第 十 章 波 动

10-3 波的能量、能流密度

知识点：

波的能量传播特征及能流、能流密度概念

一、波的能量

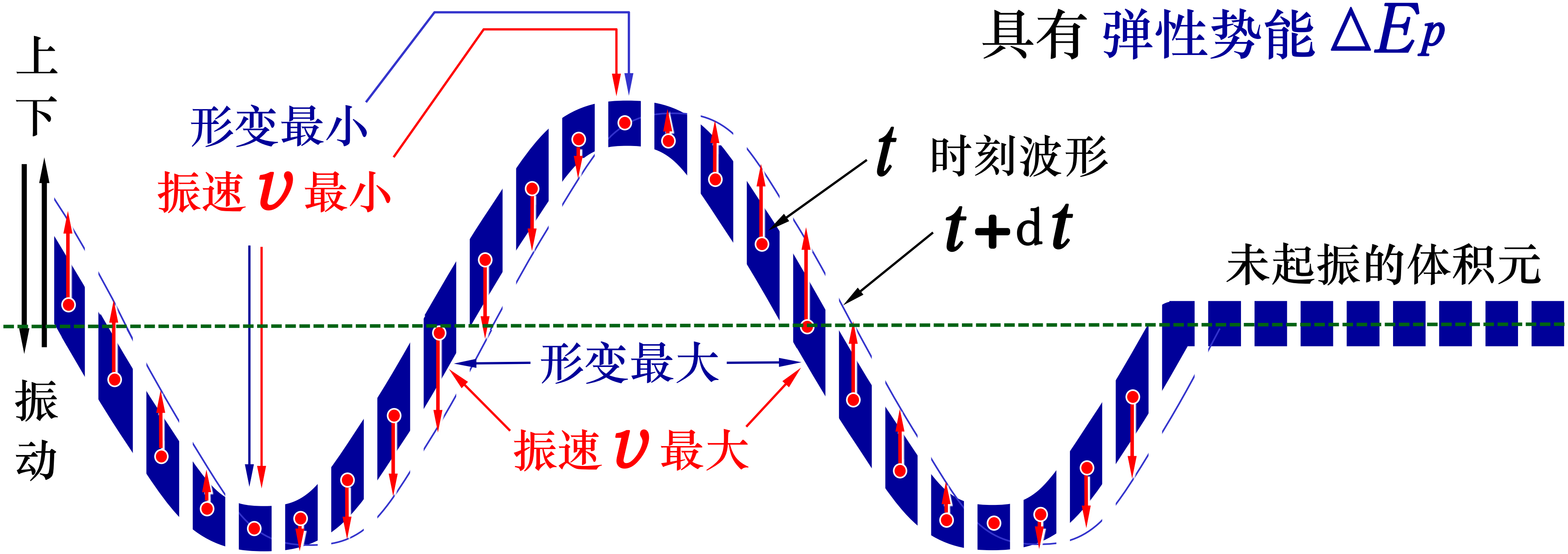
波的传播伴随能量的传播，传播过程中，介质中的质点由不动到动，具有动能，媒质形变具有势能。

波动的过程是能量传播的过程

一、波的能量

现象： 若将一软绳（弹性媒质）划分为多个小单元（体积元）

- 在波动中，各体积元产生不同程度的 弹性形变，具有 弹性势能 ΔE_p



- 各体积元以变化的振动速率 v 上下振动，具有振动动能 ΔE_k

理论证明（略），当媒质中有行波传播时，媒质中一个体积元在作周期性振动的过程中，其弹性势能 ΔE_p 和振动动能 ΔE_k 同时增大、同时减小，而且其量值相等，即 $\Delta E_p = \Delta E_k$。后面将直接应用这一结论。

一、波的能量

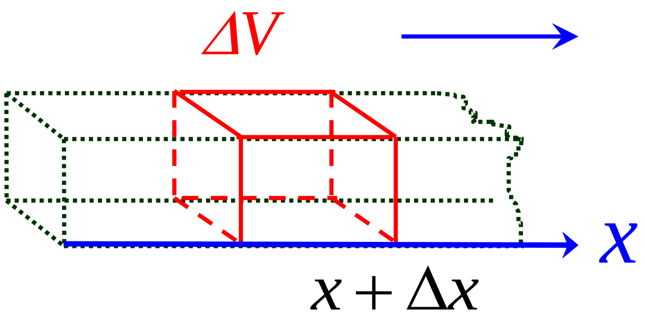
以平面简谐纵波在直棒中传播为例，定性说明

设棒的质量密度为 ρ

质元 Δm

（体积元 ΔV）

$$v = -A\omega\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$



1、振动动能：

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\Delta m\, v^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V v^2$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

2、弹性势能：

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

3、体积元 ΔV 的总机械能：

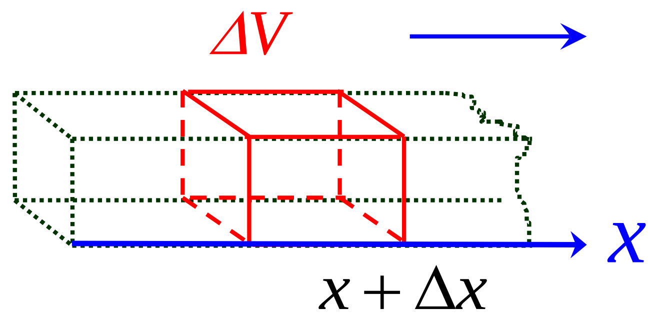
$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

一、波的能量

以平面简谐纵波在直棒中传播为例，定性说明

设棒的质量密度为 ρ

$$\boxed{v=-A\omega\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]}$$



1、振动动能：$\Delta E_k=\frac{1}{2}\rho\Delta VA^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

2、弹性势能：$\Delta E_p=\frac{1}{2}\rho\Delta VA^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

3、体积元的总机械能：$\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_p=\rho\Delta VA^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

结论：　在波动过程中，任一质元的动能和势能相等，且同步变化。

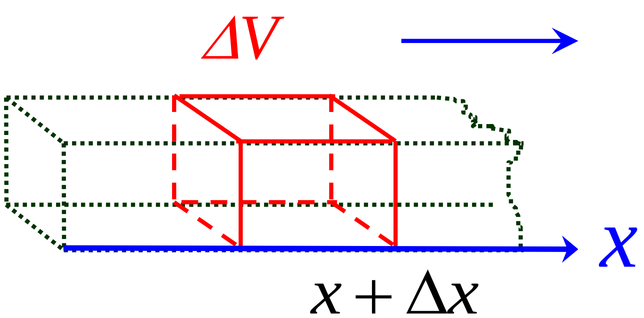
媒质中各体积元不断地从与其相邻的上一个体积元接收能量，并传递给与其相邻的下一个体积元。

一、波的能量

以平面简谐纵波在直棒中传播为例，定性说明

设棒的质量密度为 ρ

$$v=-A\omega\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$



1、振动动能： $$\Delta E_k=\frac{1}{2}\rho\Delta VA^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

2、弹性势能： $$\Delta E_p=\frac{1}{2}\rho\Delta VA^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

3、体积元的总机械能： $$\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_p=\rho\Delta VA^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

波动的能量与简谐运动的能量有显著的不同，

在简谐运动系统中，系统的机械能是守恒的。

在波动中，任一体积元，其动能和势能的变化是相同的，

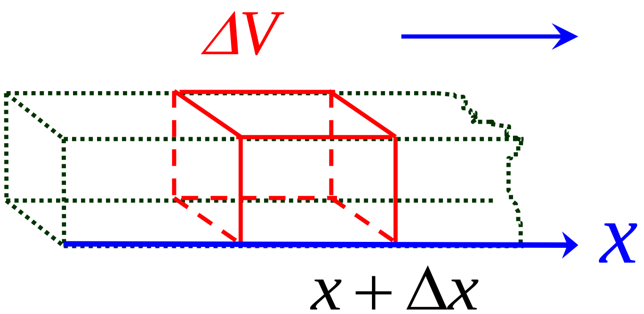
对任何体积元来说，系统的机械能是不守恒的。

一、波的能量

以平面简谐纵波在直棒中传播为例，定性说明

设棒的质量密度为 ρ

$$\boxed{v = -A\omega\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]}$$



1、振动动能：$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

2、弹性势能：$\Delta E_p = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

3、体积元的总机械能：$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

在波动中，

对于媒质中某一体积元，它的能量从零达到最大，这是能量的输入过程，然后又从最大减到零，这是能量输出的过程，周而复始。

媒质中并不积累能量，波是一个能量传递的过程，或者说波是能量传播的一种形式；波动的能量沿波速方向传播。

例：

. 一平面简谐波在弹性介质中传播，某处介质质元在从最大位移处回到平衡位置的过程中：

(A) 它的势能转换成动能

(B) 它的动能转换成势能

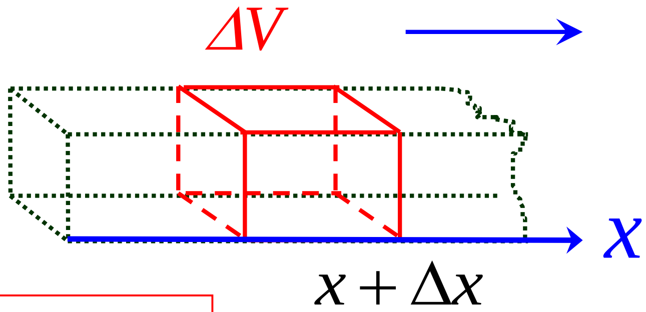
(C) 它从相邻的一段介质质元获得能量，其能量逐渐增加

(D) 它把自己的能量传给了相邻一段介质质元，其能量逐渐减小

[ ]

一、波的能量

以平面简谐纵波在直棒中传播为例，定性说明
设棒的质量密度为 ρ



4、能量密度:

单位体积介质中的波动能量

$$\boxed{w=\frac{\Delta E}{\Delta V}=\rho A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]}$$

5、平均能量密度: 能量密度在一个周期内的平均值

$$\boxed{\bar{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2}$$

结论：机械波的能量与振幅的平方、频率的平方以及介质的密度成正比。

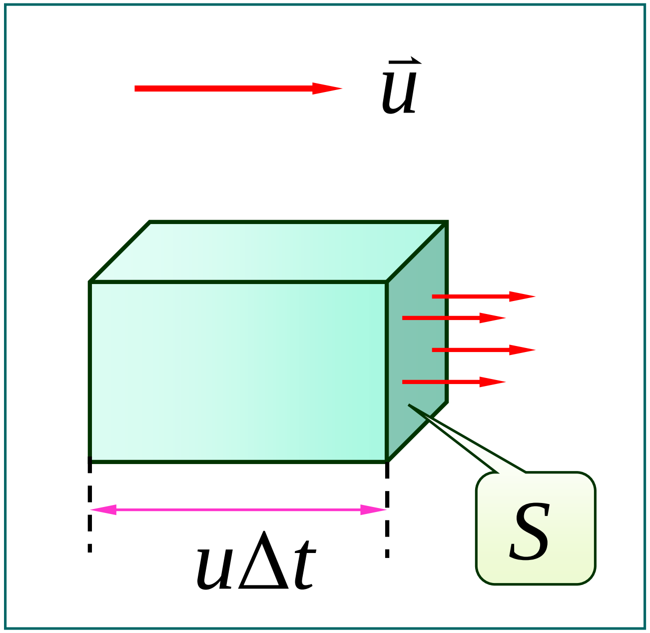
二、能流和能流密度

1、能 流： 单位时间内垂直通过某一面积的能量

2、平均能流：

单位时间内垂直通过某一面积S的平均能量

$$\bar{P}=\frac{\Delta\bar{E}}{\Delta t}=\frac{\bar{w}\Delta V}{\Delta t}=\frac{\bar{w}(u\Delta t)S}{\Delta t}=\bar{w}uS$$



单位：瓦（W）

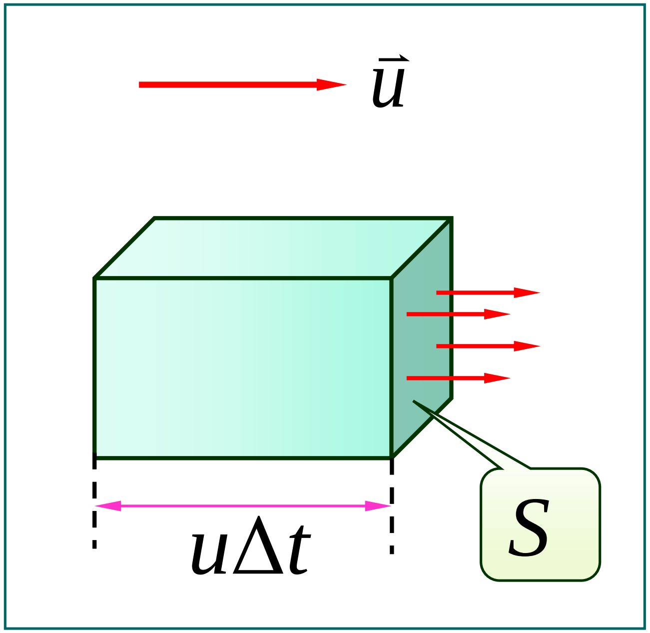
平均能量密度：

$$\boxed{\bar{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2}$$

二、能流和能流密度

1、能 流： 单位时间内垂直通过某一面积的能量.

2、平均能流： $\boxed{\bar{P} = \bar{w} u S}$ $\boxed{\bar{w} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2}$



3、能流密度（波的强度）I:

通过垂直于波传播方向的单位面积的平均能流。

$$I = \frac{\bar{P}}{S} = \bar{w} u, \quad \boxed{\vec{I} = \bar{w}\vec{u}}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 u}$$

单位：瓦·米$^{-2}$ (W· m^{-2})

分析平面波和球面波的振幅

例题： 证明在各向同性、均匀、不吸收能量的媒质中，传播的平面波在行进方向上振幅不变，球面波的振幅与离波源的距离成反比。

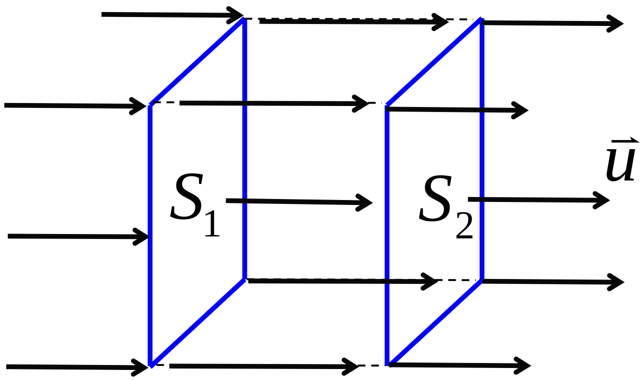
证明：对平面波：

在一个周期 T 内通过 S_1 和 S_2 面的能量应该相等

$$S_1 = S_2 = S$$

$$I_1 S_1 T = I_2 S_2 T,$$

$$\frac{1}{2}\rho u \omega^2 A_1^2 ST = \frac{1}{2}\rho u \omega^2 A_2^2 ST$$



$A_1 = A_2$ 平面波振幅相等

分析平面波和球面波的振幅

例题：证明在各向同性、均匀、不吸收能量的媒质中，传播的平面波在行进方向上振幅不变，球面波的振幅与离波源的距离成反比。

证明：对球面波：

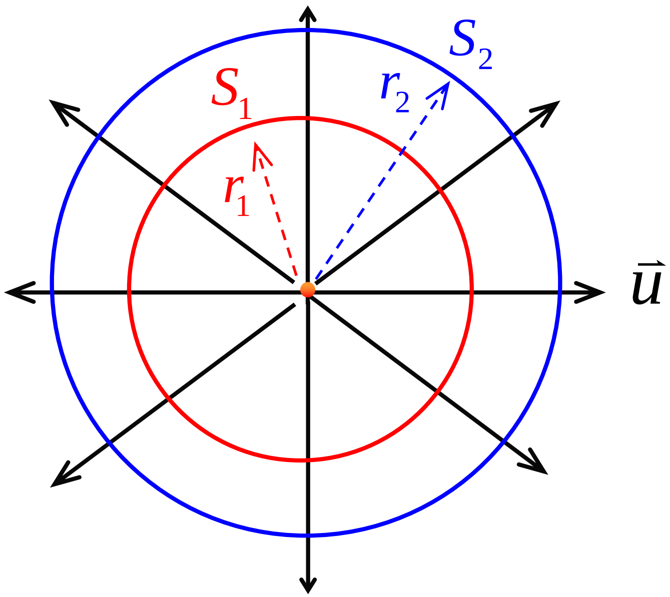
在一个周期T内通过半径r_1球面S_1和半径r_2球面S_2的能量应该相等

$$I_1 S_1 T = I_2 S_2 T,$$

$$S_1 = 4\pi r_1^2, \quad S_2 = 4\pi r_2^2$$

$$\frac{1}{2}\rho u \omega^2 A_1^2 S_1 T = \frac{1}{2}\rho u \omega^2 A_2^2 S_2 T$$

$$A_1 r_1 = A_2 r_2$$



球面波，振幅与离波源的距离成反比

第 十 章 波 动

10-3 惠更斯原理、波的衍射和干涉

知识点：

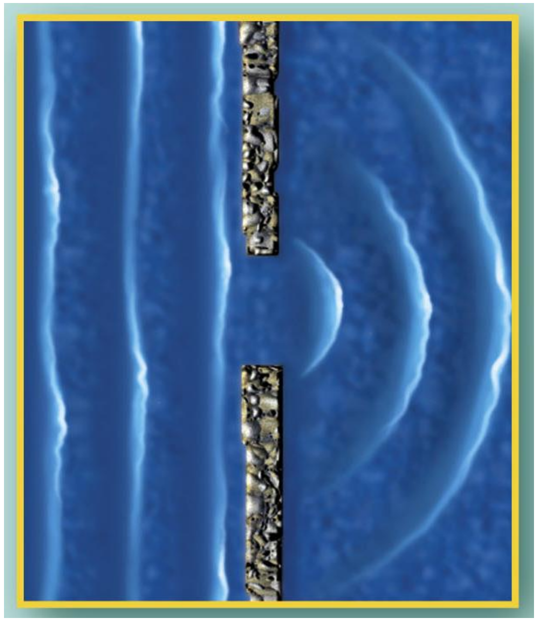
1、波的衍射、惠更斯原理（定性掌握）

2、波的干涉（ *重点掌握* ）

一、波的衍射 Diffraction Phenomena of Wave

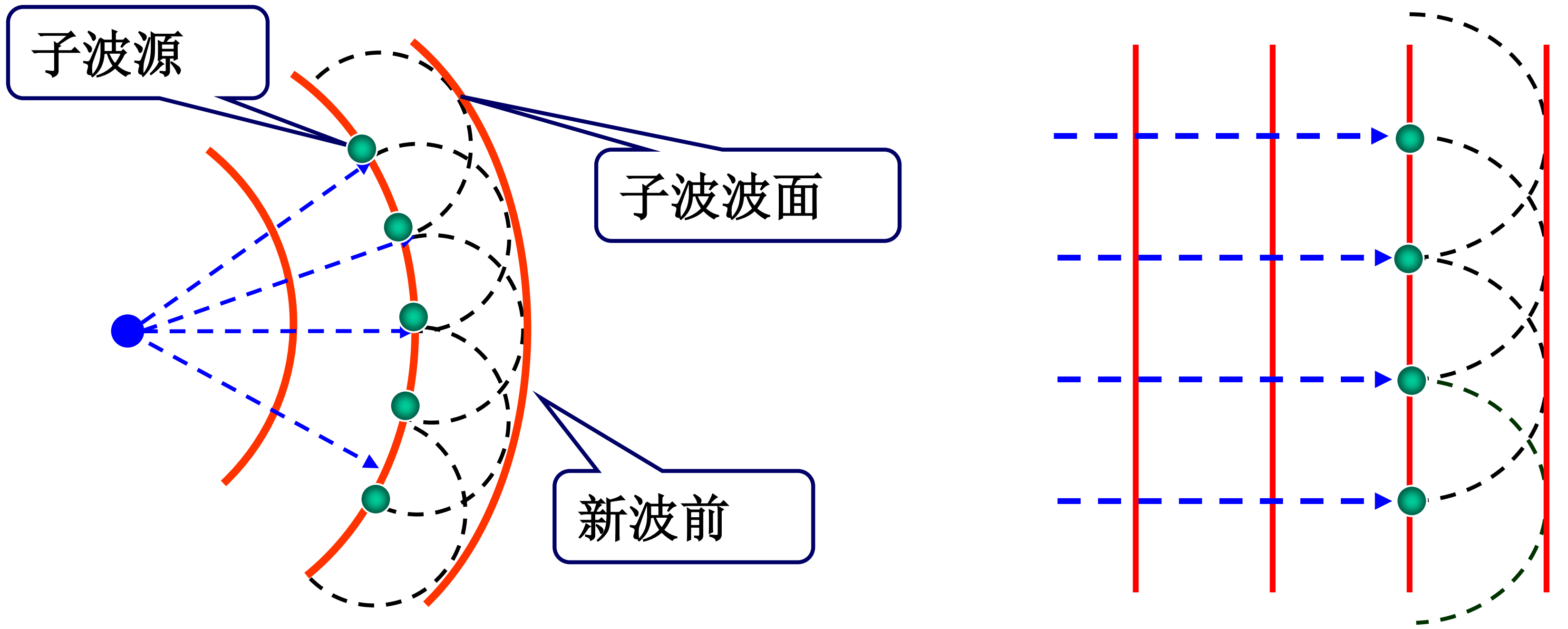
波在传播过程中，遇到障碍物后不沿直线传播，能绕过障碍物的边缘，在障碍物的阴影区内继续传播。

水波的衍射



二、惠更斯原理 Huygens Principle (1679)

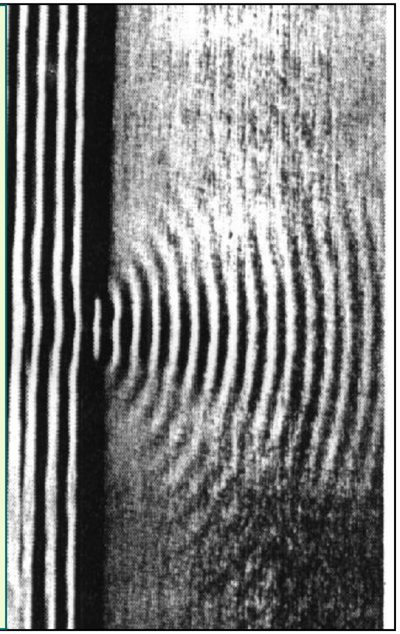
波阵面(波前)上的每一点都可视为发射次波(子波)的波源，在其后的任一时刻，这些次波(子波)波面的包络面就是该时刻的波阵面（波前）。



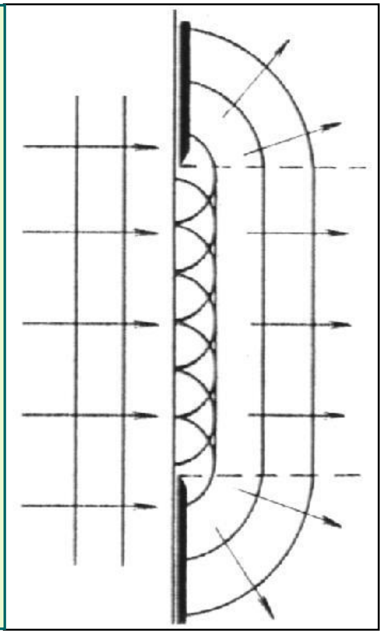
波的衍射

波在传播过程中，遇到障碍物后不沿直线传播，能绕过障碍物的边缘，在障碍物的阴影区内继续传播。

水波的衍射



波的衍射

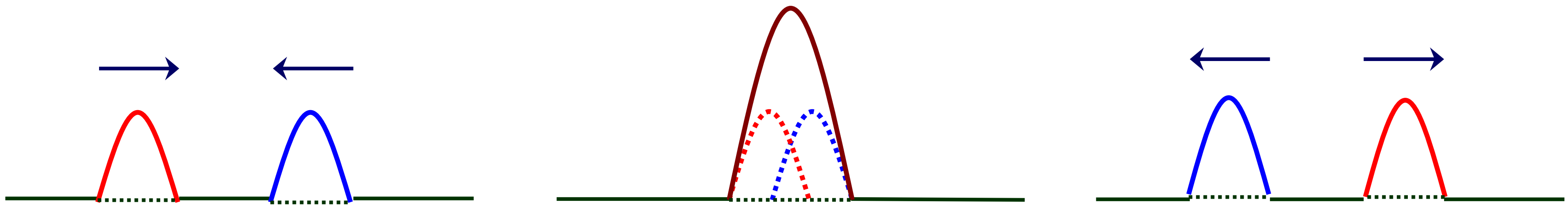


产生波的衍射的条件：小孔或障碍物的尺寸不比波长大得多。

可用惠更斯原理作图解释波的衍射机理。但不能用惠更斯原理定量计算衍射波的强度分布。

三、波的干涉

1、波的叠加原理



1) 波传播的独立性

几列波相遇之后， 仍然保持它们各自原有的特征（频率、波长、振幅、振动方向等）不变，并按照原来的方向继续前进，好象没有遇到过其他波一样。

2) 波的叠加性

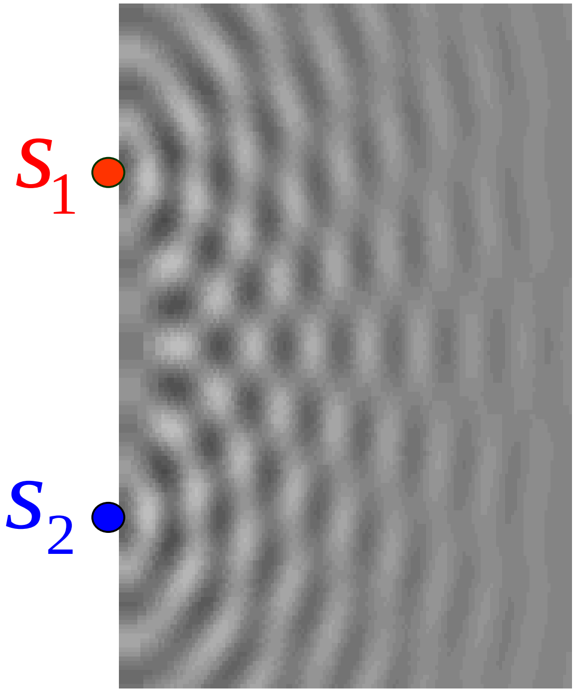
在相遇区域内任一点的振动，为各列波单独存在时在该点所引起的振动位移的矢量和。

通常，波的强度不太强的波相遇，满足叠加原理，称为线性波。

波的强度强到不满足叠加原理的波，称为非线性波。

三、波的干涉

2、波的干涉（重点）



频率相同、振动方向相同、相位相同或相位差恒定的两列波相遇时，使某些地方振动始终加强，而使另一些地方振动始终减弱的现象，

——波的干涉现象

三、波的干涉

2、波的干涉（重点）

频率相同、振动方向相同、相位相同或相位差恒定的两列波相遇时，使某些地方振动始终加强，而使另一些地方振动始终减弱的现象——波的干涉现象

1) 相干条件

(1) 频率相同、
(2) 振动方向相同、
(3) 相位相同或相位差恒定。

满足相干条件的波称为相干波

满足相干条件的波源称为相干波源

补充条件：强度相差不太大

三、波的干涉

2、波的干涉(重点)

频率相同、振动方向相同、相位相同或相位差恒定的两列波相遇时，使某些地方振动始终加强，而使另一些地方振动始终减弱的现象——波的干涉现象

两相干波传到介质中的某一点，该处质元的振动是两个分振动的叠加。干涉的本质是振动的合成。

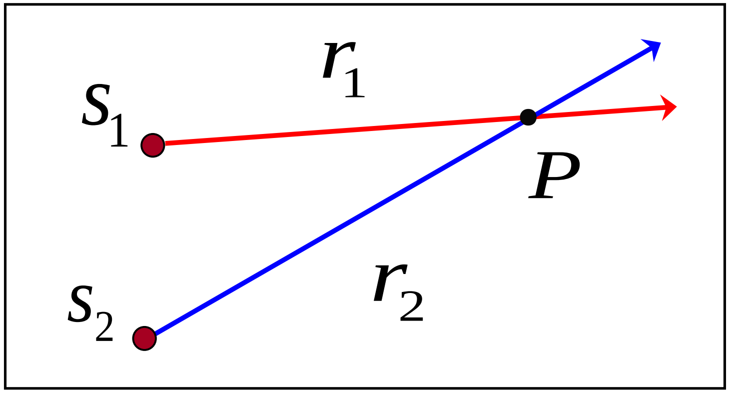
干涉中最关心的问题：

两相干波相遇的区域内：
哪些点的合振动振幅取极大值（称为干涉相长或干涉加强）；
哪些点的合振动振幅取极小值（称为干涉相消或干涉减弱）。

三、波的干涉

2、波的干涉(重点)

2) 干涉加强(相长)与干涉减弱（相消）的条件（重点）



波源S_1、S_2振动方程：

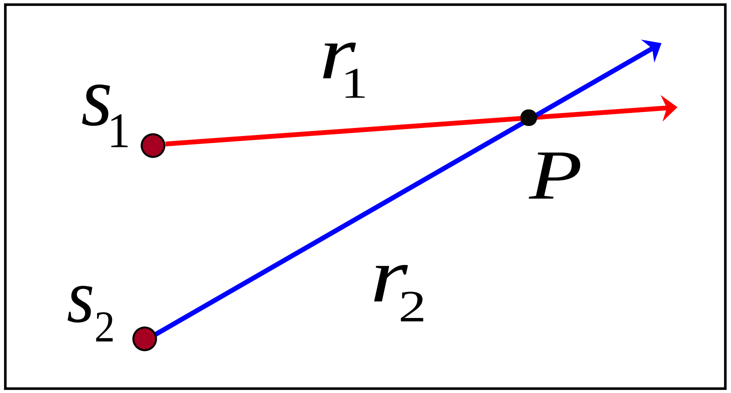
$$\begin{cases} y_{01} = A_1\cos(\omega t + \varphi_{01}) \\ y_{02} = A_2\cos(\omega t + \varphi_{02}) \end{cases}$$

波程：r_1、r_2

$$y_{1p} = A_1\cos[\omega(t - \frac{r_1}{u}) + \varphi_{01}]$$

P点的两个分振动

$$\begin{cases} y_{1p} = A_1\cos(\omega t + \underline{\varphi_{01} - 2\pi\frac{r_1}{\lambda}}) \\ y_{2p} = A_2\cos(\omega t + \underline{\varphi_{02} - 2\pi\frac{r_2}{\lambda}}) \end{cases}$$



P点的两个分振动

$$\begin{cases} y_{1p} = A_1\cos(\omega t + \underline{\varphi_{01} - 2\pi\dfrac{r_1}{\lambda}}) \\ y_{2p} = A_2\cos(\omega t + \underline{\varphi_{02} - 2\pi\dfrac{r_2}{\lambda}}) \end{cases}$$

P 点合振动：

$$\boxed{y_p = y_{1p} + y_{2p} = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \\ I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi \\ \Delta\varphi = (\varphi_{02} - \varphi_{01}) - 2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda} \\ \tan\varphi_0 = \dfrac{A_1\sin(\varphi_{01} - \dfrac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2\sin(\varphi_{02} - \dfrac{2\pi r_2}{\lambda})}{A_1\cos(\varphi_{01} - \dfrac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2\cos(\varphi_{02} - \dfrac{2\pi r_1}{\lambda})} \end{cases}$$

讨 论

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi=(\varphi_{02}-\varphi_{01})-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}$$

(1) 干涉加强（相长）条件:

$$\Delta\varphi=\pm2k\pi,\ k=0,1,2,\cdots$$

$$A_{max}=A_1+A_2$$

$$I_{max}=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}$$

振动始终加强

(2) 干涉减弱（相消）条件:

$$\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi,\ k=0,1,2,\cdots$$

$$A_{min}=|A_1-A_2|$$

$$I_{min}=I_1+I_2-2\sqrt{I_1I_2}$$

振动始终减弱

(3) $\Delta\varphi=$ 其他:

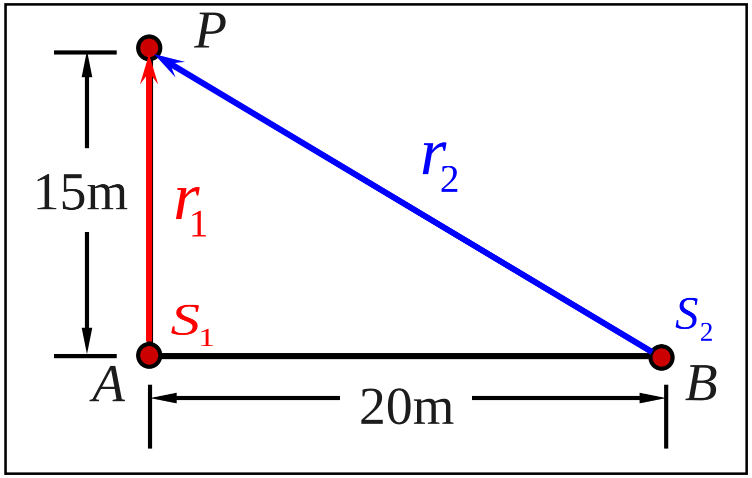
$$|A_1-A_2|<A<A_1+A_2$$

例 7：A、B 两点为同一介质中两相干波源，振动方向相同、振幅皆为**5cm**，频率皆为**100Hz**，波速为**10m/s**，当点 A 为波峰时，点B 恰为波谷，

确定：两列波在P点干涉的结果。

解：$\lambda = \frac{u}{\nu} = 0.1\text{m}$，　取：$\varphi_{02} - \varphi_{01} = -\pi$

$r_1 = 15\text{m}$，　$r_2 = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25\text{m}$



P点：

$$\Delta\varphi = (\varphi_{02} - \varphi_{01}) - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

$$= -\pi - 2\pi\frac{10}{0.1} = -201\pi$$

P点干涉减弱，　振幅：$A = |A_1 - A_2| = 0$，　P点因干涉而静止

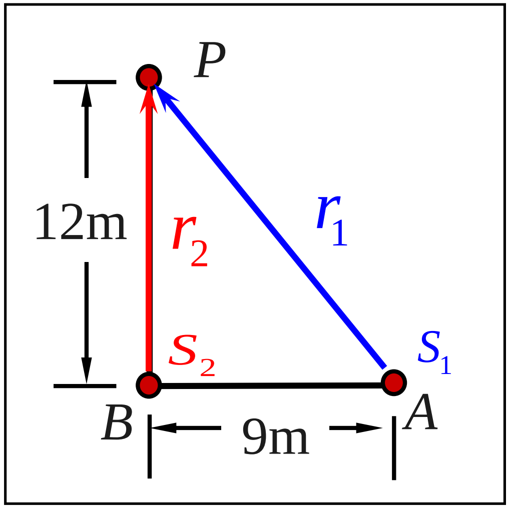
例 8： A、B 两点为同一介质中两相干波源，振动方向相同、振幅皆为10cm，频率皆为100Hz，波速为400m/s。当点 A 为波峰时，点B 恰为波谷，

求： P点的合振幅。

解：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi=(\varphi_{02}-\varphi_{01})-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}$$



$$\lambda=\frac{u}{\nu}=4\text{m},$$ 取：$\varphi_{02}-\varphi_{01}=-\pi$

$$r_1=\sqrt{12^2+9^2}=15\text{m}$$

P点： $$\Delta\varphi=(\varphi_{02}-\varphi_{01})-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=-\pi-2\pi\frac{-3}{4}=\frac{\pi}{2}$$

振幅： $$A=\sqrt{10^2+10^2+2\times10\times10\times\cos\frac{\pi}{2}}=10\sqrt{2}(\text{m})$$

例 9：如图， 两个相干波源S_1和S_2相距L=9m，振动频率为 ν=100Hz，

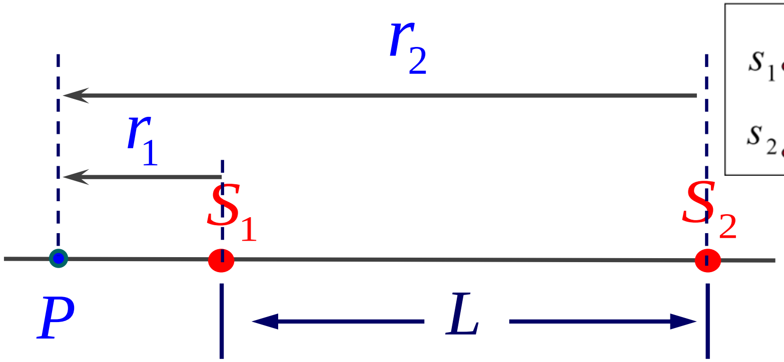
S_2的初相位比S_1超前 $\pi/2$ ，S_1和S_2发出的两简谐波的波速u=400m/s，

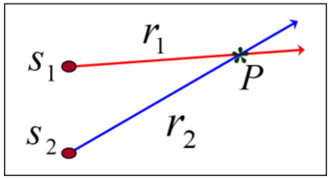
求： 在S_1和S_2的连线上，1）哪些点干涉加强？2）哪些点干涉减弱？

解：

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = 4\text{m},$$

$$\varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{\pi}{2}$$





$$\boxed{\Delta\varphi = (\varphi_{02} - \varphi_{01}) - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}}$$

1、 S_1的左侧： $r_2 - r_1 = L = 9\text{m}$

$$\Delta\varphi = (\varphi_{02} - \varphi_{01}) - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \frac{\pi}{2} - 2\pi\frac{9}{4} = -4\pi$$

S_1的左侧，所有点干涉加强

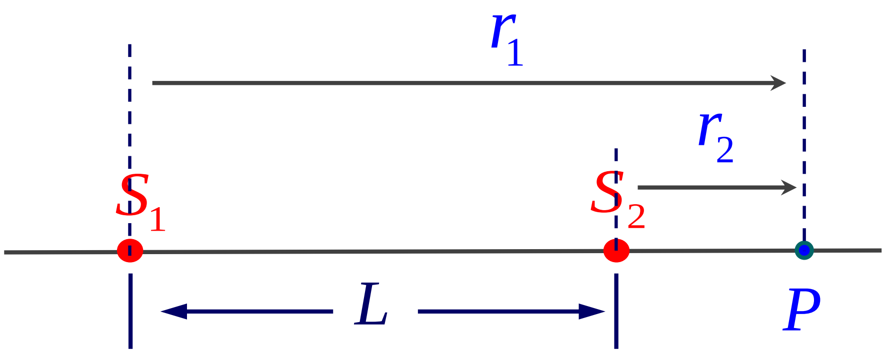
例 9：如图，两个相干波源S_1和S_2相距L=9m，振动频率为 ν=100Hz，S_2的初相位比S_1超前$\pi/2$，S_1和S_2发出的两简谐波的波速u=400m/s，

求：在S_1和S_2的连线上，1）哪些点干涉加强？2）哪些点干涉减弱？

解：

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = 4\text{m},$$

$$\varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{\pi}{2}$$



$$\boxed{\Delta\varphi = (\varphi_{02} - \varphi_{01}) - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}}$$

2、S_2的右侧：　$r_2 - r_1 = -L = -9\text{m}$

$$\Delta\varphi = (\varphi_{02} - \varphi_{01}) - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \frac{\pi}{2} - 2\pi\frac{-9}{4} = 5\pi$$

S_2的右侧，所有点干涉减弱

例 9：如图， 两个相干波源S_1和S_2相距L=9m，振动频率为 ν=100Hz，

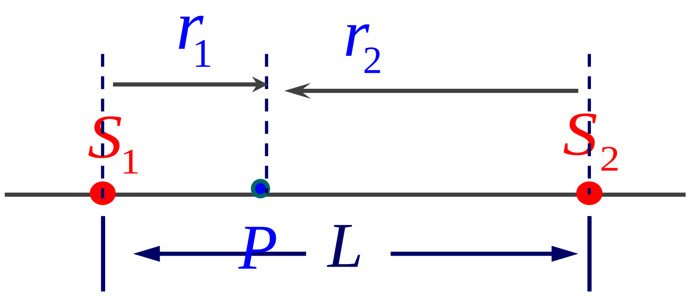
S_2的初相位比S_1超前$\pi/2$ ， S_1和S_2发出的两简谐波的波速u=400m/s，

求： 在S_1和S_2的连线上，1）哪些点干涉加强？2）哪些点干涉减弱？

解：

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=4\text{m},$$

$$\varphi_{02}-\varphi_{01}=\frac{\pi}{2}$$



3、S_1和S_2之间： $r_2+r_1=L$， $r_2=9-r_1$， $(0\le r_1\le 9)$

$$\Delta\varphi=(\varphi_{02}-\varphi_{01})-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=\frac{\pi}{2}-2\pi\frac{9-2r_1}{4}=(r_1-4)\pi$$

① 干涉加强： $\boxed{\Delta\varphi=2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots}\Rightarrow r_1=2k+4$

$$\Rightarrow r_1=0、2、4、6、8 \quad (\text{m})$$

②干涉减弱： $\boxed{\Delta\varphi=(2k+1)\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots}\Rightarrow r_1=2k+5$

$$\Rightarrow r_1=1、3、5、7、9 \quad (\text{m})$$