第七章 线性空间与线性变换

线性空间和线性变换是线性代数的中心内容之一，它广泛应用于自然科学和工程技术各个领域. 在第四章中，我们已经介绍了以R^n中向量为元素的向量空间，这一章中我们要把这些概念推广，使向量和向量空间的概念更具一般性.

§1 线性空间的概念与性质

一. 线性空间的定义

定义7.1 设V是一个非空集合，R是实数域. 在V中元素间定义加法运算，即对V中任意两个元素α, β，在V中有唯一的元素γ与它们对应，称为α与β的和，记为$\gamma=\alpha+\beta$. 对加法运算封闭)

在实数与V中元素间定义数乘运算，即对R中任意数k与V中任意元素α，在V中有唯一的元素δ与它们对应，称为k与α的数乘，记为$\delta=k\alpha$. (对数乘运算封闭)

并且这两种运算满足如下八条规则：(设$\alpha, \beta, \gamma\in V$, $k, l\in R$)

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, (2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$,

(3) 在V中存在零元素$\mathbf{0}$,使对任何$\alpha\in V$都有$\alpha+\mathbf{0}=\alpha$,

(4)对任何$\alpha\in V$,存在元素$\beta\in V$,使$\alpha+\beta=\mathbf{0}$,称β为α的负元素,

记$\beta= -\alpha$

(5) $1\alpha= \alpha$, (6) $k(l\alpha)= (kl)\alpha$,

(7) $(k+l)\alpha= k\alpha+l\alpha$, (8) $k(\alpha+\beta)= k\alpha+k\beta$,

则称V是(数域R上的)线性空间(或向量空间), V中元素称为向量.

在第四章中，我们介绍了向量空间R^n，以及R^n的子空间V. 容易验证，当集合V对向量的加法和数乘两种运算封闭时，V中的运算就满足上述八条规律. 显然，那里的向量空间只是现在定义的特殊情形. 比较起来，现在的定义有了很大的推广. 向量空间中的向量是更广义的向量，不一定是n元有序数组. 向量空间中加法和数乘两种运算只要求满足八条运算规律，也不一定是有序数组的加法和数乘运算.

下面举一些线性空间的例子.

例7.1 验证所有m×n实矩阵集合$R^{m\times n}$对矩阵的加法和数乘运算是一个线性空间.

证明思路：容易验证$R^{m\times n}$对这两种运算是封闭的，而且矩阵的加法和数乘运算满足线性空间定义中八条规律，所以$R^{m\times n}$是一个线性空间.

注1: 特别地，取n=1，即知: R^m是一个线性空间.

问: 是否满足某些性质的实矩阵集合必为线性空间?

反例：如果记V是所有n阶奇异矩阵(也即不可逆矩阵)集合，虽然V中矩阵的加法和数乘运算仍满足上述八条规律，但V不是线性空间，因为V对加法运算不封闭.

思考

例7.2 记$R[x]_n$为所有次数小于n的实多项式集合，即

$$R[x]_n=\{a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\mid a_0,a_1,\cdots a_{n-1}\in R\}$$

证明$R[x]_n$对多项式的加法和数乘运算是一个线性空间.

证明思路：容易验证$R[x]_n$对这两种运算是封闭的，而且多项式的加法和数乘运算满足线性空间定义中八条规律，所以$R[x]_n$是一个线性空间.

类似地，可以验证所有实多项式集合$R[x]$，对多项式的加法和数乘运算也是一个线性空间.

但是，所有(恰为)n次(n≥1)实多项式集合，即

$$P_n=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\mid a_0,a_1,\cdots a_n\in R,a_n\neq 0\}$$

对多项式的加法和数乘运算不是线性空间. 因为不满足线性空间定义中规律(3)，即集合中没有零元素.

例7.3 类似地，容易验证区间[a, b]上所有连续函数的集合C[a, b]对函数的加法和数乘运算是一个线性空间.

例7.4 实数域R对于数的加法和乘法运算是一个线性空间.

以上各例中，虽然向量的含义各不相同(可能是实矩阵，也可能是实多项式或连续函数，还可能是实数)，向量的加法和数乘运算也是不同的. 但对各自的向量，加法和数乘两种运算都满足八条运算规律，所以，都是线性空间.

为了对线性空间中向量的运算的理解更具一般性，再看一个比较抽象的例子.

例7.5 记$V=R^+$表示所有正实数集合，R为实数域. 对任意$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\in R^+$, $k\in R$, 定义$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的和(即"加法")为$\mathbf{a}\oplus\mathbf{b}=ab\in R^+$, 定义数$k$与$\mathbf{a}$的积(即"数乘")为$k\otimes\mathbf{a}=a^k\in R^+$, 请验证$R^+$对所定义的加法$\oplus$和数乘$\otimes$这两种运算构成一个线性空间.

解: 由条件知加法和数乘运算在R^+封闭，又因$\mathbf{a}\oplus\mathbf{b}=ab$,
所以加法满足交换律和结合律.

R^+中有零元素 1 (恰为数字1), 使对任意$\mathbf{a}\in R^+$有$\mathbf{a}\oplus 1=a\cdot 1=\mathbf{a}$.

对任意$\mathbf{a}\in R^+$, R^+中有负元素 a^{-1}, 使得$\mathbf{a}\oplus a^{-1}=a\cdot a^{-1}=1$.

对任意$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\in R^+$, $k, l\in R$, 满足:

$1\otimes\mathbf{a}=a^1=\mathbf{a}$;

此处1的"身份"为R中的数字1, 而非R^+中的零元.

$k\otimes(l\otimes\mathbf{a})=(l\otimes\mathbf{a})^k=(a^l)^k=a^{kl}=(kl)\otimes\mathbf{a}$,

此处的kl是数字k与l的乘积，而不是上面定义的数乘运算$k\otimes l$.

$(k+l)\otimes\mathbf{a}=a^{k+l}=a^k a^l=(k\otimes\mathbf{a})\oplus(l\otimes\mathbf{a})$,

$k\otimes(\mathbf{a}\oplus\mathbf{b})=(ab)^k=a^k b^k=(k\otimes\mathbf{a})\oplus(k\otimes\mathbf{b})$,

所以, R^+对所定义的加法和数乘运算构成线性空间.

如果将满足八条运算规律的加法和数乘运算称为线性运算，那么，线性空间就是定义了线性运算的集合.

问：同一个集合定义了不同的加法和数乘运算后，且对这两种运算都是封闭的，在不同的定义下这个集合是否都必构成线性空间？或者都必不构成线性空间？

反例：

R^n对通常意义下向量的加法和数乘运算构成线性空间.

但是，如果取R^n中通常的向量加法，且对R中任意数k与R^n中任意向量α，定义数乘运算$k\alpha=\mathbf{0}$. 容易验证：

(1) R^n对这两种运算是封闭的，

(2) 但是不满足线性空间定义中运算规则(5)：

$$1\alpha = \alpha,$$

所以R^n对这两种运算不构成线性空间.

二、线性空间的基本性质

性质7.1 一个线性空间的零向量是唯一的.

证：假设$\mathbf{0}_1$, $\mathbf{0}_2$都是V的零向量，则 $\mathbf{0}_1= \mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2= \mathbf{0}_2$. 证毕.

性质7.2 线性空间中每个向量的负向量是唯一的.

证：假设β, γ都是α的负向量，则由 $\alpha+\beta=\mathbf{0}$, $\alpha+\gamma=\mathbf{0}$, 得

$$\gamma = \gamma+\mathbf{0} = \gamma+\alpha+\beta = (\gamma+\alpha)+\beta = (\alpha+\gamma)+\beta = \mathbf{0}+\beta = \beta,$$ 证毕.

性质7.3 $0\alpha=\mathbf{0}$, $(-1)\alpha=-\alpha$, $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $\forall\alpha\in V$, $k\in R$

证：$0\alpha+\alpha = 0\alpha+1\alpha= (0+1)\alpha= \alpha$, 得 $0\alpha=\mathbf{0}$.

$\alpha+(-1)\alpha= (1+(-1))\alpha= \mathbf{0}$, 得 $(-1)\alpha= -\alpha$.

$k\mathbf{0}=k(\alpha+(-1)\alpha)= k\alpha+(-k)\alpha= (k+(-k))\alpha = 0\alpha= \mathbf{0}$. 证毕.

性质7.4 若$k\alpha=\mathbf{0}$, 则$k=0$或$\alpha=\mathbf{0}$.

证：若$k=0$, 则命题结论自然成立. 若$k\neq0$, 则有

$\alpha= 1\alpha= (1/k \times k)\alpha=(1/k)(k\alpha)=(1/k)\mathbf{0}= \mathbf{0}$. 证毕.

三. 子空间

定义7.2 设U是线性空间V的一个非空子集. 如果U对于V中定义的加法和数乘两种运算也构成线性空间, 则称U是V的一个**线性子空间**, 简称为**子空间**.

按定义可见, 仅由零向量组成的集合{0}是V的一个子空间, 称之为**零子空间**.

V自身也是V的一个子空间.

{0}和V这两个子空间称为V的**平凡子空间**.

V的其它子空间称为V的**非平凡子空间**.

定理7.1 设U是线性空间V的一个非空子集. 则U是V的子空间的充分必要条件是: U对于V的加法和数乘两种运算是封闭的. 即对任意$\alpha, \beta \in U$, $k \in R$, 都有$\alpha+\beta \in U$, $k\alpha \in U$.

关于定理7.1的详细证明, 参见教材P137.

例如(请仔细思考、检验以下各例)

对多项式的加法和数乘运算，$n<m$时，$R[x]_n$是$R[x]_m$的子空间；$R[x]_n$是$R[x]$的子空间.

对函数的加法和数乘运算，$C^{(1)}[a, b]$是$C[a, b]$的子空间.

虽然所有n次多项式(这里指的是次数恰好都等于n的多项式)集合P_n是$R[x]$的子集合，但是对多项式的加法和数乘运算，P_n不是$R[x]$的子空间.

对矩阵的加法和数乘运算，

所有n阶对角矩阵集合、所有n阶实对称矩阵集合、所有n阶反对称矩阵集合、所有n阶上三角矩阵集合、所有n阶下三角矩阵集合等都是$R^{n\times n}$的子空间.

但是，所有n阶可逆矩阵集合、所有n阶奇异矩阵集合、所有n阶正交矩阵集合等都不是$R^{n\times n}$的子空间.

在第三章介绍了向量空间中向量的线性表示、线性组合、向量组的线性相关性. 这些概念可以完全类似地推广到一般线性空间中的向量和向量组上去. 我们在线性空间的讨论中将直接引用这些概念和性质.

例如，设α_1, $\alpha_2,\ldots\alpha_r$是线性空间V中的一组向量，也称为一个向量组，它们的所有线性组合记为$L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$，即

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r \mid k_1,k_2,\ldots,k_r\in R\}.$$

由定理7.1可验证$L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$是V的子空间，称其为由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$生成的子空间.

§2 维数、基与坐标

定义7.3 在线性空间V中，如果有n个向量α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，而且V中任意向量都可由它们线性表示，则称 α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$为V的一个基, n称为V的维数, V称为n维线性空间, 记作V_n.

注：许多教材中记空间V的维数为：dim(V).

仅含零向量的线性空间的维数是0.

如果V中有任意多个线性无关的向量，称其为无限维线性空间. 如R[x], C[a, b]等都是无限维线性空间.

本书中只讨论有限维线性空间.

对于n维线性空间V_n, 若α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是V_n的一个基，则V_n可以表示为：

$$V_n=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n \mid k_1, k_2,\ldots, k_n\in R\}$$

即V_n是由这个基α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$所生成的线性空间.

例7.7 求线性空间$R[x]_n$的维数和一个基.

提醒: $R[x]_n$代表的是次数$\le n-1$的全体实系数多项式集合.

解: 由于$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$线性无关,

且$R[x]_n$中任意向量(即任意次数小于n的一元实多项式, 也包括0)都能由它们线性表示.

所以, $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$就是$R[x]_n$的一个基,

$R[x]_n$的维数是n.

思考: 为什么向量$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$是线性无关的? (自修或讲述)

例7.8 求线性空间$R^{2\times 3}$的维数和一个基.

解：容易验证，向量组(实际上是一组矩阵)

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

线性无关，

且任意2×3实矩阵都可以由它们(以上6个矩阵)线性表示，

因此以上6个矩阵是$R^{2\times 3}$的一个基，

且可知$R^{2\times 3}$的维数是 6.

一般地，$R^{m\times n}$是$m\times n$维线性空间.

例 验证集合 $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c\in R\right\}$ 是$R^{2\times 2}$的子空间，并求V一个基和V的维数.

解：显然$V\subset R^{2\times 2}$，且对于任意的

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_2=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}\in V,$$

以及$k\in R$，都有

$$\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ b_1+b_2 & c_1+c_2 \end{pmatrix}\in V,$$

$$k\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kb_1 & kc_1 \end{pmatrix}\in V,$$

所以，V对线性运算封闭，V是$R^{2\times 2}$的子空间.

容易验证

$$\mathbf{A}_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是V的一个基，因此可知V是3维线性空间.

容易知道，n维线性空间中的任意n个线性无关的向量都是它的一个基.

定理7.2 设V是n维线性空间. 如果V中向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$线性无关，则在V中必有$n-m$个向量$\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$，使得$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$是V的一个基.

关于定理7.2的详细证明，参见教材P139.

定理7.2表明，含非零向量的有限维线性空间必存在基.

推论

如果U是V的子空间，则U的维数不大于V的维数;

如果U是V的子空间，且U的维数等于V的维数，则必有

$$U=V.$$

如果已知线性空间V_n的一个基$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$, 则对V中任意向量$\alpha$, 都有唯一一个有序数组$(k_1, k_2,\ldots, k_n)^T$, 使得

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n.$$

反之, 对任意一个有序数组$(k_1, k_2,\ldots, k_n)^T$, 都有唯一的向量

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n\in V_n.$$

于是, 线性空间中的向量α与有序数组$(k_1, k_2,\ldots, k_n)^T$之间是一一对应的. 因此, 可以用有序数组来表示线性空间中的向量. 下面给出坐标的概念.

定义7.4 设$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$是线性空间$V_n$的一个基, 如果$\alpha\in V_n$可以表示为:

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n,$$

则称$(x_1, x_2,\ldots, x_n)^T$为向量α在基$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$下的坐标. 可记为$\alpha=(x_1, x_2,\ldots, x_n)^T$.

由于线性空间V_n的基是不唯一的，因此，对于线性空间V_n中的向量α，在不同的基下其坐标一般是不同的，即：α的坐标是相对于V_n的基而言的.

例如，1, x, x^2是线性空间$R[x]_3$的一个基，易见$R[x]_3$中任意向量$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$在这个基下的坐标是

$$(a_0, a_1, a_2)^T,$$

可记为$p(x)=(a_0, a_1, a_2)^T$.

又容易验证，1，1+x，$1+x+x^2$也是线性空间$R[x]_3$的一个基，由于

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2=(a_0-a_1)+(a_1-a_2)(1+x)+a_2(1+x+x^2),$$

所以，向量$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$在基1, 1+x, $1+x+x^2$下的坐标是

$$(a_0-a_1, a_1-a_2, a_2)^T,$$

此时可记为$p(x)=(a_0-a_1, a_1-a_2, a_2)^T$.

在线性空间V_n中，引入向量的坐标概念后，就可以把V_n中抽象的向量α与具体的有序数组的向量$(x_1, x_2,\ldots, x_n)^T$联系起来了，并且可以把V_n中抽象的线性运算与R^n中向量的线性运算联系起来.

设$\alpha, \beta\in V_n$. 设V_n的一个基为$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$, 则具体地有

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n,\ \beta=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\ldots+y_n\alpha_n,$$

则有 $\alpha+\beta = (x_1+y_1)\alpha_1+(x_2+y_2)\alpha_2+\ldots+(x_n+y_n)\alpha_n,$

$$k\alpha= (kx_1)\alpha_1+(kx_2)\alpha_2+\ldots+(kx_n)\alpha_n,$$

即，$\alpha+\beta$的坐标为：$(x_1+y_1, x_2+y_2,\ldots, x_n+y_n)^T$

$$= (x_1, x_2,\ldots, x_n)^T+(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T,$$

$k\alpha$的坐标为：$(kx_1, kx_2,\ldots, kx_n)^T= k(x_1, x_2,\ldots, x_n)^T.$

因此，V_n中的向量与R^n中的向量之间就有一个一一对应的关系，并且这个对应关系保持线性运算的对应. 即

若

$$\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, \quad \boldsymbol{\beta} \leftrightarrow (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T,$$

则有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \leftrightarrow (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)^T$$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T+(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T,$$
$$k\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)^T = k(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T.$$

因此, 可以说V_n与R^n有相同的结构.

定义7.5 设U和V是两个线性空间, 如果在它们的元素之间存在一一对应关系, 且这种对应关系保持元素之间线性运算的对应, 则称线性空间U与V同构.

由定义容易知道: 线性空间(之间)的同构(关系)具有:

(1) 反身性; (2)对称性; (3)传递性. (思考)

由于任意n维线性空间V_n都与R^n同构，所以维数相等的线性空间都是同构的. 于是，有限维线性空间同构当且仅当维数相等，也就是说线性空间的结构完全被空间的维数所决定.

线性空间V_n中的抽象线性运算都可以转化为R^n中的线性运算. 空间R^n中只涉及线性运算的性质都适用于V_n.

但是，R^n中超出线性运算的性质，在V_n中不一定具备. 例如R_n中的内积、长度、夹角等概念在V_n中不一定有意义.

二. 基变换与坐标变换

线性空间如果有基，显然基不唯一. 同一个向量在不同基下的坐标也是不同的. 下面就来讨论它们之间的关系.

设$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$和$\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n$是线性空间$V_n$的两个基，则这两个向量组等价. 因此，每个$\beta_k\ (k=1, 2,\ldots n)$必然可以被$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$线性表示. 设

$$\beta_k=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix}, \quad k=1,2,\ldots,n$$

则合起来就有:

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

简记为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{C}, \tag{7.2}$$

其中

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

定义7.6 称式(7.1) 或式(7.2)为基变换公式. 称矩阵C为由基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\dots, \boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2,\dots, \boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵.

注：空间V_n中两个基之间的过渡矩阵必然是可逆的.(思考)

定理7.3 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$和$\beta_1,\ldots,\beta_n$是线性空间V_n的两个基. C是由基$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$到基$\beta_1,\ldots,\beta_n$的过渡矩阵. 如果

向量ξ在基$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$下的坐标为$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$,

向量ξ在基$\beta_1,\ldots,\beta_n$下的坐标为$\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)^T$,

则

$$\mathbf{x}=\mathbf{C}\mathbf{y},$$

证明：由

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \cdots\\ y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{C}\begin{pmatrix}y_1\\ \cdots\\ y_n\end{pmatrix},$$

可知，向量ξ在基$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$下的坐标既为**x**，也为**Cy**.

由于向量在同一个基下的坐标是唯一的，所以**x**=**Cy**. 证毕.

例3 求线性空间$R[x]_3$中由基$\boldsymbol{\alpha}_1=1$，$\boldsymbol{\alpha}_2=1+x$，$\boldsymbol{\alpha}_3=1+2x-x^2$到基$\boldsymbol{\beta}_1=1+x$, $\boldsymbol{\beta}_2=2-3x$, $\boldsymbol{\beta}_3=1+x-2x^2$的过渡矩阵，并求向量$f=5+3x-x^2$在基$\alpha_1$, α_2, α_3下的坐标.

解：由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},$$

所以，

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},$$

于是，由α_1, α_2, α_3到β_1, β_2, β_3的过渡矩阵为

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-3&1\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-3&1\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&5&2\\1&-3&-3\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

又由于

$$f=5+3x-x^2=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},$$

于是，向量 f 在基 $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1+x$, $\alpha_3=1+2x-x^2$ 下的坐标为

$$(3, 1, 1)^T.$$

也即，

$$f = 5+3x-x^2 = 3+(1+x)+(1+2x-x^2).$$

例7.10 求线性空间$\mathrm{R}^{2\times 2}$中向量

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

在基$\mathbf{B}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \mathbf{B}_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \mathbf{B}_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \mathbf{B}_4=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$下的坐标.

解：易知向量**A**在基

$$\mathbf{E}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{E}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{E}_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \mathbf{E}_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

下的坐标为：$\mathbf{x}=(1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$.

由基$\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}$到基$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$的过渡矩阵为

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

所以，向量$\mathbf{A}$在基$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$下的坐标为

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

也即：

$$\mathbf{A} = -\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_3 + 4\mathbf{B}_4.$$

注：此题也可以直接令 $\mathbf{A} = x_1\mathbf{B}_1 + x_2\mathbf{B}_2 + x_3\mathbf{B}_3 + x_4\mathbf{B}_4$，再根据$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$的各分量之间的关系，列方程组解得

$$x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -1,\ x_4 = 4.$$

§3 线性变换

线性变换是线性空间上的重要运算，本节介绍线性变换的概念，并讨论线性变换与矩阵之间的关系.

一．定义和例子

定义7.7 设T是线性空间V到V(自身)的一个映射，且对任意$\alpha, \beta \in V$, $k \in R$, 都有

$$T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta),$$

$$T(k\alpha)=kT(\alpha),$$

则称T为线性空间V的一个线性变换.

线性变换T具有下列基本性质:

(1) $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$;

思考

(2) $T(-\alpha)= -T(\alpha)$;

(3) $T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m)= k_1T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_2)+\ldots+k_mT(\alpha_m)$.

以下是一些线性变换的具体实例(请根据定义仔细验证):

在线性空间$R^{n\times n}$上定义:

$$T(\mathbf{A})=\mathbf{A}^{T},\quad \forall \mathbf{A}\in R^{n\times n},$$

则T为线性空间$R^{n\times n}$的一个线性变换.

线性空间$R[x]_n$上的求导运算

$$Df= df/dx,\quad \forall f\in R[x]_n,$$

是线性空间$R[x]_n$的一个线性变换.

给定$\lambda\in R$，在线性空间V上定义：

$$T(\alpha)=\lambda\alpha,\quad \forall\alpha\in V,$$

则T为线性空间V的一个线性变换.

称上述变换是线性空间V的由λ确定的**数乘变换**.

当$\lambda=1$时，上述变换即为：

$$T(\alpha)=\alpha,\quad \forall\alpha\in V,$$

此时称T是**恒等变换**(或**单位变换**)；

当$\lambda=0$时，上述变换即为：

$$T(\alpha)=\mathbf{0},\quad \forall\alpha\in V,$$

此时称T是**零变换**.

对给定的$\mathbf{A}\in R^{n\times n}$, 在线性空间$R^n$上定义:

$$T(\alpha)=\mathbf{A}\alpha,\ \forall\alpha\in R^n,$$

则T为线性空间R^n的一个线性变换.

此例简明地表示了R^n中的一个线性变换.

实际上, R^n中任意向量$\alpha=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$都可表示为

$\alpha=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n$, 其中$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$是标准单位向量组

所以对R^n中的任意向量以及R^n上的线性变换T, 都有

$$T(\alpha)= T(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n)= x_1T(\mathbf{e}_1)+x_2T(\mathbf{e}_2)+\ldots+x_nT(\mathbf{e}_n)$$

$$=(T(\mathbf{e}_1),T(\mathbf{e}_2)\ldots,T(\mathbf{e}_n))\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}=(T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \ldots, T(\mathbf{e}_n))\alpha.$$

若记矩阵$\mathbf{A}=(T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \ldots, T(\mathbf{e}_n))$.

则以上变换可记为: $T(\alpha)= \mathbf{A}\alpha$.

思考:
这意味着什么?

二. 线性变换的矩阵

设T为线性空间V_n的一个线性变换，α_1，$\alpha_2,\ldots$，α_n是V_n的一个基．由于$T(\alpha_1)$，$T(\alpha_2),\ldots$，$T(\alpha_n)\in V$，故它们均可由α_1，$\alpha_2,\ldots$，α_n线性表示，记

$$T(\alpha_1)=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\ldots+a_{n1}\alpha_n,$$
$$T(\alpha_2)=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{n2}\alpha_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T(\alpha_n)=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\ldots+a_{nn}\alpha_n,$$

也即：

$$T(\alpha_i)=a_{1i}\alpha_1+a_{2i}\alpha_2+\ldots+a_{ni}\alpha_n\ (i=1, 2,\ldots, n).$$

这里，a_{1i}, a_{2i}, …, a_{ni}为向量$T(\alpha_i)$在基α_1, α_2, …, α_n下的坐标.

定义7.8 设T为线性空间V_n的一个线性变换，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是$V_n$的一个基. 如果

$$T(\alpha_i)=a_{1i}\alpha_1+a_{2i}\alpha_2+\ldots+a_{ni}\alpha_n \ (i=1, 2, \ldots, n),$$

也即

$$T(\alpha_1)=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\ldots+a_{n1}\alpha_n,$$

$$T(\alpha_2)=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{n2}\alpha_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T(\alpha_n)=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\ldots+a_{nn}\alpha_n,$$

也就是：$$T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\mathbf{A},$$

其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则称矩阵$\mathbf{A}$为线性变换T在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的矩阵.

注1: 显然, 矩阵$\mathbf{A}$的第i列元素恰是向量$T(\boldsymbol{\alpha}_i)$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标.

注2: 矩阵$\mathbf{A}$是由基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$和线性变换$T$所唯一确定的.

注3: 对任意向量$\boldsymbol{\alpha} \in V_n$, 若$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标为$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, 也即

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)\,\mathbf{x},$$

则有
$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{\alpha}) &= T(x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n) \\ &= x_1T(\boldsymbol{\alpha}_1) + x_2T(\boldsymbol{\alpha}_2) + \ldots + x_nT(\boldsymbol{\alpha}_n) \\ &= (T(\boldsymbol{\alpha}_1), T(\boldsymbol{\alpha}_2), \ldots, T(\boldsymbol{\alpha}_n))\,\mathbf{x}, \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{A}\,\mathbf{x}. \end{aligned}$$

由于矩阵$\mathbf{A}$为线性变换T在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵.

即: $T(\boldsymbol{\alpha})$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标为$\mathbf{A}\mathbf{x}$.

例如(请仔细思考，验证)

零变换在任何基下的矩阵都是零矩阵.

单位变换在任何基下的矩阵都是单位矩阵.

线性空间$R[x]_n$上，求微商的变换(即求导变换)D在基$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$下的矩阵为:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

线性空间$R[x]_n$上，求微商的变换D在基1，x，$x^2/2$，$x^3/3$, …, $x^{n-2}/(n-2)$，$x^{n-1}/(n-1)$下的矩阵为:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

在$\mathrm{R}^{2\times 2}$上定义线性变换

$$T(\mathbf{M})=\mathbf{M}^{\mathrm{T}},\ \forall \mathbf{M}\in \mathrm{R}^{2\times 2}.$$

则T在基

$$\left(\mathbf{E}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\mathbf{E}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\mathbf{E}_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\mathbf{E}_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

下的矩阵为:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

建议自修: P145: 例7.17.

定理7.4 设T是线性空间V上的线性变换，T在基$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$下的矩阵为**A**，而T在另一基$\beta_1,\ldots,\beta_n$下的矩阵为**B**，且由基$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$到基$\beta_1,\ldots,\beta_n$的过渡矩阵为**C**，则$\mathbf{B}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$.

证明：由于$T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)=(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)\mathbf{A}$, (*1)

$$T(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n)=(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n)\mathbf{B}, \quad (*2)$$

$$(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n)=(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)\mathbf{C}, \quad (*3)$$

于是

$$\begin{aligned}(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n)\mathbf{B} &= T(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n)\\ &= T[(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)\mathbf{C}]\\ &= [T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)]\mathbf{C}\\ &= (\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)\mathbf{A}\mathbf{C}\\ &= (\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n)\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}.\end{aligned}$$

由(*2)

由(*3)

由线性变换的性质，见具体推导

由(*1)

由(*3)

由于线性变换在一个基下的矩阵是唯一的，故$\mathbf{B}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$.

证毕.

进入例题

上页中关于$T[(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)\mathbf{C}]= [T(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)]\mathbf{C}$ 的推导过程

$$T[(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{C}] = T\left[(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\right]$$

$$= T\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i1}\boldsymbol{\alpha}_i, \sum_{i=1}^{n} c_{i2}\boldsymbol{\alpha}_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} c_{in}\boldsymbol{\alpha}_i\right)$$

$$= \left[T\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i1}\boldsymbol{\alpha}_i\right), T\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i2}\boldsymbol{\alpha}_i\right), \ldots, T\left(\sum_{i=1}^{n} c_{in}\boldsymbol{\alpha}_i\right)\right]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} c_{i1}T(\boldsymbol{\alpha}_i), \sum_{i=1}^{n} c_{i2}T(\boldsymbol{\alpha}_i), \ldots, \sum_{i=1}^{n} c_{in}T(\boldsymbol{\alpha}_i)\right]$$

$$= [(T(\boldsymbol{\alpha}_1), T(\boldsymbol{\alpha}_2), \ldots, T(\boldsymbol{\alpha}_n))]\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= [T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)]\mathbf{C}.$$

返回定理7.4

例4 设线性空间R^3上的线性变换T在基ε_1, ε_2, ε_3下的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

求T在基$\eta_1=\varepsilon_1$, $\eta_2=-3\varepsilon_1-2\varepsilon_2+2\varepsilon_3$, $\eta_3=\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3$下的矩阵.

解：由于

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3)=(\varepsilon_1, -3\varepsilon_1-2\varepsilon_2+2\varepsilon_3, \varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3)$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix},$$

所以，由基ε_1, ε_2, ε_3到基η_1, η_2, η_3的过渡矩阵为：

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}.\quad \text{求得 } \mathbf{C}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1/2\\ 0 & -1/4 & 1/4\\ 0 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}.$$

所以，T在基η_1, η_2, η_3下的矩阵为：

$$\mathbf{B}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1/2\\ 0 & -1/4 & 1/4\\ 0 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

建议自修:

教材P146：例7.18

§4 欧几里得空间

一. 定义和例子

定义7.9 设V是实数域R上的一个线性空间，V上(关于任意两个向量α, β的)一个二元实值函数记作[α, β]，如果对任意$\alpha, \beta, \gamma \in V$, $k \in R$, 都满足:

(1) 对称性: $[\alpha, \beta]=[\beta, \alpha]$;

(2) (对第一变元的)线性性: $\begin{cases} [\alpha+\beta, \gamma]=[\alpha, \gamma]+[\beta, \gamma], \\ [k\alpha, \beta]=k[\alpha, \beta]; \end{cases}$

(3) 正定性: $[\alpha, \alpha]\geq 0$; 当且仅当$\alpha=\mathbf{0}$时, $[\alpha, \alpha]=0$,

则称二元实函数[α, β]是V上的(实)内积. 定义了内积的实线性空间V称为欧几里得(Euclid)空间，简称为欧氏空间.

例如(对以下各例请仔细思考、检验):

例1 对R^n中向量$\alpha=(a_1, \dots, a_n)^T$, $\beta=(b_1, \dots, b_n)^T \in R^n$,

定义 内积: $[\alpha, \beta]=a_1b_1+\dots+a_nb_n$, 则$R^n$成为欧氏空间.

例2 对R^n中向量$\alpha=(a_1, a_2,\dots, a_n)^T$, $\beta=(b_1, b_2,\dots, b_n)^T \in R^n$,

还可以定义内积: $[\alpha, \beta]=a_1b_1+2a_2b_2+\dots+na_nb_n$,

则R^n也成为欧氏空间, 但它是与例1不同的欧氏空间.

例3 对任意 $f(x), g(x) \in R[x]_n$, 规定:

$$[f(x), g(x)] = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

具体证明参见教材p147-148. 关于正定性, 详见黑板.

则$[f, g]$是$R[x]_n$是上的内积, 于是$R[x]_n$成为欧氏空间.

例4 在$R^{2\times 2}$中, $\forall \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, 定义内积:

$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}$, 则$R^{2\times 2}$成为欧氏空间.

利用内积的概念，可以定义欧氏空间中向量的长度、向量的夹角等概念.

定义7.10 在欧氏空间V中，非负实数$\sqrt{[\alpha,\alpha]}$称为向量α的**长度**(或**范数**，或**模**)，记为$|\alpha|$(或$\|\alpha\|$).

若$\|\alpha\|=1$，称α为**单位向量**.

若$\alpha\neq\mathbf{0}$，则$(1/\|\alpha\|)\,\alpha$是单位向量.

向量的长度具有下列性质$(\forall\alpha,\ \beta\in V,\ \forall k\in R)$:

(1) 非负性: $\|\alpha\|\geq 0$，且仅当$\alpha=\mathbf{0}$时，$\|\alpha\|=0$；

(2) 齐次性: $\|k\alpha\|=|k|\ \|\alpha\|$;

(3) 三角不等式: $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$.

(4) Cauchy-Schwarz不等式: $|\,[\alpha,\beta]\,|\leq\|\alpha\|\ \|\beta\|$.

定义7.11 在欧氏空间中，两个非零向量α, β的**夹角**记为<α, β>，规定为：

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{[\alpha, \beta]}{|\alpha| \ |\beta|}, \quad 0 \le \langle \alpha, \beta \rangle \le \pi$$

可见，$\langle \alpha, \beta \rangle = \pi/2$ 当且仅当 $[\alpha, \beta]=0$.

定义7.12 如果 $[\alpha, \beta]=0$，则称α与β**正交**.

定义7.13 在欧氏空间中，一组两两正交的非零向量称为**正交向量组**. 由单位向量构成的正交向量组称为**规范正交向量组**.

可见，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 为规范正交向量组 $\Leftrightarrow [\varepsilon_i, \varepsilon_j]=\delta_{ij}$.

定理7.5 正交向量组必线性无关 .

例5 在欧氏空间R^3中，求一个单位向量ε，使其与两个向量$\alpha_1=(1, 1, 1)^T$, $\alpha_2=(0, 1, -1)^T$ 都正交.

解：先求与α_1, α_2都正交的向量β，记$\beta=(x_1, x_2, x_3)^T$，则

$$[\alpha_1, \beta]= x_1+x_2+x_3=0,$$

$$[\alpha_2, \beta]= x_2-x_3=0,$$

解之得一个解(解不唯一，但各解之间只差常数倍)为：

$$\beta=(-2, 1, 1)^T.$$

将β单位化得：

$$\varepsilon=\frac{1}{|\beta|}\beta=\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)^T=\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T.$$

向量ε就是与两个向量α_1, α_2都正交的单位向量.

(这样的单位向量有两个，一个是ε，另一个是$-\varepsilon$.)

二. 规范正交基

定理7.7 在欧氏空间中，如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关，则有规范正交向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$与之等价.

证明 先正交化，取

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\beta_1, \alpha_3]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_3]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_m = \alpha_m - \frac{[\beta_1, \alpha_m]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_m]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2 - \cdots - \frac{[\beta_{m-1}, \alpha_m]}{[\beta_{m-1}, \beta_{m-1}]}\beta_{m-1}$$

再将$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$单位化，取

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1, \varepsilon_2 = \frac{1}{|\beta_2|}\beta_2, \cdots, \varepsilon_m = \frac{1}{|\beta_m|}\beta_m$$

则$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$就是所求规范正交向量组. 证毕.

上述由线性无关向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$得到正交向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$的方法称为Schimidt(斯密特)正交化过程.

定义7.14 在n维欧氏空间V中，含有n个向量的正交向量组称为V的正交基. 由单位向量构成的正交基称为规范正交基.

例6 在线性空间$R[x]_3$中，定义内积

$$[f(x), g(x)] = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

试求$R[x]_3$的一个规范正交基.

解: 取$R[x]_3$的一个基: $\alpha_1=1, \alpha_2=x, \alpha_3=x^2$, 将其正交化得:

$\beta_1 = \alpha_1=1$,

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx} \cdot 1 = x,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\beta_1, \alpha_3]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_3]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2$$

$$= x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} \cdot x = x^2 - \frac{1}{3},$$

再将$\beta_1, \beta_2, \beta_3$单位化，取

$$\varepsilon_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}1dx}}\cdot 1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}x^2dx}}x=\frac{\sqrt{6}}{2}x$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})^2dx}}(x^2-\frac{1}{3})=\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$就是$R[x]_3$的一个规范正交基.

注：内积定义不同时，相应的正交化的结果也会不同.

例7 求$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$的一个规范正交基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

解：先找到$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$的一个基．由于

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&-1\\0&-1&1&2\\1&0&2&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&-2\\0&-1&1&2\\0&-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

可见，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$是$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$的一个基，正交化得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_4-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_4]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_4]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2$$

$$=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-4}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\0\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

再单位化得, $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的一组规范正交基为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

拓展：正交性以及Schimidt(斯密特)正交化方法的应用(I)

问题1.1: 如果向量组$\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n$经Schimidt正交化后生成正交向量组$\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},\beta_n$, 那么,

(1) 向量β_n与向量组$\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$之间具有什么关系?

(2) 向量β_n与线性空间$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$之间具有什么关系?

问题1.2:

(1) 例6中的多项式$x^2-1/3$与1, x具有什么关系?

(2) 多项式$x^2-1/3$与任意线性多项式$ax+b$之间具有什么关系?

问题1.3: 计算以下定积分, 其中a, b为任意实数.

$$\int_{-1}^{1}(3x^2-1)(ax+b)dx$$

拓展: Schimidt(斯密特)正交化方法的应用(II)

问题2: 假设向量组α_1, α_2, α_3经Schimidt正交化后生成正交向量组β_1, β_2, β_3, 则有

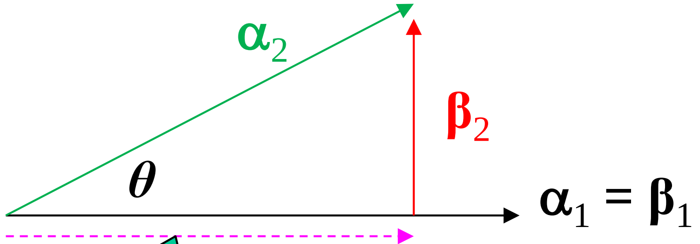
$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1$$

$$= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|\|\boldsymbol{\beta}_1\| cos\theta}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|^2}\boldsymbol{\beta}_1$$

$$= \boldsymbol{\alpha}_2 - \|\boldsymbol{\alpha}_2\| cos\theta \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1,$$

其中$\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1$代表与$\boldsymbol{\beta}_1$同向的单位向量, 而$\theta$为$\boldsymbol{\alpha}_2$与$\boldsymbol{\beta}_1$之间的夹角. 几何意义如图:



问题2.1: 向量α_2到α_1的距离是多少?

问题2.2: 如何计算向量α_3到平面(线性空间) $L(\alpha_1, \alpha_2)$的距离?

拓展：Schimidt(斯密特)正交化方法的应用(III)

问题3：设矩阵$\mathbf{A}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$的秩rank(A)=n，对A的列向量组$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$做Schimidt正交化后得到$\beta_1,\ldots,\beta_n$，并记矩阵

$\mathbf{B}=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$，则

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1,\\
\beta_2 &= \alpha_2 - r_{21}\beta_1,\\
\beta_3 &= \alpha_3 - r_{31}\beta_1 - r_{32}\beta_2,\\
&\cdots\cdots\\
\beta_n &= \alpha_n - r_{n1}\beta_1 - \cdots\cdots - r_{n,\,n-1}\beta_{n-1},
\end{aligned}
\quad\Longleftrightarrow\quad
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \beta_1,\\
\alpha_2 &= r_{21}\beta_1 + \beta_2,\\
\alpha_3 &= r_{31}\beta_1 + r_{32}\beta_2 + \beta_3\\
&\cdots\cdots\\
\alpha_n &= r_{n1}\beta_1 + \cdots\cdots + r_{n,\,n-1}\beta_{n-1} + \beta_n
\end{aligned}$$

因此，有：**A=BR**，其中R为n阶方阵且为上三角阵，其形状为：

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & r_{21} & r_{31} & \ldots & r_{n1} \\ 0 & 1 & r_{32} & \ldots & r_{n2} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & r_{n3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

由此可见正交性以及Schimidt(斯密特)正交化方法在很多领域的重要应用价值以及深远的影响。

其他课堂练习

例8 填空题 已知线性变换$f(P)=P'$，其中P为多项式，P'为P关于x的导数，那么该变换在基3, x+2, x^2+2x+1下的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} (0) & \left(\frac{1}{3}\right) & \left(\frac{-2}{3}\right) \\ (0) & (0) & (2) \\ (0) & (0) & (0) \end{pmatrix}$$

例9 填空题 线性空间R^3中向量$\alpha=(3, 5, 5)^T$在基

$$\beta_1=(1, 0, 0)^T, \beta_2=(3, 1, 0)^T, \beta_3=(2, 3, 1)^T$$

下的坐标为

$$((\ 23\ )\ (-10)\ (\ 5\ ))^T.$$