第 九 章 振 动

9-1 简谐振动、振幅、周期和频率、相位
9-2 旋转矢量
9-3 单摆和复摆
9-4 简谐振动的能量
9-5 简谐振动的合成

~~9-6、9-7、9-8~~ ← 不要求

第 九 章 振 动

9-1 简谐振动、振幅、周期和频率、相位

9-2 旋转矢量

9-3 单摆和复摆

一、简谐振动 Simple Harmonic Motion

1、机械振动 Mechanical Vibration

1) 振动(广义)：物理量在某一定值附近反复变化即为振动

2) 机械振动： 物体或物体的某部分在一定位置(平衡位置)附近来回往复的运动

心脏的跳动，声源的振动、钟摆的摆动，地震等

一、简谐振动 Simple Harmonic Motion

2、简谐振动

物理量随时间的变化规律可以用正弦或余弦函数描述

一维运动的质点(机械振动)：取平衡位置作为原点

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

◆ 简谐振动 ⟶ 最简单、最基本的振动

简谐振动 $\xleftrightarrow[\text{分解}]{\text{合成}}$ 复杂振动

谐振子：　作简谐振动的物体系统

二、简谐振动的运动学特征

一维运动的质点其位置随时间的变化规律若可以用正弦、余弦函数描述，该质点的运动为简谐振动。

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

简谐振动运动方程(振动表达式)

x 是描述位置的物理量，如 y，z 或 θ 等。

A: 振幅　　ω: 角(圆)频率　　φ_0: 初相位

简谐振动的三个特征量

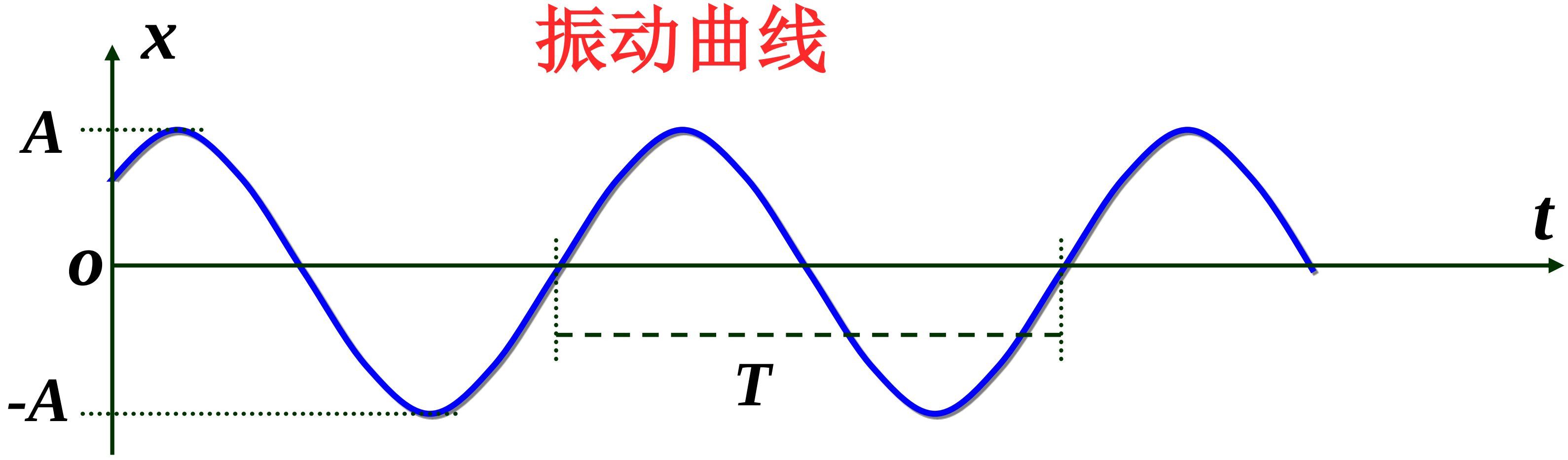
二、简谐振动的运动学特征

一维运动的质点其位置随时间的变化规律若可以用正弦、余弦函数描述，该质点的运动为简谐振动。

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

简谐振动运动方程(振动表达式)

振动曲线



二、简谐振动的运动学特征

1、描述简谐振动的物理量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

1）振幅 A：物体离开平衡位置的最大位移的绝对值；

2）周期 T、频率 ν、圆(角)频率 ω

周期 T：物体完成一次全振动所需时间；

频率 ν：单位时间内振动的次数；

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

圆(角)频率 ω：2π时间内振动的次数；

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

二、简谐振动的运动学特征

1、描述简谐振动的物理量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

3）相位 $(\omega t+\varphi_0)$ 和初相位 φ_0

$(\omega t+\varphi_0)$ 称为 t 时刻振动的相位

φ_0 为 $t=0$ 时刻的相位，称为初相位

一般情况：$0 \le \varphi_0 < 2\pi$ 或 $-\pi \le \varphi_0 < \pi$

相位的意义：相位确定谐振动系统的运动状态

二、简谐振动的运动学特征

1、描述简谐振动的物理量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

4）相位差： 表示两个相位之差

（1）对同一简谐振动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间。

$$x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi_0), \quad x_2 = A\cos(\omega t_2 + \varphi_0),$$

$$\Delta\varphi = (\omega t_2 + \varphi_0) - (\omega t_1 + \varphi_0) = \omega(t_2 - t_1) = \omega\Delta t$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$

二、简谐振动的运动学特征

1、描述简谐振动的物理量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

4）相位差：表示两个相位之差

（2）对于两个同频率的简谐振动，相位差表示它们之间振动步调上的差异。

同一时刻，t 时刻： $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{01})$，$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{02})$

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{02}) - (\omega t + \varphi_{01}) = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

① $\Delta\varphi = \pm 2k\pi, k = 0,1,2,\cdots,$ 两振动步调一致：同相（同步）

② $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi, k = 0,1,2,\cdots,$ 两振动步调相反：反相

二、简谐振动的运动学特征

1、描述简谐振动的物理量

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

4）相位差：表示两个相位之差

（2）对于两个同频率的简谐振动，相位差表示它们之间振动步调上的差异。

同一时刻，t 时刻： $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{01})$，$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{02})$

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{02}) - (\omega t + \varphi_{01}) = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

③ $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} > 0,$ x_2的振动相位比x_1超前 $\Delta\varphi$

④ $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} < 0,$ x_2的振动振动比x_1落后 $|\Delta\varphi|$

二、简谐振动的运动学特征

2、简谐振动物体的速度和加速度

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = \underline{A\omega}\cos(\omega t + \underline{\varphi_0 + \frac{\pi}{2}})$$

$$v = v_m\cos(\omega t + \varphi_0')$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = \underline{A\omega^2}\cos(\omega t + \underline{\varphi_0 + \pi})$$

$$a = a_m\cos(\omega t + \varphi_0'')$$

1）速度和加速度作与位移同频率的简谐振动；

2）速度振幅：$v_m = A\omega$；加速度振幅：$a_m = A\omega^2$

3）速　度相位比位移相位超前 π/2；

加速度相位比位移相位超前 π 。

二、简谐振动的运动学特征

3、振幅A和初相位φ_0的确定

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

初始条件为 $t_0 = 0$ 时： $x = x_0$， $v = v_0$，

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x_0 = A\cos\varphi_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow v_0 = -\omega A\sin\varphi_0$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}} \qquad \boxed{\tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0}}$$

对给定振动系统，周期由系统本身性质决定，振幅和初相由初始条件决定。

例 1： 已知：$t_0 = 0,\quad x_0 = 0,\quad v_0 < 0$

求：初相位 $\varphi_0 = ?$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

解： $0 = A\cos\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \pm\dfrac{\pi}{2}$

$$(-\pi \le \varphi_0 < \pi)$$

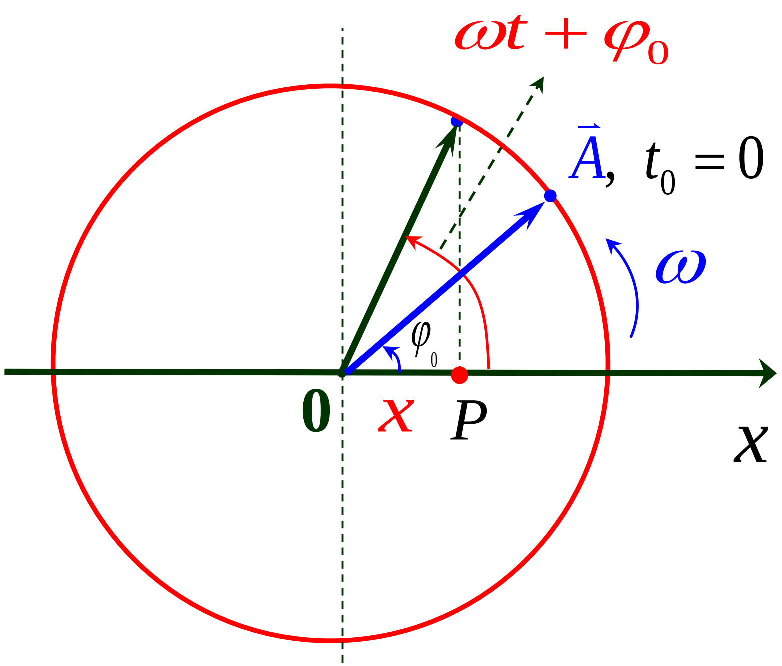
$$\because v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 < 0$$

$\therefore \sin\varphi_0 > 0$, 取 $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$

$$x = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

二、简谐振动的运动学特征

4、旋转矢量法（参考圆法）



旋转矢量 $\vec{A}$ 作匀速率圆周运动，其矢量的末端在 x 轴上的投影 P 点的运动方程为:

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

（投影点 P 的运动为简谐振动）

半径 A	振幅 A
初始角位置 φ_0	初位相 φ_0
角速度 ω	圆频率 ω
任意时刻角位置 $(\omega t+\varphi_0)$	任意时刻位相 $(\omega t+\varphi_0)$

二、简谐振动的运动学特征

例 2: 一沿 x 轴作简谐振动的弹簧振子，振幅为 A，周期为 T，振动方程用余弦函数表示，如果该振子的初相为 $\frac{4}{3}\pi$，则 $t_0 = 0$ 时，质点的位置在：

（A）过 $x = \frac{1}{2}A$ 处，向负方向运动；

（B）过 $x = \frac{1}{2}A$ 处，向正方向运动；

（C）过 $x = -\frac{1}{2}A$ 处，向负方向运动；

（D）过 $x = -\frac{1}{2}A$ 处，向正方向运动。

例 3： 一质点做沿 x 轴作简谐振动，$t_0 = 0$ 时的运动状态如下：

1）位于负最大位移处；

2）经过平衡位置向 x 轴的负方向运动；

3）经过平衡位置向 x 轴的正方向运动；

4）经过1/2最大位移处且向 x 轴的正方向运动。

求： 用旋转矢量法确定各种情况下的初相。$0 \le \varphi_0 < 2\pi$

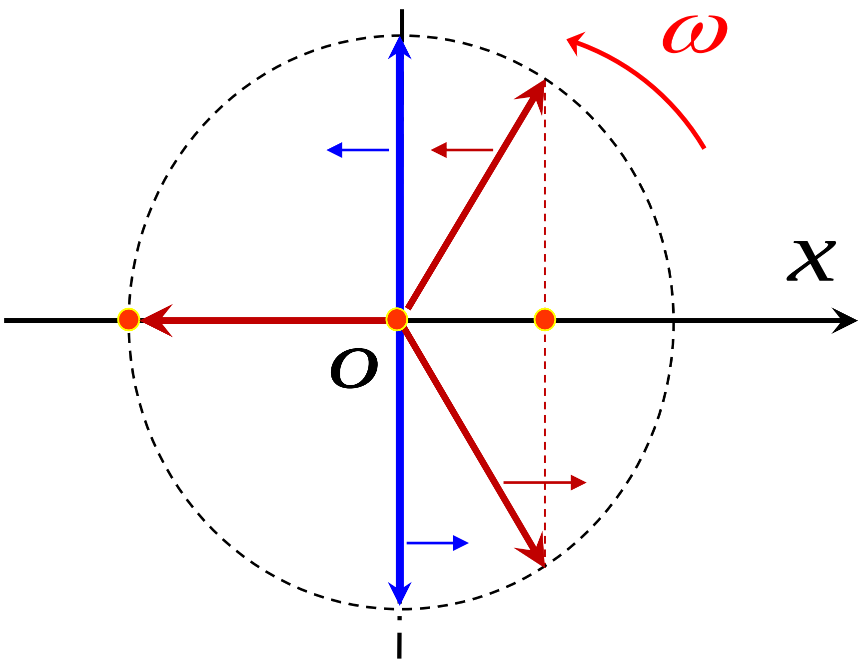
解：

1) $\varphi_0 = \pi$

2) $\varphi_0 = \dfrac{1}{2}\pi$

3) $\varphi_0 = \dfrac{3}{2}\pi$

4) $\varphi_0 = \dfrac{5}{3}\pi$



例 4: 一质点沿 x 轴作简谐振动，其简谐运动方程为：

$$x = 0.20\cos(\pi t + \frac{\pi}{3})\ (\mathrm{m}),$$

求： 由初始状态 $t_0=0$ 运动到 $x = -0.10\mathrm{m}$ 位置处所需最短时间。

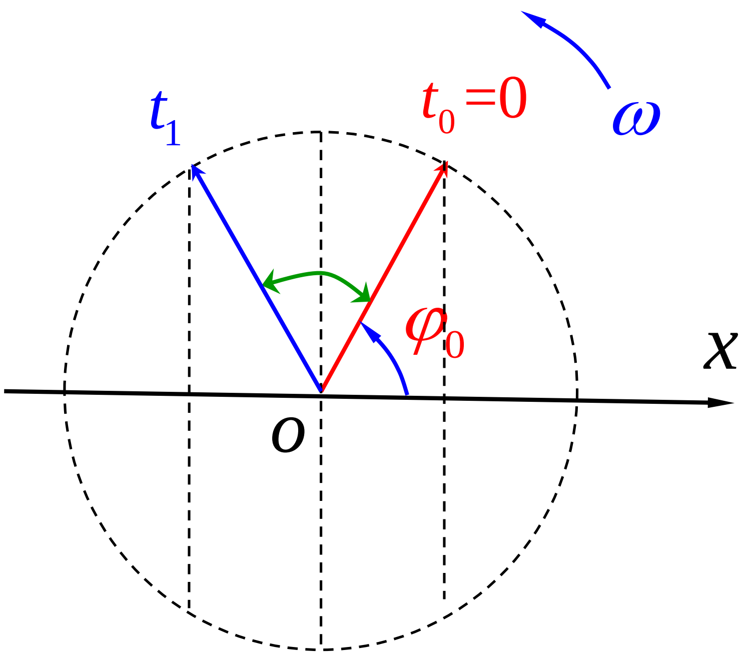
解： $\boxed{\omega = \pi\ (\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1})}$

$$t_0 = 0,\quad \varphi_0 = \frac{\pi}{3},$$

$$t_1,\quad x = -0.10\mathrm{m} = -\frac{A}{2},$$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{1}{3}\mathrm{s},$$



例 5: 一质点沿 x 轴作简谐振动，振幅为 A=10cm，周期为 T=2s。当 t_0=0 时，位移为 x_0= - 5cm，且向 x轴负方向运动。

求： 1）简谐振动方程；

2）何时物体第一次运动到 x = 5cm 处？

3）再经过多少时间物体第二次运动到 x = 5cm 处？

解： 1) 设简谐振动方程为： $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$， $\boxed{A=10\ \text{cm},}$ $\boxed{\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi\ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})}$

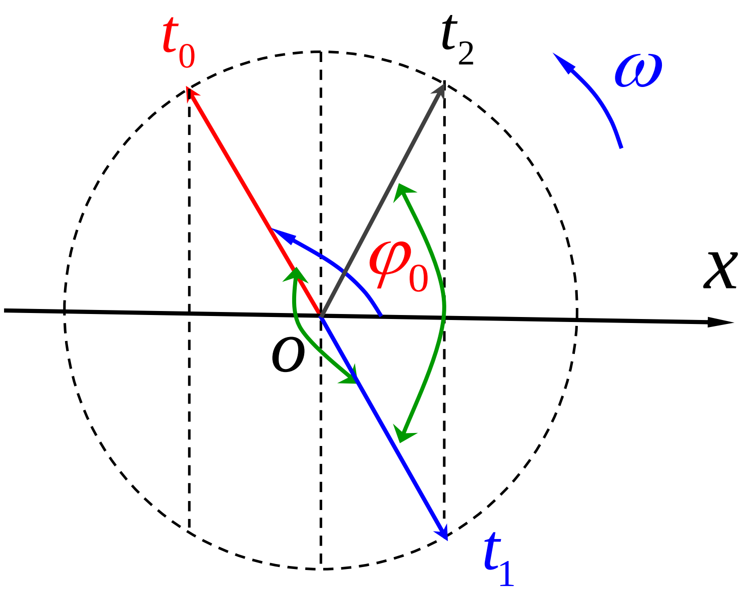
$$t_0 = 0,\quad x_0 = -\frac{A}{2},\quad v_0 < 0,\quad \Rightarrow \varphi_0 = \frac{2}{3}\pi,$$

$$\boxed{\Rightarrow x = 10\cos\left(\pi t + \frac{2}{3}\pi\right)\ (\text{cm}),}$$

2) $$\Delta\varphi = \pi,\quad \Delta t = t_1 - t_0 = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = 1\ \text{s},$$

$$t_1 = 1\ \text{s},$$

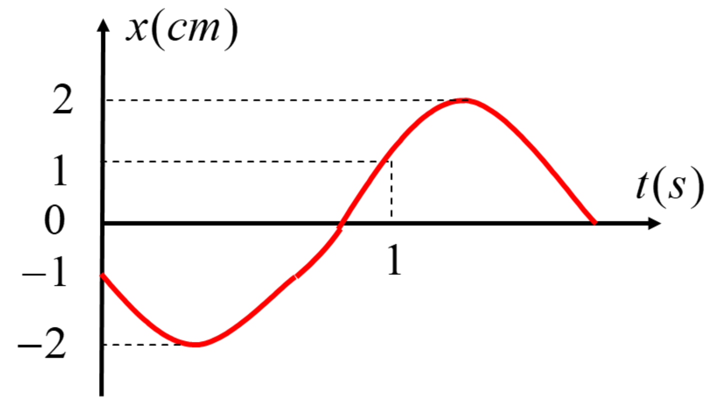
3) $$\Delta\varphi' = \frac{2}{3}\pi,\qquad \Delta t' = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi'}{\omega} = \frac{2}{3}\ \text{s},$$



例 6: 一质点沿 *x* 轴作简谐振动，已知振动曲线如图所示，

求: 简谐运动方程。

解: 设简谐振动方程为: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$,



A=2cm,

$t_0 = 0,\quad x_0 = -\dfrac{A}{2},\quad v_0 < 0,\quad \Rightarrow \varphi_0 = \dfrac{2}{3}\pi,$

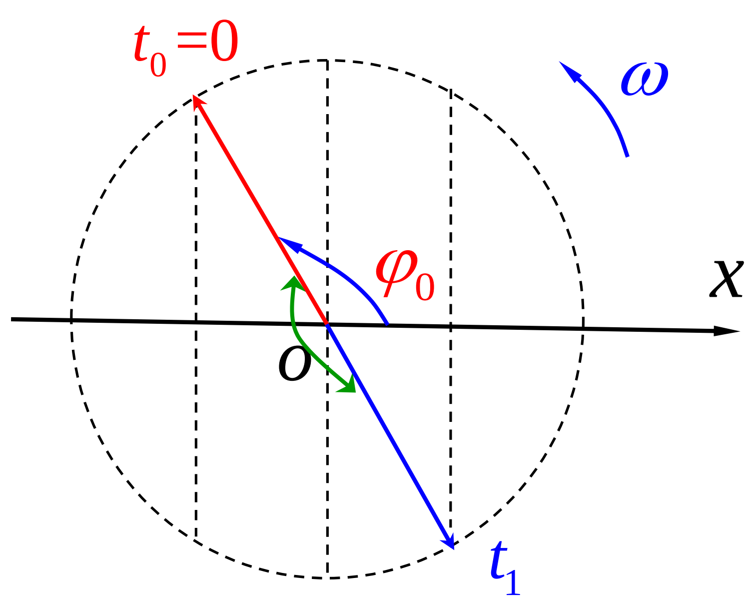
$(0 \le \varphi_0 < 2\pi)$

$t_1 = 1s,\quad x_1 = +\dfrac{A}{2},\quad v_0 > 0,\quad \Rightarrow \varphi_1 = \dfrac{5}{3}\pi,$

$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 = \pi,\ \Delta t = t_1 - t_0 = t_1 = 1\,\text{s},$

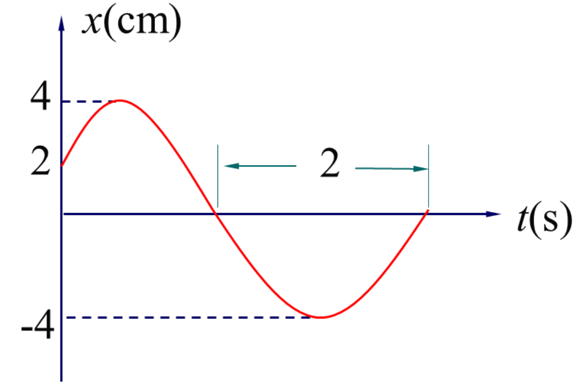
$\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \pi\ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}),$

$\boxed{\Rightarrow x = 2\cos(\pi t + \dfrac{2}{3}\pi)\ (\text{cm}),}$



例 7： 一质点沿 x 轴作简谐振动，已知振动曲线如图所示，

求： 1）质点的振动方程；2） $t_0=0$ 时质点的速度和加速度。



解：1）设简谐振动方程为： $x = A\cos(\omega t+\varphi_0)$,

$A=4\text{cm},\quad T=4\text{s},\ \Rightarrow \omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2}\ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$

$t_0=0,\quad x_0=\dfrac{A}{2},\quad v_0>0,\ \Rightarrow \varphi_0=-\dfrac{1}{3}\pi,$

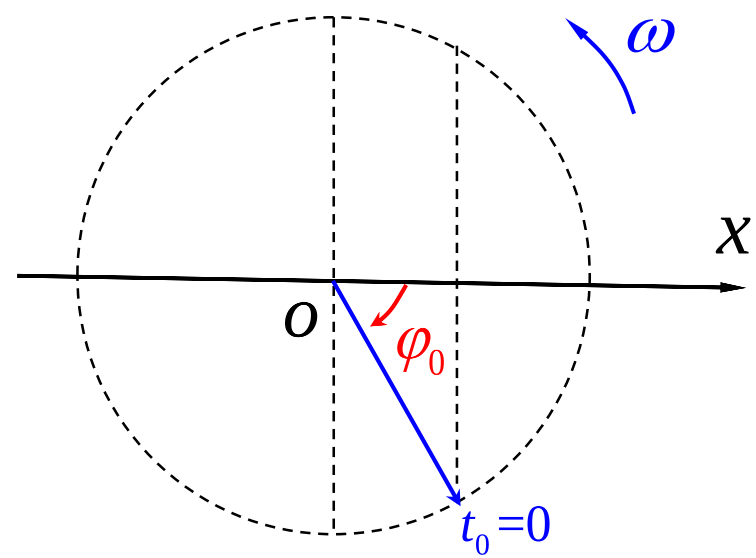
$\boxed{\Rightarrow x=4\cos(\dfrac{\pi}{2}t-\dfrac{1}{3}\pi)\ (\text{cm}),}$ $\boxed{(-\pi\le\varphi_0<\pi)}$

2） $v=\dfrac{dx}{dt}=-2\pi\sin(\dfrac{\pi}{2}t-\dfrac{1}{3}\pi),$

$a=\dfrac{dv}{dt}=-\pi^2\cos(\dfrac{\pi}{2}t-\dfrac{1}{3}\pi),$

$t_0=0,\quad \Rightarrow v_0=2\pi\sin(\dfrac{1}{3}\pi)=\sqrt{3}\pi\,(\text{m/s})$

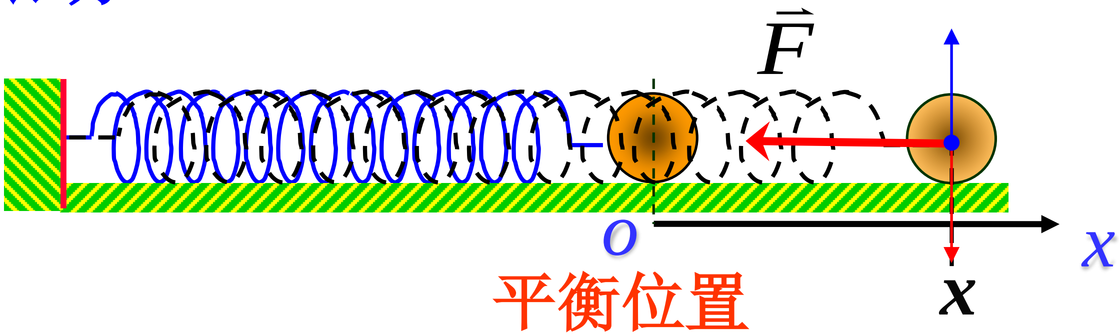
$a_0=-\pi^2\cos(\dfrac{1}{3}\pi)=-\dfrac{\pi^2}{2}\,(\text{m/s}^2)$



三、简谐振动的动力学特征

1、几种常见的简谐振动

1）、弹簧振子



当振子位移为 x 时：

$$\vec{F}_{合} = \vec{F} + \vec{G} + \vec{N} = \vec{F}, \qquad F_{合} = F = -kx = ma$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x, \qquad 令：\frac{k}{m} = \omega^2, \qquad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

方程的解为：

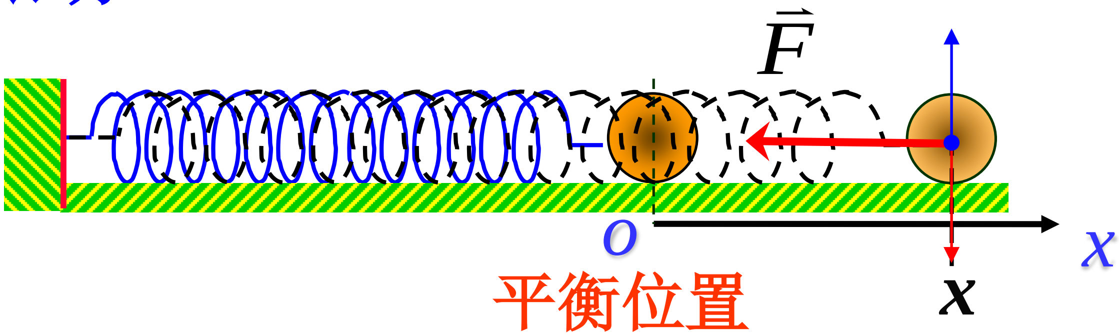
$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

简谐振动的运动方程

三、简谐振动的动力学特征

1、几种常见的简谐振动

1）、弹簧振子



$$F=-kx=ma,$$

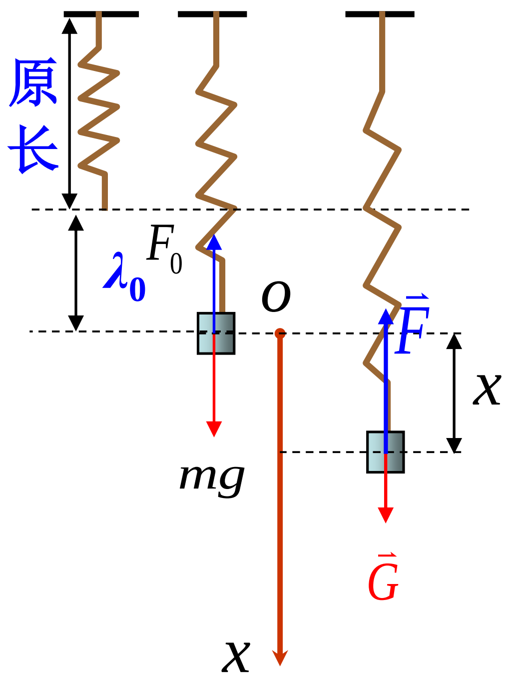
$$\omega^2=\frac{k}{m},\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$\boxed{x=A\cos(\omega t+\varphi_0)}$$

- 周期和频率：　由振动系统的固有性质决定

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\qquad \boxed{\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

例 8： 一劲度系数为 k 的轻弹簧，上端固定，下端悬挂质量为 m 的物体，平衡时弹簧伸长 λ_0，用手向下拉物体，然后无初速释放，证明物体作简谐振动，并求振动周期。



解： 平衡时： $mg = F_0 = k\lambda_0$

建坐标如图，取平衡位置作为坐标原点，

当物体位移为 x 时：

$$\vec{G} = mg\vec{i}, \qquad \vec{F} = -k(x+\lambda_0)\vec{i},$$

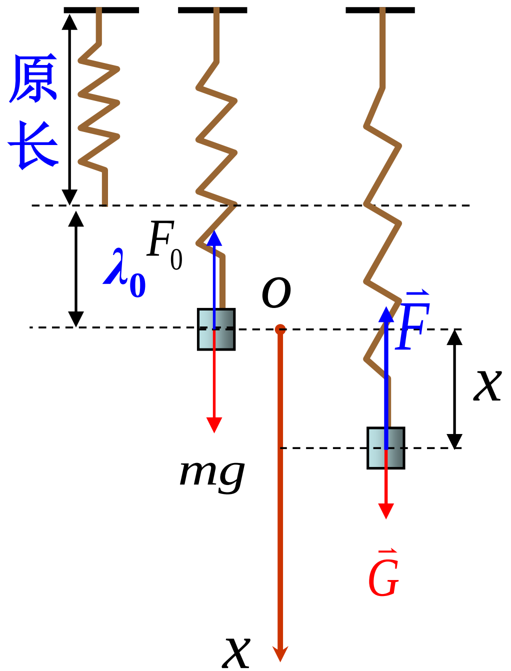
$$\Rightarrow \vec{F}_{合} = \vec{G} + \vec{F} = [mg - k(x+\lambda_0)]\vec{i} = -kx\vec{i}$$

$$= m\vec{a} = ma_x\vec{i} = m\frac{dv_x}{dt}\vec{i} = m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$$

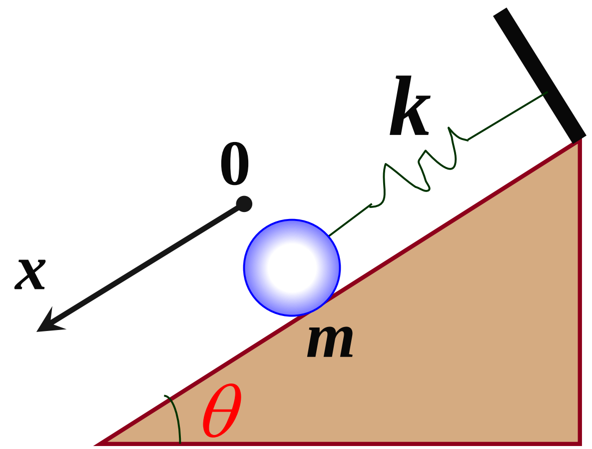
$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

例 8: 一劲度系数为 k 的轻弹簧，上端固定，下端悬挂质量为 m 的物体，平衡时弹簧伸长 λ_0，用手向下拉物体，然后无初速释放，证明物体作简谐振动，并求振动周期。



另，光滑斜面上的弹簧振子

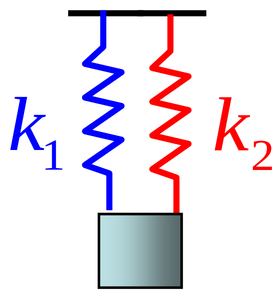


$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

弹簧振子无论水平、斜置、竖直悬挂，系统均作简谐振动，其频率相同。

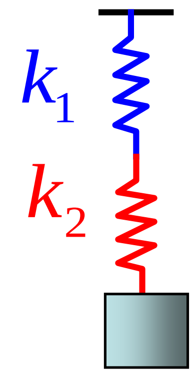
1、轻弹簧并联：

$$k = k_1 + k_2$$



2、轻弹簧串联：

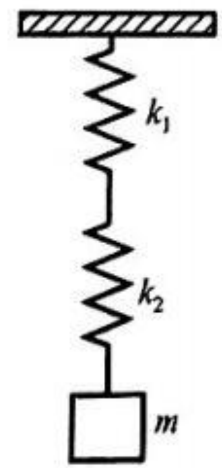
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$



劲度系数分别为 k_1 和 k_2 的两个轻弹簧串接在一起，下面挂着质量为 m 的物体，构成一个垂直悬挂的谐振子，如图所示，则该系统的振动周期为

(A) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(k_1+k_2)}{\cancel{2}k_1k_2}}$　　(B) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$

(C) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{2mk_1k_2}}$　　(D) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k_1+k_2}}$



活页册：
8.机械振动（一）
4题

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}}$$