线性代数1-4章若干问题(或习题)的总结

做初等行变换时是否可以同时做初等列变换？

初等行变换的几种用途	行变换的同时可以做列变换吗？	备注
计算行列式	可以	
求矩阵的秩	可以	也可不用
用(A, E)→(E, A^{-1})法求逆矩阵	不可以	
判断列向量组的线性相关性	可以，但是不必	
寻找列向量组的极大无关组	不可以	
解线性方程组	一般不可以	除非…
化矩阵A为行阶梯形矩阵	一般不用	看题目要求
化矩阵A为行最简形矩阵	一般不用	看题目要求
化矩阵A为其等价标准形	可以	一般得用

矩阵与行列式的区别与联系

联系：

1. 当矩阵A为方阵时，行列式det(A)可以看作A的一个函数.

2. 设n阶方阵的A秩为r，则成立以下关系：

det(A)=0 $\Leftrightarrow$ r<n $\Leftrightarrow$ A的列向量组线性相关

$\Leftrightarrow$ A的行向量组线性相关

区别：

1. 矩阵可以是长方形(行数和列数可以不等)的，非正方形的矩阵是没有行列式的；行列式必须是正方形(行数和列数必须相等).

2. 无论多少阶的行列式，都是一个数；矩阵一般不是一个数，而是一个数组 (1×1的矩阵除外).

3. 对于m×n的矩阵A，则其秩R(A)≤min{m, n}，且有以下关系：

R(A)=r $\Leftrightarrow$ A的列向量组的秩为r $\Leftrightarrow$ A的行向量组的秩为r

注意:

1. “可逆矩阵”仅针对**方阵**而言；对于一般的长方形的矩阵，本课程中没有“可逆”的概念.

2. 当$\mathbf{A}\in R^{n\times n}$时(即$\mathbf{A}$为n阶方阵时),

矩阵$\mathbf{A}$可逆 $\Leftrightarrow$ $\det(\mathbf{A})\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $R(\mathbf{A})=n$ $\Leftrightarrow$ 矩阵$\mathbf{A}$满秩

此时$\mathbf{A}$既是列满秩(秩=列数)的,也是行满秩(秩=行数)的.

做题过程要有依据，不能“想当然”

例：设A, B均为同阶方阵，则行列式

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = ?$$

$= |A|^2 - |B|^2$ 吗？ ×

以上结论一般不成立.

解：由于

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{分块行变换: } r_2+r_1} \begin{pmatrix} A & B \\ B+A & A+B \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{分块列变换: } c_1-c_2} \begin{pmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{pmatrix}.$$

因此

由拉普拉斯展开定理

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{vmatrix} = |A-B| \cdot |A+B|.$$

试算：当 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 时，$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = 9.$

关于矩阵秩的一些经典结论

命题1(P75: 15): 对于任意的$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{R}^{m\times n}$, 均有:

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$$

证明

命题2(PPT例题): 对于任意的$\boldsymbol{A} \in \mathrm{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathrm{R}^{n\times p}$, 均有:

$$R(\boldsymbol{AB}) \le \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}.$$

非常实用, 已证明, 还有其他思路可证.

命题3 (P76: 19): 对于$\boldsymbol{A} \in \mathrm{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathrm{R}^{n\times p}$, 若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则有:

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}) \le n.$$

证明

命题4(P76: 20): 设$\boldsymbol{A} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}\times \mathrm{n}}$, $\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵, 则有:

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1, \\ 0, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) < n-1. \end{cases}$$

证明

命题1 对于任意的$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{R}^{m\times n}$, 均有:

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$$

返回

证明思路(之一): (此题也可由分块矩阵的初等变换等思路证得.)

设矩阵$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$的列向量组分别为$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n)$,

则有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1, \ \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n),$$

考虑向量组: (I): $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$. (II): $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1, \ \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n$.

可见向量组(II)可被向量组(I)线性表示. 因此

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})= \text{向量组(II)的秩} \le \text{向量组(I)的秩} \qquad (*1)$$

又设$R(\boldsymbol{A})=\mathrm{p}$, $R(\boldsymbol{B})=\mathrm{q}$, 且不妨设$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$与$\{\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n\}$的极大无关组分别为$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_p\}$与$\{\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_q\}$, 并设

向量组(III): $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_q\}$, 则可见:

向量组(I)可被向量组(III)线性表示. 因此, 结合(*1)式, 可得

$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le$ 向量组(I)的秩$\le$向量组(III)的秩$\le \mathrm{p+q}$. 证毕.

命题3：对于$A \in \mathrm{R}^{m\times n}$, $B \in \mathrm{R}^{n\times p}$, 若$AB=O$, 则有:

$$R(A)+R(B)\le n.$$

返回

证明思路(之一):

设矩阵B的列向量组为$(\beta_1, \ldots, \beta_p)$, 于是由题设条件可得

$$A(\beta_1, \ldots, \beta_p)= \mathbf{O} =(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}).$$

也即: $\beta_1, \ldots, \beta_p$均为齐次方程组$Ax=\mathbf{0}$的解, 因此若设$Ax=\mathbf{0}$的解空间为S, 则必有$\beta_1, \ldots, \beta_p \in$ S, 故必有

$$\mathrm{R}(B)= \mathrm{R}\{\beta_1, \ldots, \beta_p\}\le \dim(\mathrm{S}). \qquad (*2)$$

dim(S)代表S的维数.

结合(*2)式, 并由S与齐次方程组基础解系的关系可知:

$$\mathrm{R}(B)\le \dim(\mathrm{S})= n- \mathrm{R}(A),$$

也即:

$$\mathrm{R}(B)+ \mathrm{R}(A) \le n .$$

证毕.

命题4: 设$\boldsymbol{A}\in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵, 则有:

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n, \\ 1, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n-1. \end{cases}$$

证明思路:

当$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$时, 可知 $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$; 且由于$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\det(\boldsymbol{A})\,\mathbf{E}$, 可知

此时伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$也可逆. 因此可得: 此时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*)=n$.

当$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n-1$时, 由矩阵秩的定义可知:

$\boldsymbol{A}$的所有$n-1$阶子式全为0.

而矩阵$\boldsymbol{A}^*$的每个元素都是$\boldsymbol{A}$的一个$n-1$阶子式, 故此时必有

$\boldsymbol{A}^*=\mathbf{O}$. 因而此时 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*)=0$.

当$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-1$时, 由矩阵秩的定义可知:

至少存在着$\boldsymbol{A}$的一个$n-1$阶子式不为0,

也即:

伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$至少有一个元素不为0.

因而此时必有:

$$R(\boldsymbol{A}^*) \geq 1. \qquad (*3)$$

另外, 由于此时det($\boldsymbol{A}$)= 0, 因此$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$=det($\boldsymbol{A}$) **E** = **O.**

于是由性质3的结论可知:

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}^*) \leq n,$$

故可得

$$R(\boldsymbol{A}^*) \leq n-R(\boldsymbol{A}) = n-(n-1) = 1. \qquad (*4)$$

结合(*3)与(*4)可得, 此时必成立

$$R(\boldsymbol{A}^*) = 1.$$

综上, 证毕.

返回

关于习题(尤其是证明题)的推理习惯的养成

- 每一步都要有理论依据，逻辑要严谨。应对自己的每一步推导负责。平时应该养成“没有理论依据，就不写下一步”的习惯。
- 表述应规范、完整。涉及到的定义用词须准确，不能自己私自“造词”。
- 加强自我思辨能力。善用老师这一“拐杖”。对待“难题”，要有独立解决的勇气和定力。

常见错误示例

“矩阵A为0”, “矩阵A的值为0”. ×

概念错误. 原意本应表达为“矩阵A的行列式值为0”.

“当矩阵的列向量组线性相关时，这些列向量要么互相成比例，要么有零向量.” ×

逻辑错误. 有反例.

“行最简行列式.” ?

无此定义. 一般应表达为“行最简形”.