课程名称：概率论与数理统计

说明：样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$\Phi(1)=0.8413$，

上分位数：$F_{0.1}(1,1)=39.86$；$\chi^2_{0.95}(4)=0.711$；$\chi^2_{0.95}(5)=1.145$；$\chi^2_{0.05}(4)=9.488$；$\chi^2_{0.05}(5)=11.07$.

一、计算题（3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

1. 设 A 和 B 为随机事件，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，$P(A|B)=0.6$，求 $P(A\cup\bar{B})$.
2. 随机变量 X 服从期望为 2 的指数分布，求 $P\{X>6|2<x<10\}$.
3. 某批零件中有正品6个，次品4个，从中任取2个零件．已知一个零件为正品，求另一个零件也为正品的概率．

二、计算题（3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

1. 一元二次方程 $t^2+Xt+Y=0$ 中，X、Y 分别是一枚骰子连续抛两次出现的点数．求方程有两个实根的概率．
2. 随机变量 X 的分布律 $P\{X=k\}=(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2}$，$k=2,3,\dots$，其中 $\theta(0<\theta<1)$ 为未知参数，求 $E(X)$.
3. 生产线生产的产品成箱包装，每箱重量是随机的．假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克．如果用载重为 5.05 吨的汽车承运，利用中心极限定理计算每辆车能装 100 箱的概率（汽车不允许超载）．

三、计算题（共 18 分）

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & -x<y<x,0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(1)（6 分）判断 X 和 Y 的独立性并说明理由；

(2)（6 分）求条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

(3)（6 分）求 $P\{Y>X/2\}$.

四、计算题（3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

1. 设 X_1 和 X_2 为总体 $X\sim N(0,0.3^2)$ 的样本，求 $P\{\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}<39.86\}$.
2. 设总体 X 的分布律为 $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2\theta & \theta & 1-3\theta\end{pmatrix}$，其中 $\theta\left(0<\theta<\frac{1}{3}\right)$ 为未知参数，$X_1,\dots,X_n$ 是来自 X 的样本．求 θ 的矩估计．
3. 设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}, & x>c,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中，$c\,(c>0)$ 为已知常数，$\theta(\theta>1)$ 为未知参数，$X_1,\dots,X_n$ 是来自 X 的样本．求 θ 的极大似然估计量．

五、计算题（2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

1. 设某次大型考试考生的成绩 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$．进行两次独立随机抽样，第一次抽取 n_1 个成绩，平均分为 $\bar{X}_1$ 分，标准差为 S_1 分；第二次抽取 n_2 个成绩，平均分为 $\bar{X}_2$ 分，标准差为 S_2 分．在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，利用两次抽样数据给出检验假设 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$ 的检验统计量和拒绝域．
2. 某批零件的尺寸 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从中随机抽取 5 个零件测得尺寸分别为 55, 47, 54, 50, 44．求 σ^2 的置信度为 0.95 的两个单侧置信区间．

六、计算题（2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

1. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2,0\le y\le 2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 求 $Cov(X,Y)$.
2. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 独立同分布于均匀总体 $X\sim U(\theta,2\theta)$，其中参数 $\theta>0$．求 $Y=\max\{X_1,X_2,X_3\}$ 的分布函数和概率密度．

2020—2021 学年 春季 学期

课程名称：概率论与数理统计

总分	一	二	三	四	五	六

一、计算题（3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

1. 如果事件 A, B 满足 $P(A)=0.4, P(B)=0.5, P(\overline{B}|A)=0.3$，求 $P(A\cup B)$.
2. 随机变量 $X\sim B(2,p), Y\sim B(3,p)$，且 $P\{X>1\}=4/9$，求 $P\{Y\le 2\}$.
3. 随机变量 X 服从指数分布 $E(2)$，求 $E(2X^2-e^{-2X})$.

二、计算题（3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

1. 已知随机向量(X, Y)服从 $N(3,-2,4,9,0.5)$，求$\rho(X,X+Y)$.
2. 甲从装有 10 个红球、8 个白球的盒子 A 中随机地取 3 个球放入空盒子 B，然后乙随机地从 B 中取一球，求乙取得的是红球的概率.
3. 某零件平均重量为 0.5kg，均方差为 0.01kg，那么 5000 个零件的总重量超过 2501kg 的概率大约是多少？

三、计算题（共 18 分）

设随机向量(X, Y)的联合分布律如下：

X\Y	0	1	2	3	
0	1/64	2/64	2/64	3/64	8/64
1	2/64	4/64	4/64	6/64	16/64
2	2/64	4/64	5/64	6/64	17/64
3	3/64	6/64	6/64	8/64	23/64

1. （6 分）求 X 和 Y 各自的分布律；
2. （6 分）求在 $Y\ne 2$ 下 X 的条件分布律；
3. （6 分）判断 X 和 Y 是否相互独立？说明理由. 并求 $P\{X\ne 1|Y=2\}$.

四、计算题（3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

1. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$的总体 X 的一组样本，求参数μ和σ^2的矩估计.
2. 1 小题中参数μ的矩估计$\hat{\mu}$是否是 $E(X)$的无偏估计？$\hat{\mu}^2$是否是 $E(X^2)$的无偏估计？
3. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的一组样本，X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, & 0<x<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

$\frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}$

求参数θ的最大似然估计.

五、证明题与计算题（2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

1. 设 X, Y 是相互独立的随机变量，分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，证明：$Z=\min\{X,Y\}$的分布函数$F_Z(z)=F_X(z)+F_Y(z)-F_X(z)F_Y(z)$.
2. 设 X 具有概率密度$f_X(x)$，求 $Y=X^2$的概率密度.

六、计算题（2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

1. 设$X_1,X_2,\cdots,X_9$是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的一组样本，μ,σ^2均未知，若样本均值$\bar{x}=22$，样本方差$s^2=2.25$，求均值μ的置信水平为 0.95 的双侧置信区间.
2. 某饮料的容量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{11}$是来自该总体的样本，样本标准差为 2.6. 在显著性水平 0.05 下，可否认为方差保持在方差的设定值 6.25？

$\Phi(1.414)=0.9215, \Phi(2)=0.9772.$

$t_{0.025}(8)=2.3060,\ t_{0.05}(8)=1.8595,\ t_{0.025}(9)=2.2622,\ t_{0.05}(9)=1.8331.$

$\chi^2_{0.025}(10)=20.483,\ \chi^2_{0.975}(10)=3.247,\ \chi^2_{0.025}(11)=21.920,\ \chi^2_{0.975}(11)=3.816.$