第十四章 相对论

§ 14-6 相对论性动量和能量
（相对论动力学）

掌握：

1、质速关系式
2、相对论动量
3、相对论能量(质能方程)
4、相对论动量与能量的关系

一、问题

1、相对性原理 光速不变原理 → 洛伦兹变换

2、麦克斯韦方程组 → 洛伦兹变换下保持不变 → 符合相对性原理

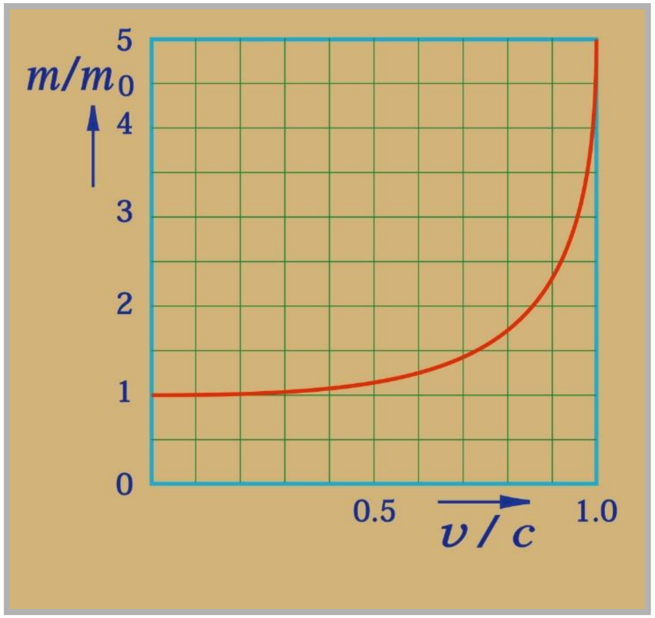
3、经典力学牛顿定律 → 没有洛伦兹变换下的不变性 → 不满足相对性原理要求 → 必须修正

4、予期目标 → 满足相对性原理要求；特定条件下仍可回到原形式

二、狭义相对论动力学

1、质速关系式

$$\boxed{m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}}$$



m_0 ——静(止)质量

Rest Mass

物体相对于惯性系静止时的质量

质量不再与运动无关，是随运动速度而改变，质量具有相对意义

质速关系反映了物质与运动的不可分割性。

当$v << c$时, $m \to m_0$　　可以认为质点的质量是一个常量, 牛顿力学仍然适用.

二、狭义相对论动力学

2、相对论动量

相对论动量定义： $\vec{P} = m\vec{v},$

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}}$$

当$v << c$时， $m \to m_0$， $\vec{p} = m\vec{v} \to m_0\vec{v}$

二、狭义相对论动力学

3、相对论质点动力学方程

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt},$$

$$\boxed{\vec{P}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{v}}$$

$$\boxed{\vec{F}=\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{v}\right]}\longrightarrow$$

相对论质点动力学基本方程

当$v<<c$时，$\rightarrow \vec{F}=m_0\dfrac{d\vec{v}}{dt}=m_0\vec{a}$

二、狭义相对论动力学

4、相对论能量

1）相对论动能

相对论认为动能定理是正确的，为得到相对论中的质点动能的表达式，

设质点从静止开始，通过力作功，使其动能增加。

$$dE_k = dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{d\vec{P}}{dt}\cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot d\vec{P} = \vec{v}\cdot d\vec{P}$$

$$= \vec{v}\cdot(\vec{v}dm + md\vec{v})$$

$$= v^2dm + mvdv$$

$$\boxed{dE_k = \vec{F}\cdot d\vec{r} = v^2dm + mvdv}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2$$

$$v^2dm + mvdv = c^2dm$$

$$\boxed{dE_k = \vec{F}\cdot d\vec{r} = c^2dm}$$

$$E_k = \int_0^{E_k} dE_k = \int_l \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{m_0}^{m} c^2dm$$

$$\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2}$$

与经典形式完全不同

二、狭义相对论动力学

4、相对论能量

讨 论：$\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2} = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$

当 $v \ll c$，$\beta = \frac{v}{c} \to 0$ 时，利用泰勒展开式：

$$(1-\beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}m_0v^2}$$

2）质能关系

运动时的总能量 $\boxed{E = mc^2}$

静止时的总能量 $\boxed{E_0 = m_0c^2}$

相对论质能关系
Mass-Energy Relation

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

动能　总能量　静能

总 能 量 $\boxed{E = E_k + m_0c^2}$

二、狭义相对论动力学

物理意义

$$E = mc^2$$

$$\Delta E = (\Delta m)c^2$$

质量的增加和能量的增加相联系，能量的改变必然导致质量的相应变化，这是相对论的又一极其重要的推论.

相对论的质能关系为开创原子能时代提供了理论基础，这是一个具有划时代意义的理论公式.

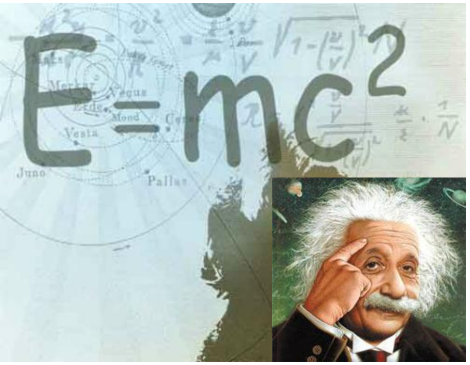
质能关系预言：物质的质量就是能量的一种储藏

爱因斯坦认为（1905）

懒惰性 ⇒ 惯性 (inertia)

活泼性 ⇒ 能量 (energy)

物体的懒惰性就是物体活泼性的度量



二、狭义相对论动力学

5、相对论动量与能量的关系

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

两边平方后乘 c^2 得：

$$m^2c^4=m_0^2c^4+m^2v^2c^2$$

$$\boxed{E^2=E_0^2+p^2c^2}$$

相对论动量和能量关系式

二、狭义相对论动力学

1、质速关系式

m_0 —静(止)质量

$$\boxed{m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}}$$

2、相对论动量

$$\boxed{\vec{p}=m\vec{v}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}}$$

3、相对论质点动力学方程

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt},$$

4、相对论能量

运动时的总能量 $\boxed{E=mc^2}$

静止时的总能量 $\boxed{E_0=m_0c^2}$

$$E_k=mc^2-m_0c^2$$

动能 总能量 静能

5、相对论动量与能量的关系

$$\boxed{E^2=E_0^2+p^2c^2}$$

二、狭义相对论动力学

讨论： 对静止质量为零的粒子

运动速度？

$$\left.\begin{aligned} m^2c^4 &= p^2c^2 + m_0^2c^4 \\ m_0 = 0,\ E_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} p &= mv \\ p &= mc \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{v = c}$$ 光子

只有静止质量为零的粒子，才能以光速运动

例 9： 一电子的**总能量**为：**5.0 MeV**，

求： 此电子的**静能、动能、动量、速率**。

$$1\text{M}=10^6,\quad 1\text{eV}=1.6\times10^{-19}\text{J}$$

解：

$$E_0=m_0c^2=0.512\ \text{MeV}$$

$$E_k=E-E_0=5.0-0.512=4.488\ \text{MeV}$$

$$E^2=E_0^2+p^2c^2$$

$$\Rightarrow p=\frac{1}{c}\sqrt{E^2-E_0^2}=2.66\times10^{-21}\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$E=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}=\frac{E_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$\Rightarrow v=c\sqrt{\frac{E^2-E_0^2}{E^2}}=0.995c$$

例 10：一电子由静止被电压为10^6 V的电场加速后，

求：此电子的质量为多少？速率为多大？

解：

$$E_{\mathrm{k}} = eU = 1.6\times10^{-19}\times10^{6} = 1.6\times10^{-13}\,\mathrm{J}$$

$$E_{\mathrm{k}} = mc^2 - m_0c^2$$

$$m = \frac{E_{\mathrm{k}}}{c^2} + m_0 = \frac{1.6\times10^{-13}}{(3\times10^{8})^2} + 9.1\times10^{-31} = 2.69\times10^{-30}\,\mathrm{kg}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad v = 2.82\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 0.94c$$

例 11: 当电子的速率从 1.2×10^8 m/s增加到 2.4×10^8 m/s，此过程，必须做多少功？

解：

$$E_{\mathbf{k}} = mc^2 - m_0c^2$$

$$W = \Delta E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k}2} - E_{\mathrm{k}1}$$

$$= \left(m_2c^2 - m_0c^2\right) - \left(m_1c^2 - m_0c^2\right) = m_2c^2 - m_1c^2$$

$$= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} - \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}$$

$$= (0.51\mathrm{MeV})\left(\frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0.4^2}}\right)$$

$$= 2.95\times10^5\,\mathrm{eV} = 4.7\times10^{-14}\,\mathrm{J}$$

例 12：某粒子的静止质量为 m_0 ，当其动能等于其静能时，

求：其质量、速率和动量各等于多少？

解：　动能：$E_k = mc^2 - m_0c^2$

$$E_k = m_0c^2 \longrightarrow m = 2m_0$$

由质速关系　$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \longrightarrow \upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

动量　$$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-(\frac{\upsilon}{c})^2}} = \sqrt{3}m_0c$$

思考：某粒子的静止质量为 m_0，当其动能等于其静能的n倍时，

其质量、速率和动量各等于多少？

例 13： 某人测得一根静止棒长度为l_0、静止质量为m_0，于是求得棒的质量线密度为$\rho_0=m_0/l_0$。

1）假定棒以速度 v 沿棒长方向运动，此人再测运动棒的质量线密度应为多少？

2）若棒在垂直于长度方向上运动，它的线密度又为多少？

解：1）

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},\qquad l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\rho=\frac{m}{l}=\frac{m_0}{l_0\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}=\frac{\rho_0}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}$$

例 13： 某人测得一根静止棒长度为l_0、静止质量为m_0，于是求得棒的质量线密度为$\rho_0=m_0/l_0$。

1）假定棒以速度 v 沿棒长方向运动，此人再测运动棒的质量线密度应为多少？

2）若棒在垂直于长度方向上运动，它的线密度又为多少？

解：2）

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad l'=l_0$$

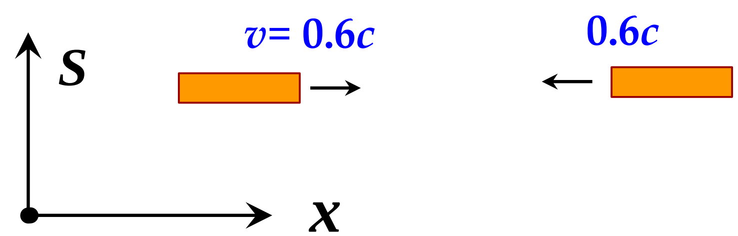
$$\rho'=\frac{m}{l'}=\frac{m_0}{l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

例14： 两艘固有长度均为l_0、静止质量均为m_0的飞船相向而行，在地面观测它们速率均为$0.6c$，

求： 1) 在地面观测，飞船的长度、质量和质量线密度各为多少？

2) 若从一飞船观测另一飞船，测得其长度、质量和质量线密度各为多少？

解： 1）地面为 S 系，



$$l = l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{4}{5}l_0$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{5}{4}m_0$$

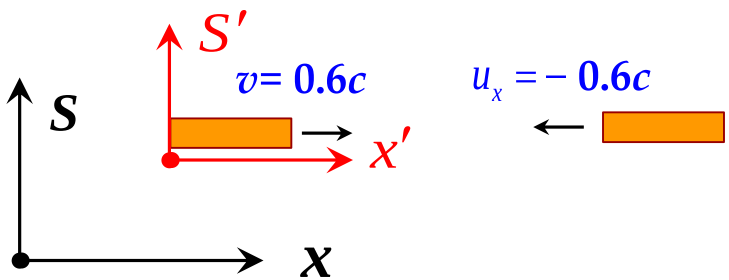
$$\lambda = \frac{m}{l} = \frac{m_0}{l_0\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]} = \frac{25}{16}\frac{m_0}{l_0}$$

例14： 两艘固有长度均为l_0、静止质量均为m_0的飞船相向而行，在地面观测它们速率均为$0.6c$,

求： 1) 在地面观测，飞船的长度、质量和质量线密度各为多少？

2) 若从一飞船观测另一飞船，测得其长度、质量和质量线密度各为多少？

解： 2）地面为 S 系，一飞船为 S'系



地面 S 系中，另一飞船：

$$u_x = -0.6c$$

S'系中，此飞船：

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} = -\frac{1.2}{1.36}c = -0.88c$$

$$l' = l_0\sqrt{1-\left(\frac{u'_x}{c}\right)^2} = 0.47 l_0$$

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{u'_x}{c}\right)^2}} = \frac{m_0}{0.47} = 2.13 m_0$$

$$\lambda' = \frac{m'}{l'} = \frac{m_0}{l_0\left[1-\left(\frac{u'_x}{c}\right)^2\right]} = 4.53\frac{m_0}{l_0}$$

注意：

相对论粒子碰撞过程中，满足：

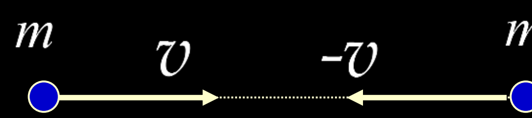
1、动 量 守恒；

2、总能量守恒

例15： 两静止质量均为m_0的全同粒子、以相同的速率v相向运动，碰撞后复合在一起形成一个复合粒子。

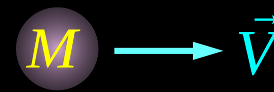
求： 复合粒子的速度和质量。

解： 设复合粒子质量为M, 速度为 $\vec{V}$



碰撞过程，动量守恒：

$$mv - mv = MV, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \boxed{\therefore V = 0}$$



总能量守恒： $\boxed{mc^2 + mc^2 = Mc^2} \Rightarrow 2mc^2 = Mc^2$

$$\boxed{\therefore M = 2m = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = M_0} > 2m_0$$

碰撞过程中，损失的能量转换成复合粒子的静质量——静能增加

例 16： 两个静质量都为 m_0 的粒子，其中一个静止，另一个以 $v_0 = 0.8\,c$ 运动，它们对心碰撞以后粘在一起。

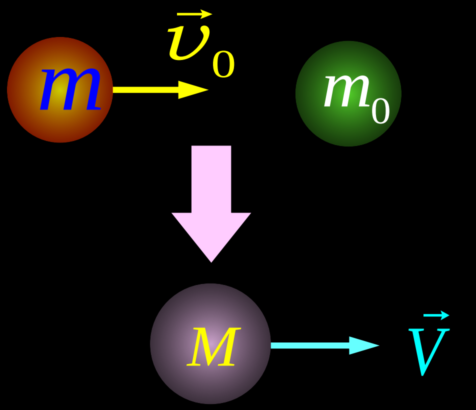
求： 碰撞后，合成粒子的静止质量。

解： 取两粒子作为一个系统，碰撞前后动量、能量均守恒，设碰撞后合成粒子的静止质量为 M_0，运动质量为 M，运动速度为 V，则

$$mv_0 + 0 = MV$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}$$

$$mc^2 + m_0 c^2 = Mc^2,$$



$$\Rightarrow M = \frac{8}{3} m_0, \qquad V = \frac{5}{8} v_0 = 0.5c$$

由 $M = \dfrac{M_0}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$ 得：

$$M_0 = M\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{8}{3} m_0 \sqrt{1 - 0.5^2} = 2.31 m_0$$