第九章　数字滤波器设计与检测技术

- 有限脉冲响应滤波器基础
- 理想低通滤波器
- 窗函数
- 低通FIR滤波器的设计
- 噪声检测
- 降噪处理

数字滤波器：数字世界的清道夫

当我们戴着耳机沉浸在美妙音乐中时，那清晰纯净的旋律背后，藏着一位默默付出的 “幕后英雄”—— 数字滤波器。

早在上世纪中叶，随着计算机的兴起，数字信号处理的概念开始萌芽，数字滤波器也随之出现。最初，它只是科学家们理论设想中的工具，受限于当时的硬件技术，应用范围极为有限。但随着半导体技术的发展，数字滤波器才得以从理论走向实践。随着人工智能时代的来临，数字滤波器的算法也变得更加智能和高效。

数字滤波器的工作原理基于精妙的数学算法，如同拥有一套独特的 “识别密码” 。当数字信号蜂拥而至，其中不乏干扰信号，数字滤波器能迅速依据算法，精准地识别出哪些是我们需要的有用信号，哪些是干扰信号。

在生活中，数字滤波器的身影随处可见。比如在通信领域，它让我们的手机通话清晰顺畅，避免了杂音干扰，让千里之外的声音也能真切传递。

有限脉冲响应滤波器基础

- 本章的主要内容是介绍数字滤波器的设计
- 有限脉冲滤波器仅取决于过去的输入，而与过去的输出无关——非递归滤波器

  (Finite Impulse Response Filter, FIR)

非递归滤波器差分方程为：

$$\boxed{y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

非递归滤波器脉冲响应为：

$$\boxed{h[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]}$$

非递归滤波器差分方程为：

$$\boxed{y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

如果 $x[n]$ 的Z变换为 $X(z)$,
$y[n]$ 的Z变换为 $Y(z)$,

FIR 滤波器的Z变换为：

$$\boxed{Y[z]=\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X[z]}$$

FIR 滤波器的Z变换为：

$$Y[z]=\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X[z]$$

FIR 滤波器的传输函数为：

$$H[z]=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0 z^{M}+b_1 z^{M-1}+b_2 z^{M-2}+\cdots+b_M}{z^{M}}$$

FIR 滤波器的传输函数为：

$$H[z]=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0 z^{M}+b_1 z^{M-1}+b_2 z^{M-2}+\cdots+b_M}{z^{M}}$$

上式分母为零时，有M个极点，并z=0位于单位圆内，所以是稳定的。

由 FIR 滤波器的传输函数：

$$H[z]=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0z^M+b_1z^{M-1}+b_2z^{M-2}+\cdots+b_M}{z^M}$$

$$=\sum_{k=0}^{M}\mathrm{b}_k z^{-k}$$

得到 FIR 滤波器的频率响应为：

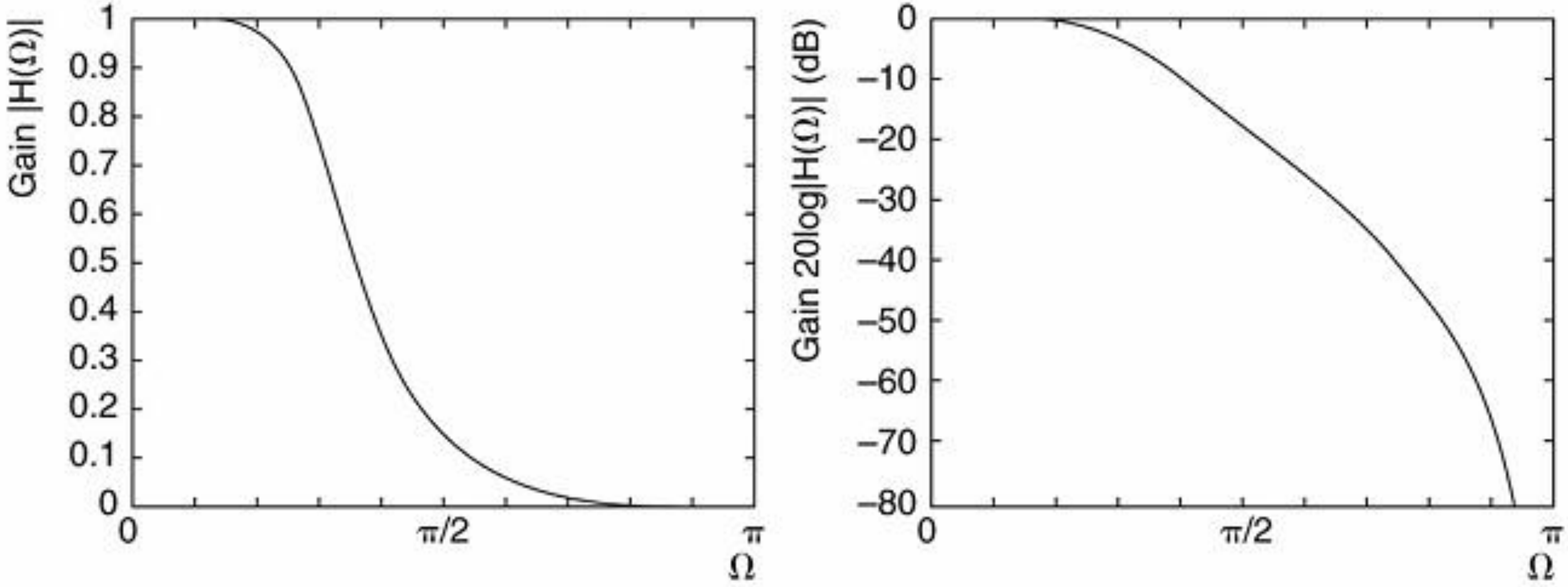
$$H[\Omega]=\sum_{k=0}^{M}\mathrm{b}_k e^{-jk\Omega}$$

计算出$|H(\Omega)|$，可以画出$|H(\Omega)|\leftrightarrow\Omega$之间的曲线，看到滤波器的形状

根据 DTFT 求出滤波器的幅度响应来确定滤波器的形状

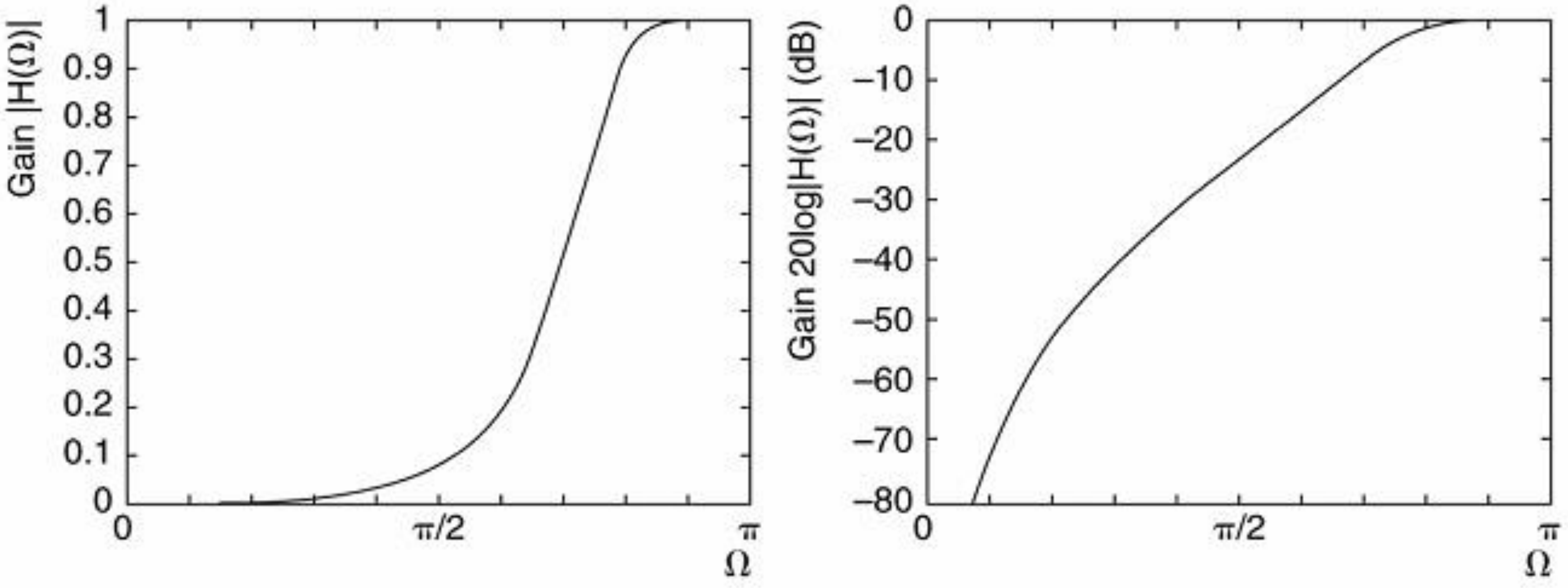
$$\boxed{H[\Omega]=\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}$$

低通滤波器



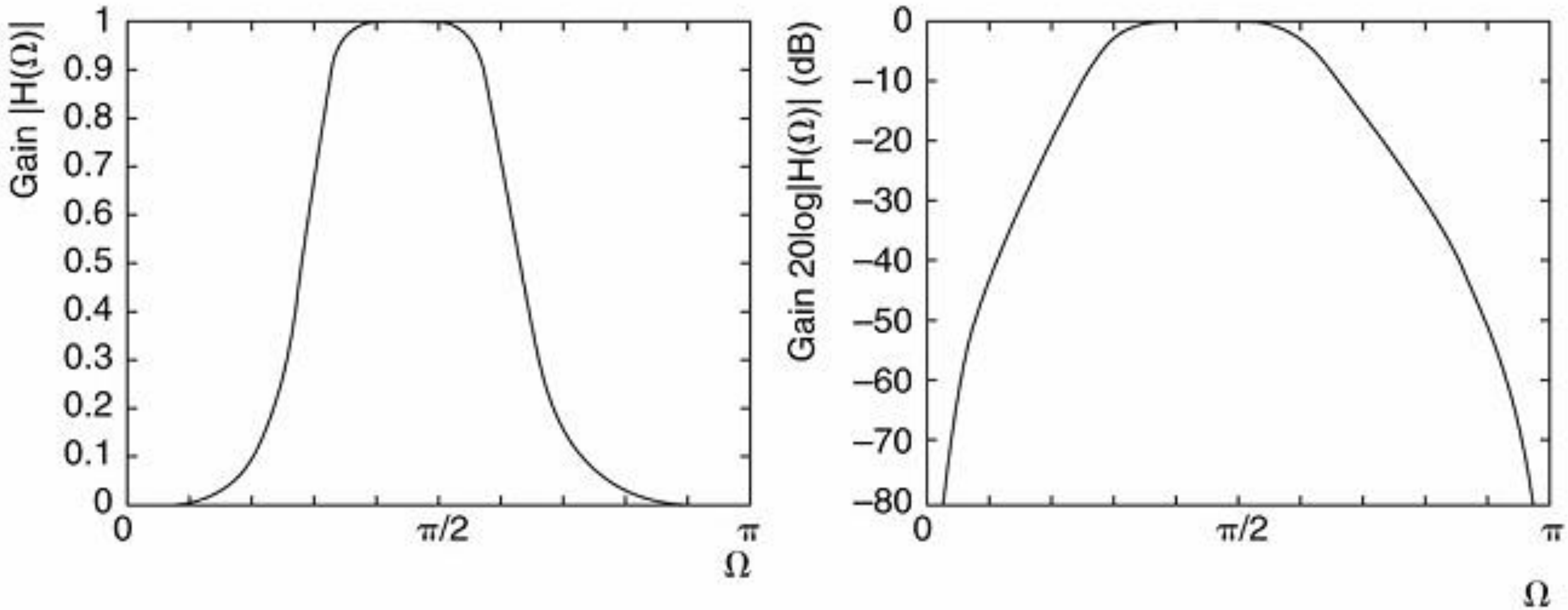
(a) Low Pass Filter

高通滤波器



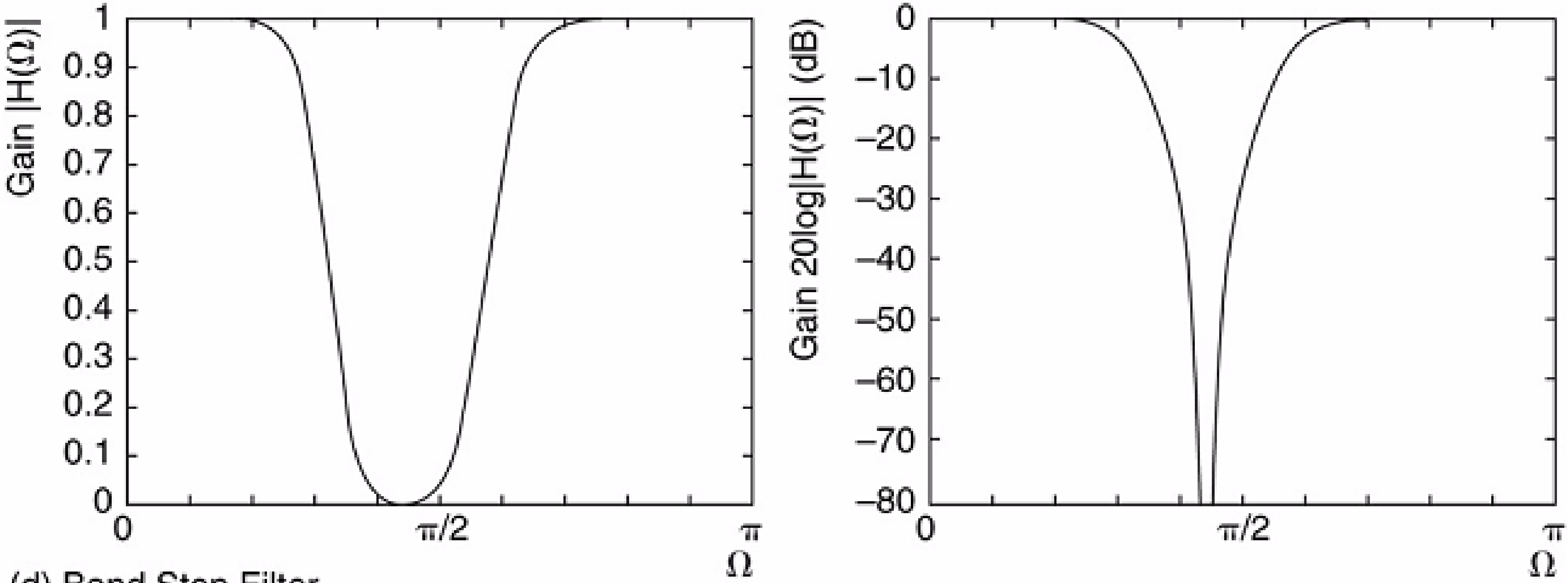
(b) High Pass Filter

带通滤波器



(c) Band Pass Filter

带阻滤波器



(d) Band Stop Filter

例：五项滑动滤波器

- **M项滑动滤波器的差分方程**

$$\boxed{y[n]=\frac{1}{M}\{x[n]+x[n-1]+\cdots+x[n-(M-1)]\}}$$

- **M项滑动滤波器的脉冲响应**

$$\boxed{h[n]=\frac{1}{M}\{\delta[n]+\delta[n-1]+\cdots+\delta[n-(M-1)]\}}$$

- **M=5，称为五项滑动滤波器**

例：五项滑动滤波器

$$h[n]=\frac{1}{5}\{\delta[n]+\delta[n-1]+\cdots+\delta[n-4]\}$$

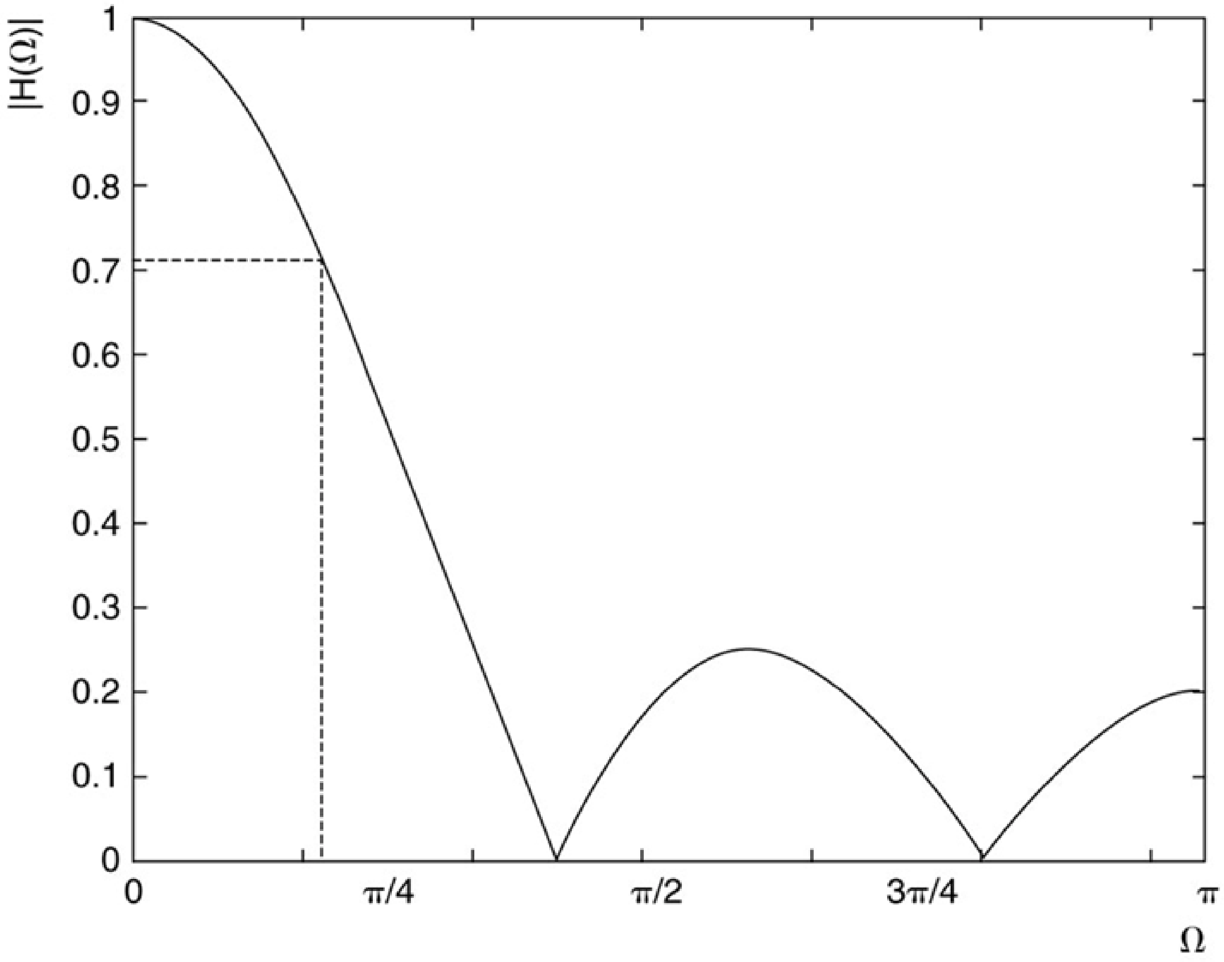
- 传输函数

$$H[z]=0.2[1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}]$$

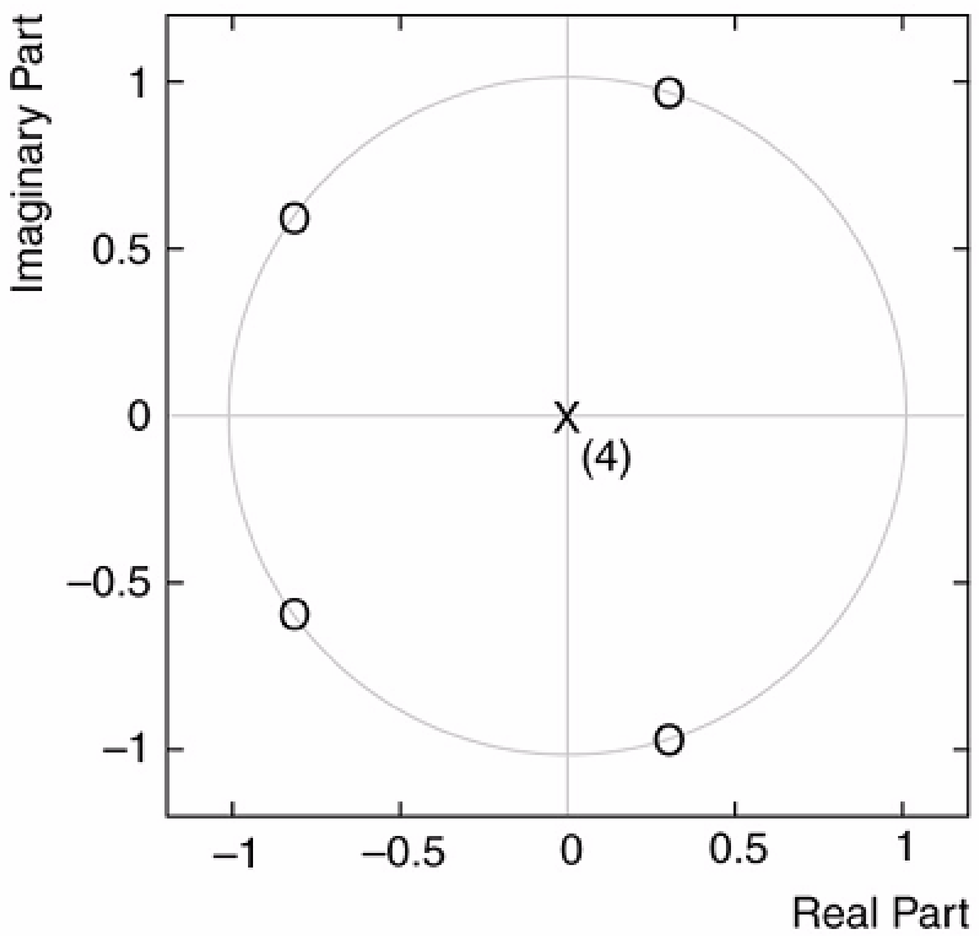
- 频率响应

$$H[\Omega]=0.2[1+e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}+e^{-j3\Omega}+e^{-j4\Omega}]$$

例：五项滑动滤波器幅度响应



例：五项滑动滤波器极—零点图

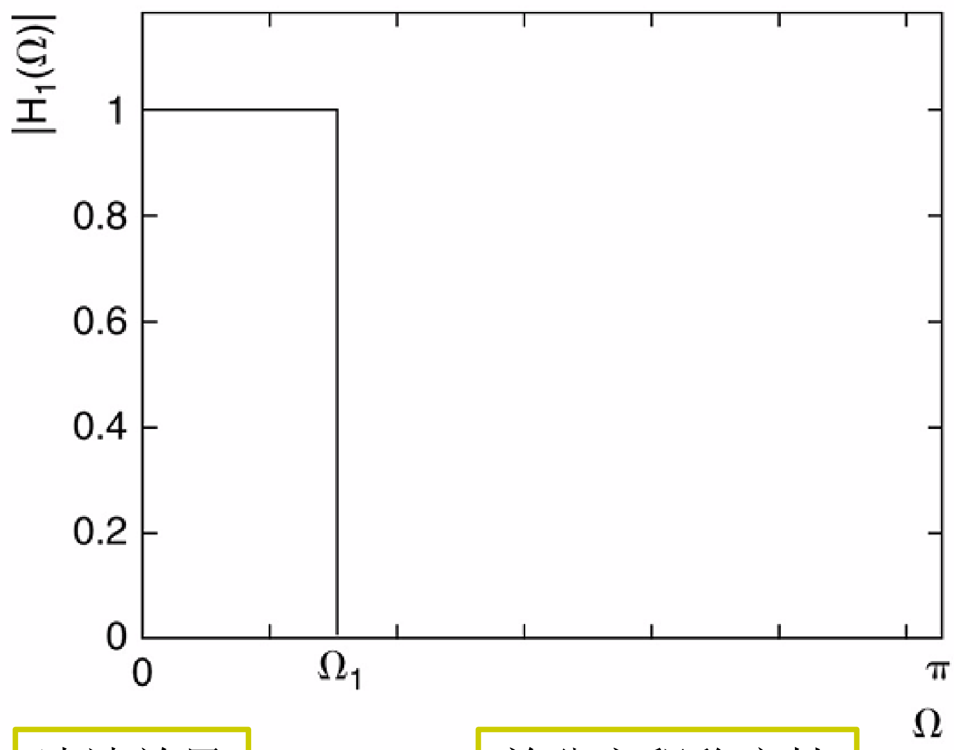


理想低通滤波器

Ω_1：截止频率

对$|H(\Omega)|$进行傅里叶逆变换，

可以得到$h_1[n]$



$$\boxed{h_1[n]=\frac{1}{n\pi}\sin(n\Omega_1)}$$

差分方程

$$y[n]=h[n]*x[n]$$

滤波效果

$$h[n]\Rightarrow H(\Omega)$$

差分方程稳定性

$$h[n]\Rightarrow H(z)$$

$$h_1[n] = \frac{1}{n\pi}\sin(n\Omega_1)$$

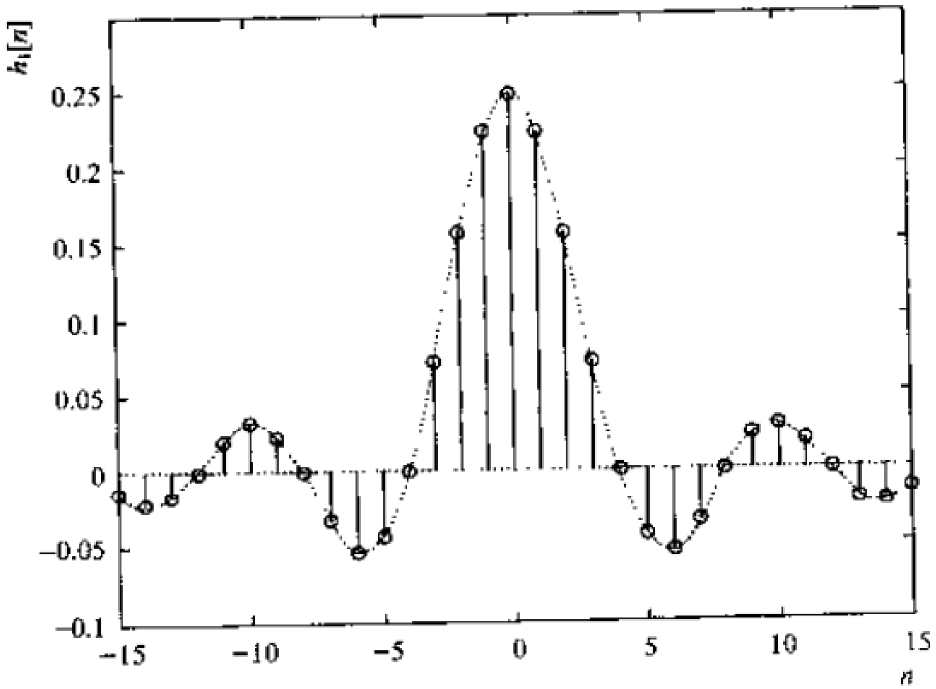
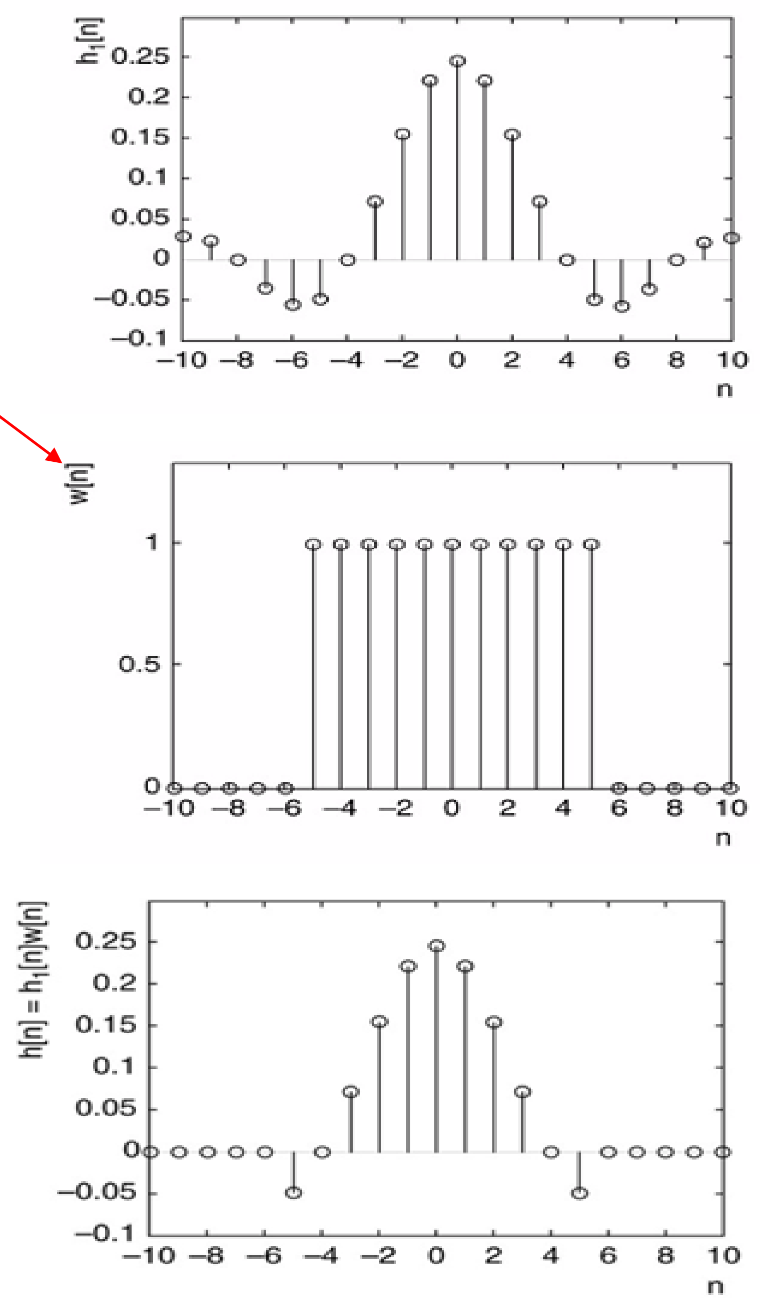


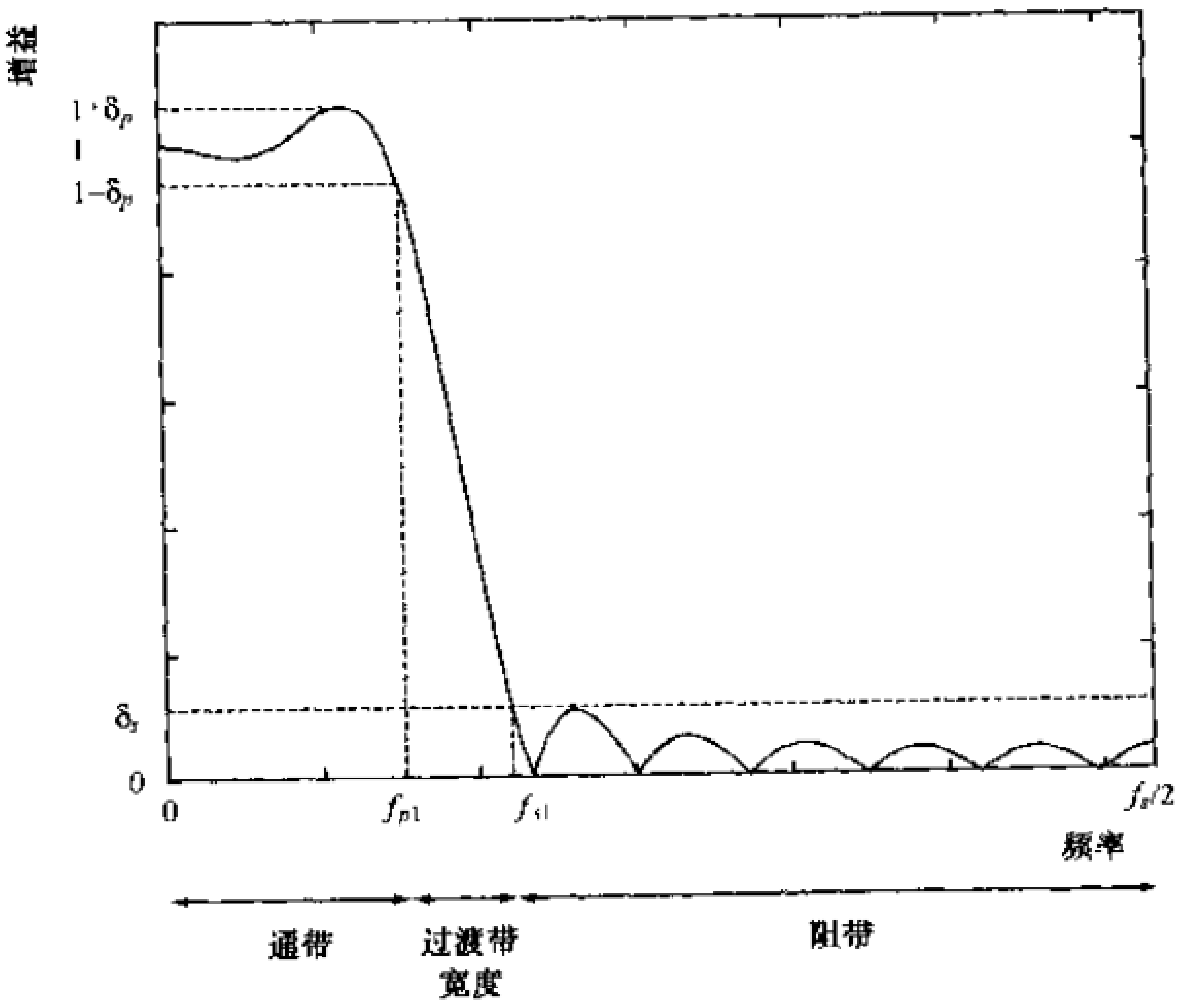
图 9.12 理想低通滤波器脉冲响应

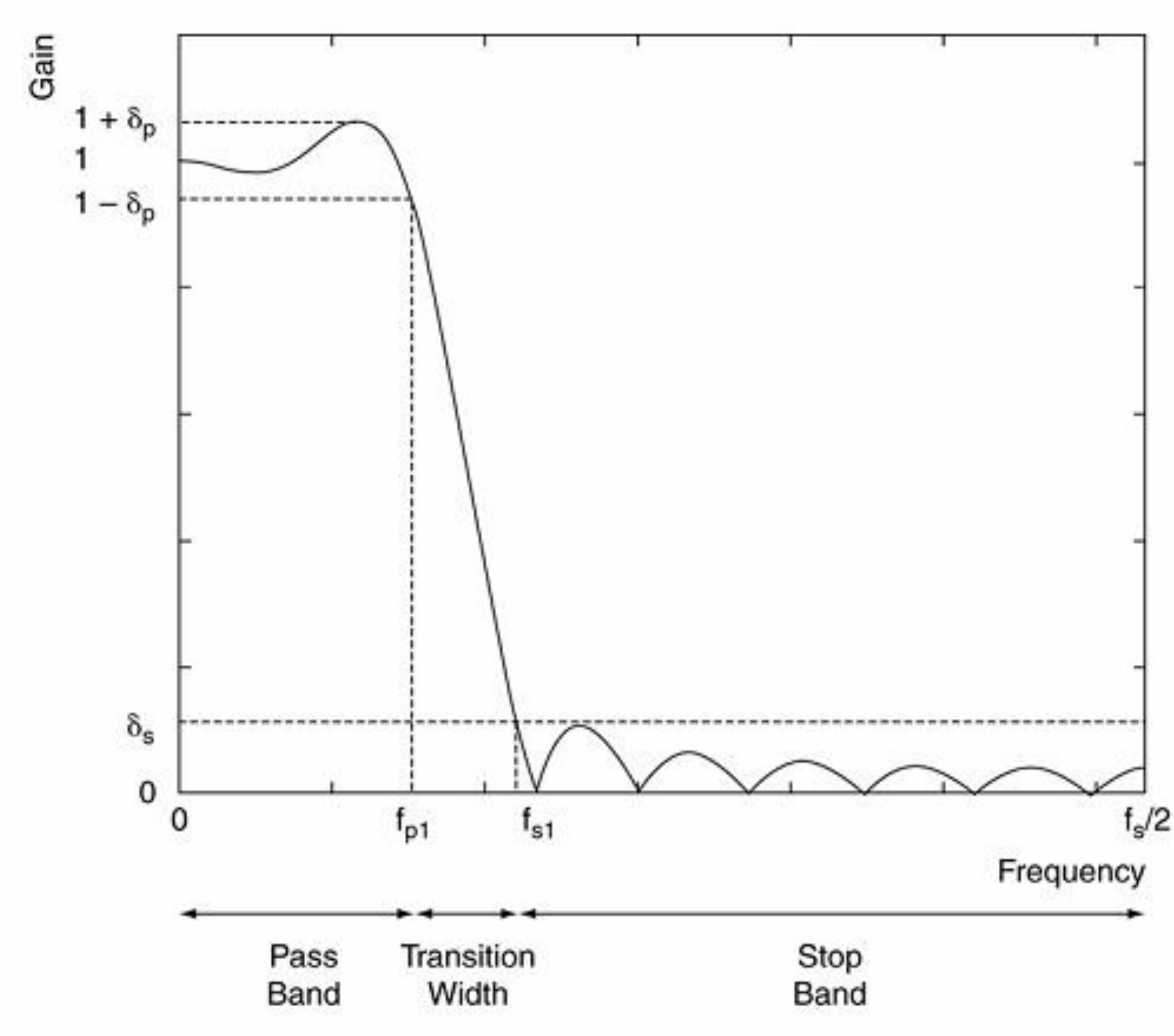
这个脉冲响应有无限个样点

借助窗函数$w[n]$，使得脉冲响应的无限个样点变成有限个样点



过渡带宽度＝阻带边缘频率－通带边缘频率




Gain
1 + δp
1
1 − δp
δs
0
0
fp1
fs1
fs/2
Frequency
Pass
Band
Transition
Width
Stop
Band

- 通带：滤波器允许通过的频率范围
- 阻带：滤波器对信号严重衰减的频率范围
- 通带波纹（δp）：滤波器通带内偏离单位增益的最大值
- 通带边缘增益：1-δp
- 阻带波纹（δs）：滤波器阻带内偏离零增益的最大值
- 过渡带宽度 = 阻带边缘频率 – 通带边缘频率

窗函数

- 窗函数的作用：

  使理想低通滤波器脉冲响应$h_1[n]$的无限个样点中选取有限个样点。

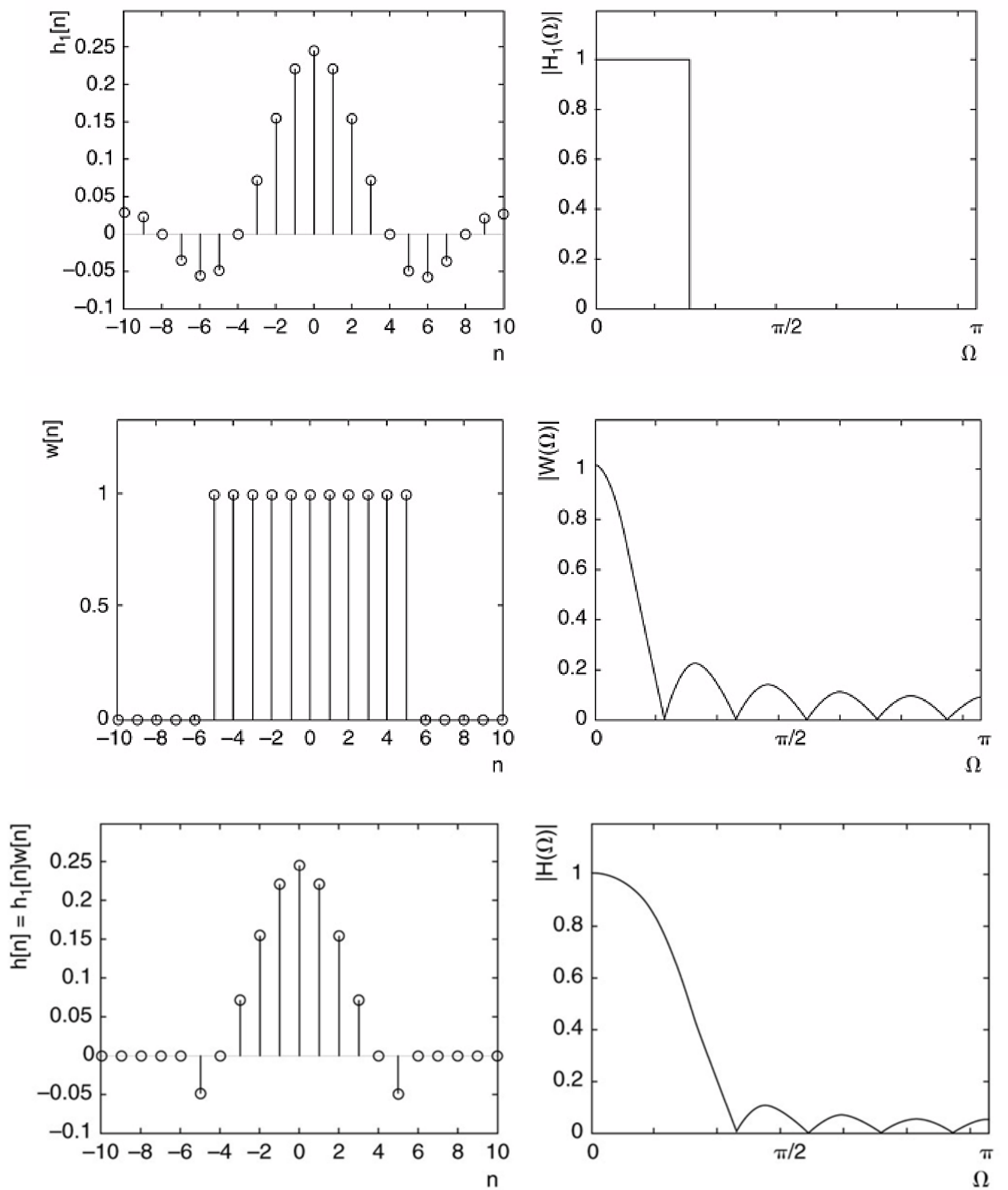
- 矩形窗

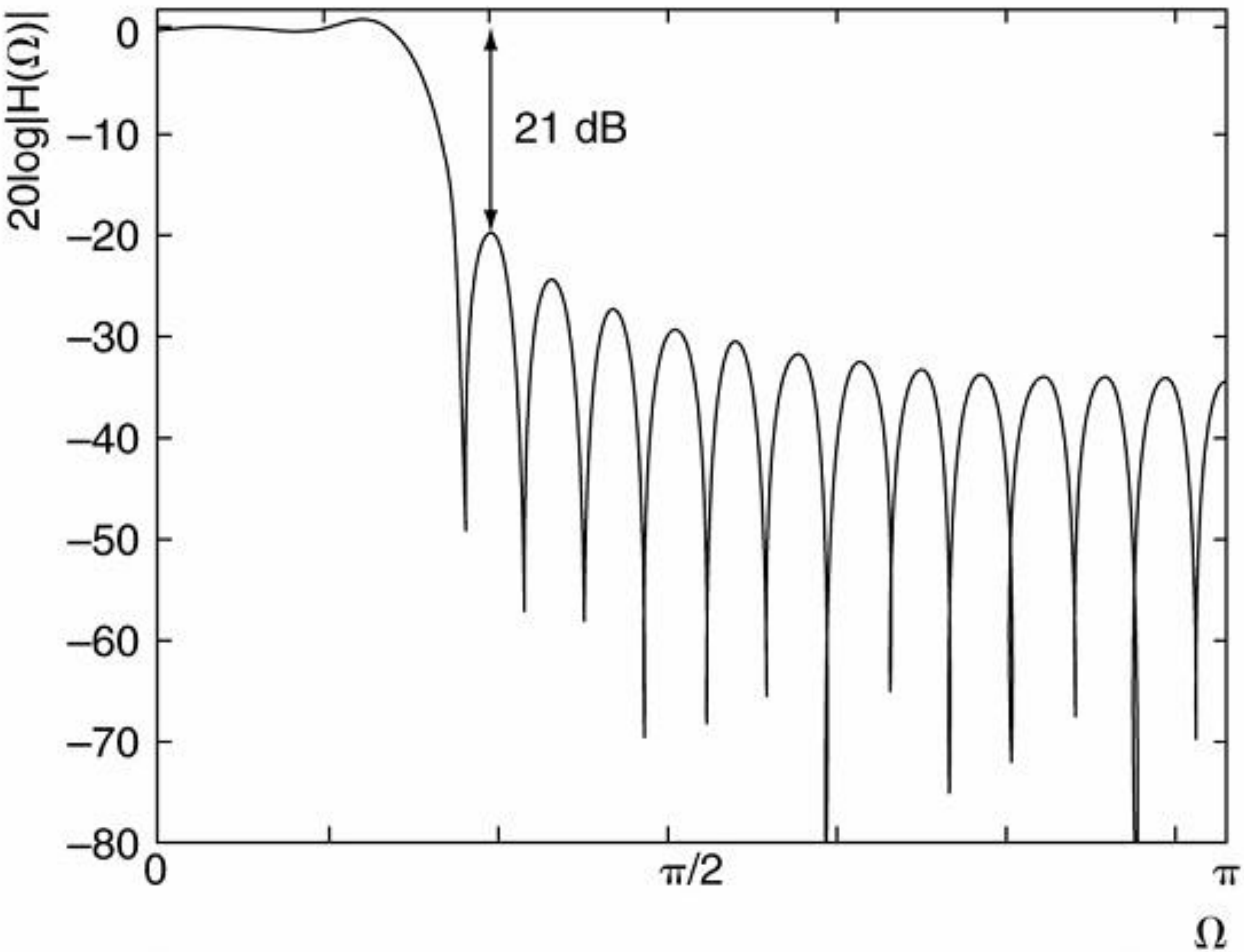
$$
\boxed{w[n]=\begin{cases}1 & |n|\le (N-1)/2 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}}
$$

有限脉冲响应为：

$$h[n]= h1[n]w[n]$$

矩形窗

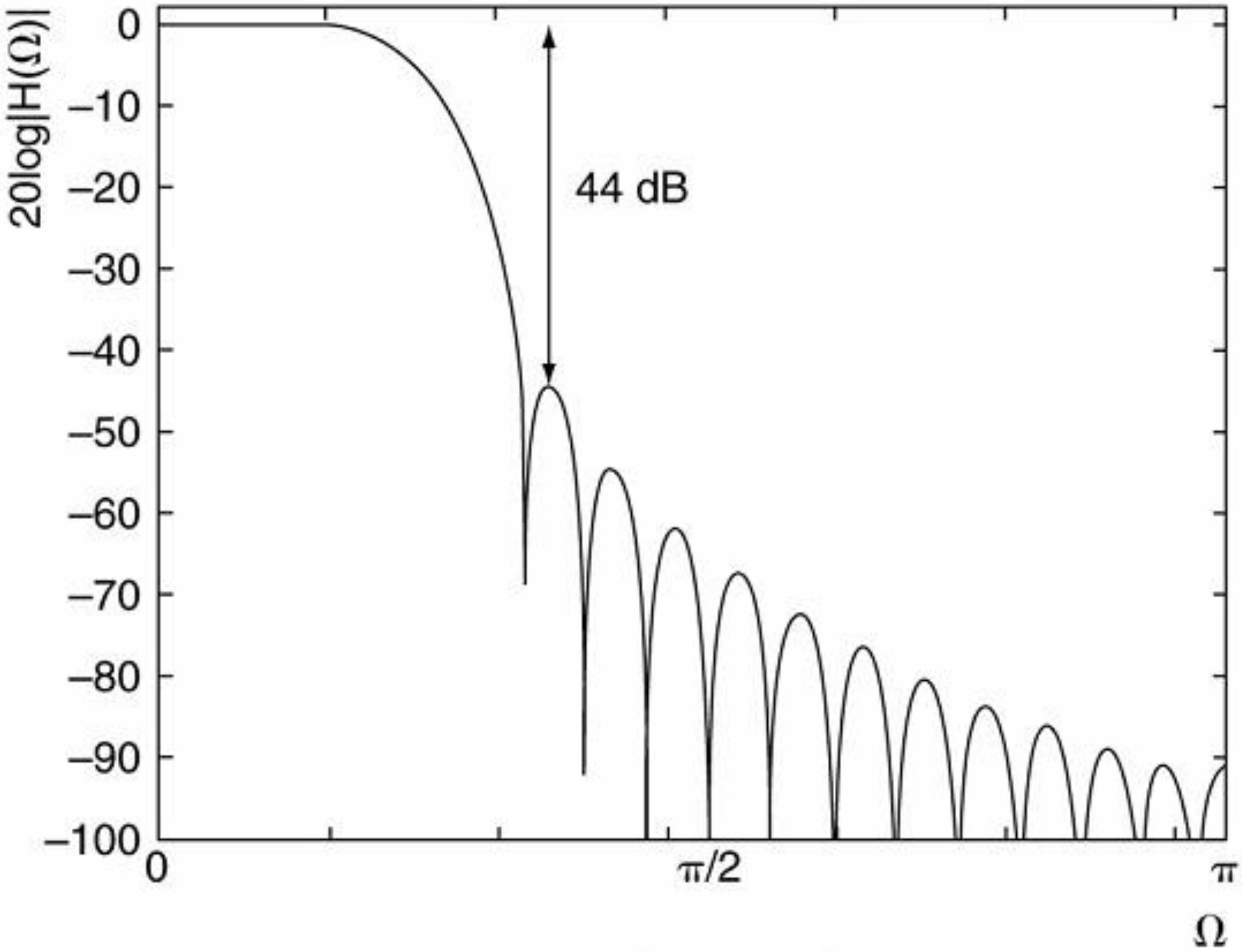




20log|H(Ω)|
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−70
−80
21 dB
0
π/2
π
Ω

汉宁窗 / Hanning window

$$w[n]=\begin{cases} 0.5+0.5\cos\dfrac{2\pi n}{N-1} & |n|\le (N-1)/2 \\ 0 & \text{其他/others} \end{cases}$$

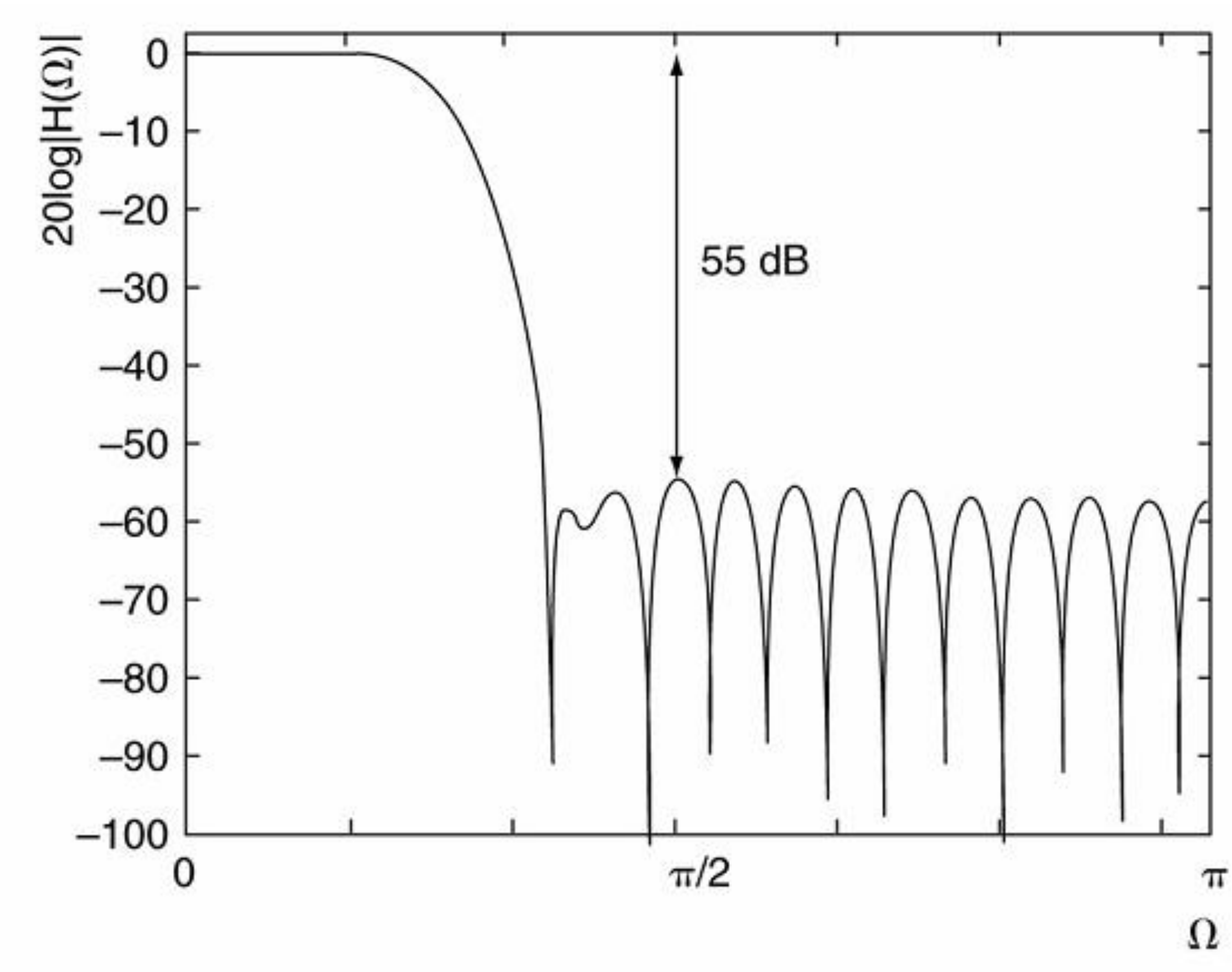


20log|H(Ω)|
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−70
−80
−90
−100
44 dB
0
π/2
π
Ω

哈明窗

$$w[n]=\begin{cases} 0.54+0.46\cos\dfrac{2\pi n}{N-1} & |n|\le (N-1)/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

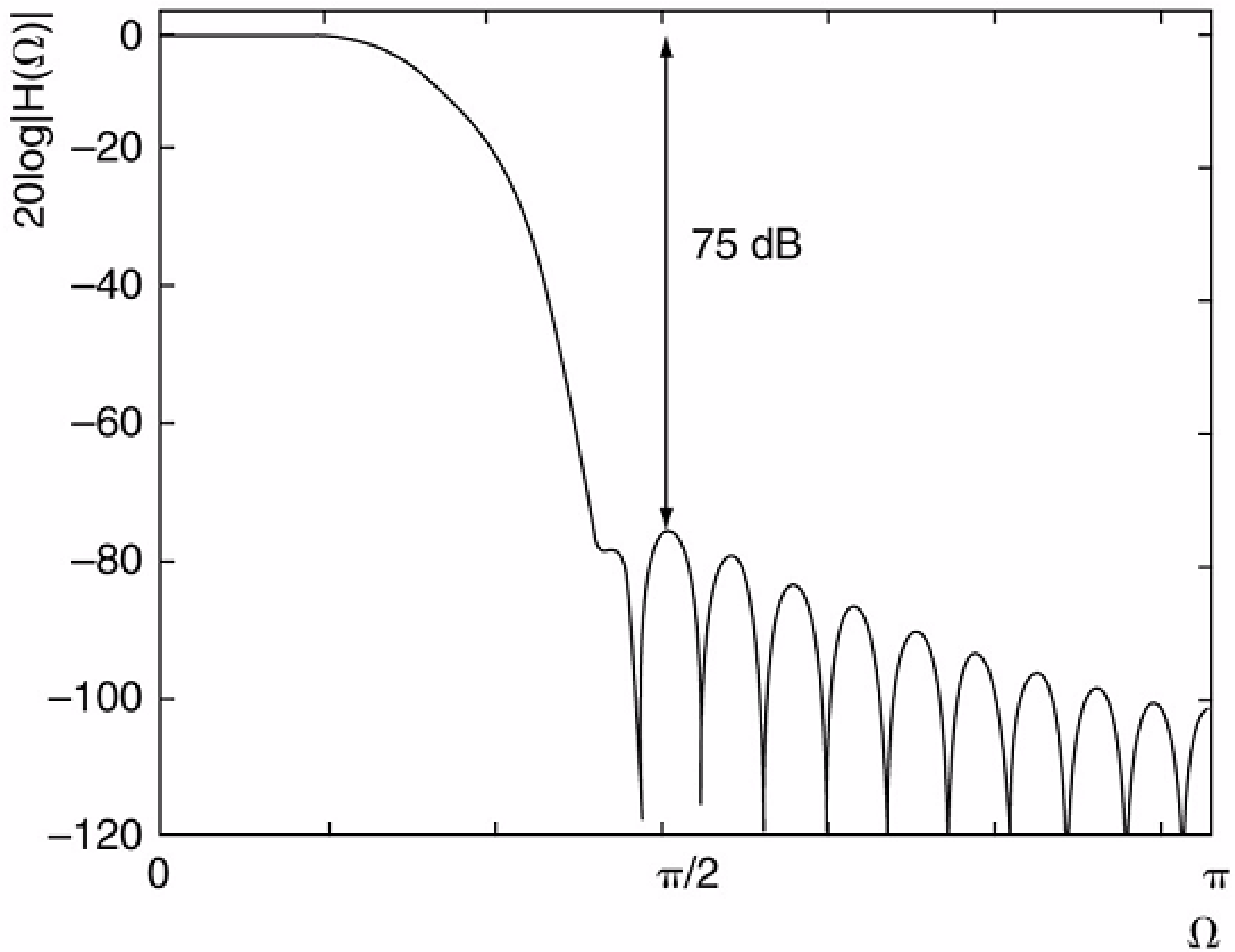
哈明窗 / Hamming window



布来克曼窗

$$w[n]=\begin{cases} 0.42+0.5\cos\dfrac{2\pi n}{N-1}+0.08\cos\dfrac{4\pi n}{N-1} & |n|\le (N-1)/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

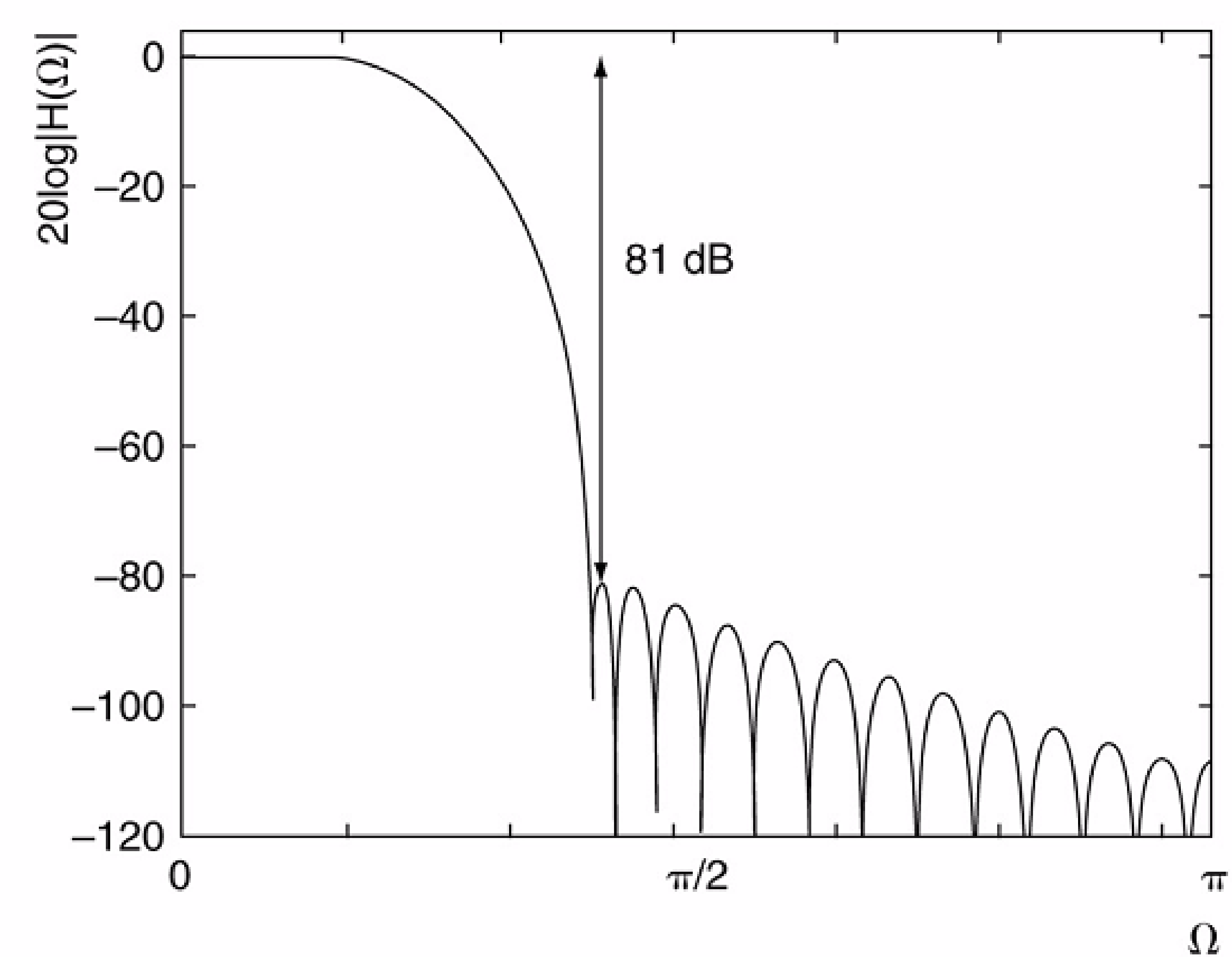
布莱克曼窗/Blackman's window



凯塞窗

$$w[n]=\begin{cases}\dfrac{I_0[\beta\sqrt{1-(\frac{2n}{N-1}-1)^2}]}{I_0(\beta)} & |n|\le (N-1)/2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

凯塞窗 / Kaiser window



低通FIR滤波器设计

窗类型 Window type	窗函数 window function	项数 N	阻带衰减 stopband attenuation(dB)	通带边缘增益 20log(1-δp)
矩形	1	0.91fs/TW	21	-0.9
汉宁		3.32fs/TW	44	-0.06
哈明		3.44fs/TW	55	-0.02
布莱克曼		5.98fs/TW	75	-0.0014
凯塞		4.33fs/TW(β=6)	64	-0.0057
		5.25fs/TW(β=8)	81	-0.00087

表 9.3 FIR 滤波器参数

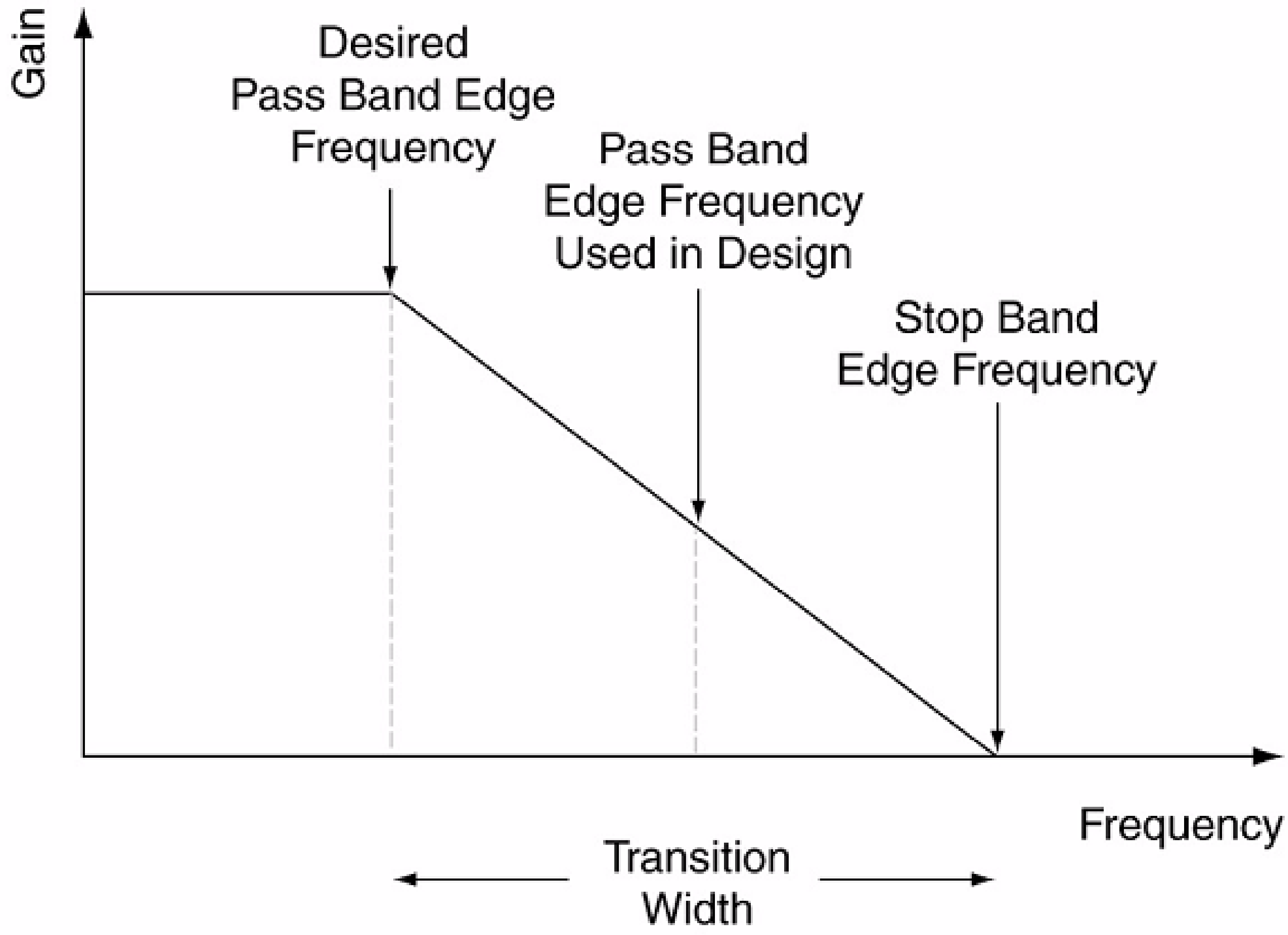
窗类型	窗函数 $\lvert n\rvert \le \frac{N-1}{2}$	项数，N^*	滤波器阻带衰减(dB)	通带边缘增益 $20\log(1-\delta_p)$(dB)
矩形	1	$0.91\frac{f_S}{\text{T.W.}}$	21	-0.9
汉宁	$0.5+0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$	$3.32\frac{f_S}{\text{T.W.}}$	44	-0.06
哈明	$0.54+0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$	$3.44\frac{f_S}{\text{T.W.}}$	55	-0.02
布莱克曼	$0.42+0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$ $+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$	$5.98\frac{f_S}{\text{T.W.}}$	75	-0.001 4
凯塞	$\frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}$	$4.33\frac{f_S}{\text{T.W.}}(\beta=6)$	64	-0.005 7
		$5.25\frac{f_S}{\text{T.W.}}(\beta=8)$	81	-0.000 87
		$6.36\frac{f_S}{\text{T.W.}}(\beta=10)$	100	-0.000 013

* N = 窗内项数，f_S = 采样频率，T.W. = 过渡带宽度

低通FIR滤波器设计

1. 选择设计中的通带边缘频率 f_1
2. 根据 f_1计算 Ω_1,求$h_1[n]$
3. 求窗函数
4. 求滤波器的 h[n]=h1[n]w[n]
5. 根据 h[n] 求传输函数（ h[n] 的Z变换）、极-零点,讨论稳定性
6. 根据 h[n] 求频率响应（ h[n] 的傅里叶变换），幅度响应,画出图形，了解差分方程的作用
7. h[n] 与 x[n] 的卷积就是差分方程：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[n]x[n-k]=x[n]*h[n]$$


Gain
Desired
Pass Band Edge
Frequency
Pass Band
Edge Frequency
Used in Design
Stop Band
Edge Frequency
Frequency
Transition
Width

例 9.7　根据下列指标设计低通滤波器：

通带边缘频率 2 kHz

阻带边缘频率 3 kHz

阻带衰减　　40 dB

采样频率　　10 kHz

1. 选择设计中的通带边缘频率f_1

$$f_1 = 2000 + \frac{1000}{2} = 2500（Hz)$$

2，根据f_1计算Ω_1,求$h_1[n]$

$$\Omega_1 = 2\pi \frac{f_1}{f_s} = 2\pi \frac{2500}{10000} = 0.5\pi$$

$$h_1[n] = \frac{\sin(n\Omega_1)}{n\pi} = \frac{\sin(0.5\pi n)}{n\pi}$$

3，求窗函数

因为阻带衰减为40dB，所以选择汉宁窗

$$N = 3.32 \times \frac{f_s}{\text{过渡带宽度}} = 3.32\frac{10}{1} = 33.2$$

选取

$N = 33$

窗函数为

$$w[n] = 0.5 + 0.5\cos(\frac{2\pi n}{N-1}) = 0.5 + 0.5\cos(\frac{2\pi n}{32})$$

4，求滤波器的h[n]=h1[n]w[n]

$$h[n]=h_1[n]w[n]=\frac{\sin(0.5\pi n)}{n\pi}\{0.5+0.5\cos(\frac{2\pi n}{32})\}$$

5，根据h[n]求传输函数

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h[n]z^{-n}$$

6，根据h[n]求频率响应

$$H(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-jn\Omega}$$

7，幅度响应，画出图形

$$\left|H(\Omega)\right|\Leftrightarrow\Omega$$

差分方程

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n]x[n-k]=x[n]*h[n]$$

用Matlab的快捷方式：fdatool（filterDesigner）

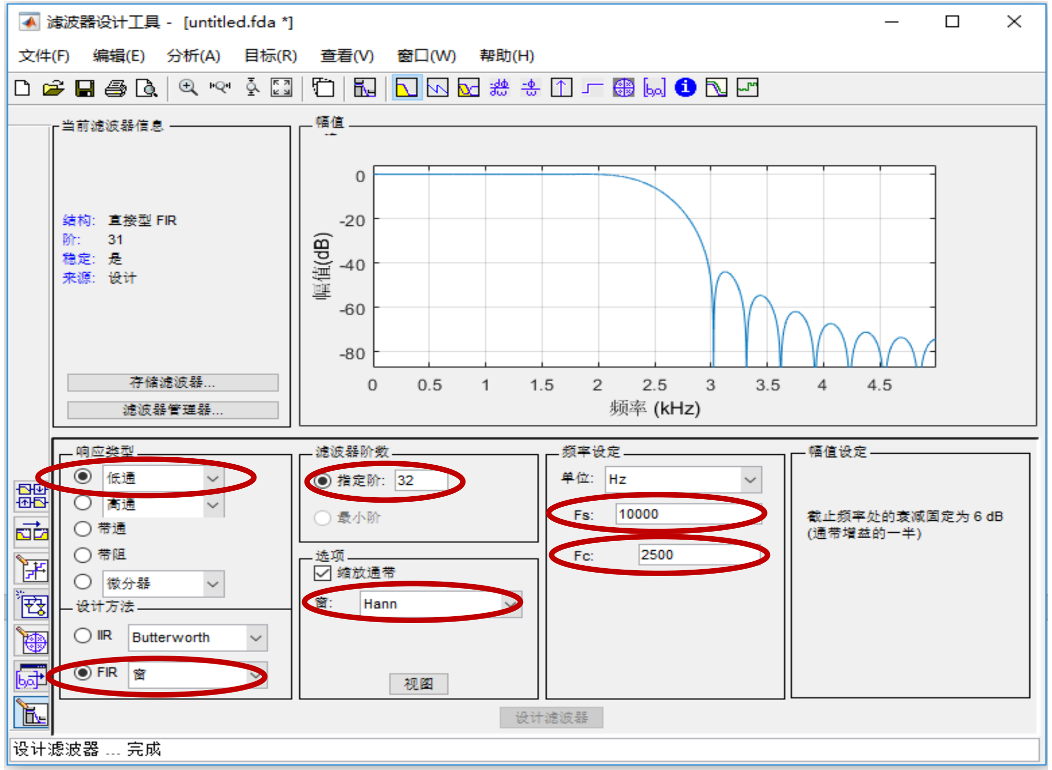
例9.7

采样频率Fs=10kHz

通带边缘频率Fp=2000Hz　f1=2500Hz

项数N=33

汉宁窗



```
%9.7 Returns a discrete-time filter object.

% FIR Window Lowpass filter designed using the FIR1 function.
% All frequency values are in Hz.
Fs = 10000;  % Sampling Frequency
N    = 32;       % Order
Fc   = 2500;     % Cutoff Frequency
flag = 'scale';  % Sampling Flag
% Create the window vector for the design algorithm.
win = hann(N+1); %计算出窗口内点数=33，而在可视化界面给的N=32，N+1=33
% Calculate the coefficients using the FIR1 function.
b  = fir1(N, Fc/(Fs/2), 'low', win, flag);
Hd = dfilt.dffir(b);
%以上是生成的代码
[x,fs]= audioread ('E:liulili.wav');  %输入信号文件
X=x(:,1);  %单声道
y = filter(b,1,X);%用设计的滤波器对输入信号进行处理
%plot(y)%画出处理后的结果
subplot(211),plot(X);
subplot(212),plot(y)
```

Python代码

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.signal import firwin, freqz
# 首先定义了FIR滤波器的参数，包括阶数和截止频率。然后使用firwin函数设计了一个低通FIR滤波器。接着，我们使用freqz函数计算了滤波器的频率响应，并使用Matplotlib库绘制了频率响应曲线。
#可以根据需要调整滤波器的参数，比如阶数和截止频率，以及绘制频率响应的精度。这个示例是一个低通滤波器的设计，你也可以使用firwin函数设计其他类型的FIR滤波器，如高通、带通或带阻滤波器。
# 定义滤波器的参数
num_taps = 101  # 滤波器的阶数
cutoff_freq = 0.1  # 截止频率，范围为0到1，1表示采样频率的一半

# 设计低通FIR滤波器
h = firwin(num_taps, cutoff_freq)

# 绘制滤波器的频率响应
freq, response = freqz(h, worN=8000)
amplitude = np.abs(response)

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(0.5 * freq / np.pi, 20 * np.log10(amplitude), 'b')
plt.title("FIR滤波器的频率响应")
plt.xlabel("频率 [Hz]")
plt.ylabel("增益 [dB]")
plt.grid()
plt.show()
```

例 9.8　根据下列指标设计低通滤波器:

通带边缘频率	10 kHz
阻带边缘频率	22 kHz
阻带衰减	75 dB
采样频率	50 kHz

噪声检测

噪声是指信号中的无用信号成分。

噪声检测

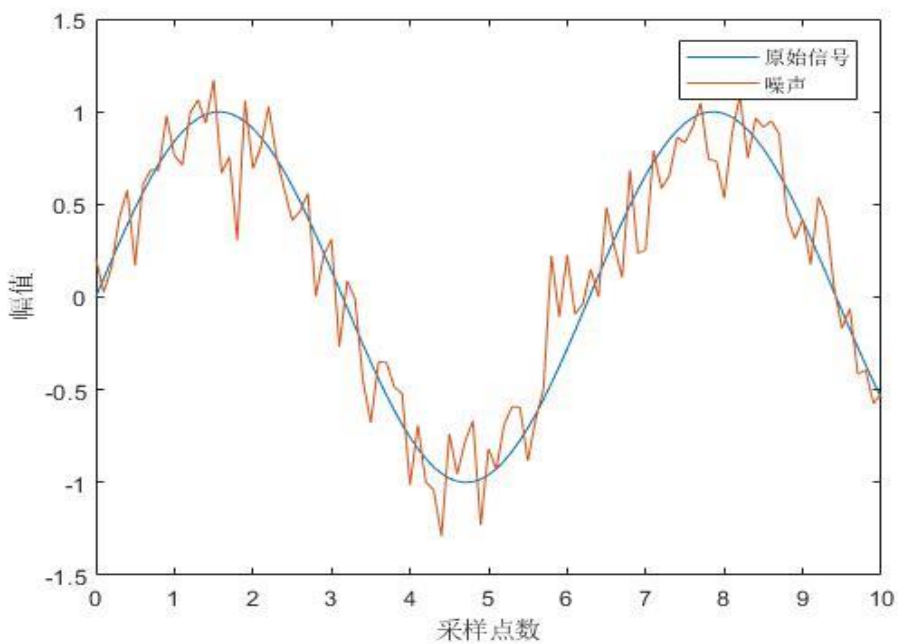
常见的噪声有：

- 加性噪声：噪声与信号是不相关的，不管有没有信号，噪声都是存在的。如闪电、雷击等自然噪声。

噪声检测

常见的噪声有：

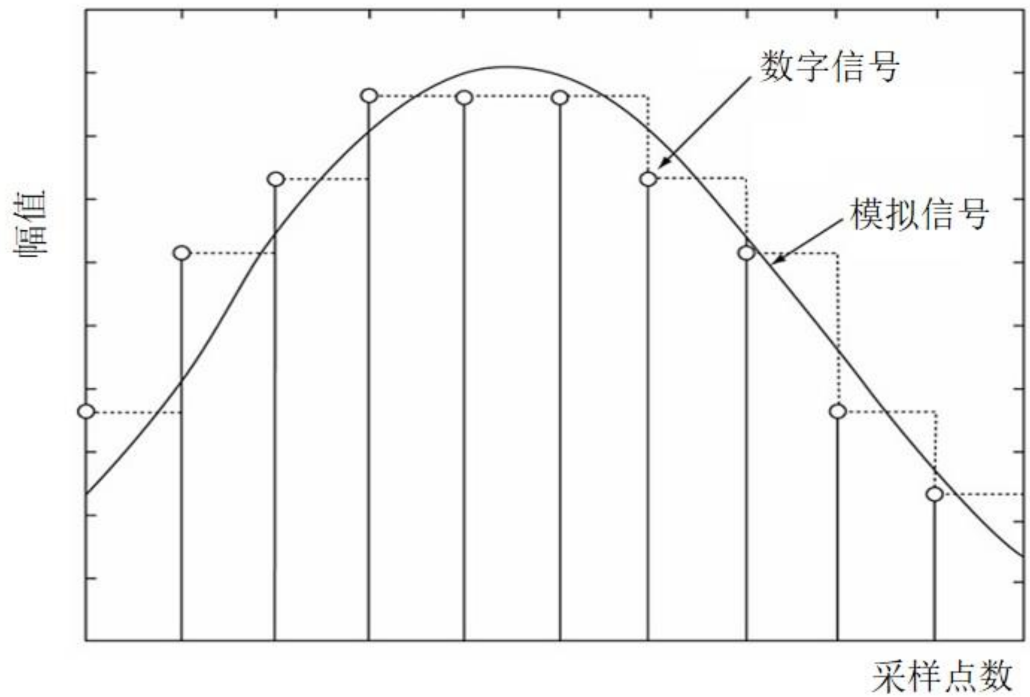
- 乘性噪声：噪声与信号是相关的，信号在噪声也在，信号不在噪声也不在。乘性噪声干扰相对于加性噪声干扰具有更强的时变特性和抗滤波性。



噪声检测

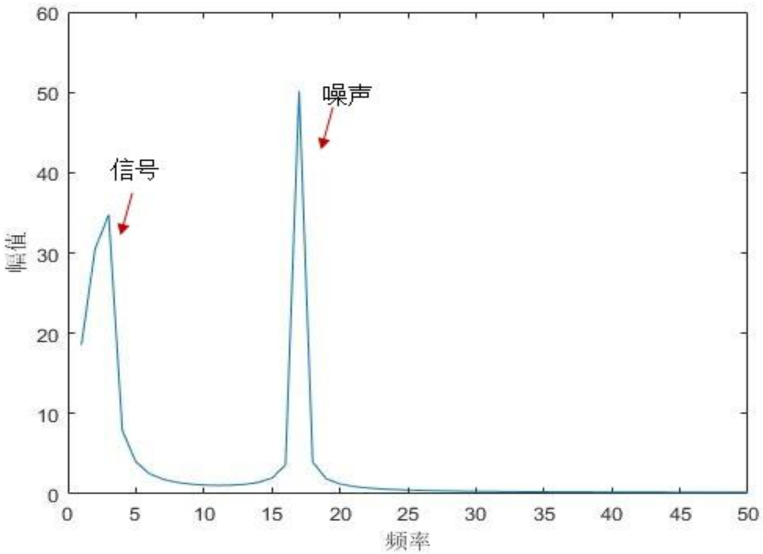
常见的噪声有:

- 量化噪声：在信号的模数转换中，量化后的数字信号与原始输入的模拟信号在幅值上会出现差异，而产生失真，这种由于量化而产生的失真成为噪声。



在频域内检测噪声信号

- 传感器采集含有噪声的混杂信号，用数字信号处理方法对检测的含有噪声的混杂信号进行分类，实现对噪声的检测。
- 下图所示为含有噪声的混杂信号频域图，其中信号是sin(n)、噪声是cos(10n)，通过傅里叶变换，在频域内将信号与噪声分开，从而检测出该信号中的噪声。



在频域内检测噪声信号

n = (0:0.1:10);

x=sin(n); %正弦函数信号

y =cos(10*n);%噪声信号

z=x+y;

Y=fft(z);

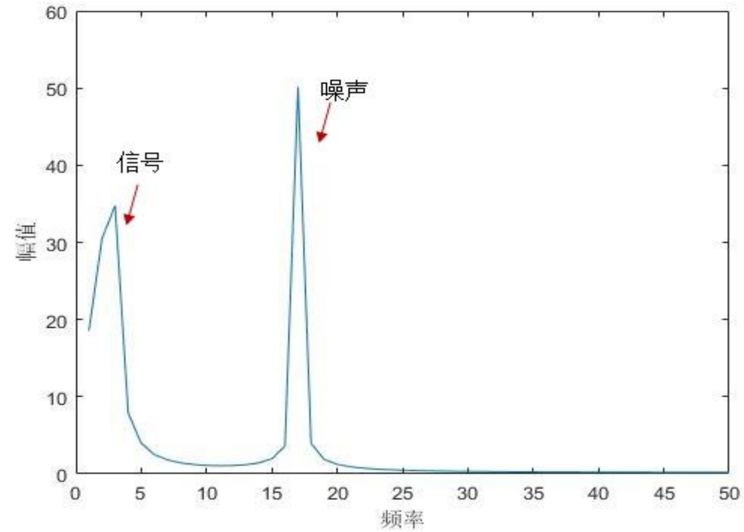
Z=abs(Y);

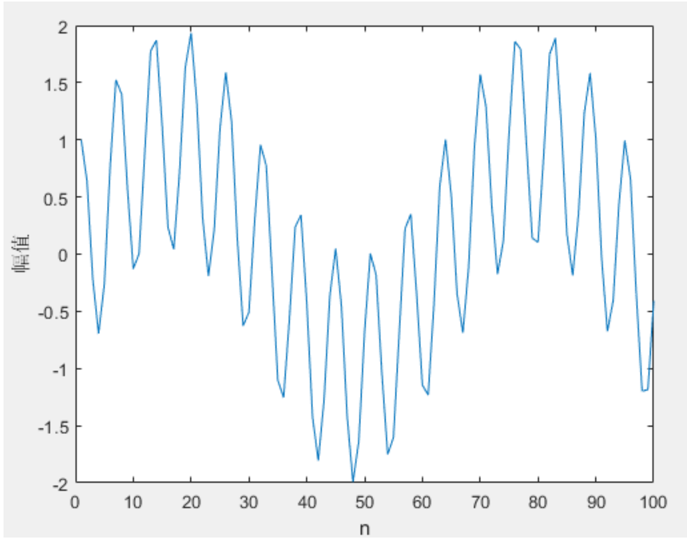
figure

plot(Z),xlim([0 50]), xlabel('频率'),ylabel('幅值');

figure

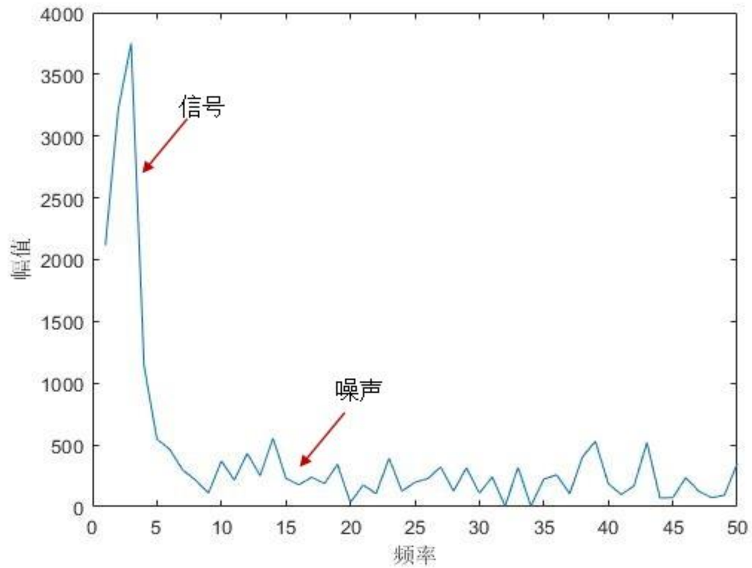
plot(z),xlim([0 100]), xlabel('n'),ylabel('幅值')

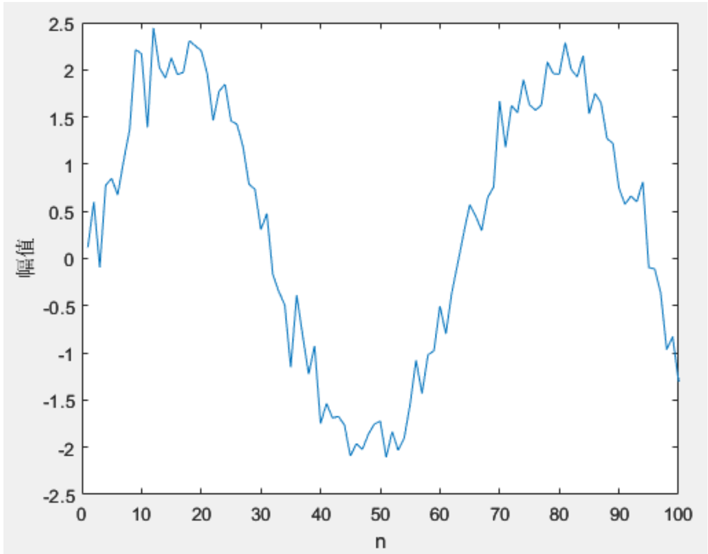




在频域内检测噪声信号

```
n = (0:0.1:10);
x=sin(n); %正弦函数信号
y = awgn(x,10,'measured');%噪声信号
z=x+y;
figure
plot(n,z),xlabel('采样点数'),ylabel('幅值');
Y=fft(z);
Z=abs(Y);
figure
plot(Z),xlim([0  50]) ， xlabel('频率'),ylabel('幅值');
figure
plot(z),xlim([0 100]), xlabel('n'),ylabel('幅值')
```





降噪处理

滤波是降噪处理的一种方法，它将信号中特定频率成分滤除，从有干扰的信号中提取有用信号的过程。

例：使用下面滑动平均滤波器，对信号进行降噪处理。

$$y[n]=\frac{1}{15}(x[n]+x[n-1]+x[n-2]+x[n-3]+x[n-4])$$

1）首先根据Z变换分析这个滤波器的稳定性

2）根据滤波器的频率响应曲线讨论这个滤波器对输入信号的处理

3）上述符合要求，对输入信号进行处理

作 业

《数学传感技术与机器人控制》的第7章 1、2、3、4、5、6、7