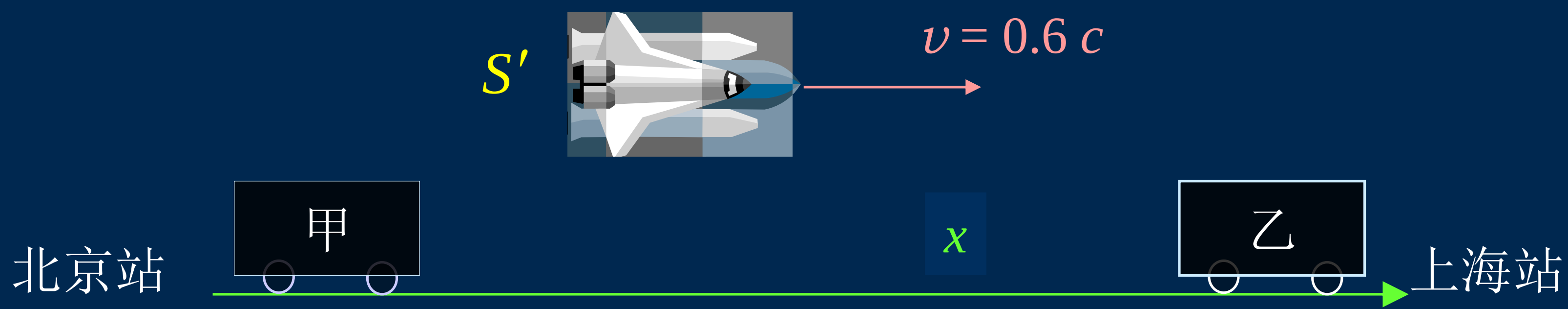
例1： 北京上海相距1000 km，北京站的甲车先于上海站的乙车1.0×10^{-3} s 发车。现有一艘飞船沿从北京到上海的方向从高空掠过，速率恒为 $v = 0.6\,c$ 。

求 飞船系中测得两车发车的时间间隔，哪一列先开?



$x_1 < x_2$

地面S系：事件1 (x_1， t_1) 事件2 (x_2， t_2)

解 • 地面S系： $\Delta x = x_2 - x_1 = 1000\ \text{km}$， $\Delta t = t_2 - t_1 = 1.0\times10^{-3}\ \text{s}$

• 飞船S'系： $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \dfrac{\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -1.25\times10^{-3}\ \text{s}$

两独立事件的时序时序颠倒

例 2： 在 S 系中观察到两个事件同时发生在 x 轴上，其空间间隔是 1×10^3 m，在 S`系中观察到这两个事件的空间间隔是 $2\times10^3$ m，求在 $S$`系中这两个事件的时间间隔。

解：

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta x'=x_2'-x_1'=\frac{(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}\Rightarrow\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{t-\frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta t'=t_2'-t_1'=\frac{(t_2-t_1)-\frac{\beta}{c}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{0-\frac{\beta}{c}\times1\times10^3}{\sqrt{1-\beta^2}}=-5.77\times10^{-6}\,s$$

正变换

$$\boxed{\begin{aligned}x'&=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ y'&=y\\ z'&=z\\ t'&=\frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{aligned}}$$

例 3： 在 S 系中观察到两个事件发生在空间同一地点，第二事件发生在第一事件以后2s，在另一相对S 系运动的 S`系中观察到第二事件是在第一事件3s之后发生的，求在 $S$`系中这两个事件的空间间隔。

解：

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

正变换

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow 3 = \frac{2 - \frac{v}{c^2}\times 0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

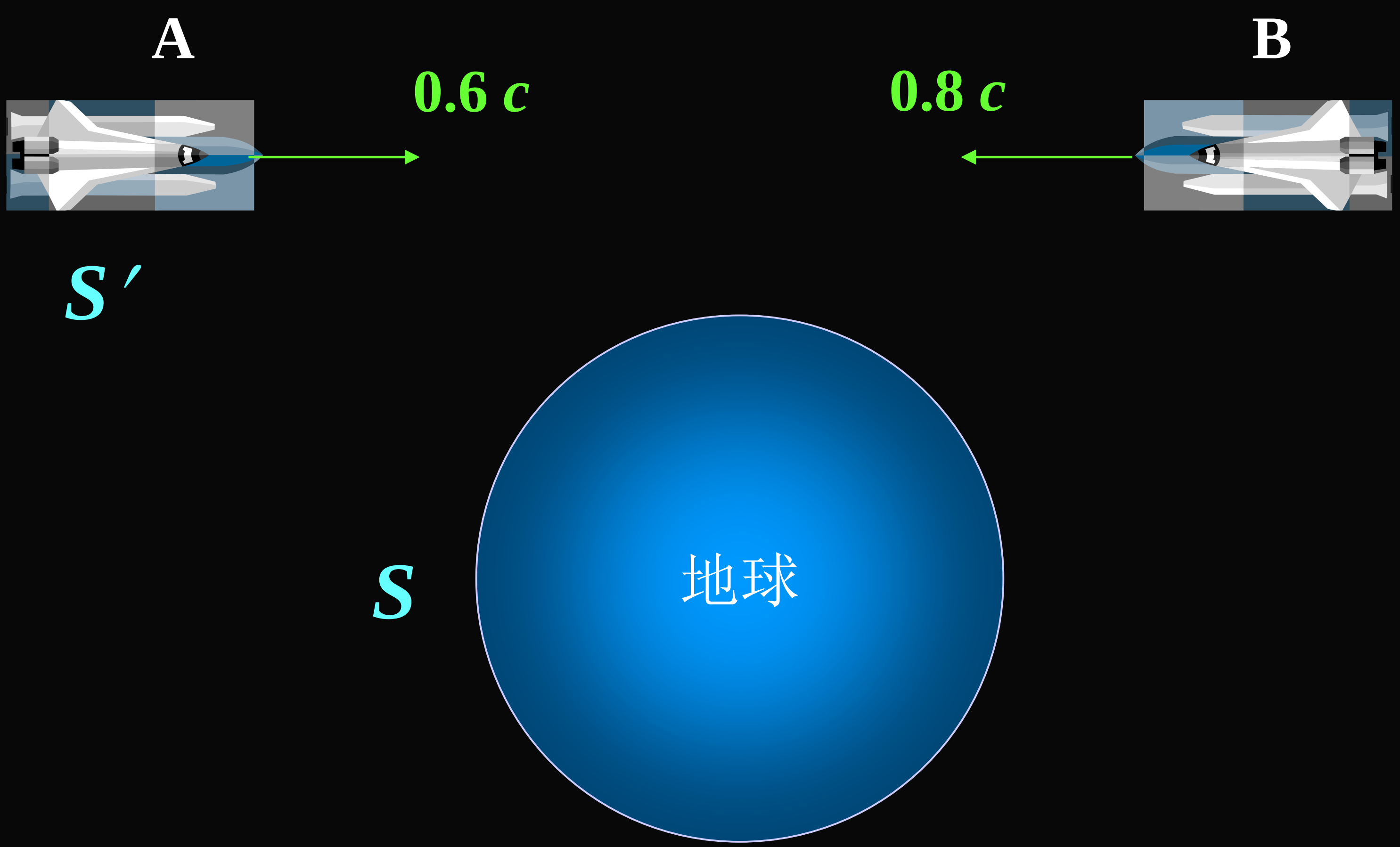
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\boxed{\Delta x' = x_2' - x_1' = \frac{0 - c\beta\times 2}{\sqrt{1-\beta^2}} = -3\sqrt{5}\times 10^8 m}$$

例 4：

飞船 A、B 相对于地面分别以 $0.6\,c$ 和 $0.8\,c$ 的速度相向而行。

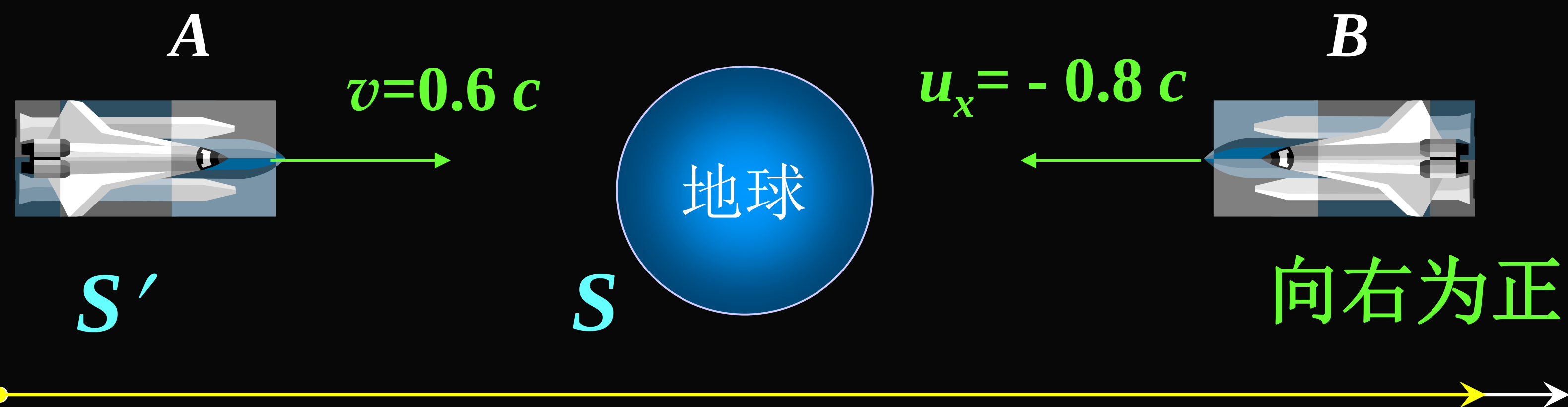
求： 飞船 A 上测得飞船 B 的速度。



例 4：

飞船 A、B 相对于地面分别以 0.6 c 和 0.8 c 的速度相向而行。

求：飞船 A 上测得飞船 B 的速度。



解：地面为 S 系，飞船 A 为 S' 系 。

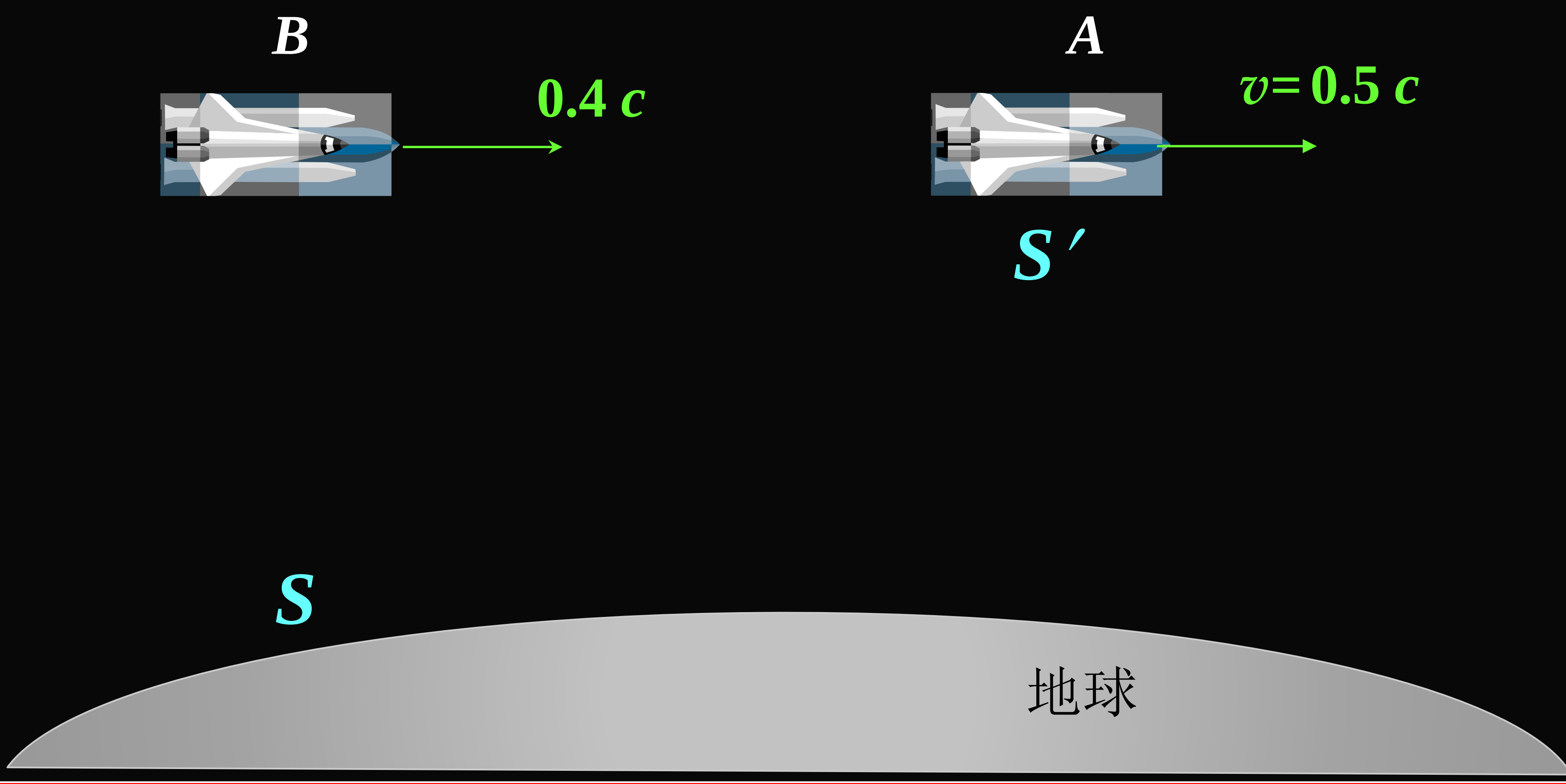
S' 系(飞船 A)测得飞船 B 的速度为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x} = \frac{-0.8c - 0.6c}{1 + 0.8 \times 0.6c / c^2} = -0.94c$$

例 5： 飞船 A 相对于地面以速率 $0.5\,c$ 直线飞行，

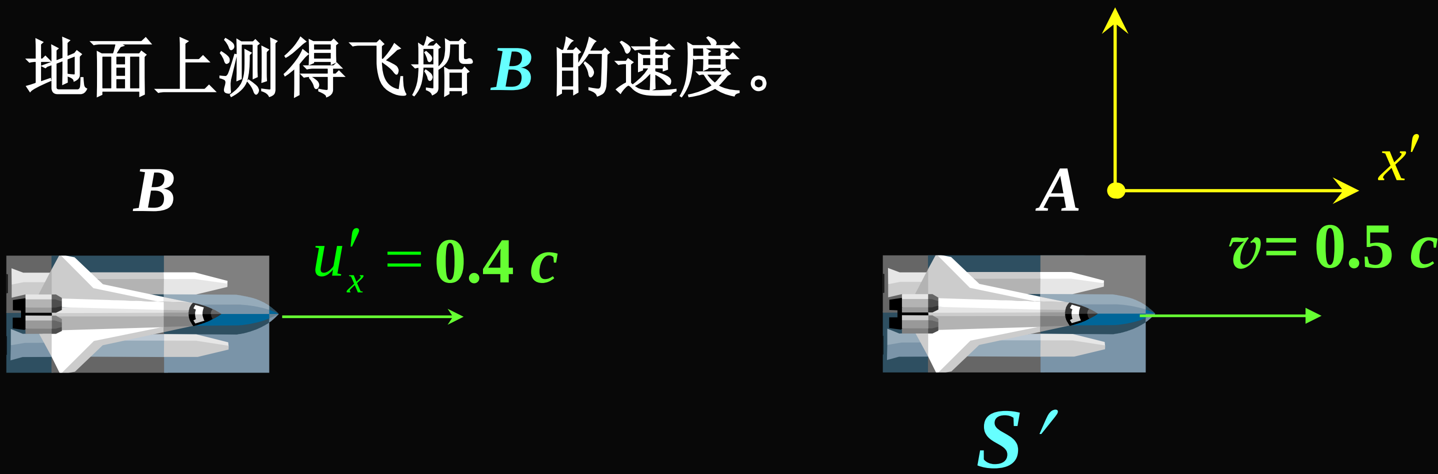
飞船 A 中测得飞船 B 以 $0.4\,c$ 的速率尾随而来，

求： 地面上测得飞船 B 的速度。



例 5： 飞船 A 相对于地面以速率 $0.5\,c$ 直线飞行，飞船 A 中测得飞船 B 以 $0.4\,c$ 的速率尾随而来，

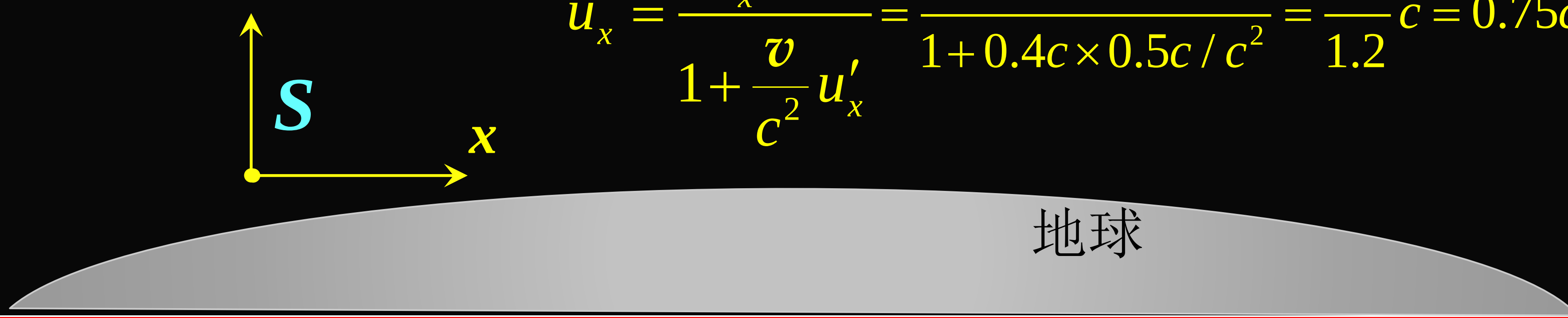
求： 地面上测得飞船 B 的速度。



解： 飞船 A 为 S' 系，测得飞船 B 速度： $u'_x = 0.4c$

地面为 S 系，测得飞船 B 的速度为：

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} = \frac{0.4c + 0.5c}{1 + 0.4c \times 0.5c / c^2} = \frac{0.9}{1.2} c = 0.75c$$

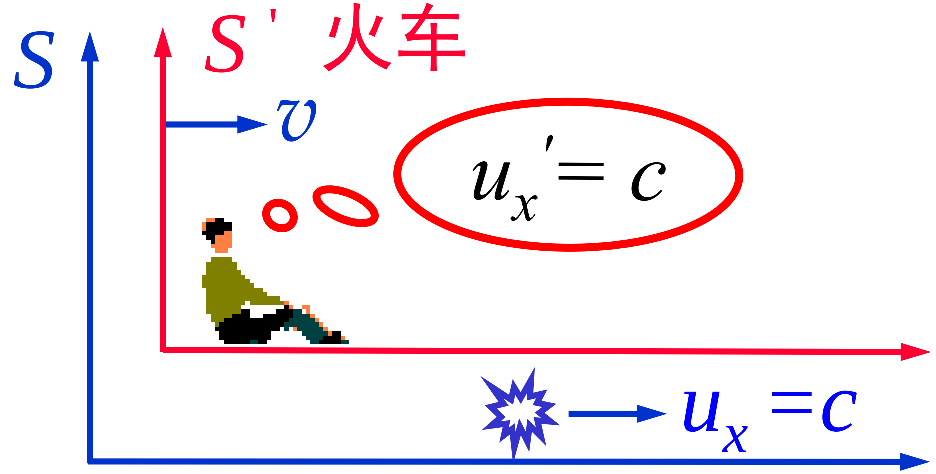


三、相对论速度变换公式

【例】追光实验

S : $u_x = c$

S' : $u'_x = ?$



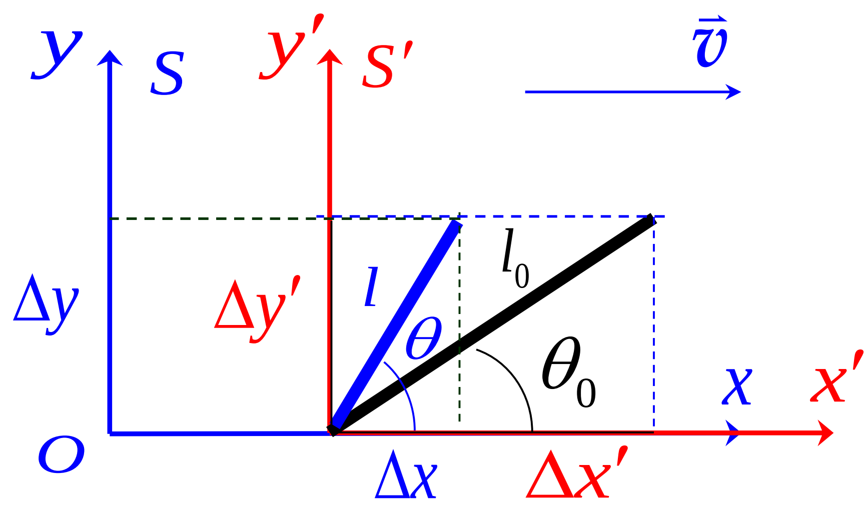
$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c^2} c} = c$$

例 6： 在 S'系 $x'y'$平面内放置一固有长度为 l_o 的杆，杆通过坐标原点O'且与 x' 轴的夹角为θ_0。求在 S 系中测得的杆长 l 和杆与 x 轴的夹角θ。

解： S'系中，

$$\Delta x' = l_0 \cos\theta_0$$

$$\Delta y' = l_0 \sin\theta_0$$



在 S 系中:

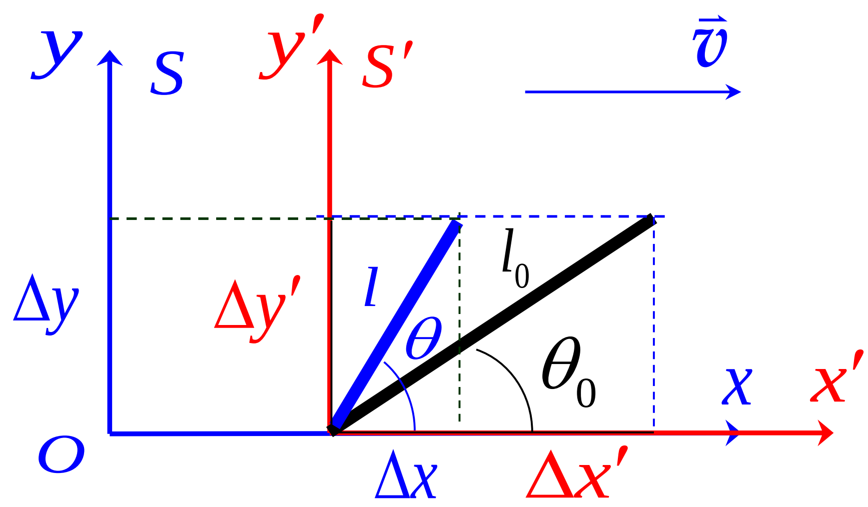
$$\Delta x = \Delta x'\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} = l_0\cos\theta_0\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$$

$$\Delta y = \Delta y' = l_0 \sin\theta_0$$

例 6: 在 S' 系 $x'y'$ 平面内放置一固有长度为 l_0 的杆，杆通过坐标原点 O' 且与 x' 轴的夹角为 θ_0。求在 S 系中测得的杆长 l 和杆与 x 轴的夹角 θ。

解: 在 S 系中杆的长度为:

$$\boxed{\begin{aligned} l &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta_0} \end{aligned}}$$



在 S 系中:

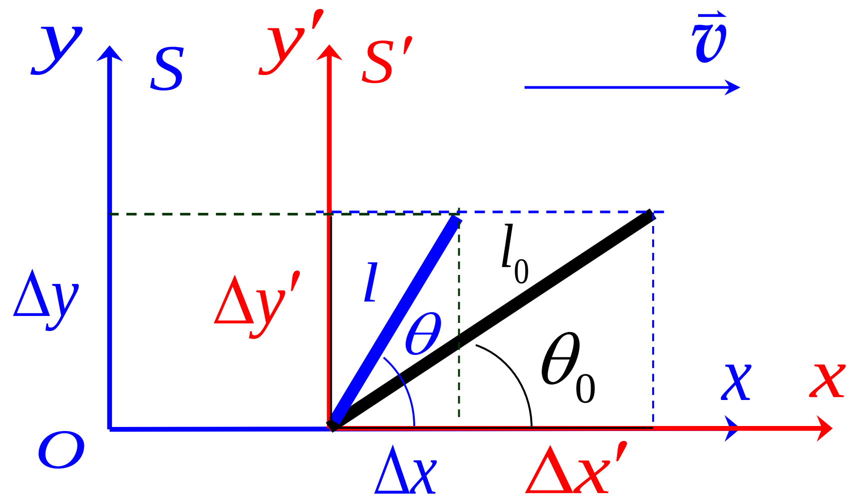
$$\Delta x = \Delta x'\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = l_0\cos\theta_0\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\Delta y = \Delta y' = l_0 \sin\theta_0$$

例 6: 在 S'系 $x'y'$平面内放置一固有长度为 l_0 的杆，杆通过坐标原点O'且与 x' 轴的夹角为θ_0。求在 S 系中测得的杆长 l 和杆与 x 轴的夹角θ。

解: 以 θ 表示杆与x轴的夹角:

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\tan\theta_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}}$$



在 S 系中:

$$\Delta x = \Delta x'\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} = l_0\cos\theta_0\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$$

$$\Delta y = \Delta y' = l_0\sin\theta_0$$

例 7： 一短跑选手在地面上以 10 s 的时间跑完 100 m，一飞船沿同一方向以速率 $v = 0.8\,c$ 飞行。

求： (1) 飞船参考系上测得百米跑道的长度和选手跑过的路程；

(2) 飞船参考系上测得选手的平均速度 。

解： 选手起跑为事件 "1"，到终点为事件 "2"，依题意有

	地面 S 系	飞船 S' 系
两事件时间间隔	$\Delta t = 10\ \text{s}$	$\Delta t'$
两事件空间间隔	$\Delta x = 100\ \text{m}$	$\Delta x'$
跑道 长度	$l_0 = 100\ \text{m}$	l

(1) l_0为原长， l 为运动长度，由长度收缩公式有

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2} = 100 \times \sqrt{1 - 0.8^2} = 60\ \text{m}$$

例 7： 一短跑选手在地面上以 10 s 的时间跑完 100 m，一飞船沿同一方向以速率 $v = 0.8\,c$ 飞行。

求： (1) 飞船参考系上测得百米跑道的长度和选手跑过的路程；

(2) 飞船参考系上测得选手的平均速度 。

解： 选手起跑为事件“1”，到终点为事件“2”，依题意有

	地面 S 系	飞船 S' 系
两事件时间间隔	$\Delta t = 10\ \text{s}$	$\Delta t'$
两事件空间间隔	$\Delta x = 100\ \text{m}$	$\Delta x'$
跑道 长度	$l_0 = 100\ \text{m}$	l

在 S' 系中事件1 和事件2 的空间间隔 $\Delta x'$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{100 - 0.8\times3\times10^8\times10}{\sqrt{1-0.8^2}} = -4.0\times10^9\ \text{m}$$

$$|\Delta x'| = 4.0\times10^9\ \text{m}$$

例 7： 一短跑选手在地面上以 10 s 的时间跑完 100 m，一飞船沿同一方向以速率 $v = 0.8c$ 飞行。

求 (1) 飞船参考系上测得百米跑道的长度和选手跑过的路程；

(2) 飞船参考系上测得选手的平均速度 。

解 选手起跑为事件“1”，到终点为事件“2”，依题意有

	地面S 系	飞船S'系
两事件时间间隔	$\Delta t = 10\ \text{s}$	$\Delta t'$
两事件空间间隔	$\Delta x = 100\ \text{m}$	$\Delta x'$
跑道 长度	$l_0 = 100\ \text{m}$	l

(2) S' 系中选手从起点到终点的时间间隔为 $\Delta t'$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{10 - \dfrac{0.8\times 100}{3\times 10^8}}{\sqrt{1-0.8^2}} = 16.7\ \text{s}$$

S' 系中选手的平均速度为:

$$\bar{u}' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

$$= \frac{-4.0\times 10^9}{16.7} = -2.4\times 10^8\ \text{m/s} = -0.8c$$

例 8 π^- 介子是不稳定粒子。从粒子产生到衰变所经历的时间称为粒子寿命。测得静止 π^- 介子的平均寿命 $\tau_0 = 2.6\times10^{-8}$ s。某加速器产生的 π^- 介子以速率 $v = 0.75\,c$ 相对实验室运动。

求 π^- 介子衰变前在实验室中通过的平均距离。

分析 以粒子产生、衰变为两个事件

解：按经典理论： $\overline{l} = v\tau_0 = 5.85\ \mathrm{m}$

实验室测得： $\overline{l'} = 8.5 \pm 0.6\ \mathrm{m}$

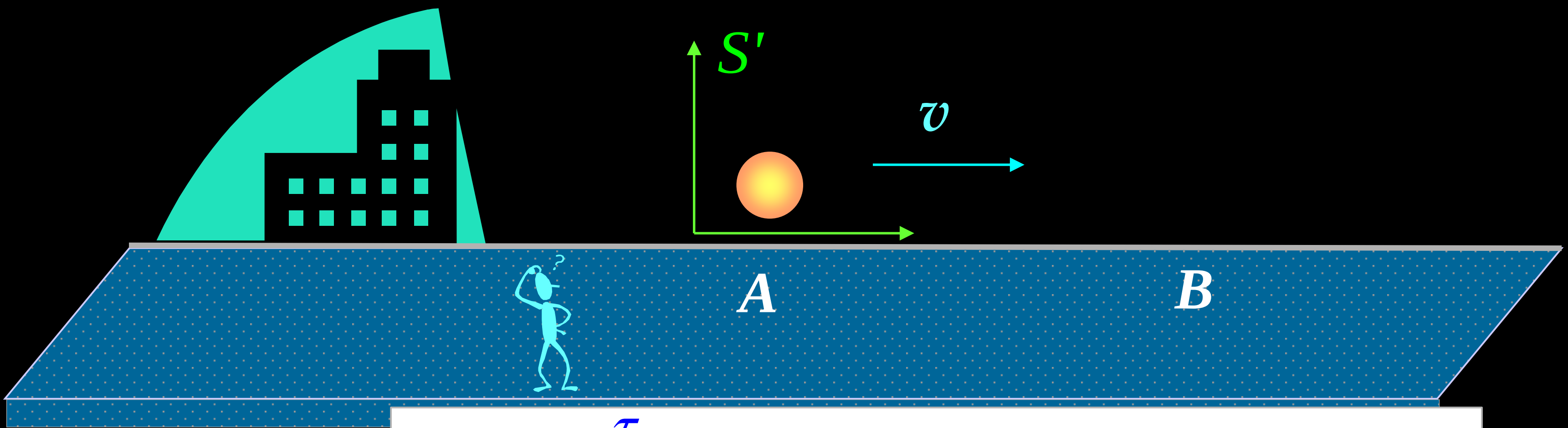
例 8 π^- 介子是不稳定粒子。从粒子产生到衰变所经历的时间称为粒子寿命。测得静止 π^- 介子的平均寿命 $\tau_0 = 2.6\times10^{-8}$ s。某加速器产生的 π^- 介子以速率 $v = 0.75\,c$ 相对实验室运动。

求 π^- 介子衰变前在实验室中通过的平均距离。

分析 以粒子产生、衰变为两个事件

粒子系 S'：静止寿命 $\tau_0 = 2.6\times10^{-8}$ s

两事件发生在同一地点，τ_0 为原时



地面系S：寿命

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-0.75^2}} = 1.51\tau_0,\qquad l = v\tau = 8.83\ \mathrm{m}$$

二、狭义相对论动力学

1、质速关系式

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

m_0 —静(止)质量

2、相对论动量

$$\vec{p}=m\vec{v}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

3、相对论质点动力学方程

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt},$$

4、相对论能量

运动时的总能量 $E=mc^2$

静止时的总能量 $E_0=m_0c^2$

$$E_k=mc^2-m_0c^2$$

动能 总能量 静能

5、相对论动量与能量的关系

$$E^2=E_0^2+p^2c^2$$

例 9： 一电子的总能量为：5.0 MeV，

求： 此电子的静能、动能、动量、速率。

$$1\mathrm{M}=10^6,\quad 1\mathrm{eV}=1.6\times10^{-19}\mathrm{J}$$

解：

$$E_0=m_0c^2=0.512\ \mathrm{MeV}$$

$$E_k=E-E_0=5.0-0.512=4.488\ \mathrm{MeV}$$

$$E^2=E_0^2+p^2c^2$$

$$\Rightarrow p=\frac{1}{c}\sqrt{E^2-E_0^2}=2.66\times10^{-21}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

$$E=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}=\frac{E_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$\Rightarrow v=c\sqrt{\frac{E^2-E_0^2}{E^2}}=0.995c$$

例 10：一电子由静止被电压为10^6 V的电场加速后，

求：此电子的质量为多少？速率为多大？

解：

$$E_{\mathrm{k}} = eU = 1.6\times10^{-19}\times10^{6} = 1.6\times10^{-13}\,\mathrm{J}$$

$$E_{\mathrm{k}} = mc^2 - m_0c^2$$

$$m = \frac{E_{\mathrm{k}}}{c^2} + m_0 = \frac{1.6\times10^{-13}}{(3\times10^{8})^2} + 9.1\times10^{-31} = 2.69\times10^{-30}\,\mathrm{kg}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad v = 2.82\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 0.94c$$

例 11: 当电子的速率从 1.2×10^8 m/s增加到 2.4×10^8 m/s，此过程，必须做多少功?

解:

$$E_{\mathrm{k}} = mc^2 - m_0c^2$$

$$W = \Delta E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k}2} - E_{\mathrm{k}1}$$

$$= \left(m_2c^2 - m_0c^2\right) - \left(m_1c^2 - m_0c^2\right) = m_2c^2 - m_1c^2$$

$$= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} - \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$$

$$= (0.51\mathrm{MeV})\left(\frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0.4^2}}\right)$$

$$= 2.95\times10^5\,\mathrm{eV} = 4.7\times10^{-14}\,\mathrm{J}$$

例 12：某粒子的静止质量为 m_0 ，当其动能等于其静能时，
求：其质量、速率和动量各等于多少？

解： 动能： $E_k = mc^2 - m_0c^2$

$$E_k = m_0c^2 \longrightarrow m = 2m_0$$

由质速关系 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \longrightarrow \upsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

动量 $p = m\upsilon = \dfrac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-(\dfrac{\upsilon}{c})^2}} = \sqrt{3}m_0c$

思考：某粒子的静止质量为 m_0，当其动能等于其静能的n倍时，
其质量、速率和动量各等于多少？

例 13： 某人测得一根静止棒长度为l_0、静止质量为m_0，于是求得棒的质量线密度为$\rho_0=m_0/l_0$。

1）假定棒以速度 v 沿棒长方向运动，此人再测运动棒的质量线密度应为多少？

2）若棒在垂直于长度方向上运动，它的线密度又为多少？

解：1）

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\rho=\frac{m}{l}=\frac{m_0}{l_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}=\frac{\rho_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

例 13： 某人测得一根静止棒长度为l_0、静止质量为m_0，于是求得棒的质量线密度为$\rho_0=m_0/l_0$。

1）假定棒以速度 v 沿棒长方向运动，此人再测运动棒的质量线密度应为多少？

2）若棒在垂直于长度方向上运动，它的线密度又为多少？

解：2）

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad l'=l_0$$

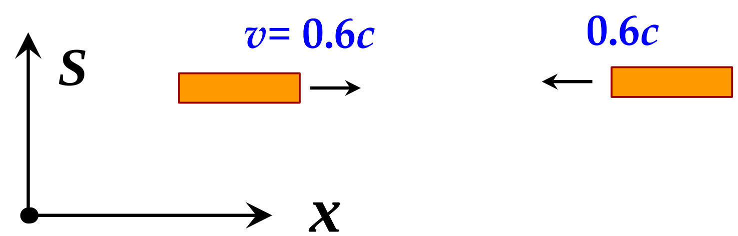
$$\rho'=\frac{m}{l'}=\frac{m_0}{l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

例14： 两艘固有长度均为l_0、静止质量均为m_0的飞船相向而行，在地面观测它们速率均为$0.6c$，

求： 1) 在地面观测，飞船的长度、质量和质量线密度各为多少？

2) 若从一飞船观测另一飞船，测得其长度、质量和质量线密度各为多少？

解： 1）地面为 S 系，



$$l = l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{4}{5}l_0$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{5}{4}m_0$$

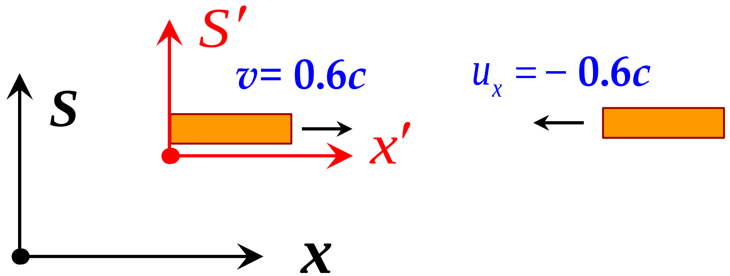
$$\lambda = \frac{m}{l} = \frac{m_0}{l_0\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]} = \frac{25}{16}\frac{m_0}{l_0}$$

例14： 两艘固有长度均为l_0、静止质量均为m_0的飞船相向而行，在地面观测它们速率均为$0.6c$，

求： 1) 在地面观测，飞船的长度、质量和质量线密度各为多少？

2) 若从一飞船观测另一飞船，测得其长度、质量和质量线密度各为多少？

解： 2）地面为 S 系，一飞船为 S'系



地面 S 系中，另一飞船：

$$u_x = -0.6c$$

S'系中，此飞船：

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x} = -\frac{1.2}{1.36}c = -0.88c$$

$$l' = l_0\sqrt{1-\left(\frac{u'_x}{c}\right)^2} = 0.47 l_0$$

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u'_x}{c}\right)^2}} = \frac{m_0}{0.47} = 2.13 m_0$$

$$\lambda' = \frac{m'}{l'} = \frac{m_0}{l_0\left[1-\left(\dfrac{u'_x}{c}\right)^2\right]} = 4.53\frac{m_0}{l_0}$$

注意：

相对论粒子碰撞过程中，满足：

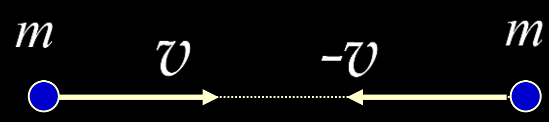
1、动 量 守恒；

2、总能量守恒

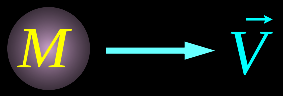
例15： 两静止质量均为m_0的全同粒子、以相同的速率v相向运动，碰撞后复合在一起形成一个复合粒子。

求： 复合粒子的速度和质量。

解： 设复合粒子质量为M, 速度为 $\vec{V}$



碰撞过程，动量守恒：



$$mv - mv = MV,\quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\boxed{\therefore V = 0}$$

总能量守恒： $\boxed{mc^2 + mc^2 = Mc^2} \Rightarrow 2mc^2 = Mc^2$

$$\boxed{\therefore M = 2m = \frac{2m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = M_0} > 2m_0$$

例 16： 两个静质量都为 m_0 的粒子，其中一个静止，另一个以 $v_0 = 0.8\,c$ 运动，它们对心碰撞以后粘在一起。

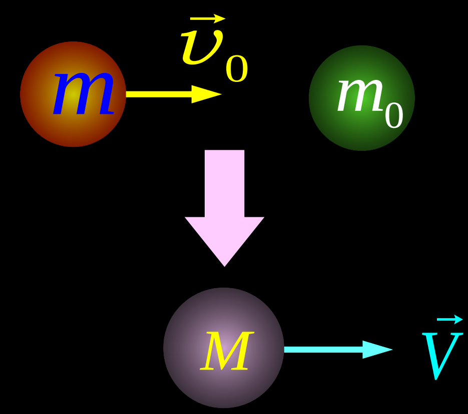
求： 碰撞后，合成粒子的静止质量。

解： 取两粒子作为一个系统，碰撞前后动量、能量均守恒，设碰撞后合成粒子的静止质量为 M_0，运动质量为 M，运动速度为 V，则

$$m v_0 + 0 = MV$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}$$

$$mc^2 + m_0 c^2 = Mc^2,$$



$$\Rightarrow M = \frac{8}{3} m_0, \qquad V = \frac{5}{8} v_0 = 0.5c$$

由 $M = \dfrac{M_0}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$ 得: $M_0 = M\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}} = \dfrac{8}{3} m_0 \sqrt{1 - 0.5^2} = 2.31 m_0$