第 十 章 波 动

10-5 驻 波

知识点：

掌握：1、驻波的特征、驻波方程、波腹和波节；

定性：2、半波损失现象。

一、驻波的产生

1、现象

以弦线上的驻波为例

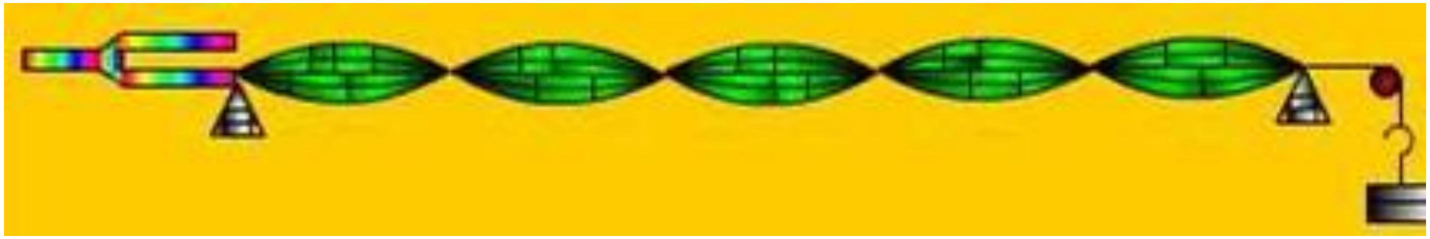
2、条件

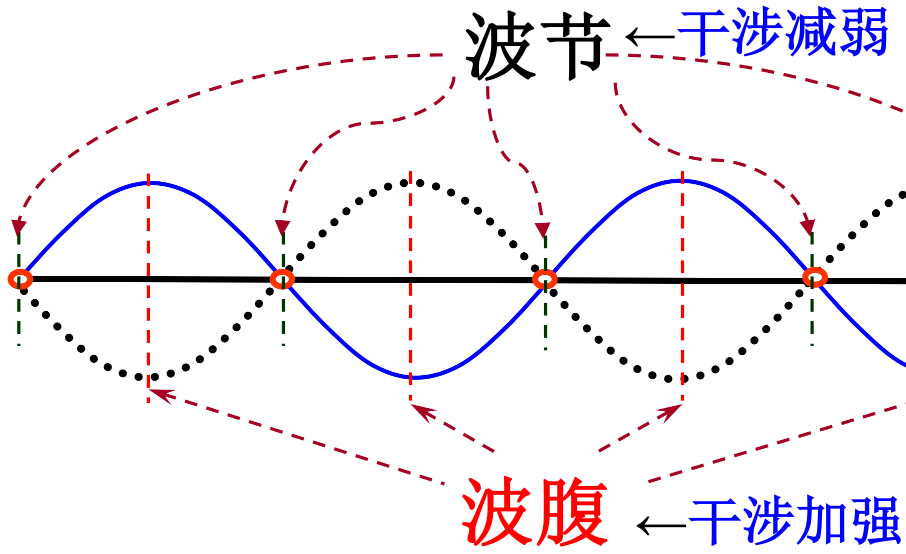
振幅相同的两列相干波，在同一直线上，沿相反方向传播时，叠加而成的一种特殊干涉现象。

一、驻波的产生

以弦线上的驻波为例

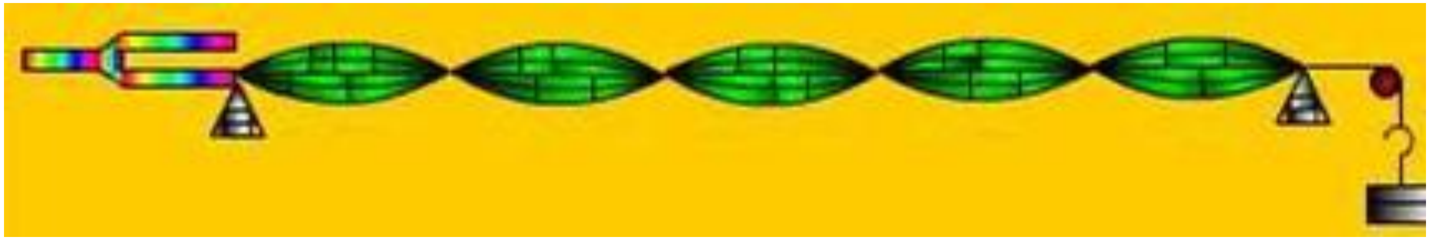
振幅相同的两列相干波，在同一直线上沿相反方向传播时，叠加而形成的一种特殊干涉现象

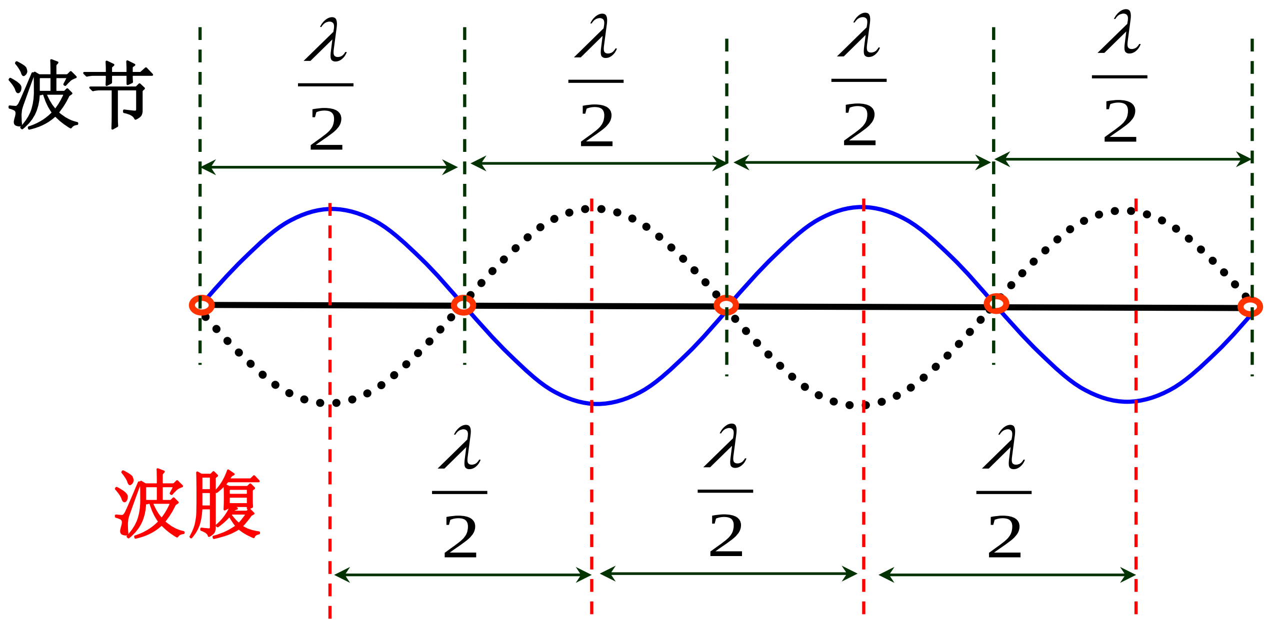




一、驻波的产生

以弦线上的驻波为例

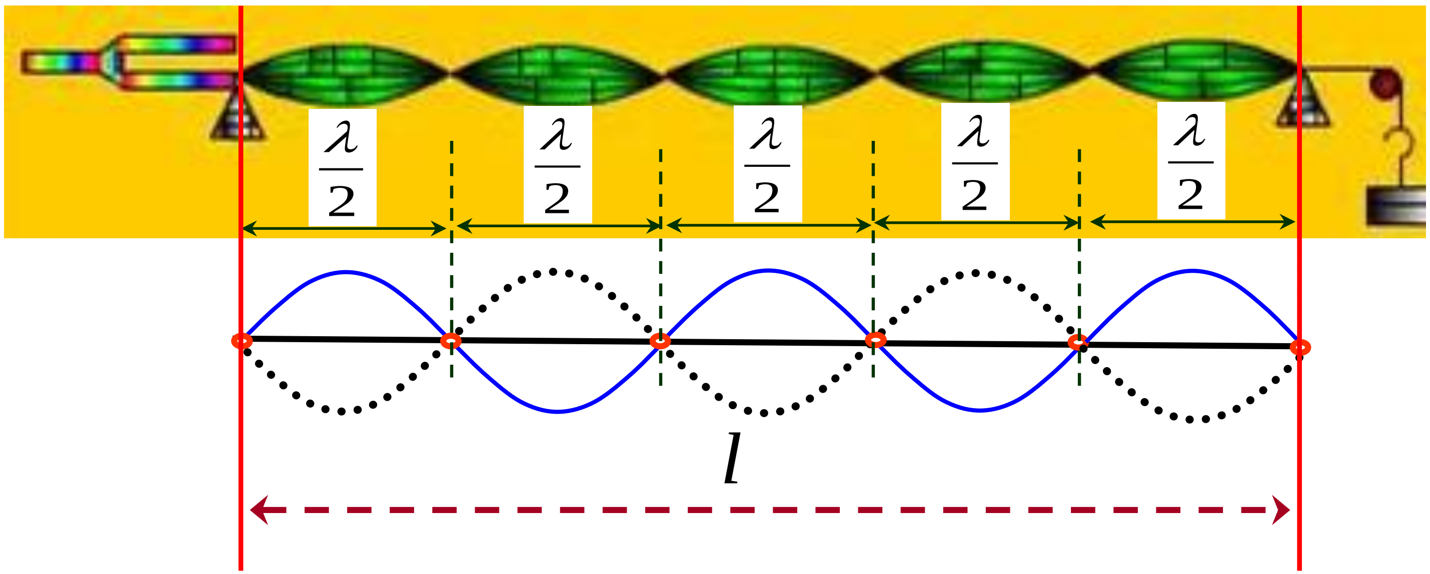




一、驻波的产生

固定端

<u>以弦线上的驻波为例</u>

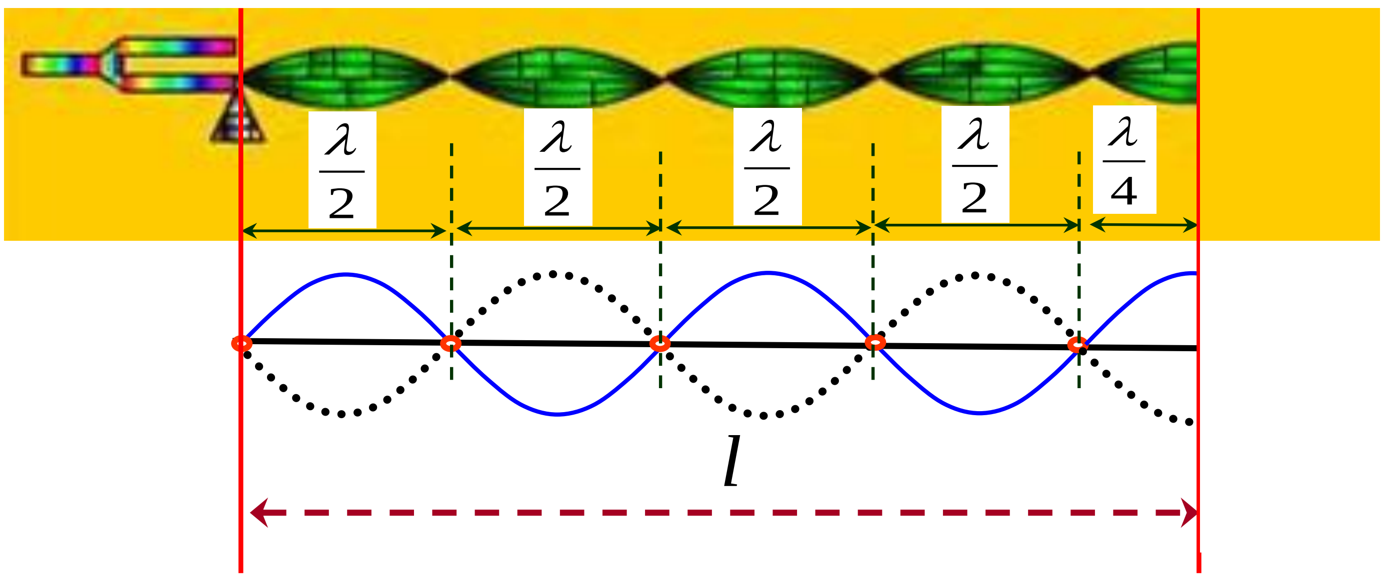


$$l = n\frac{\lambda_n}{2}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

一、驻波的产生

自由端

以弦线上的驻波为例

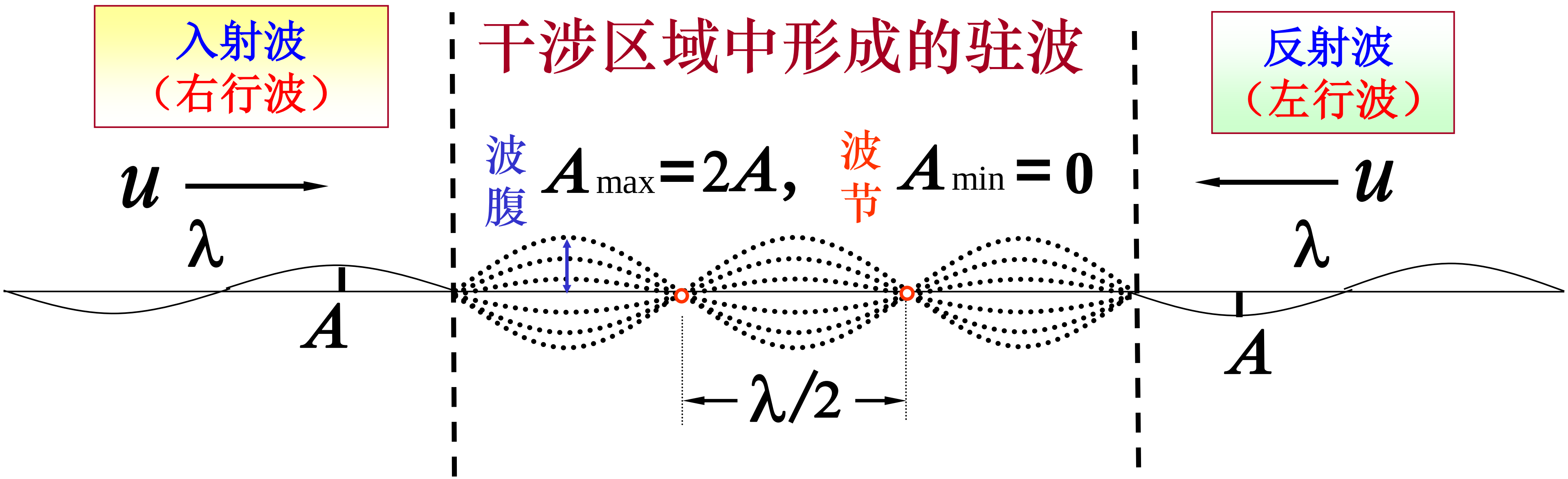


$$l=(2n-1)\frac{\lambda_n}{4},\quad n=1,2,\cdots$$

一、驻波的产生

<u>以弦线上的驻波为例</u>

振幅相同的两列相干波，在同一直线上沿相反方向传播时，叠加而形成的一种特殊干涉现象.



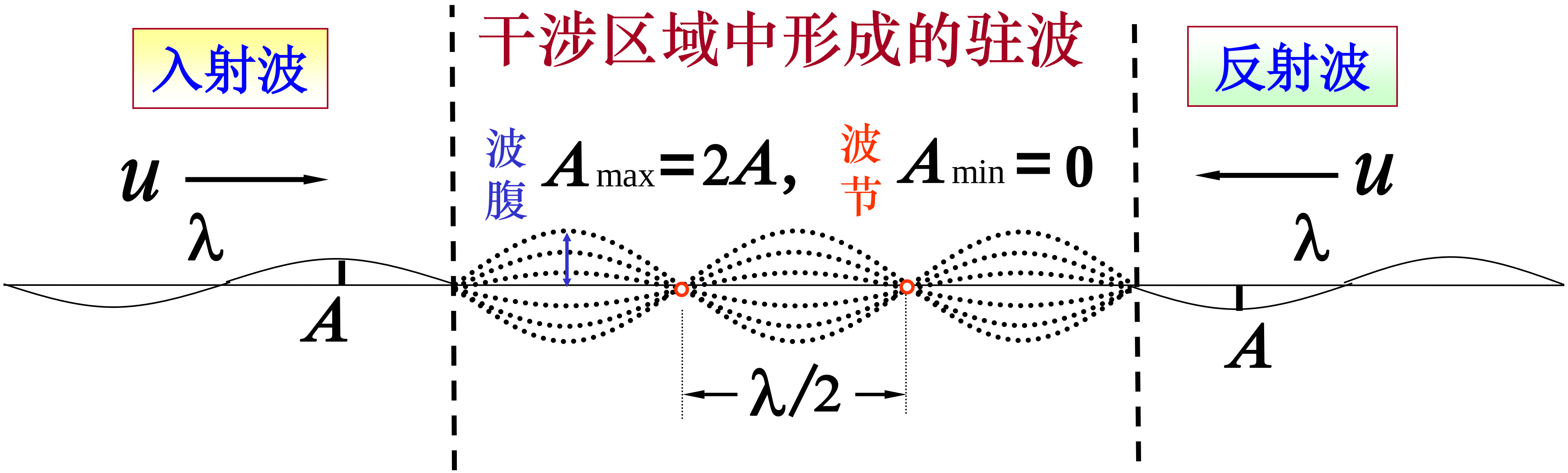
一、驻波的产生

能量特点（定性分析）

以弦线上的驻波为例

形成驻波的区域，媒质中各质点都作稳定的振动;

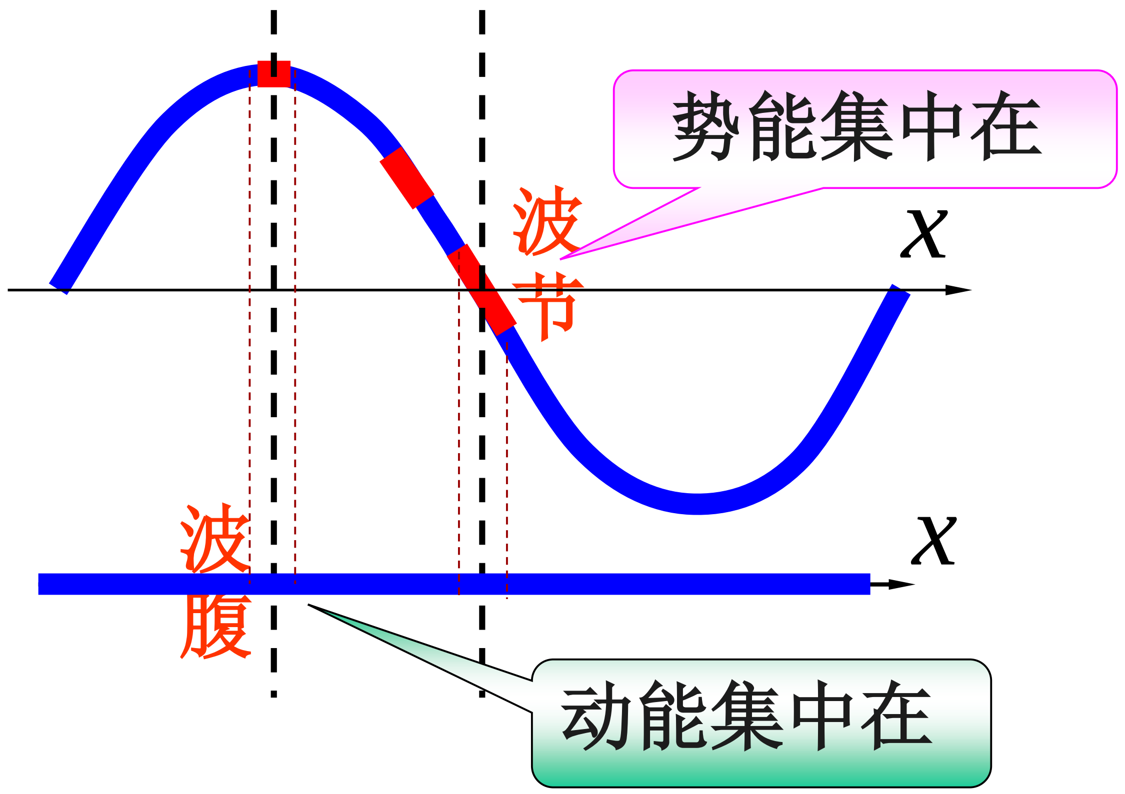
形成驻波时，动能和势能不断相互转换，能量交替的由波腹附近转向波节附近，再由波节附近转回波腹附近，驻波能量不做定向传播。



一、驻波的产生

能量特点（定性分析）

以弦线上的驻波为例



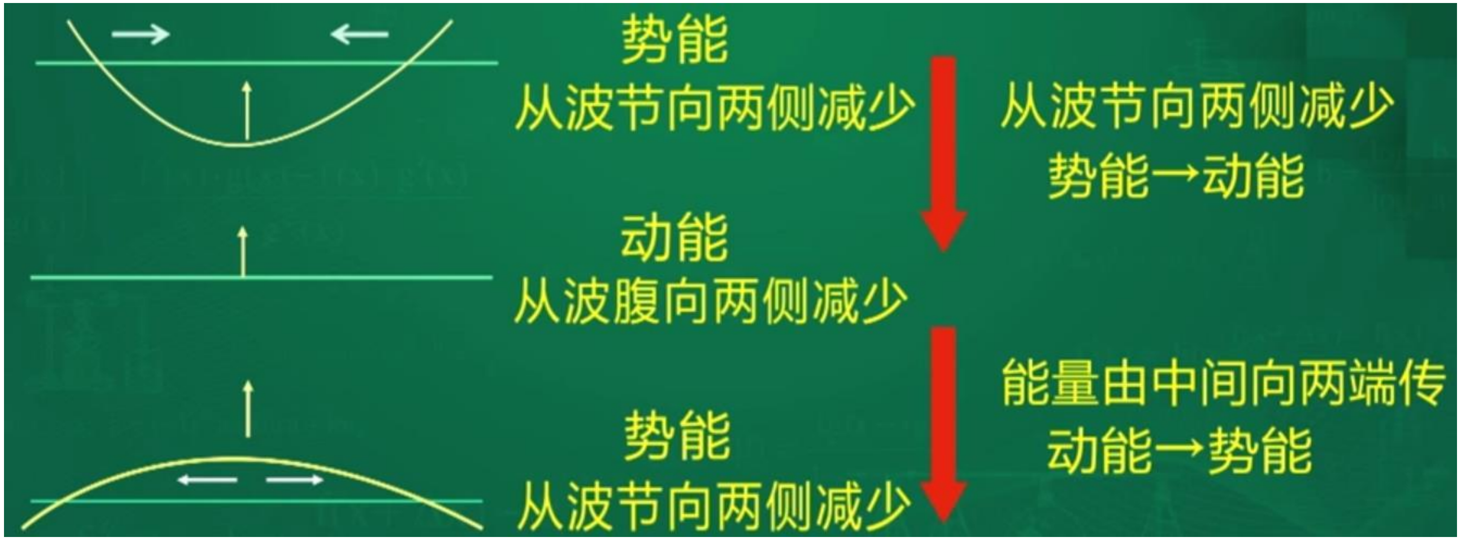
一、驻波的产生

能量特点（定性分析）

以弦线上的驻波为例

形成驻波的区域，媒质中各质点都作稳定的振动;

形成驻波时，动能和势能不断相互转换，能量交替的由波腹附近转向波节附近，再由波节附近转回波腹附近，驻波能量不做定向传播。



一、驻波的产生

以弦线上的驻波为例

3、结论：

1）有些点始终不振动（静止不动）—波节（干涉减弱），有些点始终振幅最大—波腹（干涉加强）

相邻波腹间距 $= \lambda/2$ ，相邻波节间距 $= \lambda/2$

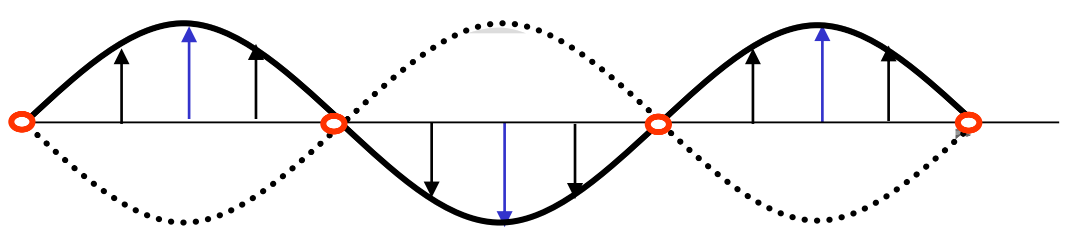
相邻波腹和波节间距 $= \lambda/4$

2）相邻两波节之间的各质点的振动相位同相；

同时达到最大或同时达到最小，速度方向相同。

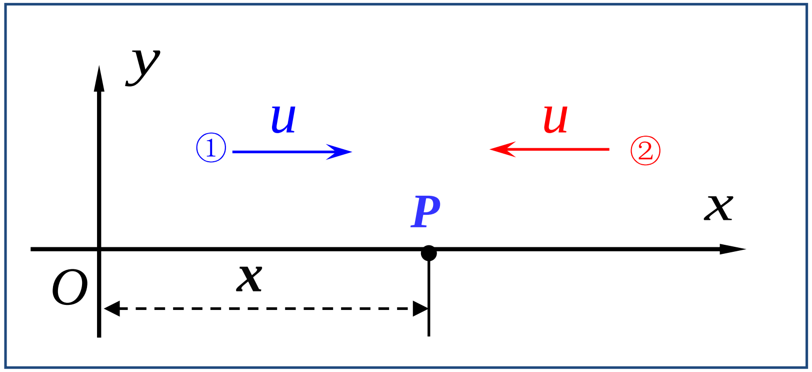
3）一波节两侧的各质点的振动相位反相。

同时达到反向最大或同时达到反向最小，速度方向相反。



二、驻波的波动方程

1、驻波方程



波① $y_{o1} = A\cos(\omega t + \varphi_{01})$

$$y_1 = A\cos\left[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_{01}\right] = A\cos(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_{01})$$

波② $y_{o2} = A\cos(\omega t + \varphi_{02})$

$$y_2 = A\cos\left[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi_{02}\right] = A\cos(2\pi\nu t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_{02})$$

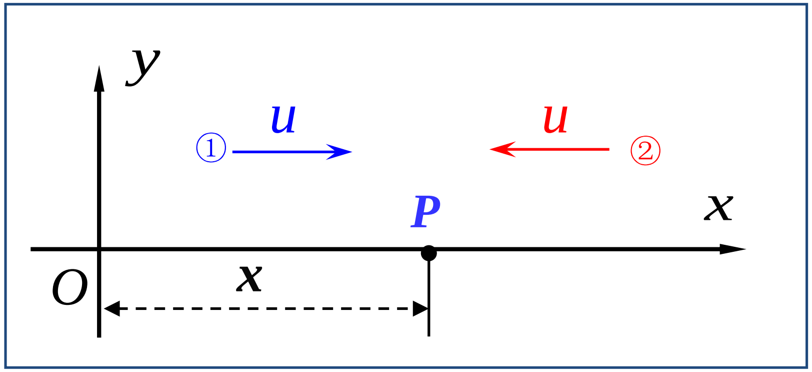
（合成波）**驻波方程:**

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2})\cos(2\pi\nu t + \frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2})$$

注意： 教材里选取的是特例讨论，即 $\varphi_{02} = \varphi_{01} = 0$ 。
一般情况下，不一定满足以上条件

二、驻波的波动方程

2、波腹与波节位置



$$y = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_{02}-\varphi_{01}}{2}\right)\cos\left(2\pi\nu t + \frac{\varphi_{02}+\varphi_{01}}{2}\right)$$

振幅： $$A' = \left|2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_{02}-\varphi_{01}}{2}\right)\right|$$

1）波腹：振幅最大的点： $A'_{max} = 2A,\quad \left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_{02}-\varphi_{01}}{2}\right)\right| = 1$

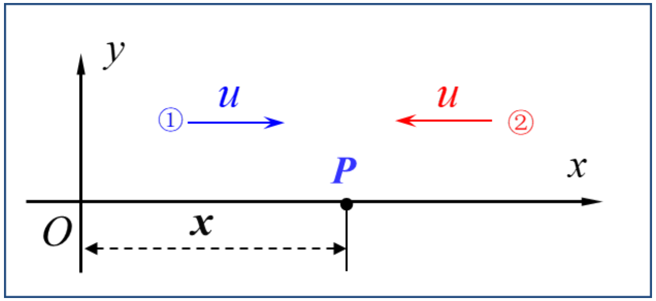
$$\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_{02}-\varphi_{01}}{2} = k\pi, \qquad \Rightarrow x = k\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4\pi}(\varphi_{02}-\varphi_{01}), \quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

2）波节：振幅为零的点： $A'_{min} = 0,\quad \left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_{02}-\varphi_{01}}{2}\right)\right| = 0$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_{02}-\varphi_{01}}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4\pi}(\varphi_{02}-\varphi_{01}), \quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

二、驻波的波动方程

2、波腹与波节位置



利用干涉讨论

$$y_1 = A\cos(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_{01}), \qquad y_2 = A\cos(2\pi\nu t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_{02})$$

坐标为 x 处质点两振动相位差：

$$\Delta\varphi(x) = (2\pi\nu t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_{02}) - (2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_{01}) = \frac{4\pi}{\lambda}x + (\varphi_{02} - \varphi_{01})$$

1）**波腹**：干涉加强： $\Delta\varphi = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$\Rightarrow x = k\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4\pi}(\varphi_{02} - \varphi_{01}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

2）**波节**：干涉减弱： $\Delta\varphi = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$\Rightarrow x = (2k+1)\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4\pi}(\varphi_{02} - \varphi_{01}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

例 10： 在弦线上（x轴）有一平面简谐波，其波动表达式为：

$$y_1 = 2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02}-\frac{x}{20})+\frac{\pi}{3}]\ \text{(SI)}$$

为了在此弦线上形成驻波，并且在$x_0 = 0$处为一波节，此弦线上还应有另一平面简谐波，求其表达式。

解： 设另一平面简谐波为：

$$y_2 = 2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02}+\frac{x}{20})+\varphi_{02}]$$

x处，两振动相位差为：

$$\Delta\varphi = \varphi_2-\varphi_1 = [2\pi(\frac{t}{0.02}+\frac{x}{20})+\varphi_{02}]-[2\pi(\frac{t}{0.02}-\frac{x}{20})+\frac{\pi}{3}] = \frac{\pi}{5}x+\varphi_{02}-\frac{\pi}{3}$$

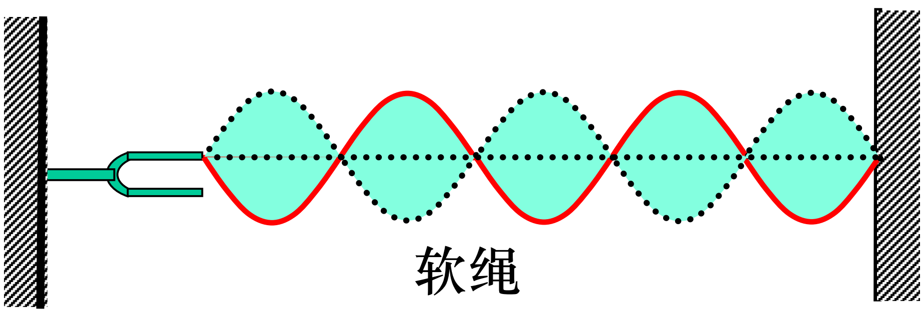
$x_0 = 0$处，为一波节：$\Delta\varphi(x_0=0)=\varphi_{02}-\frac{\pi}{3}=(2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

取：$\varphi_{02}-\frac{\pi}{3}=\pi\Rightarrow\varphi_{02}=\frac{4}{3}\pi,$

$$\boxed{y_2 = 2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02}+\frac{x}{20})+\frac{4}{3}\pi]}$$

三、半波损失

驻波由入射、反射波叠加而成，反射发生在两介质交界面上，在交界面处出现波节还是波腹，取决于介质的性质。

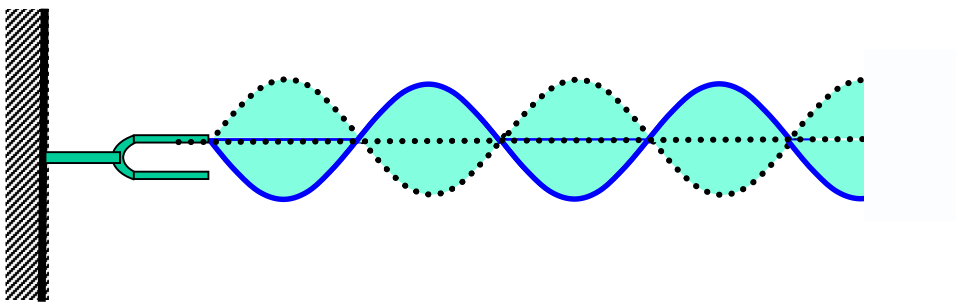


固定端

出现波节

三、半波损失

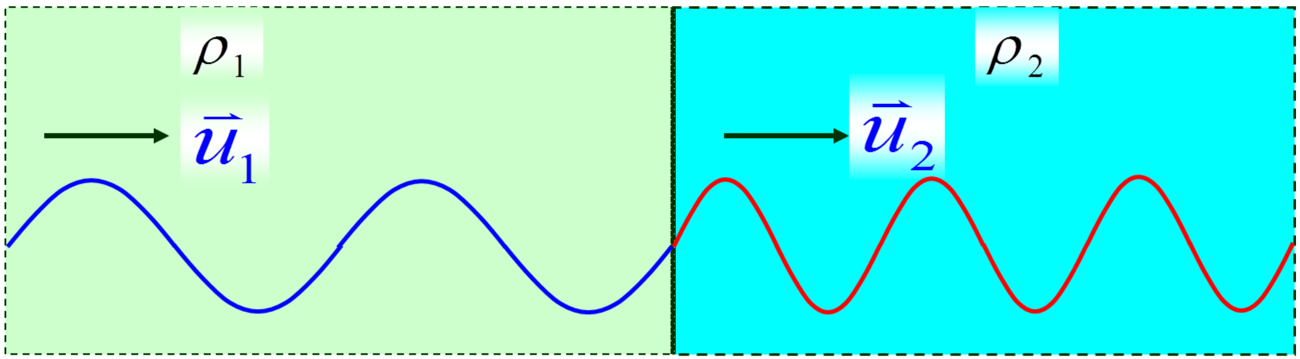
驻波由入射、反射波叠加而成，反射发生在两介质交界面上，在交界面处出现波节还是波腹，取决于介质的性质。



自由端
出现波腹

三、半波损失

介质分类：波疏介质，波密介质



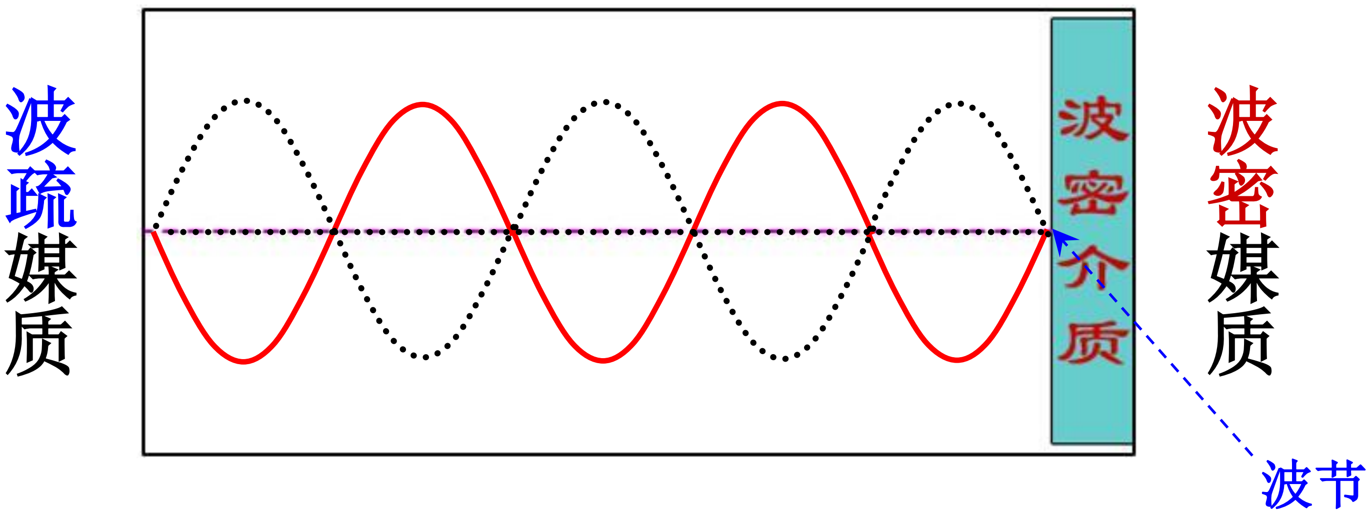
波疏介质 $\rho_1 u_1$较小　　　　波密介质 $\rho_2 u_2$较大

$$\boxed{\rho_1 u_1 < \rho_2 u_2}$$

波密媒质：密度ρ与波速u的乘积，ρ较大的介质。

波疏媒质：密度ρ与波速u的乘积，ρu较小的介质。

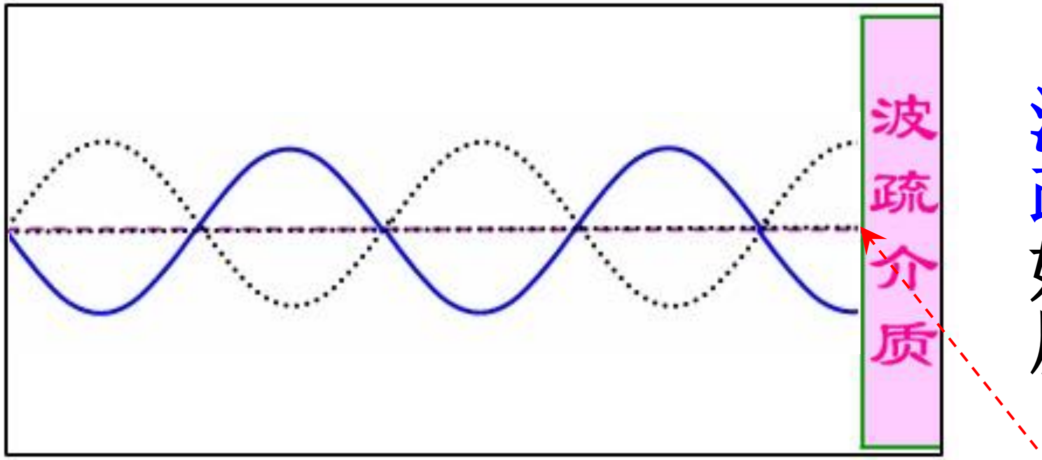
三、半波损失



当波从波疏媒质**垂直入射**到波密媒质，被反射到波疏媒质时，在反射点形成波节。入射波与反射波在此处的相位时时相反（反相），即反射波在分界处产生 π 的相位跃变，相当于出现了半个波长的波程差，称半波损失。

三、半波损失

波密媒质



波疏媒质

当波从波密媒质**垂直入射**到波疏媒质，被反射到波密媒质时，在反射点形成波腹。入射波与反射波在此处的相位时时相同（同相），即反射波在分界处不产生相位跃变，无半波损失。

例11:在弦线上(x轴)有一平面简谐波，其波动表达式为：$y_1 = A\cos[2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda})]$

波在$x_0 = 0$处发生反射，反射点为固定端。入射波与反射波叠加形成驻波，

求：1） 驻波表达式； 2）$x = \frac{2}{3}\lambda$ 处质点的振动振幅。 （活页册题）

解：1) 设反射波为： $y_2 = A\cos[2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_{02}]$

x处，两振动相位差为：

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = [2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_{02}] - [2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda})] = -\frac{4\pi}{\lambda}x + \varphi_{02}$$

$x_0 = 0$处，为一波节：$\Delta\varphi(x_0 = 0) = \varphi_{02} = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

取： $\varphi_{02} = \pi,$ $y_2 = A\cos[2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \pi]$

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2})\cos(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2})$$

例11:在弦线上(x轴)有一平面简谐波，其波动表达式为: $y_1 = A\cos[2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda})]$

波在$x_0 = 0$处发生反射，反射点为固定端。入射波与反射波叠加形成驻波，

求： 1）驻波表达式； 2）$x = \frac{2}{3}\lambda$ 处质点的振动振幅。 （活页册题）

解：2） $x = \frac{2}{3}\lambda$ 处质点的振动振幅：

$$A'(x = \frac{2}{3}\lambda) = \left|2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2})\right| = \left|2A\cos(\frac{5\pi}{6})\right| = \sqrt{3}A$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2})\cos(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2})$$

例 12：如图，一沿*x*轴正方向传播的平面简谐波，其波动表达式为：

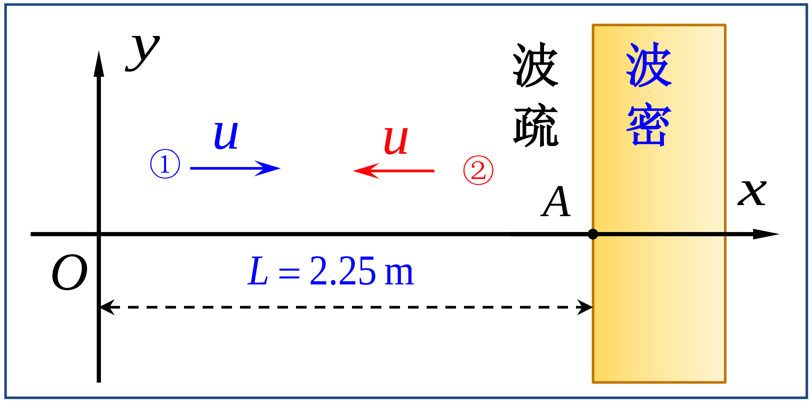
$$y_1 = 10^{-3}\cos[200\pi(t - \frac{x}{200})] \quad \text{(SI)}$$

此波由波疏媒质垂直入射到波密媒质表面，入射点为 *A* 点，入射点 *A* 与坐标原点 *O* 相距：*L*=2.25 m，设入射波与反射波振幅相等，

求：1）反射波的波动方程；

2）*OA*之间的驻波方程；

3）*OA*之间，波节和波腹的位置坐标。

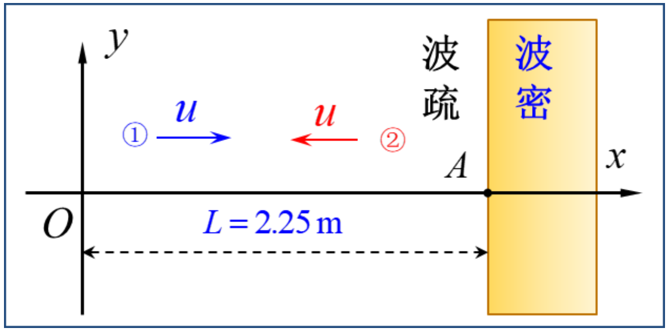


例 12：如图，一沿**x轴正方向**传播的平面简谐波，其波动表达式为：

$$y_1 = 10^{-3}\cos[200\pi(t - \frac{x}{200})] \quad \text{(SI)}$$

此波由波疏媒质垂直入射到波密媒质表面，入射点为 A 点，入射点 A 与坐标原点 O 相距：$L=2.25$ m，设入射波与反射波振幅相等，

求：1）反射波的波动方程；



解：1) 设反射波（反向波）为：

$$y_2 = 10^{-3}\cos[200\pi(t + \frac{x}{200}) + \varphi_{02}]$$

A为一波节： $x_A = 2.25\text{m},$

干涉减弱：$\Delta\varphi(x_A) = [200\pi(t + \frac{x_A}{200}) + \varphi_{02}] - [200\pi(t - \frac{x_A}{200})]$

$$= 2\pi x_A + \varphi_{02} = 4.5\pi + \varphi_{02} = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$\varphi_{02} = (2k-4)\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ 取：$\varphi_{02} = \frac{\pi}{2}$，

$$\boxed{y_2 = 10^{-3}\cos[200\pi(t + \frac{x}{200}) + \frac{\pi}{2}]}$$

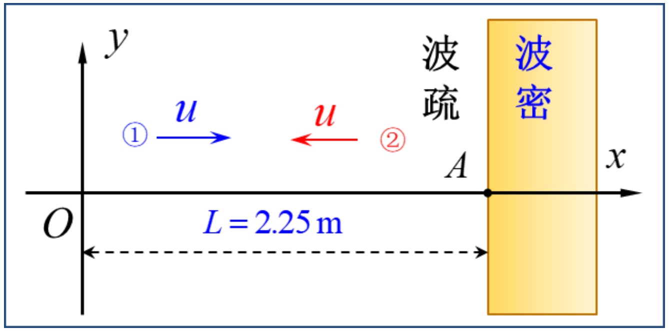
例 12：如图，一沿*x*轴正方向传播的平面简谐波，其波动表达式为：

$$y_1 = 10^{-3}\cos[200\pi(t - \frac{x}{200})] \quad \text{(SI)}$$

此波由波疏媒质垂直入射到波密媒质表面，入射点为 *A* 点，

入射点 *A* 与坐标原点 *O* 相距：*L*=2.25 m，设入射波与反射波振幅相等，

求：2）*OA*之间的驻波方程；



解：2）

$$\boxed{y_2 = 10^{-3}\cos[200\pi(t + \frac{x}{200}) + \frac{\pi}{2}]}$$

*OA*之间的驻波方程：

$$y = y_1 + y_2$$

$$= 10^{-3}\cos[200\pi(t - \frac{x}{200})] + 10^{-3}\cos[200\pi(t + \frac{x}{200}) + \frac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow y = 2\times10^{-3}\cos(\pi x + \frac{\pi}{4})\cos(200\pi t + \frac{\pi}{4})$$

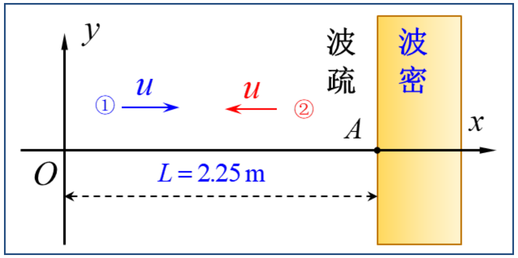
例 12：如图，一沿*x*轴正方向传播的平面简谐波，其波动表达式为：

$$y_1 = 10^{-3}\cos[200\pi(t - \frac{x}{200})] \text{ (SI)}$$

此波由波疏媒质垂直入射到波密媒质表面，入射点为 *A* 点，

入射点 *A* 与坐标原点 *O* 相距：***L*=2.25 m**，设入射波与反射波振幅相等，

求：3）*OA* 之间，波节和波腹的位置坐标。



解：3）*OA* 之间，坐标为 *x* 处质点两振动相位差：

$$0 \le x \le 2.25\text{m}$$

$$\Delta\varphi = [200\pi(t + \frac{x}{200}) + \frac{\pi}{2}] - [200\pi(t - \frac{x}{200})] = 2\pi x + \frac{\pi}{2}$$

①波节（干涉减弱）： $\Delta\varphi = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$x = k + \frac{1}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \quad \Rightarrow x = \frac{1}{4}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{9}{4}$$

②波腹（干涉加强）： $\Delta\varphi = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$x = k - \frac{1}{4}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots \quad \Rightarrow x = \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{4},$$