



第八章 组合变形

1

概述

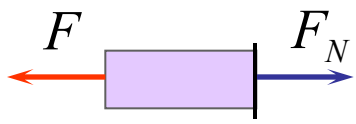
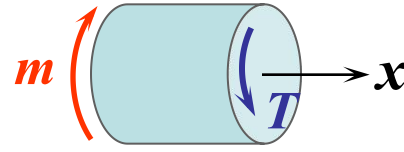
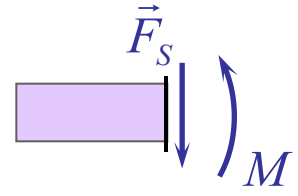
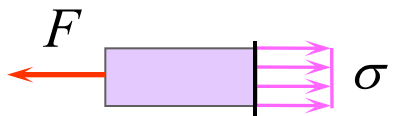
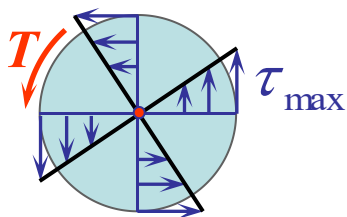
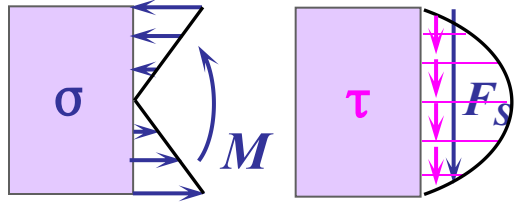
2

弯曲与拉伸(或压缩)的组合

3

弯曲与扭转的组合

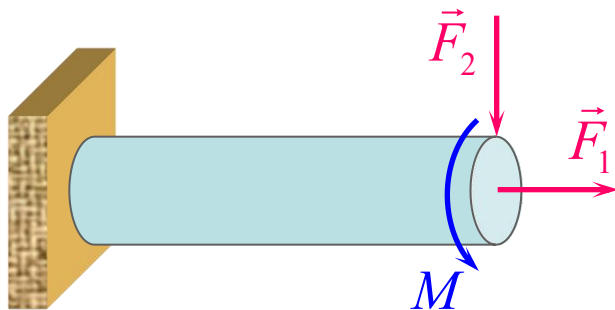
§ 8-1 概述

	轴向拉（压）	扭 转	对称弯曲
内 力	 $F_N = F$	 $T = m$	
应 力	 $\sigma = \frac{F_N(x)}{A}$	 $\tau(\rho) = \frac{T \cdot \rho}{I_p}$	 $\sigma = \frac{My}{I_z}; \tau = \frac{F_S S_z^*}{b I_z}$



§ 8-1 概述

一、组合变形



F_1 — 轴向拉伸

F_2 — 弯曲变形

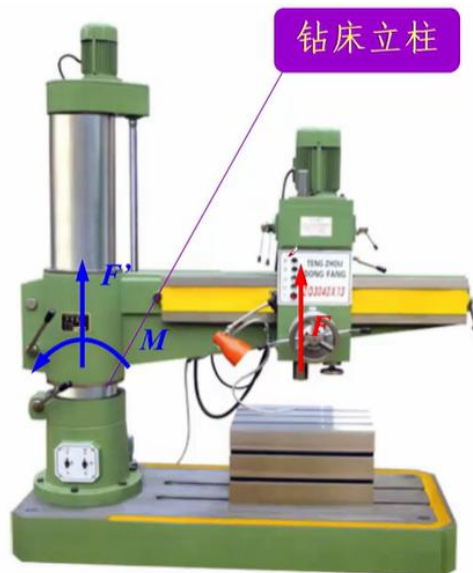
M — 扭转变形

构件在荷载作用下，同时发生两种或两种以上的
基本变形，称为组合变形。



§ 8-1 概述

一、组合变形

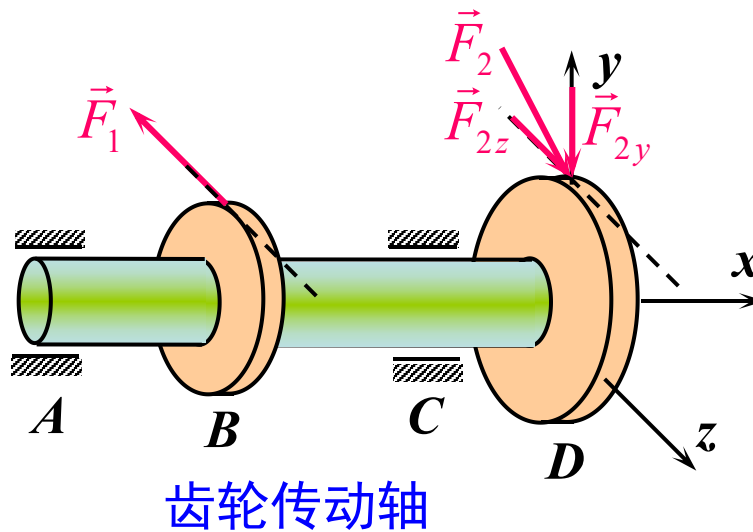


拉弯组合变形



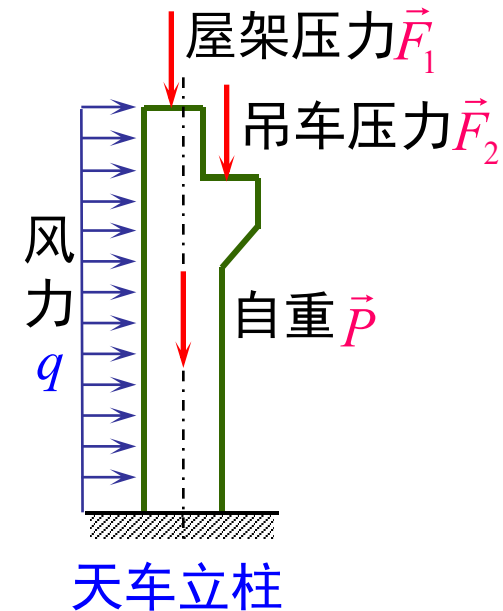
拉弯组合变形

§ 8-1 概述



F_1 、 F_2 — 扭转变形

F_1 、 F_{2y} 、 F_{2z} — 弯曲变形



F_1 、 F_2 、 P — 轴向压缩

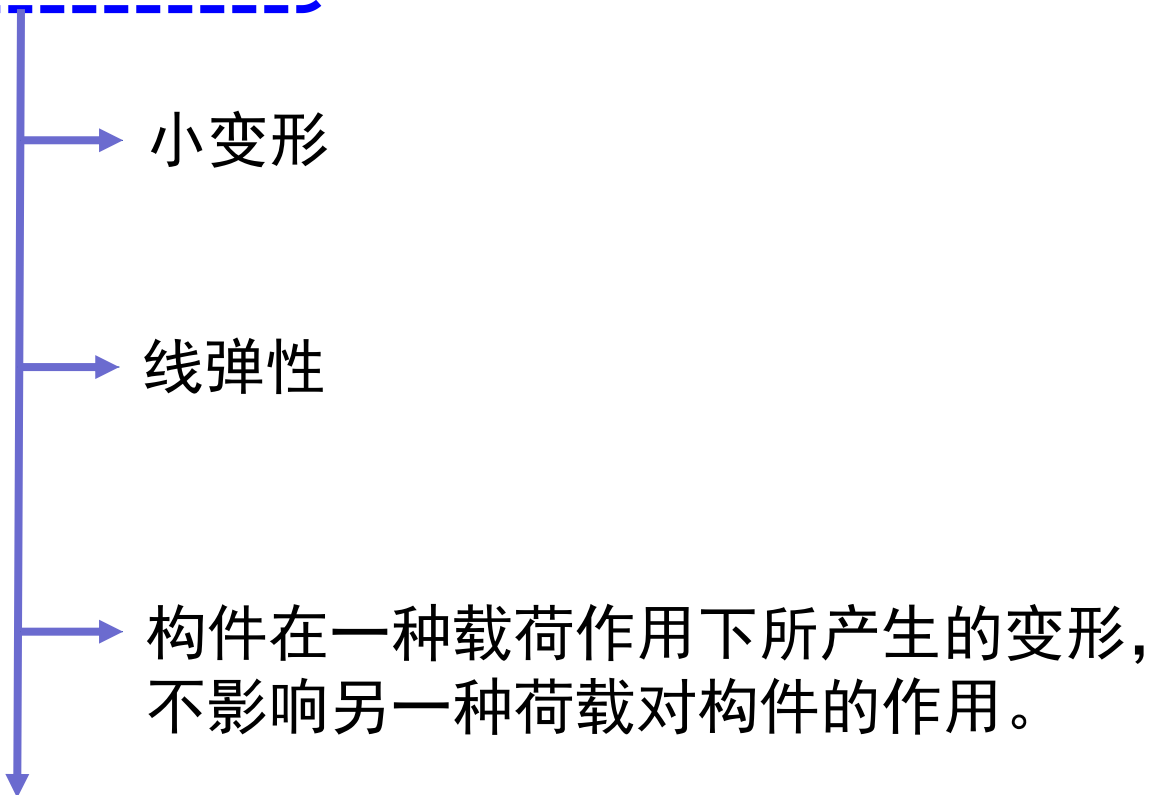
F_1 、 F_2 、 q — 弯曲变形



§ 8-1 概述

二、组合变形的分析方法 — 叠加原理

叠加原理的应用条件





§ 8-1 概述

二、组合变形的分析方法 — 叠加原理

叠加原理的分析过程



- ◆ 将组合变形分解成基本变形；
- ◆ 独立计算每一基本变形的各自的内力、应力、应变、位移
- ◆ 叠加形成构件在组合变形下的内力、应力、应变和位移。



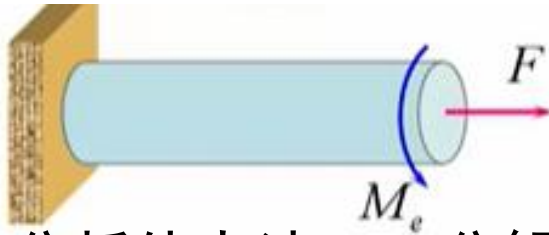
§ 8-1 概述

二、组合变形的分析方法 — 叠加原理

◆ 将组合变形分解成基本变形的几种方法

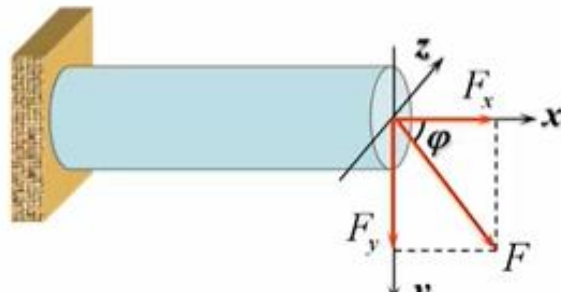
分析外力法——观察法

利用构件的受力特点判断杆件的变形



分析外力法——分解法

先将任意方向的外力沿坐标轴分解后，再判断杆件的变形



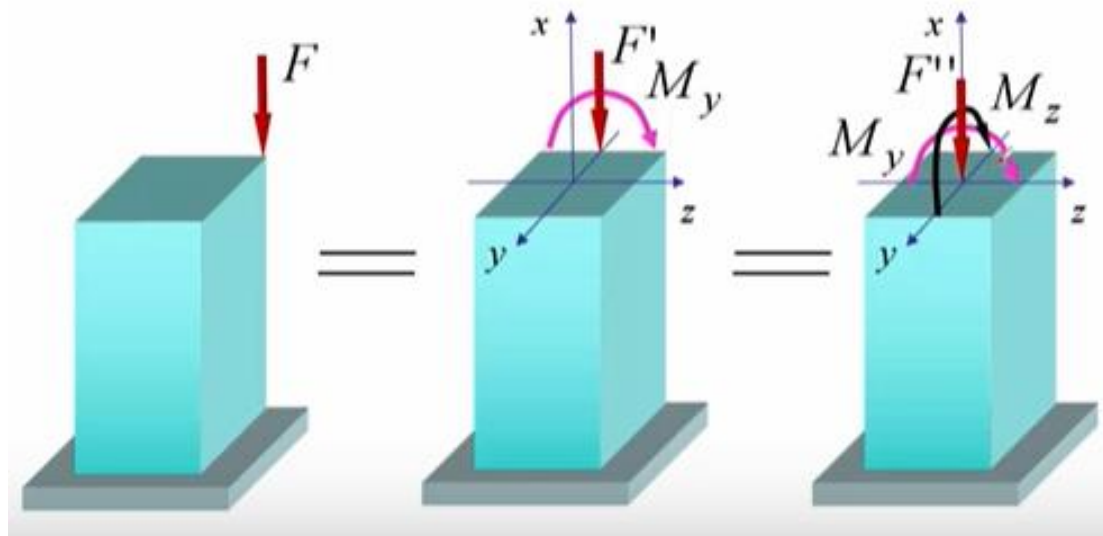
§ 8-1 概述

二、组合变形的分析方法 — 叠加原理

◆ 将组合变形分解成基本变形的几种方法

分析外力法——平移法

先将外力向截面形心平移，再根据等效力系判断杆件的变形。





§ 8-1 概述

二、组合变形强度分析基本步骤

1、外力分析 — 荷载简化

将外力向截面形心简化，或沿着对称轴方向分解，从而把外力分组，使每组外力只产生一种基本变形。

2、内力分析 — 确定危险截面

计算构件在每一种基本变形下的内力，画出内力图，从而确定危险截面位置，给出最大内力值。

3、应力分析 — 确定危险截面上的危险点

画出每种基本变形下的应力分布图，由叠加原理确定危险截面上危险点的位置，给出横截面上最大应力值，并确定危险点的应力状态。

4、强度分析



§ 8-2 弯曲与拉伸(或压缩)的组合

一、拉(压)与弯曲组合变形 : 杆件同时受横向力和轴向力的作用而产生的变形。

受力特点

作用在杆件上的外力既有轴向拉(压)力, 还有横向力

变形特点

杆件将发生拉伸(压缩)与弯曲组合变形

§ 8-2 弯曲与拉伸(或压缩)的组合

1、外力分析

$$F_x = F \cos \varphi; F_y = F \sin \varphi$$

2、内力分析

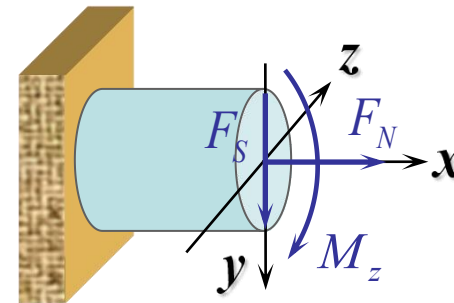
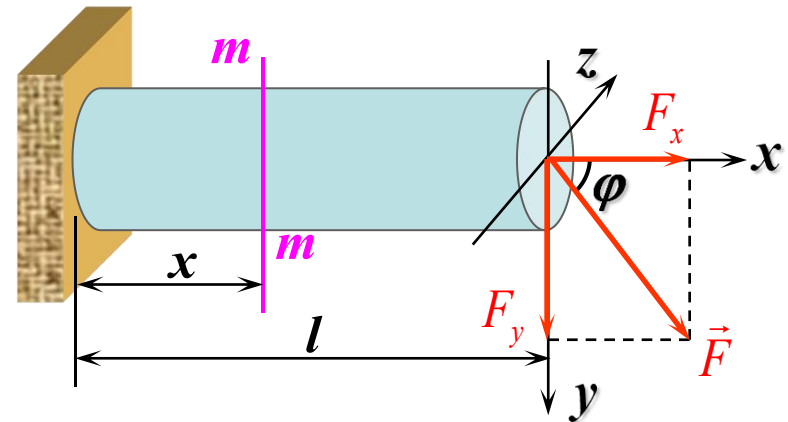
a. 拉(压) : 轴力 F_N

$$F_N = F_x = F \cos \varphi$$

b. 弯曲 $\left\{ \begin{array}{l} \text{弯矩 } M_z \\ \text{剪力 } F_S \end{array} \right.$

$$F_S = F_y = F \sin \varphi \quad \text{不考虑}$$

$$\begin{aligned} M_z &= F_y(l-x) \quad \text{上侧受拉} \\ &= F \sin \varphi(l-x) \end{aligned}$$

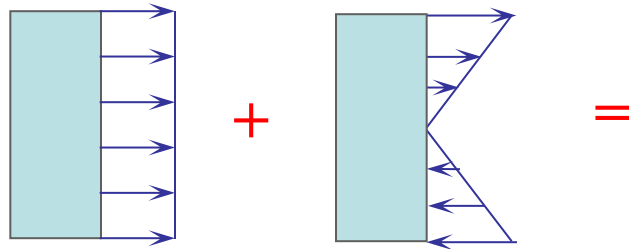
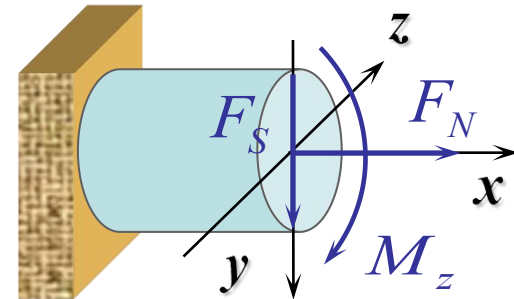


§ 8-2 弯曲与拉伸(或压缩)的组合

$$F_N = F \cos \varphi; F_S = F \sin \varphi; M_z = F \sin \varphi(l - x)$$

3、应力分析

对危险截面分析最大正应力



$$\sigma_{t,\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{z,\max}}{W_z}$$

$$\sigma_{c,\max} = \frac{F_N}{A} - \frac{M_{z,\max}}{W_z}$$

$$\sigma_{F_N} = \frac{F_N}{A} \quad \sigma_M = \frac{M_{z,\max} y}{I_z} \quad \sigma = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{z,\max} y}{I_z}$$

4、强度条件

危险点处于单向应力状态，用强度条件校核。



§ 8-2 弯曲与拉伸(或压缩)的组合

4、强度条件

由于危险点处的应力状态仍为单向应力状态，故其强度条件为

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

当材料的许用拉应力和许用压应力不相等时，应分别建立杆件的抗拉、抗压强度条件。

$$\sigma_{t\max} \leq [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c\max} \leq [\sigma_c]$$



§ 8-2 弯曲与拉伸(或压缩)的组合

例8-1 悬臂吊车如图所示。横梁用20a工字钢制成。其抗弯刚度 $W_z = 237\text{cm}^3$, 横截面面积 $A = 35.5\text{cm}^2$, 总荷载 $F = 34\text{kN}$, 横梁材料的许用应力为 $[\sigma] = 125\text{MPa}$ 。校核横梁AB的强度。

解: (1) 分析AB的受力情况

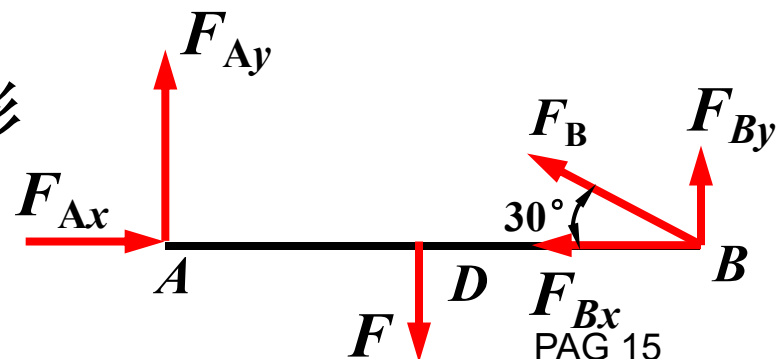
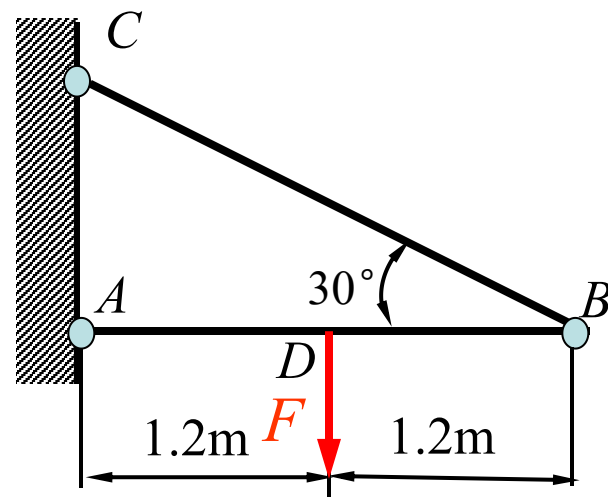
$$\sum m_A = 0 \quad F_B \sin 30^\circ \times 2.4 - 1.2F = 0$$

$$F_B = F$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} = 0.866F$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} = 0.5F$$

AB杆为平面弯曲与轴向压缩组合变形
中间截面为危险截面。最大压应力
发生在该截面的上边缘





§ 8-2 弯曲与拉伸(或压缩)的组合

(2) 压缩正应力

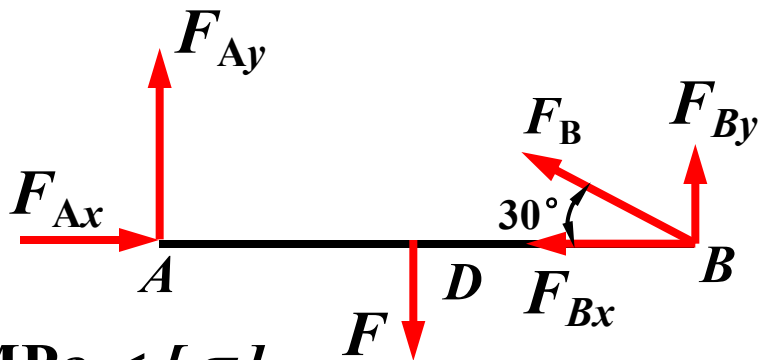
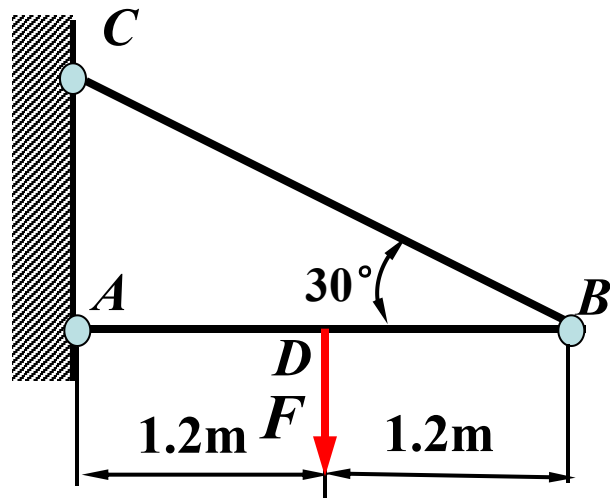
$$\sigma = -\frac{F_{Ax}}{A} = -\frac{0.866F}{A}$$

(3) 最大弯曲正应力

$$\sigma_{bmax} = \pm \frac{1.2F_{Ay}}{W_z} = \pm \frac{0.6F}{W_z}$$

(4) 危险点的应力

$$\sigma_{cmax} = \left| \frac{0.866F}{A} + \frac{0.6F}{W_z} \right| = 94.37\text{MPa} < [\sigma]$$





§ 8-2 弯曲与拉伸(或压缩)的组合

例8-2 小型压力机的铸铁框架如图所示。已知材料的许用拉应力 $[\sigma_t] = 30\text{MPa}$ ，许用压应力 $[\sigma_c] = 160\text{MPa}$ 。试按立柱的强度确定压力机的许可压力 F 。

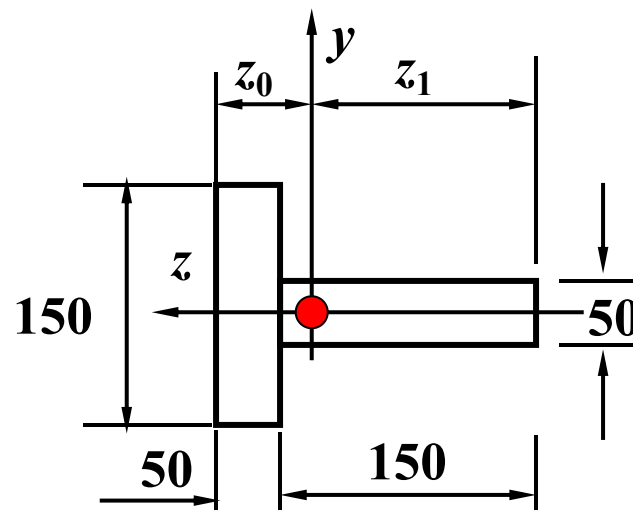
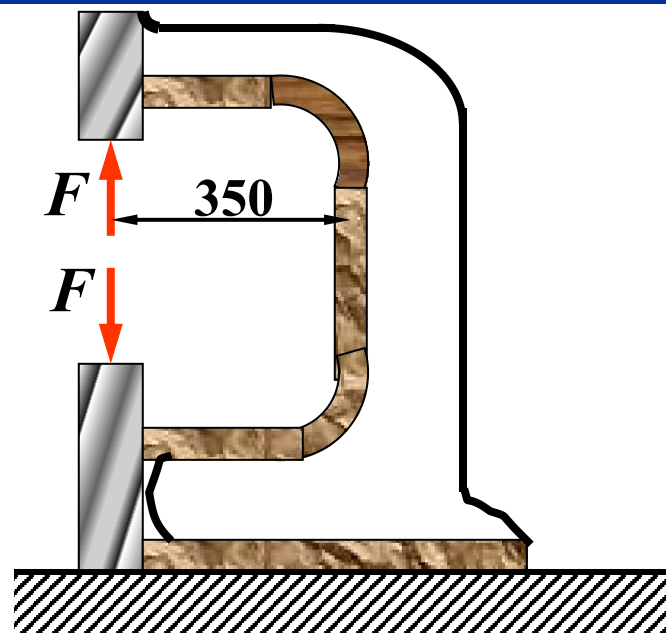
解：(1) 确定形心位置

$$A = 15 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$Z_0 = 7.5 \text{ cm}$$

计算截面对中性轴 y 的惯性矩

$$I_y = 5310 \text{ cm}^4$$





§ 8-2 弯曲与拉伸(或压缩)的组合

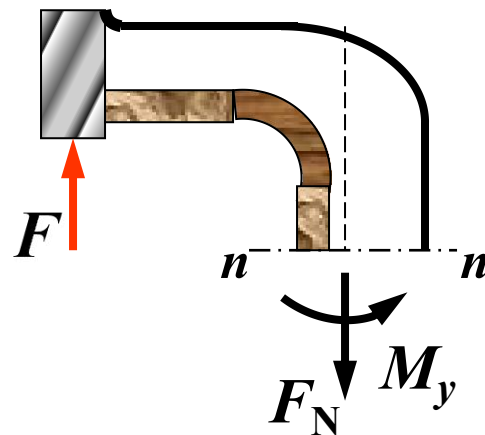
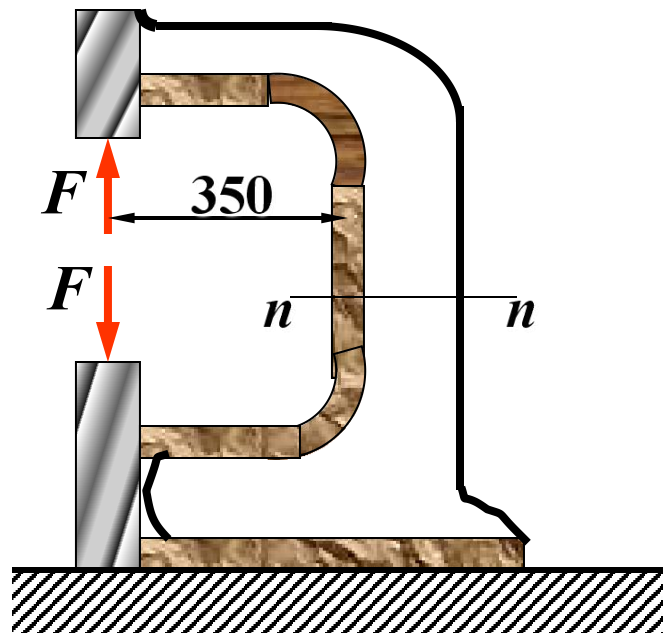
(2) 分析立柱横截面上的内力和应力
在 $n-n$ 截面上有轴力 F_N 及弯矩 M_y

$$F_N = F$$

$$M_y = [(35 + 7.5) \times 10^{-2}] F = 42.5 \times 10^{-2} F$$

由轴力 F_N 产生的拉伸正应力为

$$\sigma' = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{15} \text{ MPa}$$



§ 8-2 弯曲与拉伸(或压缩)的组合

(3) 叠加

在截面内侧有最大拉应力

$$\begin{aligned}\sigma_{tmax} &= \sigma' + \sigma''_{tmax} \\ &= \frac{F}{15} + \frac{425 \times 7.5F}{5310} \leq [\sigma_t]\end{aligned}$$

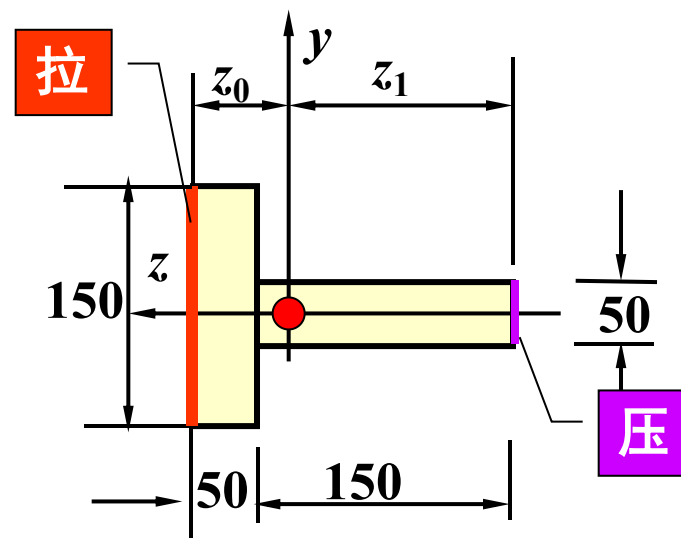
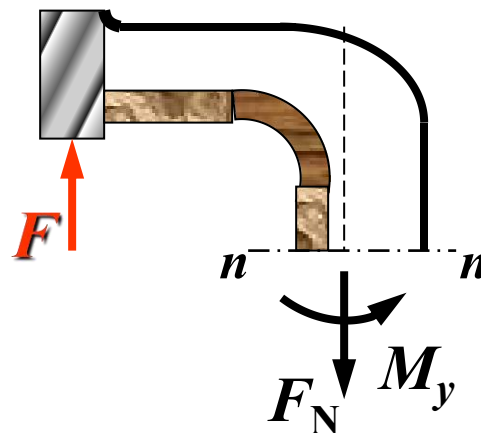
$$\rightarrow [F] \leq 45.1 \text{ kN}$$

在截面外侧有最大压应力

$$\begin{aligned}\sigma_{cmax} &= |\sigma' + \sigma''| \\ &= \left| \frac{F}{A} - \frac{425 \times 12.5F}{5310} \right| \leq [\sigma_c]\end{aligned}$$

$$\rightarrow [F] \leq 171.3 \text{ kN}$$

所以取 $[F] \leq 45.1 \text{ kN}$





§ 8-2 弯曲与拉伸(或压缩)的组合

【例8-3】图示起重机的最大吊重 $P=12\text{kN}$ ，材料的许用应力为 $[\sigma]=100\text{MPa}$ ，梁横截面为矩形，矩形的高度 $h=100\text{mm}$ ，试确定矩形截面的宽度。

解：1.外力分析

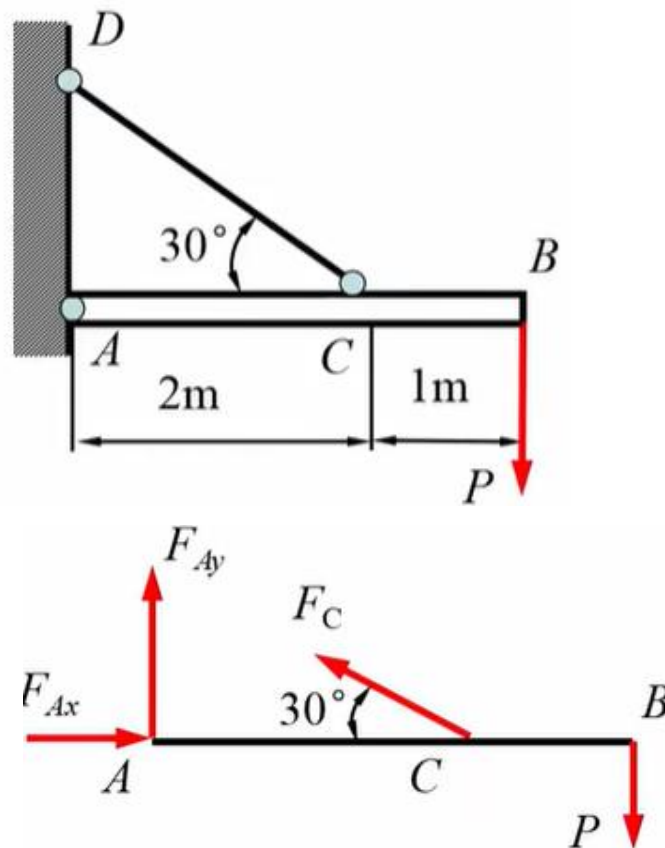
$$\sum M_A = 0 \quad F_C \sin 30^\circ \times 2 - P \cdot 3 = 0$$

$$F_C = 36\text{kN}$$

$$F_{Cx} = F_C \cos 30^\circ = 31.18\text{kN}$$

$$F_{Cy} = F_C \sin 30^\circ = 18\text{kN}$$

AB杆为平面弯曲与轴向压缩组合变形



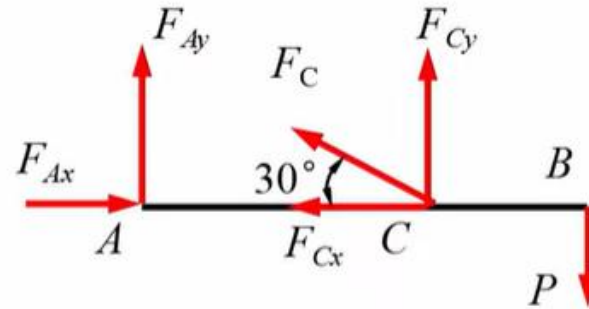
§ 8-2 弯曲与拉伸(或压缩)的组合

2. 内力分析

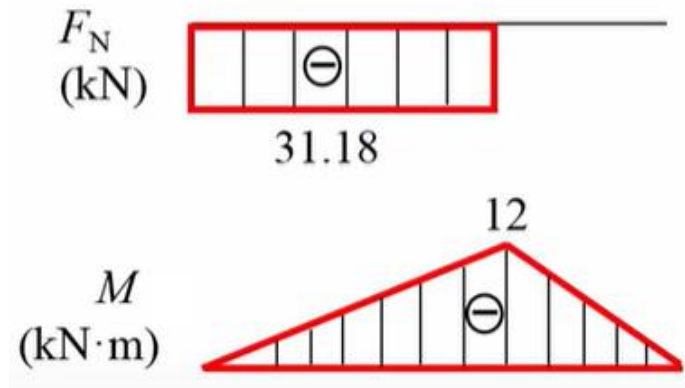
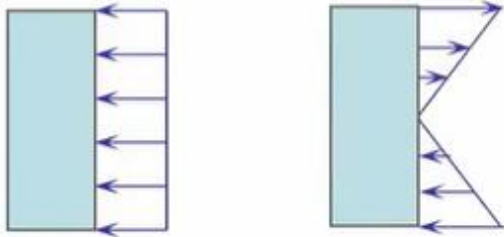
危险截面：C截面

$$|F_{N\max}| = 31.18 \text{ kN}$$

$$|M_{\max}| = 12 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



3. 应力分析





§ 8-2 弯曲与拉伸(或压缩)的组合

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \left| \frac{F_N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_z} \right| \\ &= \frac{31.18 \times 10^3}{b \times 100 \times 10^{-3}} + \frac{12 \times 10^3}{\frac{1}{6} b \times (100 \times 10^{-3})^2}\end{aligned}$$

4. 强度分析

危险点处于单向应力状态，用强度条件校核

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

得 $b \geq 75.12 \text{ mm}$

§ 8-3 弯曲与扭转的组合

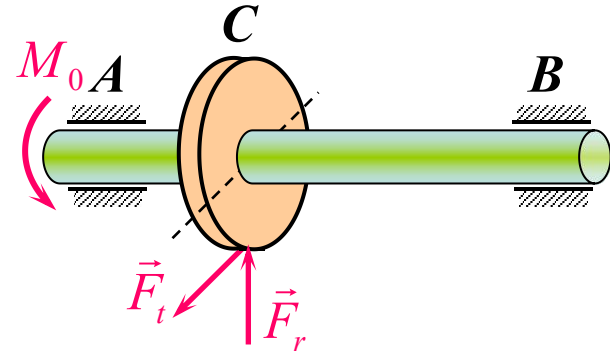
研究对象： 圆截面杆

受力特点

杆件同时承受转矩和横向力作用

变形特点

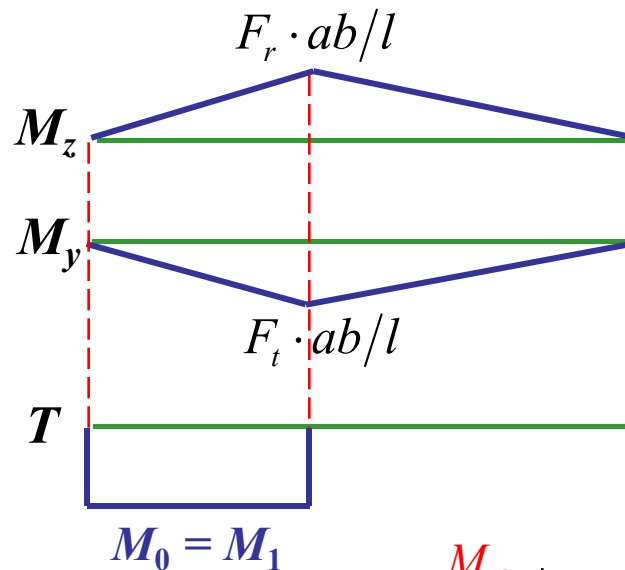
发生扭转和弯曲两种基本变形



§ 8-3 弯曲与扭转的组合

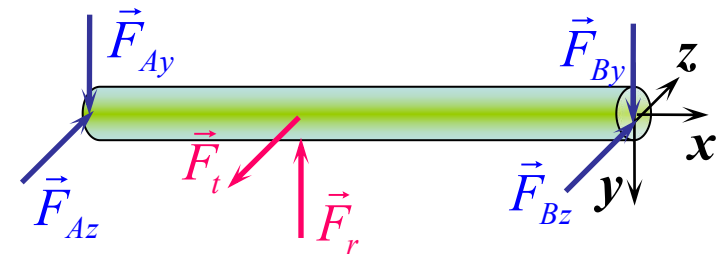
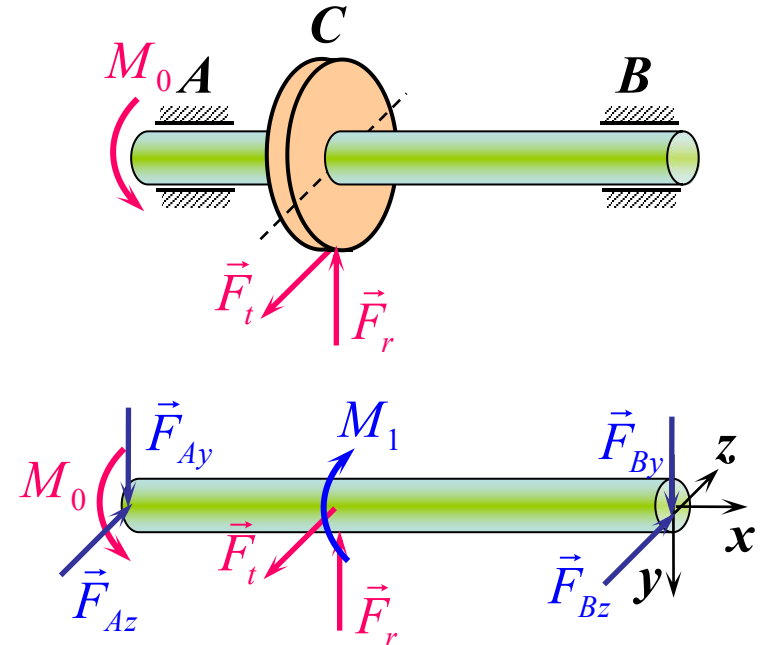
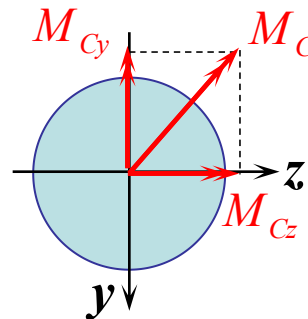
1、外力分析

2、内力分析



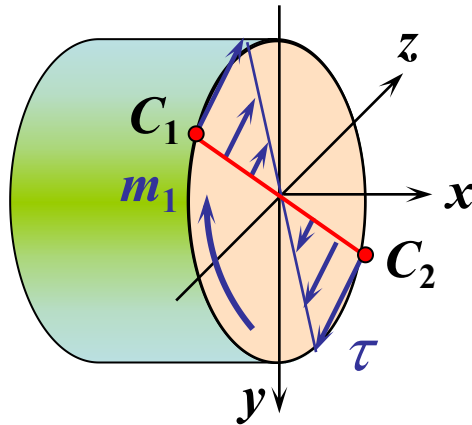
C 为危险截面

$$M_C = \sqrt{M_{Cy}^2 + M_{Cz}^2}$$

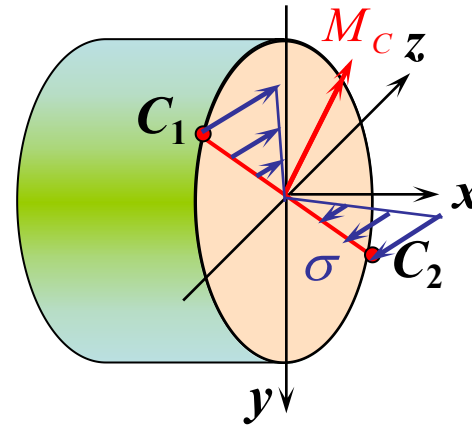


§ 8-3 弯曲与扭转的组合

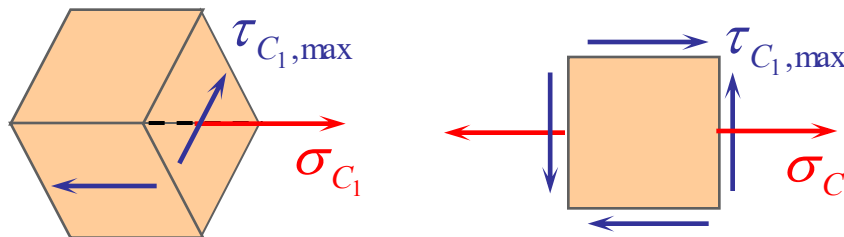
3、应力分析



$$\tau_{C_1, \max} = \frac{m_1}{W_p}$$



$$\sigma_{C_1} = \frac{M_C}{W} = -\sigma_{C_2}$$



$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_{C_1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{C_1}}{2}\right)^2 + \tau^2}$$



§ 8-3 弯曲与扭转的组合

4、强度分析

(1) 弯扭组合强度条件的应力表示

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \end{cases}$$
$$\sigma = \frac{M_{\text{合}}}{W_{\text{中性轴}}}; \quad \tau = \frac{T}{W_p}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

该公式中， σ 是危险点的正应力， τ 是危险点的切应力。



§ 8-3 弯曲与扭转的组合

(2) 圆截面杆弯扭组合强度条件的内力表示

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \end{cases}$$
$$\sigma = \frac{M_{\text{合}}}{W_{\text{中性轴}}}; \quad \tau = \frac{T}{W_p}$$

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{2W}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W} \leq [\sigma]$$

式中 W 为杆的抗弯截面系数。 M ， T 分别为危险截面的弯矩和扭矩。以上两式只适用于弯，扭组合变形下的圆截面杆。

※空心圆截面杆也适用



§ 8-3 弯曲与扭转的组合

例8-7 空心圆杆 AB 和 CD 杆焊接成整体结构，受力如图。 AB 杆的外径 $D=140\text{mm}$ ，内、外径之比 $\alpha=d/D=0.8$ ，材料的许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$ 。试用第三强度理论校核 AB 杆的强度

解：(1) 外力分析

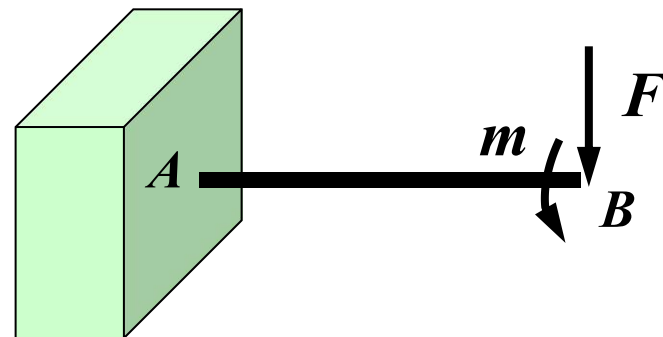
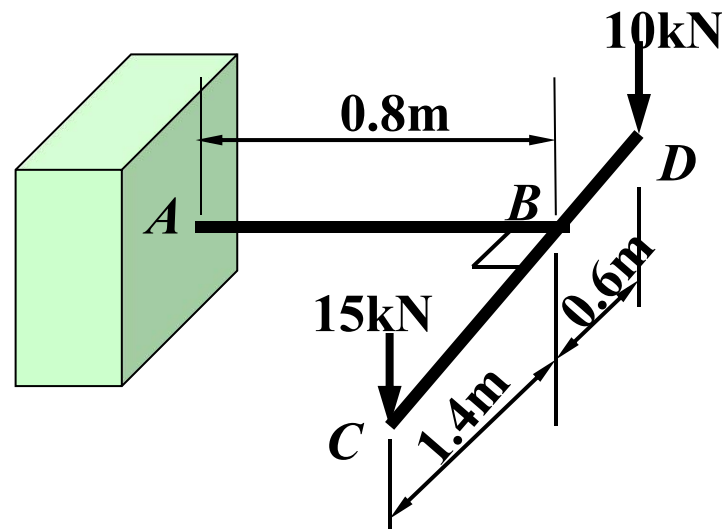
将力向 AB 杆的 B 截面形心简化得

$$F = 25\text{kN}$$

$$m = 15 \times 1.4 - 10 \times 0.6$$

$$= 15\text{kN} \cdot \text{m}$$

AB 杆为扭转和平面弯曲的组合变形





§ 8-3 弯曲与扭转的组合

(2) 内力分析--画扭矩图和弯矩图

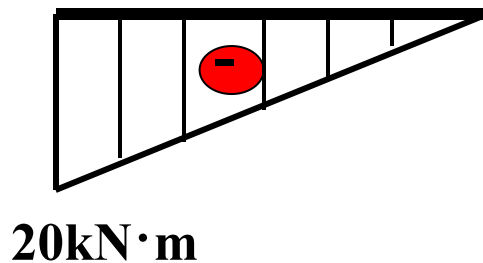
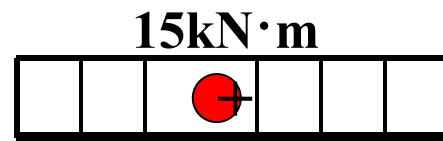
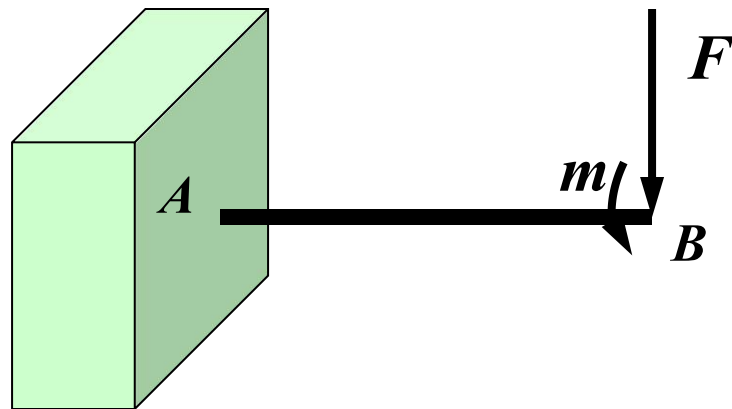
固定端截面为危险截面

$$T = m = 15\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{\max} = F \times 0.8 = 20\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$W = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$$

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} = 157.26\text{MPa} < [\sigma]$$





§ 8-3 弯曲与扭转的组合

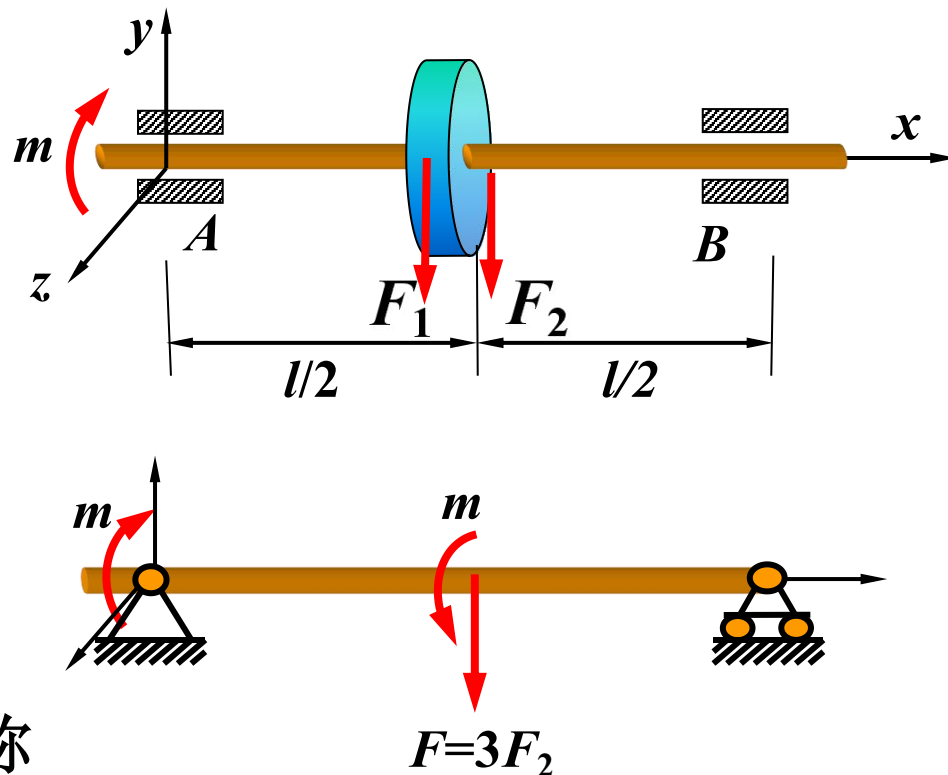
例8-8 传动轴如图所示。在A处作用一个外力偶矩 $m=1\text{kN}\cdot\text{m}$ ，皮带轮直径 $D=300\text{mm}$ ，皮带轮紧边拉力为 F_1 ，松边拉力为 F_2 。且 $F_1=2F_2$ ， $l=200\text{mm}$ ，轴的许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$ 。试用第三强度理论设计轴的直径

解：将力向轴的形心简化

$$m = (F_1 - F_2) \cdot \frac{D}{2} = \frac{F_2 \cdot D}{2}$$

$$F_2 = \frac{20}{3} \text{ kN}$$

$$F = 20 \text{ kN}$$



轴产生扭转和垂直纵向对称面内的平面弯曲



§ 8-3 弯曲与扭转的组合

中间截面为危险截面

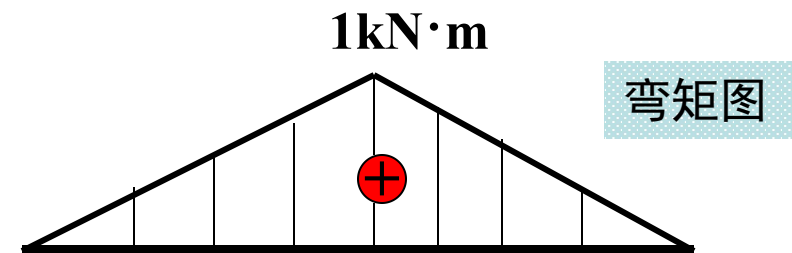
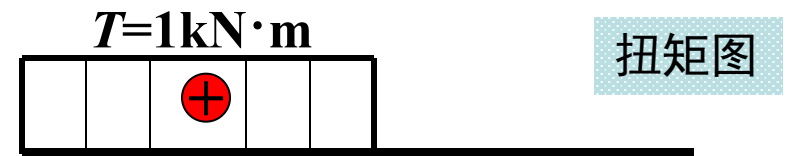
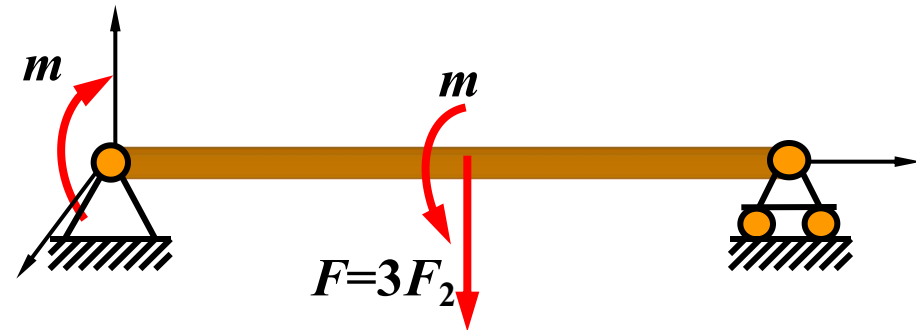
$$T = 1\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{\max} = 1\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{r3} = \frac{1}{W} \sqrt{M^2 + T^2} \leq [\sigma]$$

$$W = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$d = 44.83\text{mm}$$





§ 8-3 弯曲与扭转的组合

例8-9 图示一钢制实心圆轴，轴上的齿轮 C 上作用有铅垂切向力 5 kN ，径向力 1.82 kN ；齿轮 D 上作用有水平切向力 10 kN ，径向力 3.64 kN 。齿轮 C 的节圆直径 $d_1 = 400\text{ mm}$ ，齿轮 D 的节圆直径 $d_2 = 200\text{ mm}$ 。设许用应力 $[\sigma] = 100\text{ MPa}$ ，试按第四强度理论求轴的直径。

解：(1) 外力的简化

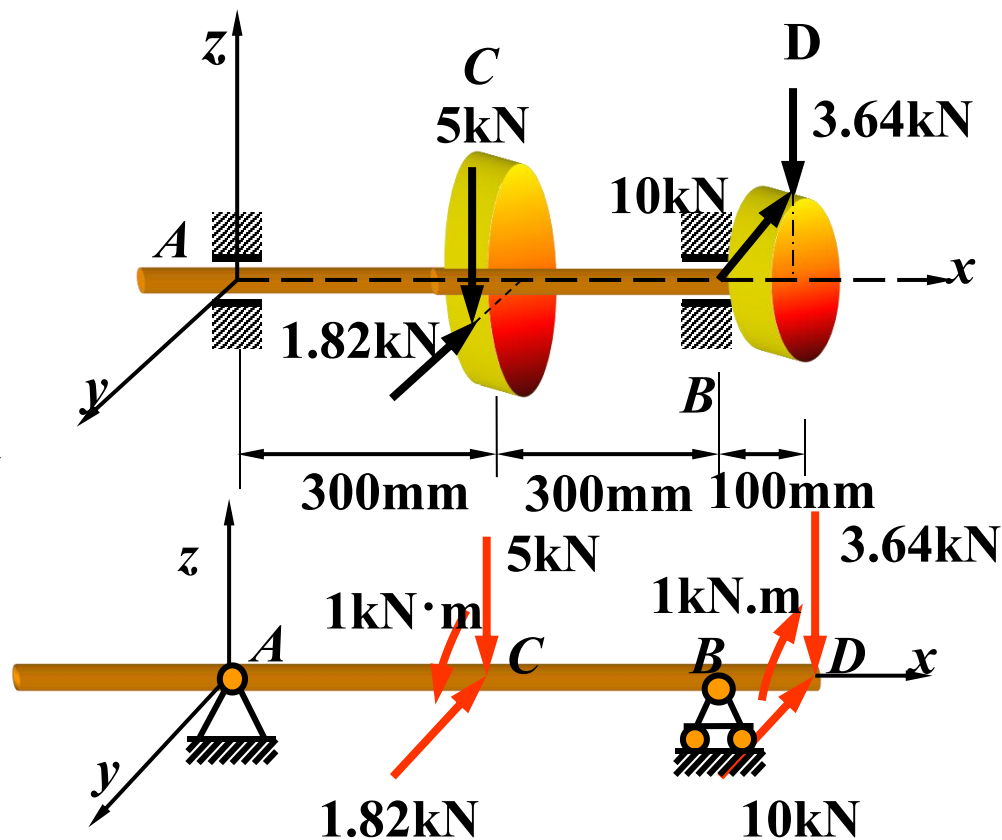
将每个齿轮上的外力
向该轴的截面形心简化

(2) 轴的变形分析

5 kN ， 3.64 kN 使轴在 xz
纵对称面内产生弯曲

1.82 kN ， 10 kN 使轴在 xy
纵对称面内产生弯曲

$1\text{ kN}\cdot\text{m}$ 使轴产生扭转





§ 8-3 弯曲与扭转的组合

(3) 绘制轴的内力图

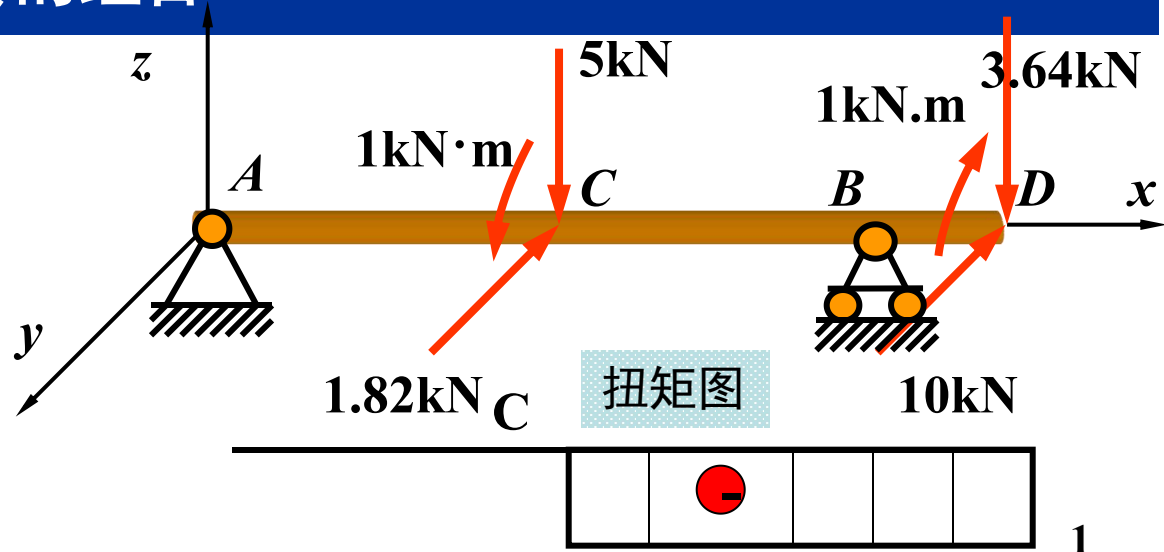
$$M_{yC} = 0.57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{yB} = 0.36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{zC} = 0.227 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{zB} = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$T = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



圆杆发生斜弯曲与扭转的组合变形

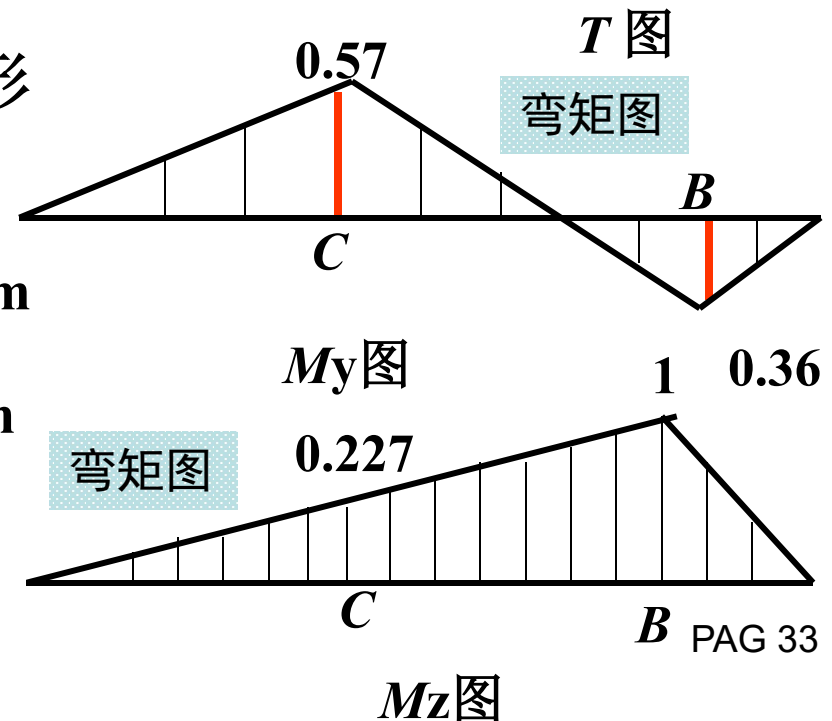
B 、 C 截面的总弯矩为

$$M_B = \sqrt{M_{yB}^2 + M_{zB}^2} = 1.063 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C = \sqrt{M_{yC}^2 + M_{zC}^2} = 0.36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$T_B = T_C = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

B 截面是危险截面





§ 8-3 弯曲与扭转的组合

(5) 由强度条件求轴的直径

$$\sigma_{r4} = \frac{\sqrt{M_B^2 + 0.75T_B^2}}{W} = \frac{1372}{W} \leq [\sigma]$$

$$W = \frac{\pi d^3}{32}$$

轴需要的直径为

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \times 1372}{\pi \times 100 \times 10^6}} = 51.9 \text{ mm}$$



§ 8-3 弯曲与扭转的组合

例8-10 $F_1=0.5\text{kN}$, $F_2=1\text{kN}$, $[\sigma]=160\text{MPa}$ 。(1) 用第三强度理论计算 AB 的直径; (2) 若 AB 杆的直径 $d=40\text{mm}$, 并在 B 端加一水平力 $F_3=20\text{kN}$, 校核 AB 杆的强度。

解: (1) 将 F_2 向 AB 杆的轴线简化得

$$F_2 = 1\text{kN}$$

$$m = 0.4\text{kN} \cdot \text{m}$$

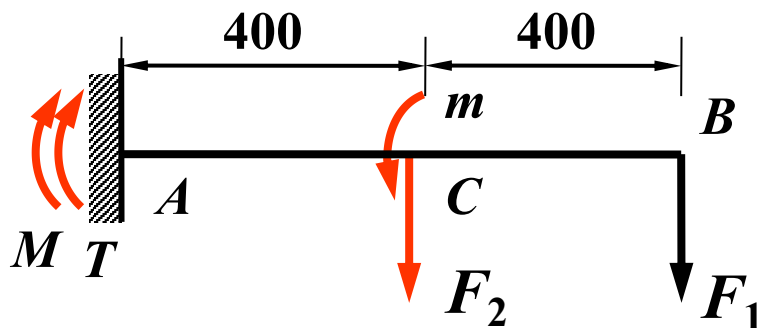
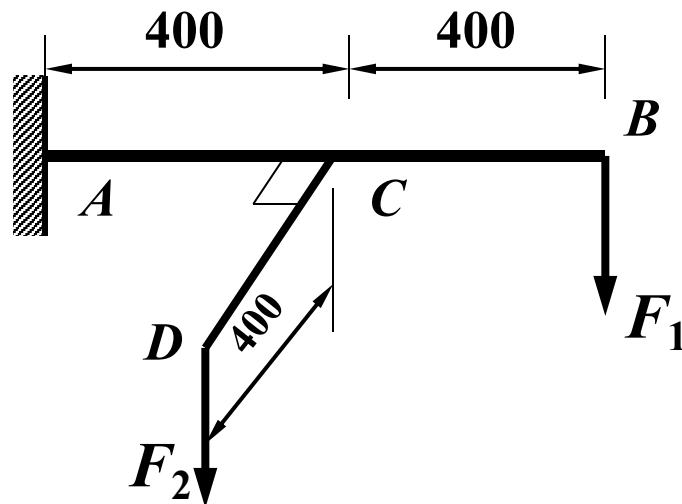
AB 为弯、扭组合变形
固定端截面是危险截面

$$M_{\max} = 0.8F_1 + 0.4F_2 = 0.8\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$T_{\max} = 0.4\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M_{\max}^2 + T_{\max}^2}}{W} \leq [\sigma] \quad W = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$d = 38.5\text{mm}$$





§ 8-3 弯曲与扭转的组合

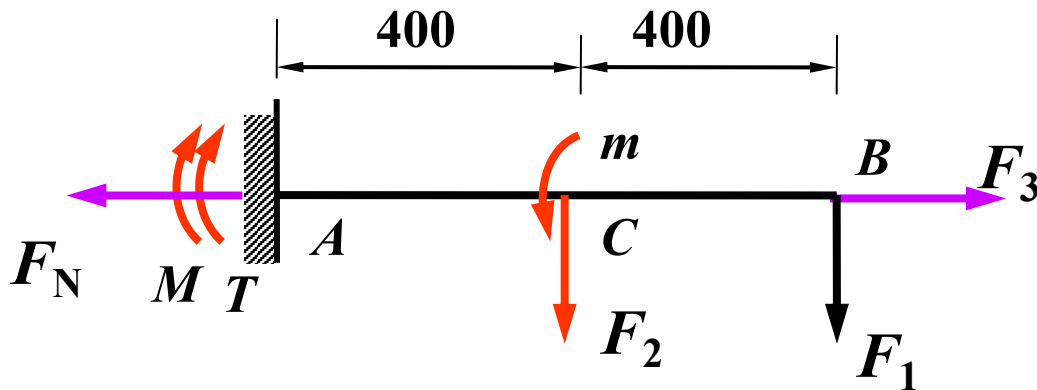
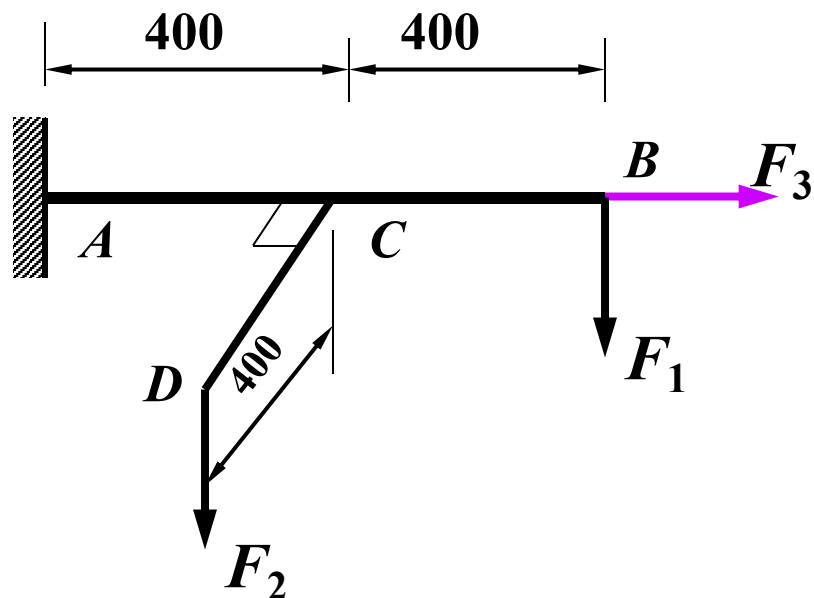
(2) 在 B 端加拉力 F_3

AB 为弯，扭与拉伸组合变形
固定端截面是危险截面

$$M_{max} = 0.8F_1 + 0.4F_2 = 0.8\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$T_{max} = 0.4\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$F_N = F_3 = 20\text{kN}$$





§ 8-3 弯曲与扭转的组合

固定端截面最大的正应力为

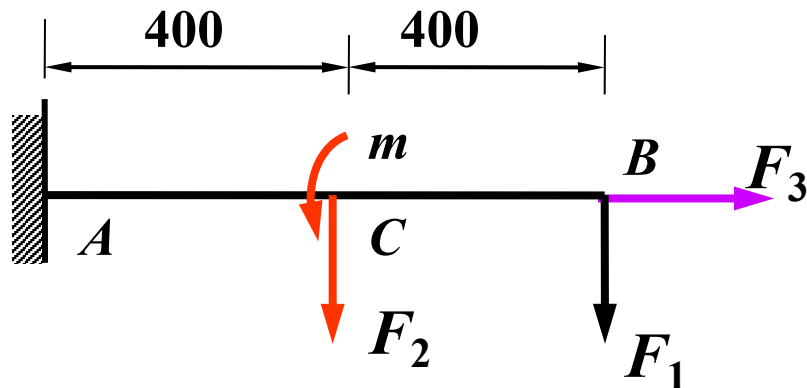
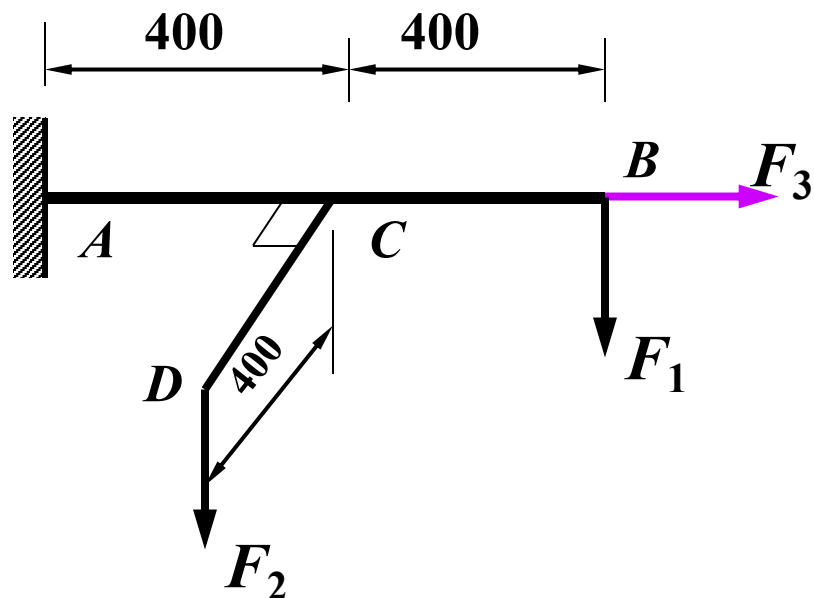
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} + \frac{F_N}{A} = 143\text{MPa}$$

最大切应力为

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_t} = 31.8\text{MPa}$$

由第三强度理论

$$\begin{aligned}\sigma_{r3} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ &= 157\text{MPa} \leq [\sigma]\end{aligned}$$





本章小结

一、组合变形的求解方法 — 叠加原理

★ 线弹性范围内, 小变形条件下

- 1、外力分析 — 载荷简化 $\left\{ \begin{array}{l} \text{轴向拉/压: } F_x \\ \text{扭转: } M_n \\ \text{弯曲} \left\{ \begin{array}{l} xoy \text{面内的弯曲: } M_z \\ xoz \text{面内的弯曲: } M_y \end{array} \right. \end{array} \right.$
- 2、内力分析 — 确定危险截面
- 3、应力分析 — 确定危险截面上的危险点 $\left\{ \begin{array}{l} \text{由分组载荷分别确定} \\ \text{危险截面的应力分布} \\ \text{利用叠加原理找危险点} \end{array} \right.$
- 4、强度分析

本章小结

二、弯曲与拉伸(或压缩)的组合

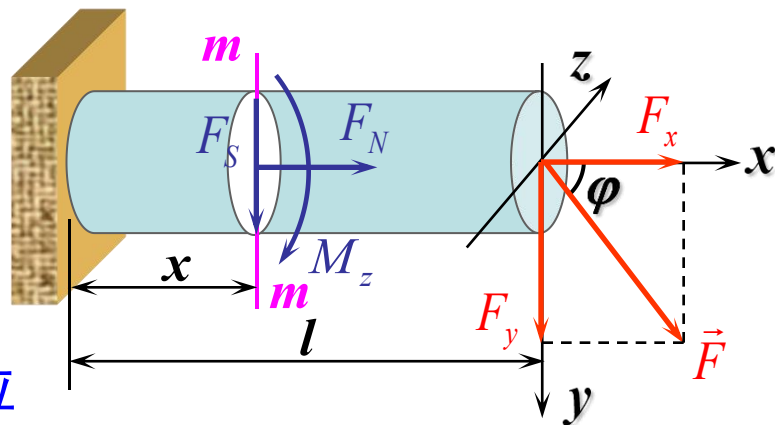
1、外力分析

2、内力分析

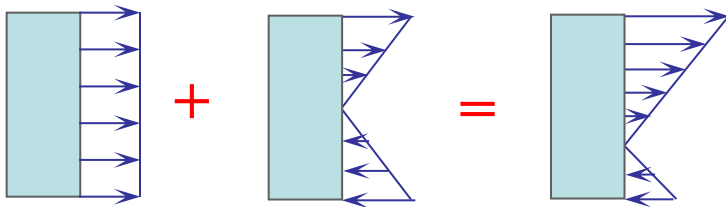
$$\begin{cases} F_N = F_x; \\ F_S = F_y; \\ M_z = F_y(l-x). \end{cases}$$

3、应力分析

上侧受拉



最大正应力(在根截面上)



$$\sigma = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{z,\max} y}{I_z}$$

4、强度条件

$$\sigma_{t,\max} \leq [\sigma_t]; \sigma_{c,\max} \leq [\sigma_c]$$



本章小结

四、弯曲与扭转的组合

1、弯扭组合强度条件应力表示法

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

2、弯扭组合强度条件内力表示法

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W} \leq [\sigma]$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \end{cases}$$
$$\sigma = \frac{M_{\text{合}}}{W_{\text{中性轴}}}; \quad \tau = \frac{T}{W_p}$$