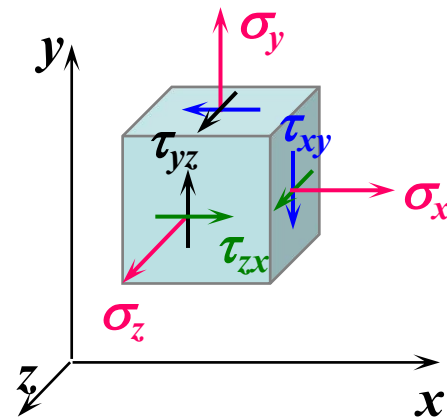
σ_z 作用下 x 方向的线应变为 $-\mu \frac{\sigma_z}{E}$

由叠加原理 $\varepsilon_x = [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]/E$

$$\varepsilon_y = [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]/E$$

$$\varepsilon_z = [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]/E$$

xy 、 yz 、 zx 面内的切应变 $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$; $\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$; $\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$



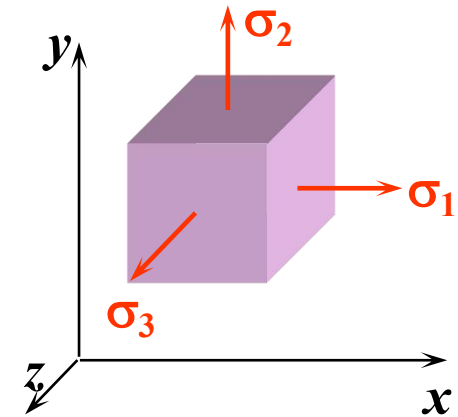


§ 7-5 广义胡克定律

主应力 — 主应变关系

$$\sigma_x = \sigma_1; \sigma_y = \sigma_2; \sigma_z = \sigma_3; \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \\ \gamma_{xy} = 0; \gamma_{yz} = 0; \gamma_{zx} = 0 \end{cases}$$



主应变与主应力的方向一致

主应变按代数值大小排列 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$

二向应力状态下, $\sigma_3 = 0$

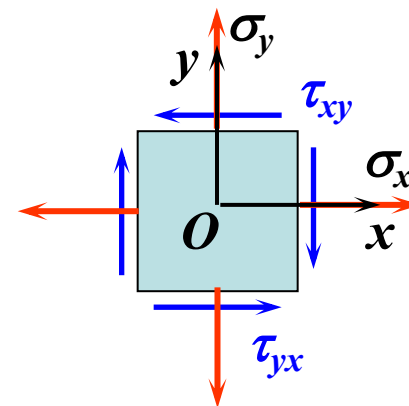
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_2) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu\sigma_1) \quad \varepsilon_3 = \frac{-\mu}{E} (\sigma_2 + \sigma_1)$$

§ 7-5 广义胡克定律

4、平面应力状态下的应力应变关系

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}; \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \frac{E(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)}{(1-\mu^2)} \\ \sigma_y = \frac{E(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)}{(1-\mu^2)} \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases}$$





§ 7-5 广义胡克定律

二、各向同性材料的体积应变

体积应变：构件每单位体积的体积变化。用 θ 表示。

考察三个边长为 a_1, a_2, a_3 的单元体，变形后的边长分别为

$$a_1(1+\varepsilon_1), a_2(1+\varepsilon_2), a_3(1+\varepsilon_3)$$

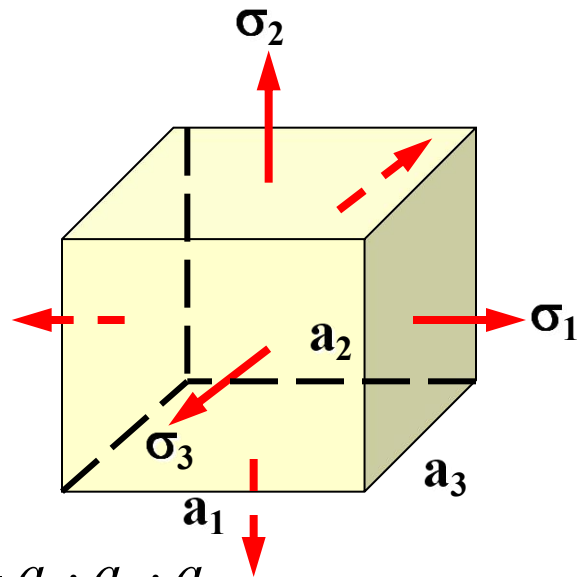
变形后单元体的体积为

$$V_1 = a_1(1+\varepsilon_1) \cdot a_2(1+\varepsilon_2) \cdot a_3(1+\varepsilon_3)$$

$$\theta = \frac{V_1 - V}{V} = \frac{a_1(1+\varepsilon_1) \cdot a_2(1+\varepsilon_2) \cdot a_3(1+\varepsilon_3) - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}$$

$$\approx \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}$$

$$= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$



§ 7-5 广义胡克定律

1、纯剪切应力状态下的体积应变

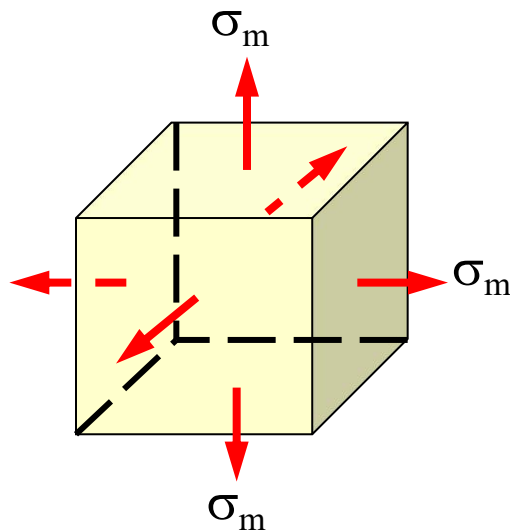
$$\Rightarrow \theta = 0$$

即在小变形下，切应力不引起各向同性材料的体积改变。

2、三向等值应力单元体的体积应变

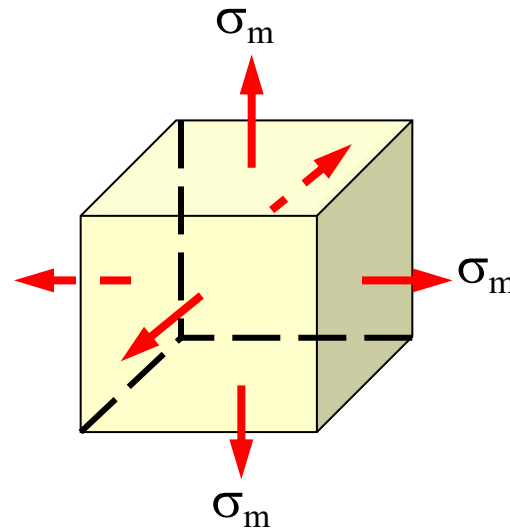
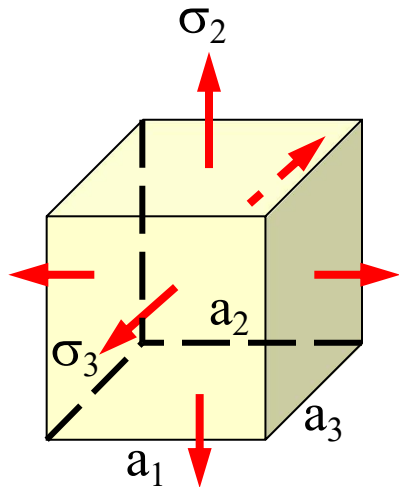
三个主应力为
$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

单元体的体积应变
$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_m + \sigma_m + \sigma_m)$$
$$= \frac{1-2\mu}{E} \cdot 3\sigma_m$$





§ 7-5 广义胡克定律



两个单元体的体积应变相同 $\theta = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot 3\sigma_m$$

单元体的三个主应变为 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_m - \mu(\sigma_m + \sigma_m)]$

$$= \frac{(1 - 2\mu)}{E} \cdot \sigma_m$$



§ 7-5 广义胡克定律

如果变形前单元体的三个棱边成某种比例，由于三个棱边应变相同，则变形后的三个棱边的长度仍保持这种比例. 所以在三向等值应力 σ_m 的作用下，单元体变形后的形状和变形前的相似，称这样的单元体是形状不变的。

在最一般的空间应力状态下，材料的体积应变只与三个线应变 ε_x ， ε_y ， ε_z 有关，仿照上述推导有

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

在任意形式的应力状态下，各向同性材料内一点处的体积应变与通过该点的任意三个相互垂直的平面上的正应力之和成正比，而与切应力无关。



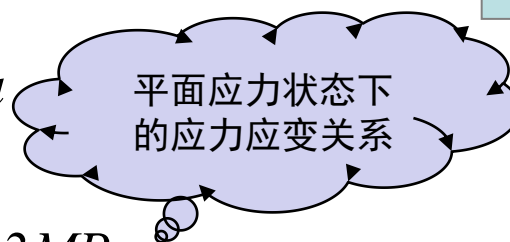
§ 7-5 广义胡克定律

例7-9 已知一受力构件自由表面上某点处两个面内的主应变分别为 $\varepsilon_1 = 240 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_3 = -160 \times 10^{-6}$, 弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 试求该点处的主应力及另一主应变。

解：自由面上 $\sigma'' = 0$, 所以该点为平面应力状态

$$\sigma' = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_3) = 44.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma''' = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_3 + \mu \varepsilon_1) = -20.3 \text{ MPa}$$

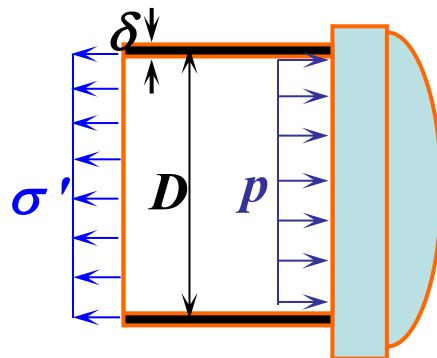
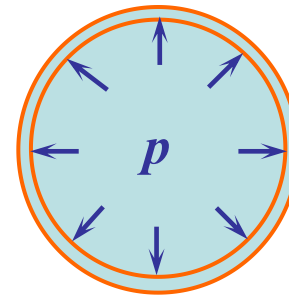
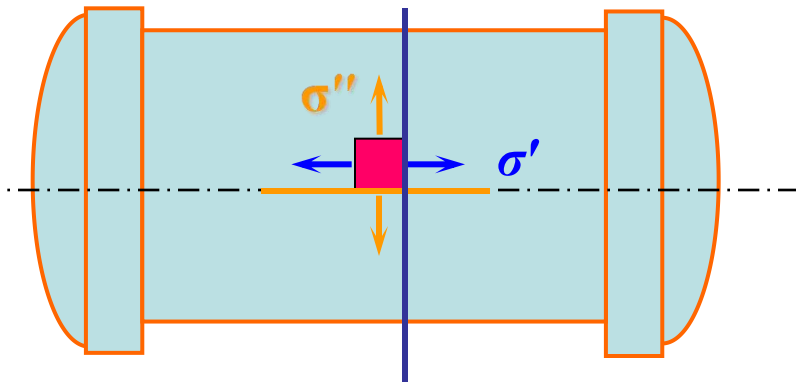


$$\Rightarrow \sigma_1 = 44.3 \text{ MPa}; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -20.3 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] = -\frac{\mu}{E} (\sigma_3 + \sigma_1) = -34.3 \times 10^{-6}$$

§ 7-5 广义胡克定律

例7-10 已知承压薄壁容器的平均直径 $D=500\text{mm}$, 壁厚 $\delta=10\text{mm}$, $E=210\text{GPa}$, $\mu=0.25$ 。为测容器所受的内压力值, 在容器表面用电阻应变片测得环向应变 $\varepsilon''=350 \times 10^{-6}$, 试求该内压力 p 。

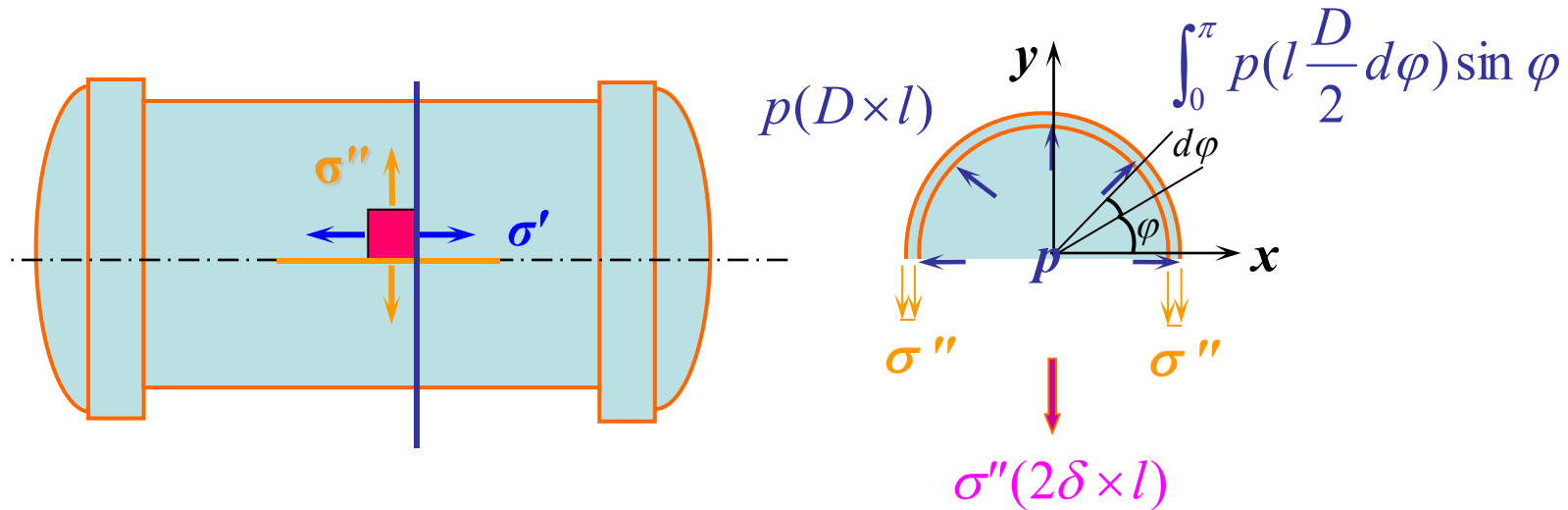


横截面上的正应力

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0, \quad \frac{\pi D^2 p}{4} - \pi D \delta \sigma' = 0 \\ \Rightarrow \sigma' &= \frac{pD}{4\delta}\end{aligned}$$

§ 7-5 广义胡克定律

例7-10 已知承压薄壁容器的平均直径 $D=500\text{mm}$, 壁厚 $\delta=10\text{mm}$, $E=210\text{GPa}$, $\mu=0.25$ 。为测容器所受的内压力值, 在容器表面用电阻应变片测得环向应变 $\varepsilon''=350 \times 10^{-6}$, 试求该内压力 p 。



纵截面上的正应力

$$\Sigma F_y = 0, p(D \times l) - \sigma''(2\delta \times l) = 0 \Rightarrow \sigma'' = \frac{pD}{2\delta}$$



§ 7-5 广义胡克定律

例7-10 已知承压薄壁容器的平均直径 $D=500\text{mm}$, 壁厚 $\delta=10\text{mm}$, $E=210\text{GPa}$, $\mu=0.25$ 。为测容器所受的内压力值, 在容器表面用电阻应变片测得环向应变 $\varepsilon''=350 \times 10^{-6}$, 试求该内压力 p 。

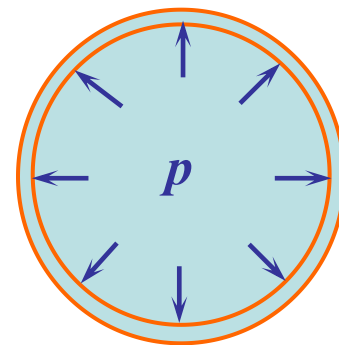
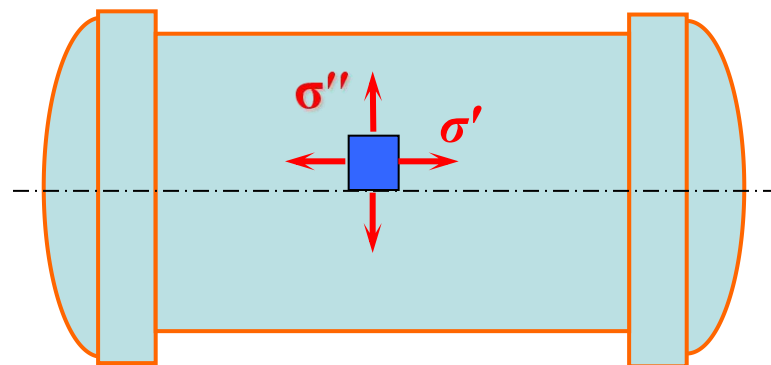
解:(1) 由平衡求容器横截面和纵截面上的正应力

$$\sigma' = \frac{pD}{4\delta}; \sigma'' = \frac{pD}{2\delta}$$

(2) 根据应力应变关系求内压力

平面应力状态下 $\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x)$

$$\Rightarrow \varepsilon'' = \frac{1}{E}(\sigma'' - \mu\sigma') \Rightarrow p = \frac{4\delta E \varepsilon''}{D(2 - \mu)} = 3.36\text{MPa}$$





§ 7-5 广义胡克定律

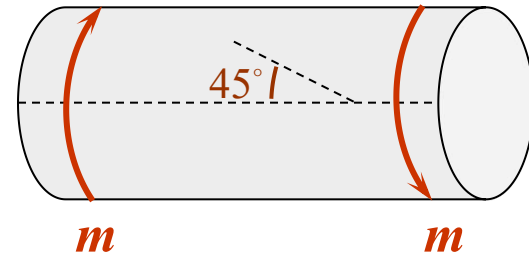
例7-11 受扭圆轴直径 $d=20\text{mm}$, $E=200\text{GPa}$, $\mu=0.3$, 若圆轴表面与轴线成 45° 方向的应变为 $\varepsilon=5.2 \times 10^{-4}$, 求圆轴所受扭矩。

解:(1) 围绕A点取一单元体

极值切应力面与主平面成 45° 角

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \pm \tau_x$$

$$\sigma_{min}$$

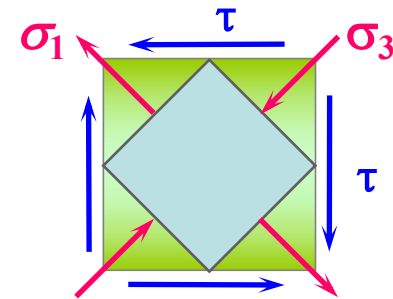


$$\sigma_1 = \tau; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\tau \quad \tau = \frac{T}{W_p}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$= \frac{1}{E} (\tau + \mu\tau) = \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{T}{W_p}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\varepsilon E \cdot \pi d^3 / 16}{(1+\mu)} = 125.7 \text{ N} \cdot \text{m}$$





§ 7-5 广义胡克定律

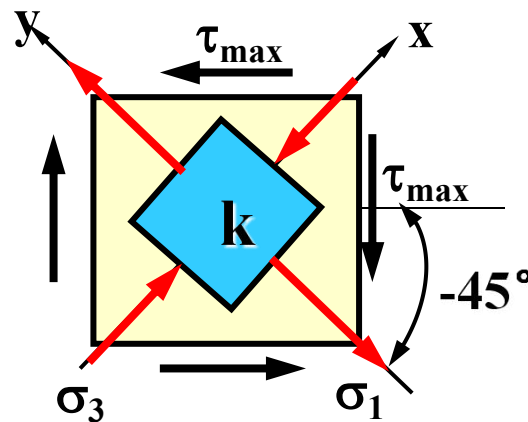
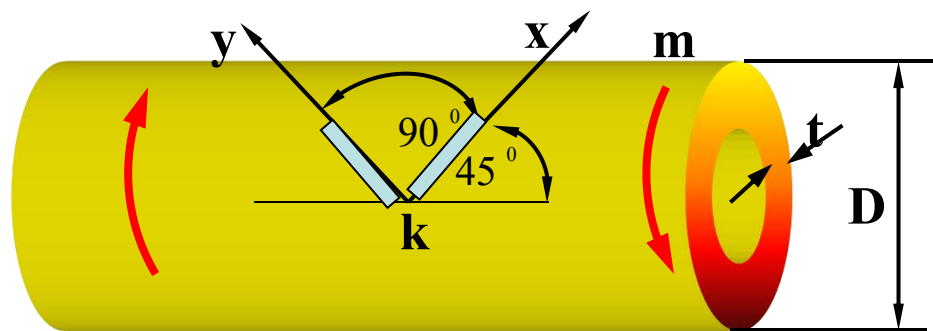
例7-12 壁厚 $t=10\text{mm}$, 外径 $D=60\text{mm}$ 的薄壁圆筒, 在表面上 k 点与其轴线成 45° 和 135° 角, 即 x, y 两方向分别贴上应变片, 然后在圆筒两端作用矩为 m 的扭转力偶, 如图所示, 已知圆筒材料的弹性常数为 $E=200\text{GPa}$ 和 $\mu=0.3$, 若该圆筒的变形在弹性范围内, 且 $\tau_{\max}=80\text{MPa}$, 试求 k 点处的线应变 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ 以及变形后的筒壁厚度。

解: 从圆筒表面 k 点处取出单元体, 其各面上的应力分量如图所示可求得

$$\sigma_y = \sigma_1 = \tau_{\max} = 80\text{MPa}$$

$$\sigma_x = \sigma_3 = -\tau_{\max} = -80\text{MPa}$$

$$\sigma_z = 0$$





§ 7-5 广义胡克定律

k点处的线应变 ε_x , ε_y 为

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) = \frac{1}{E}(-\tau_{max} - \mu\tau_{max}) \\ &= -\frac{(1+\mu)}{E}\tau_{max} = -5.2 \times 10^{-4} \quad (\text{压应变})\end{aligned}$$

$$\varepsilon_y = -\varepsilon_x = 5.2 \times 10^{-4} \quad (\text{拉应变})$$

圆筒表面上k点处沿径向 (z轴) 的应变和圆筒中任一点 (该点到圆筒横截面中心的距离为 ρ) 处的径向应变为

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\mu}{E}(-\tau_{max} + \tau_{max}) = 0$$

$$\varepsilon_{z\rho} = -\frac{\mu}{E}(-\tau_\rho + \tau_\rho) = 0$$

因此, 该圆筒变形后的厚度并无变化, 仍然为 $t=10\text{mm}$. PAG 65



§ 7-5 广义胡克定律

例7-14 简支梁由18号工字钢制成. 其上作用有力 $F=15\text{kN}$,
已知 $E=200\text{GPa}$, $\mu=0.3$.

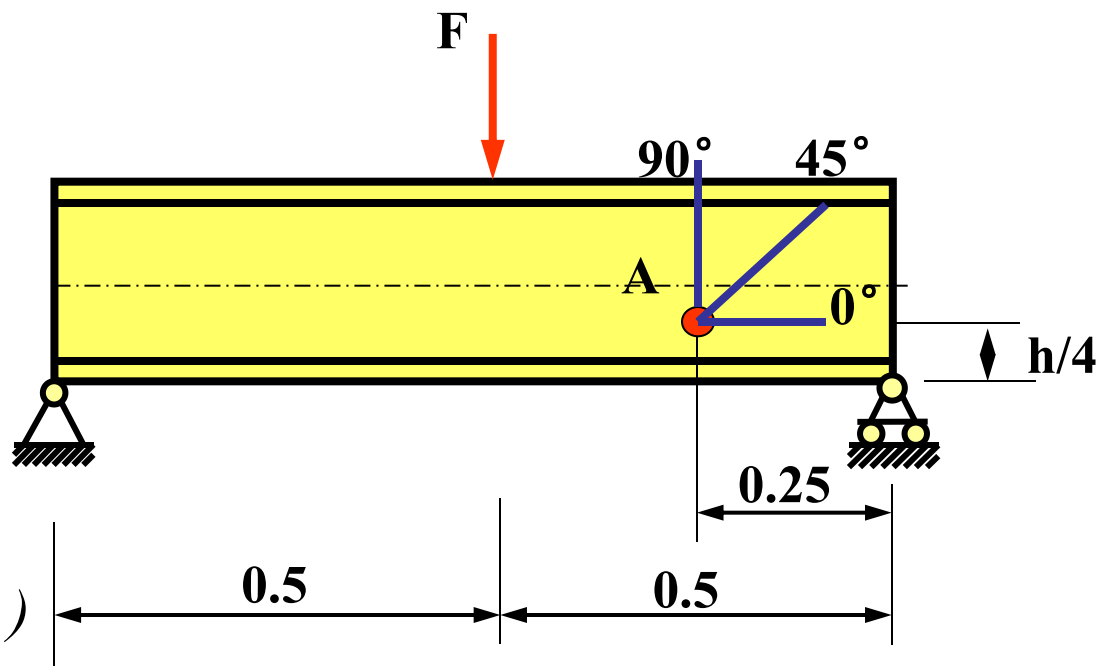
求: A 点沿 0° , 45° , 90° 方向的应力

解: $M_A = \frac{F}{2} \times 0.25$

$$F_{SA} = -\frac{F}{2}$$

$$\sigma_A = \frac{M_A}{I_z} y_A = 50.8\text{MPa}$$

$$\tau_A = \frac{F_{SA} S_{zA}^*}{I_z d} = 68.8\text{MPa} \quad (-)$$



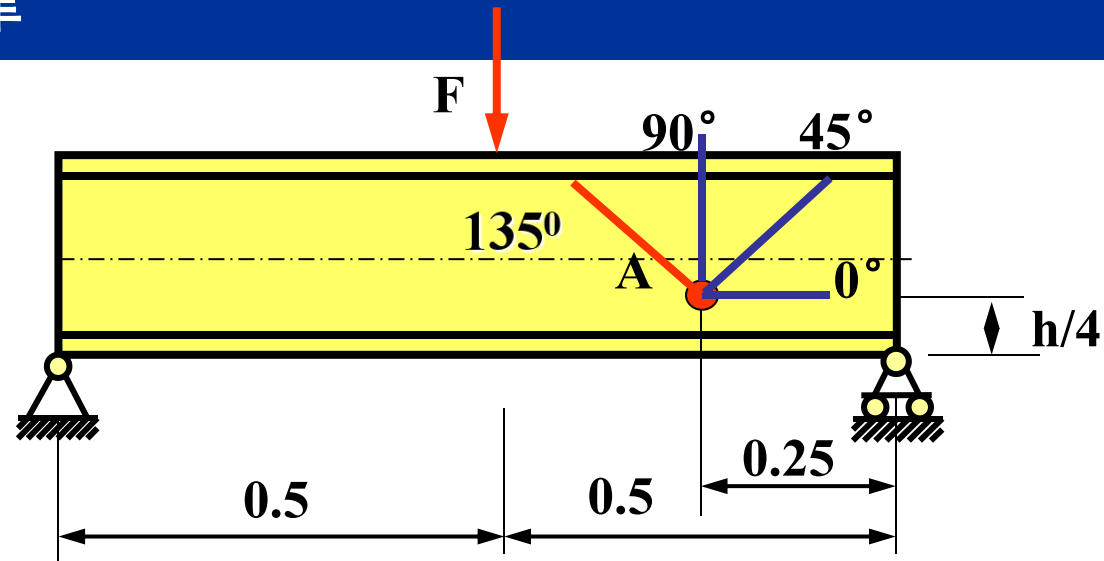
其中, y_A , I_z , d 查表得出, S_{zA}^* 为截面A点以外面积对中性轴z的静矩



§ 7-5 广义胡克定律

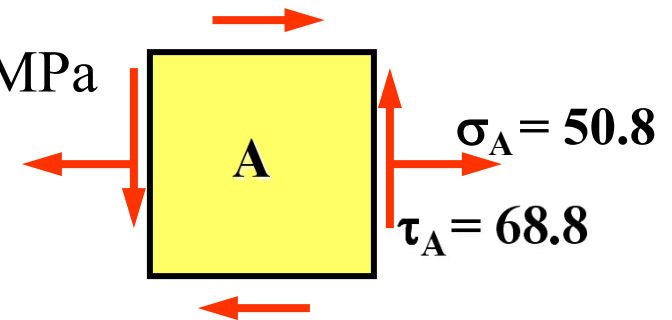
$$\sigma_{0^\circ} = \sigma_A = 50.8$$

$$\sigma_{90^\circ} = \sigma_y = 0$$



$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 90^\circ - \tau_x \sin 90^\circ = 94.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{135^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 270^\circ - \tau_x \sin 270^\circ = -43.3 \text{ MPa}$$





§ 7-6 复杂应力状态的应变能密度

一、应变能密度的定义

物体在单位体积内所积蓄的应变能.

二、应变能密度的计算公式（线弹性阶段）

1、单向应力状态下，物体内部所积蓄的应变能密度为

$$v_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E}{2} \varepsilon^2$$

2、三个主应力同时存在时，单元体的应变能密度为

$$v_{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

将广义胡克定律代入上式，经整理得

$$v_{\varepsilon} = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right]$$



§ 7-6 复杂应力状态的应变能密度

用 v_V 表示单元体体积改变相应的那部分应变能密度，称为体积改变能密度。

用 v_d 表示与单元体形状改变相应的那部分应变能密度，称为畸变能密度。

应变能密度 v_ε 等于两部分之和

$$v_\varepsilon = v_V + v_d$$

§ 7-6 复杂应力状态的应变能密度

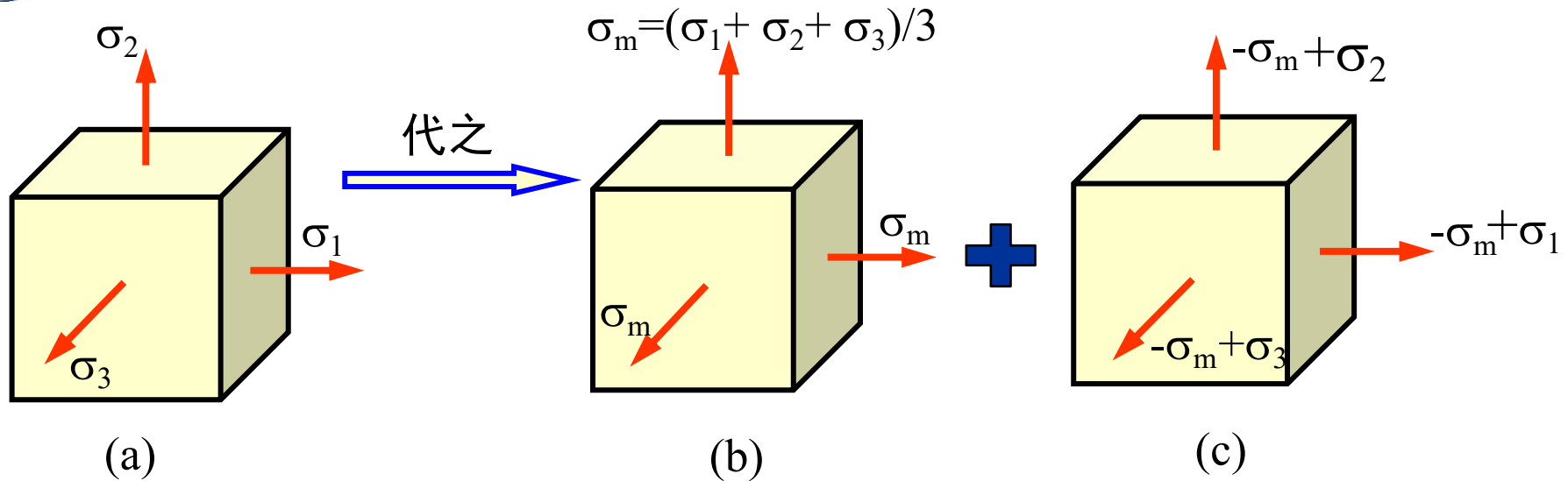


图 b 所示单元体的三个主应力相等，因而，变形后的形状与原来的形状相似，即只发生体积改变而无形状改变。

图 c 所示单元体的三个主应力不相等，因而，变形后发生形状改变。

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 - \sigma_m + \sigma_2 - \sigma_m + \sigma_3 - \sigma_m) = 0 \quad \text{变形后体积不发生改变}$$



§ 7-6 复杂应力状态的应变能密度

图 b 所示单元体的体积改变能密度

$$\begin{aligned}(v_V)_b &= (v_\varepsilon)_b = \frac{1}{2E}[(\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2 - 2\mu(\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2))] \\&= \frac{3(1-2\mu)}{2E}\sigma_m^2 \\&= \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2\end{aligned}$$



§ 7-6 复杂应力状态的应变能密度

a单元体的应变能密度为

$$v_{\varepsilon} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

c所示单元体的形状应变能密度为

$$\begin{aligned} v_d &= v_{\varepsilon} - v_V \\ &= \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned}$$



§ 7-7 强度理论

一、问题的提出

1. 基本变形下的强度条件

正应力强度条件	轴向拉压	$\sigma_{\max} = \frac{F_{N\max}}{A} \leq [\sigma]$
	弯曲	$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$
切应力强度条件	剪切	$\tau = \frac{F_S}{A} \leq [\tau]$
	扭转	$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} \leq [\tau]$
	弯曲	$\tau_{\max} = \frac{F_{S\max} \cdot S_{z\max}^*}{I_z b} \leq [\tau]$



§ 7-7 强度理论

危险点的应力状态一般为 单向拉压 或 纯剪切

正应力
强度条件

$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_u}{n}$

— 极限正应力
— 安全因数

切应力
强度条件

$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{\tau_u}{n}$

— 极限切应力
— 安全因数

}

由
试
验
测
定

计算应力≤试验值



§ 7-7 强度理论

上述强度条件具有如下特点

(1) 危险点处于单向应力状态或纯剪切应力状态;

(2) 材料的许用应力,是通过拉(压)试验或纯剪试验测定试件在破坏时其横截面上的极限应力,以此极限应力作为强度指标,除以适当的安全因数而得,即根据相应的试验结果建立的强度条件.

观察破坏现象

实验测定极限应力

建立强度条件



§ 7-7 强度理论

复杂应力状态下的强度分析存在的问题：

- (1) 对于复杂应力状态，危险点的强度并不仅仅取决于横截面上的应力，也不仅仅取决于某一种应力，而需要考虑各个方向的应力的共同作用。**
- (2) 复杂应力状态各式各样，无穷多种；实验无穷无尽，不可能测出每一种应力状态的极限应力。**
- (3) 有些复杂应力状态的实验，技术上难以实现。**



§ 7-7 强度理论

二、强度理论的提出

为了建立复杂应力状态下的强度条件，人们根据大量的破坏现象，通过判断、推理、概括，提出了种种关于破坏原因的假说，找出引起破坏的主要因素。经过时间检验，不断完善，在一定范围与实际相符合，上升为理论。

强度理论的核心内容

- (1) 对破坏形式分类；
- (2) 同一种形式的破坏，可以认为是由相同的原因造成的；
- (3) 至于破坏的原因是什么，可由观察提出假说，这些假说称为强度理论；
- (4) 假说认为材料之所以发生断裂或屈服，是由应力、应变、应变能密度等因素中的某一种引起，且失效的原因与应力状态无关，可由简单应力状态的实验结果建立复杂应力状态下的强度条件。 $[\sigma]$



§ 7-7 强度理论

三、材料破坏的基本形式

1、塑性屈服

在外力作用下，构件上出现了明显的塑性变形。

如：低、中碳钢，铝和铜等塑性材料拉伸或扭转

2、脆性断裂

在外力作用下，构件在未产生明显的塑性变形的情况下就突然断裂。

如：铸铁、高碳钢等脆性材料在拉伸或扭转



§ 7-7 强度理论

四、四种常用强度理论

- 1、伽利略播下了第一强度理论的种子；
 - 2、马里奥特关于变形过大引起破坏的论述，是第二强度理论的萌芽；
 - 3、杜奎特(C.Duguet)提出了最大切应力理论；
 - 4、麦克斯威尔最早提出了最大畸变能理论，这是后来人们在他的书信出版后才知道的。
- 第一类强度理论 — 以脆断作为破坏的标志
包括：最大拉应力理论和最大伸长线应变理论
 - 第二类强度理论 — 以出现屈服现象作为破坏的标志
包括：最大切应力理论和形状改变比能理论



§ 7-7 强度理论

1、最大拉应力理论（第一强度理论）

理论认为，引起构件脆性断裂的主要因素是最大拉应力，不论材料处于何种应力状态，只要构件危险点处的最大拉应力达到材料的极限应力值时，就会引起材料的脆性断裂。

(1) 破坏条件 $\sigma_{\max}^t = \sigma_u \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_b$

(2) 强度条件 $\sigma_1 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n}; (\sigma_1 > 0)$

(3) 适用范围：适用于破坏形式为脆断的构件



§ 7-7 强度理论

2、最大伸长线应变理论（第二强度理论）

理论认为，引起材料发生脆性断裂的主要因素是最大伸长线应变，无论材料处于何种应力状态，只要构件危险点处的最大伸长线应变达到某一个极限值时，就会引起材料的脆性断裂。

(1) 破坏条件 $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \varepsilon_u \Rightarrow \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_b}{E}$

材料在破坏前服从胡克定律

(2) 强度条件 $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n}$

(3) 适用范围：适用于破坏形式为脆断的构件



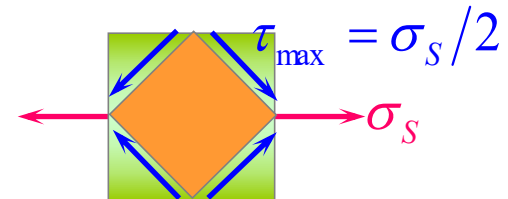
§ 7-7 强度理论

3、最大切应力理论（第三强度理论）

理论认为，使材料发生塑性屈服的主要因素是最大切应力，无论材料处于何种应力状态，只要构件的最大切应力达到极限切应力时，就会引起材料的塑性屈服。

(1) 破坏条件 $\tau_{\max} = \tau_u = \frac{\sigma_S}{2}$

复杂应力状态 $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_S}{2}$



(2) 强度条件 $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_S}{n}$

(3) 适用范围：适用于破坏形式为屈服的构件



§ 7-7 强度理论

4、畸变能密度理论（第四强度理论）

理论认为，使材料发生塑性屈服的主要原因取决于畸变能密度，不论材料处于何种应力状态，只要其畸变能密度达到极限值，就会引起材料的塑性屈服。

(1) 破坏条件
$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_s$$

(2) 强度条件
$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n}$$

(3) 适用范围：适用于破坏形式为屈服的构件



§ 7-7 强度理论

六、莫尔强度理论

莫尔认为：最大切应力是使物体破坏的主要因素，但滑移面上的摩擦力也不可忽略（莫尔摩擦定律）。综合最大切应力及最大正应力的因素，莫尔得出了他自己的强度理论。



阿托·莫尔(O.Mohr),1835~1918



§ 7-7 强度理论

莫尔强度理论：任意一点的应力圆若与极限曲线相接触，则材料即将屈服或剪断。

公式推导

$$\overline{O_1N} = \frac{[\sigma_t]}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

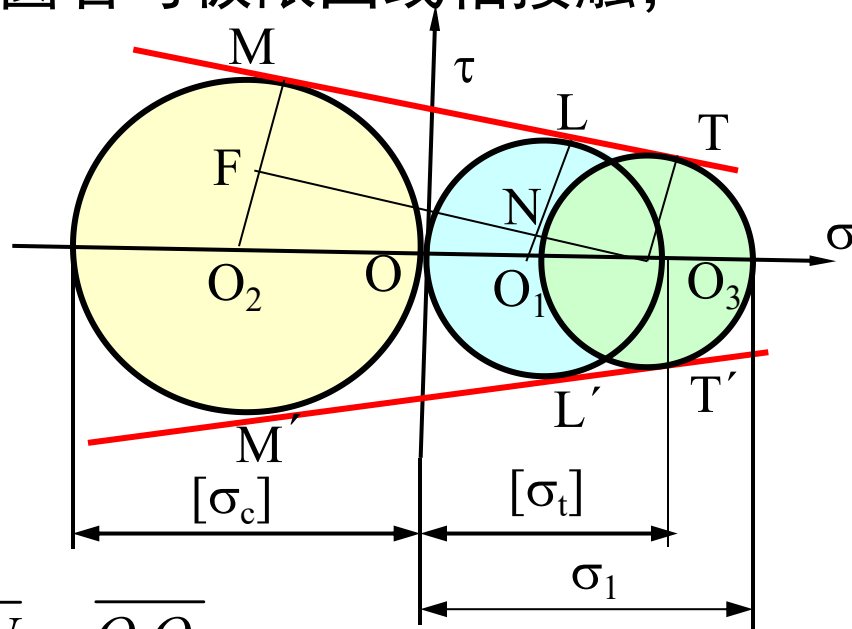
$$\overline{O_2F} = \frac{[\sigma_c]}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\overline{O_3O_1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{[\sigma_t]}{2}$$

$$\overline{O_3O_2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{[\sigma_c]}{2}$$

代入 $\frac{\overline{O_1N}}{\overline{O_2F}} = \frac{\overline{O_3O_1}}{\overline{O_3O_2}}$

强度条件 $\sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} \sigma_3 \leq [\sigma_t]$





§ 7-7 强度理论

八、强度理论的应用

1、强度理论的选择

(1) 材料

脆性材料 — 使用第一理论和第二理论；

塑性材料 — 使用第三理论和第四理论；

(2) 危险点的应力状态

三向拉伸 $\sigma_i > 0, (i = 1, 2, 3)$ 使用第一理论和第二理论；

三向压缩 $\sigma_i < 0, (i = 1, 2, 3)$ 使用第三理论和第四理论；



§ 7-7 强度理论

2、强度计算的步骤

- (1) **外力分析**：确定各外力值；
- (2) **内力分析**：画内力图, 确定可能的危险截面；
- (3) **应力分析**：画危险截面的应力分布图, 确定危险点并画出单元体, 求主应力。
- (4) **强度分析**：选择适当的强度理论, 计算相当应力, 然后进行强度计算。



§ 7-7 强度理论

例7-15 已知铸铁构件危险点处的应力状态, 若铸铁拉伸许用应力为 $[\sigma]^+ = 40\text{MPa}$, 试校核该点处的强度。

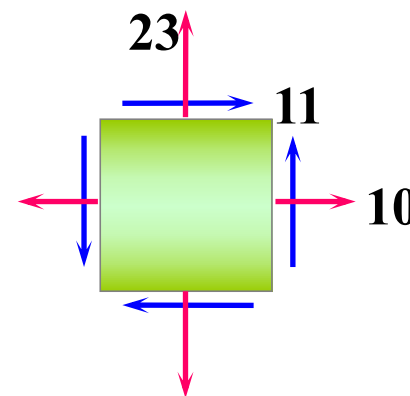
解:(1) 计算主应力

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 29.3\text{MPa} \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 3.7\text{MPa} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 29.3\text{MPa}; \sigma_2 = 3.7\text{MPa}; \sigma_3 = 0$$

(2) 采用第一强度理论校核 $\sigma_1 \leq [\sigma]$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 29.3\text{MPa} < [\sigma] = 40\text{MPa} \quad \text{该点强度足够}$$





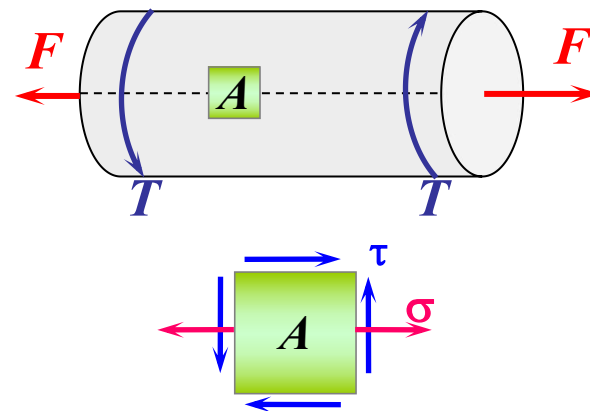
§ 7-8 强度理论

例7-16 直径 $d=0.1\text{m}$ 的铸铁圆杆受力如图, $T=7\text{kNm}$, $F=50\text{kN}$, 若 $[\sigma]^t=50\text{MPa}$, 试用第一强度理论校核杆的强度。

解: 危险点 A 的应力状态如图

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{50 \times 10^3}{\pi \times 0.1^2 / 4} = 6.4 \text{MPa}$$

$$\tau = \frac{T}{W} = \frac{7 \times 10^3}{\pi \times 0.1^3 / 16} = 35.7 \text{MPa}$$



$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{6.4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6.4}{2}\right)^2 + 35.7^2} = \begin{matrix} 39.0 \text{MPa} \\ -32.6 \text{MPa} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 39.0 \text{MPa}; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -32.6 \text{MPa}$$

由第一强度理论知 $\sigma_1 < [\sigma]$, 故安全。

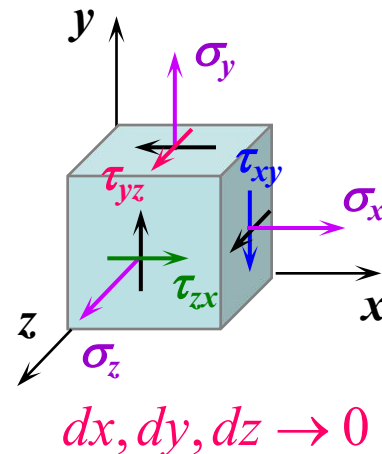
本章小结

一、一点应力状态的描述

1、单元体：围绕一点截取的微小正六面体

单元体各面上应力均匀分布；

单元体内相互平行的截面上应力相同。



主平面：单元体上切应力为零的平面。

主单元体：各侧面上切应力均为零的单元体。

主应力：主平面上的正应力。

主应力按代数值大小排列

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

本章小结

一、一点应力状态的描述

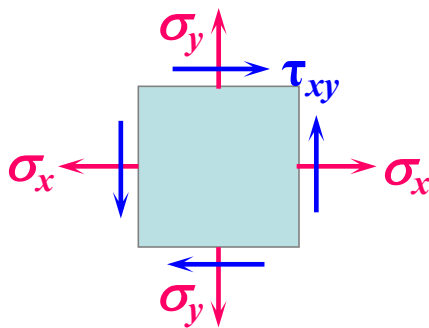
2、应力状态分类

简单
应力状态

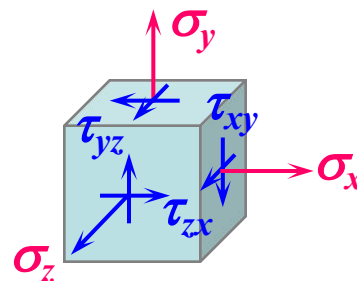


单向应力状态

复杂
应力状态



平面应力状态



空间应力状态

本章小结

二、平面应力状态的应力分析

1、解析法

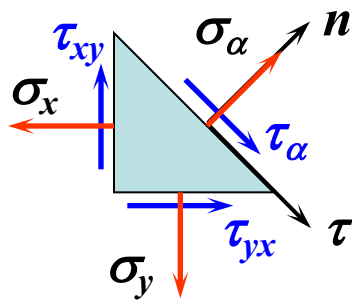
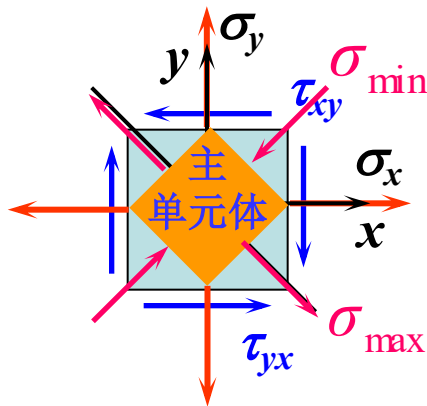
(1) 任意斜截面上的应力

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

(2) 极值应力

$$\text{令 } \frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\alpha_0, \left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



方位角中绝对值较小的对应 σ_{\max} 所在平面

本章小结

二、平面应力状态的应力分析

1、解析法

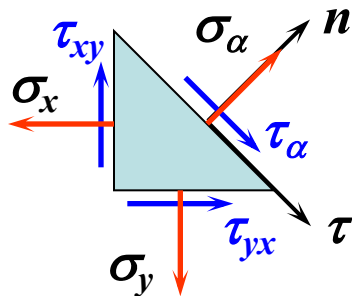
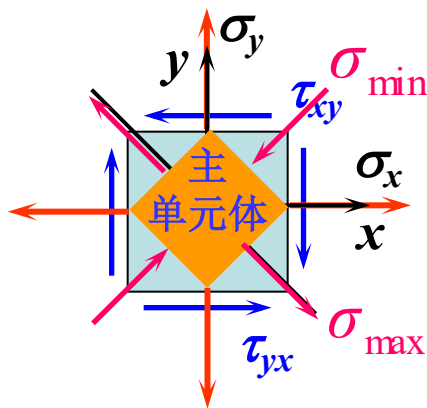
(2) 极值应力

$$\text{令 } \frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \text{tg}2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\alpha_1, (\alpha_1 + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{cases} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\text{tg}2\alpha_0 = -\frac{1}{\text{tg}2\alpha_1} \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 + \frac{\pi}{4}$$

极值切应力面与主平面成 45° 角

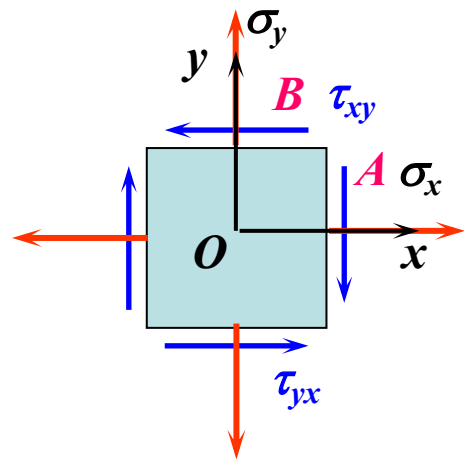


本章小结

二、平面应力状态的应力分析

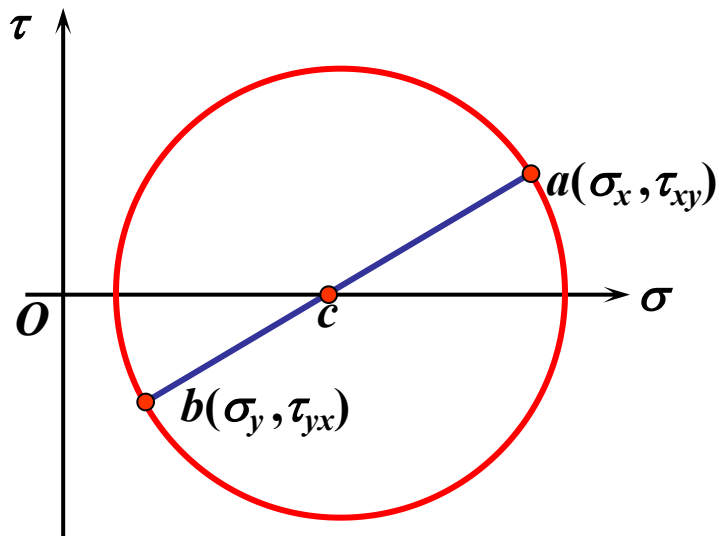
2、应力圆

$$\left(\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$



(1) 应力圆的画法

- ① 选比例尺, 建应力坐标系;
- ② 在坐标系内画出点
 $a(\sigma_x, \tau_{xy})$ $b(\sigma_y, \tau_{yx})$;
- ③ 以 ab 与 σ 轴的交点 c 为圆心, ac 为半径画应力圆。



本章小结

二、平面应力状态的应力分析

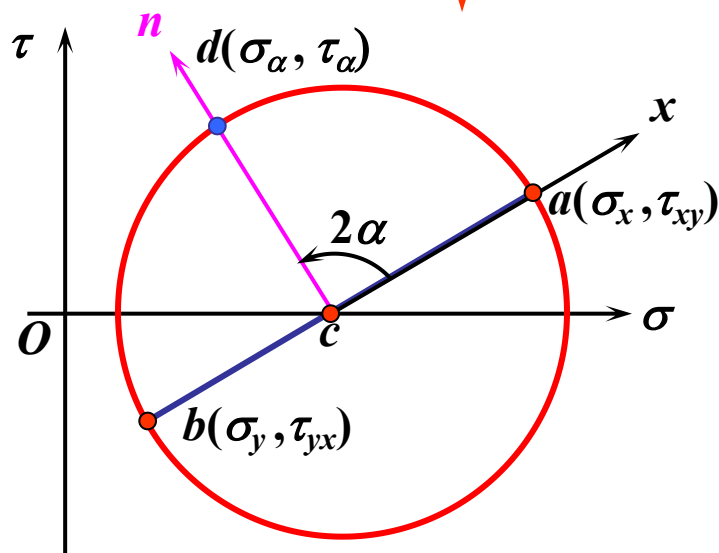
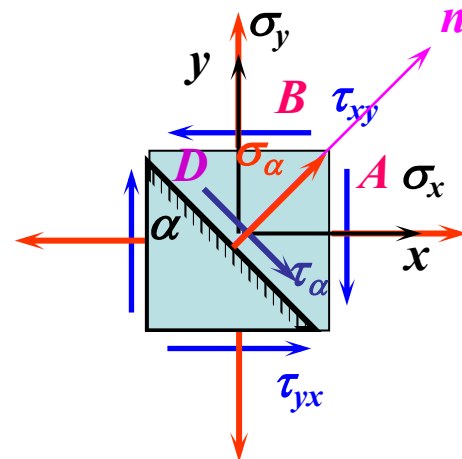
2、应力圆

(2) 单元体与应力圆的对应关系

① **点面对应** — 应力圆上某一点的坐标 $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ 对应着单元体 α 斜截面上的正应力和切应力；

② **转向对应** — 半径旋转方向与 α 面法线旋转方向一致；

③ **二倍角对应** — 半径转过的角度是 α 面旋转角度的两倍。



本章小结

二、平面应力状态的应力分析

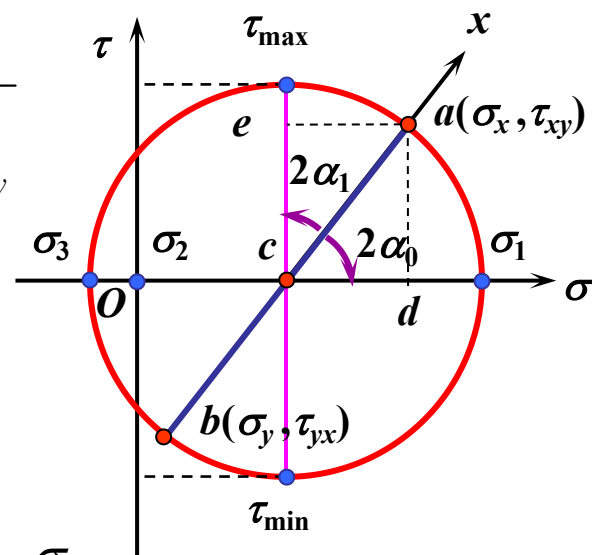
3、主应力、主平面与极值应力

$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = oc \pm R_{\text{半径}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{ad}{dc} = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

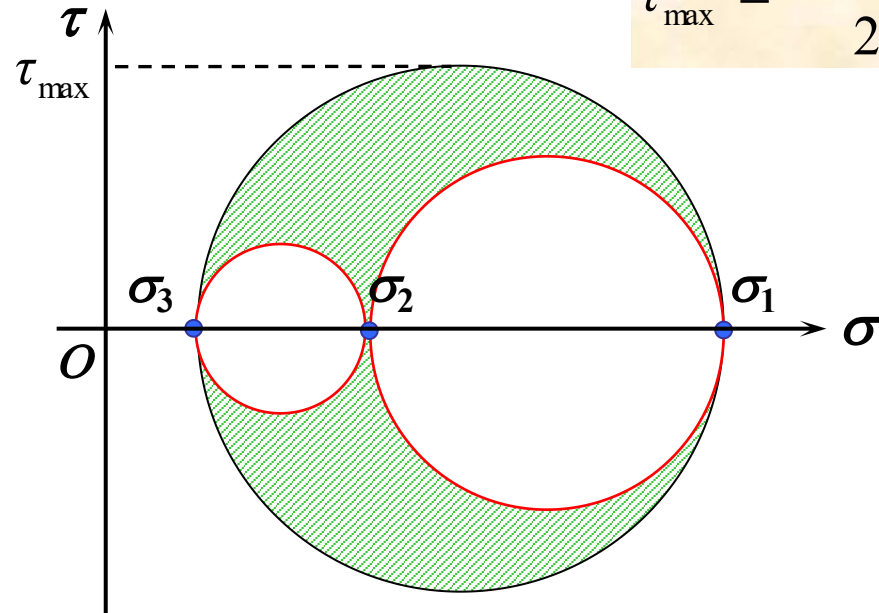
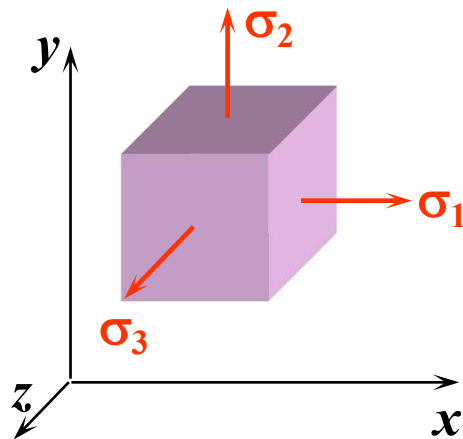
$$\begin{cases} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{cases} = \pm R_{\text{半径}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{ae}{ce} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$



本章小结

三、空间应力状态



$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

单元体内过任意一点的任意方位面上的应力都对应着应力圆上或阴影区内的一点。

本章小结

四、广义胡克定律

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];$$

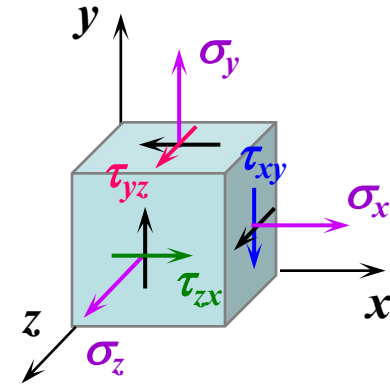
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)];$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$





本章小结

五、强度理论

1、四种常用强度理论

(1) 最大拉应力理论（第一强度理论）

强度条件 $\sigma_1 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n} ; (\sigma_1 > 0)$

(2) 最大伸长线应变理论（第二强度理论）

强度条件 $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n}$ 脆断前服从胡克定律

适用范围: 适用于破坏形式为脆断的构件



本章小结

五、强度理论

1、四种常用强度理论

(3) 最大切应力理论（第三强度理论）

强度条件 $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n}$

(4) 形状改变能密度理论（第四强度理论）

强度条件 $\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n}$

适用范围: 适用于破坏形式为屈服的构件



本章小结

五、强度理论

3、强度理论的选择

(1) 材料

脆性材料 — 使用第一理论和第二理论；

塑性材料 — 使用第三理论和第四理论；

(2) 危险点的应力状态

三向拉伸 $\sigma_i > 0, (i = 1, 2, 3)$ 使用第一理论和第二理论；

三向压缩 $\sigma_i < 0, (i = 1, 2, 3)$ 使用第三理论和第四理论；



本章小结

五、强度理论

4、强度计算的步骤

- (1) **外力分析**：确定各外力值；
- (2) **内力分析**：画内力图, 确定可能的危险截面；
- (3) **应力分析**：画危险截面的应力分布图, 确定危险点并画出单元体, 求主应力。
- (4) **强度分析**：选择适当的强度理论, 计算相当应力, 然后进行强度计算。