命题1：已知向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关，且存在一个$m\times n$的矩阵$C$，使向量组$\beta_1, \ldots, \beta_n$满足条件：

$$(\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)C,$$

则成立以下结论：

$$R\{\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n\} = R(C).$$

证明：设$(\beta_{j1},\ldots, \beta_{jk})$为向量组$\beta_1,\ldots, \beta_n$中的任意$k$个向量$(1\le k\le n)$形成的子向量组，

设$(\alpha_{j1},\ldots, \alpha_{jk})$为向量组$\alpha_1,\ldots, \alpha_m$中第$j_1\ldots, j_k$个向量形成的子向量组(注意$\alpha_{j1},\ldots, \alpha_{jk}$依然是线性无关的)，

并设C_k是矩阵C的第$j_1\ldots, j_k$列与第$j_1\ldots, j_k$行的元素相对位置不变所形成的子(方)阵，

则有

$$(\beta_{j1},\ldots, \beta_{jk}) = (\alpha_{j1},\ldots, \alpha_{jk})\, C_k \qquad (*1)$$

对于

$$x_{j1}\boldsymbol{\beta}_{j1}+\ldots+x_{jk}\boldsymbol{\beta}_{jk}=\mathbf{0}, \tag{*2}$$

记: $\mathbf{x}=(x_{j1},\ldots,x_{jk})^T$, 则(*7)可写为:

$$(\boldsymbol{\beta}_{j1},\ldots,\boldsymbol{\beta}_{jk})\mathbf{x}=\mathbf{0}. \tag{*3}$$

于是由(*1)可得:

$$(\boldsymbol{\alpha}_{j1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{jk})\mathbf{C}_k\mathbf{x}=\mathbf{0},$$

由向量组$\boldsymbol{\alpha}_{j1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{jk}$线性无关, 得到:

$$\mathbf{C}_k\mathbf{x}=\mathbf{0}. \tag{*4}$$

也即: 由(*3)可推得(*4).

反之, 若式(*4)成立, 则必可得

$$(\boldsymbol{\beta}_{j1},\ldots,\boldsymbol{\beta}_{jk})\mathbf{x}=(\boldsymbol{\alpha}_{1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{jk})\,\mathbf{C}_k\mathbf{x}=\mathbf{0}.$$

也即: 由(*4)也可推得(*3).

因此, 方程(*3)与(*4)是(等价的)同解的.

也即：方程(*3)有非零解 $\Longleftrightarrow$ 方程组(*4)有非零解.

方程(*3)只有零解 $\Longleftrightarrow$ 方程组(*4)只有零解.

因此可知:

$R\{\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n\}=r$ $\Longleftrightarrow$ 存在某r个向量形成的向量组 $\beta_{j1},\ldots, \beta_{jr}$ 线性无关，且任意(若存在) r+1个向量 $\beta_{j1},\ldots, \beta_{jr+1}$ 均线性相关.

$\Longleftrightarrow$ $(\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jr})\mathbf{x}= \mathbf{0}$ 只有零解，且所有 $(\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jr+1})\mathbf{x}= \mathbf{0}$ 均有非零解.

$\Longleftrightarrow$ $C_r\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解，且任意的 $C_{r+1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 均有非零解.

$\Longleftrightarrow$ 矩阵 C_r 满秩，且所有r+1阶子(方)阵 C_{r+1} 均不满秩.

$\Longleftrightarrow$ 矩阵C有r阶子式不为0，且C的所有r+1阶子式均为0.

$\Longleftrightarrow$ $R(C) = r$.

证毕.

注：命题1中条件“向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关”不可省.

以上命题在很多场合均有重要的应用，例如……

问题2（P75: 1(3)）: 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$的秩为多少?

回总结

解(方法1): 先判断$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$是否线性无关，对于

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0}, \tag{*5}$$

也即

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-k_1-k_2)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

由于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，可得等价条件:

$$\begin{cases} k_1+k_3=0, \\ k_2-k_3=0, \\ -k_1-k_2=0. \end{cases} \tag{*6}$$

由于(*6)的同解方程组为 $\begin{cases} k_1=-k_3, \\ k_2=k_3, \end{cases}$

于是(*5)有非零解: $k_1=-1$, $k_2=1$, $k_3=1$.

因此向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$-$\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_2$-$\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_1$-$\boldsymbol{\alpha}_2$是线性相关的.

所以, $R\{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\} \le 2.$ (*7)

又因为对于 $$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}, \tag{*8}$$

也即 $$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+ k_2\boldsymbol{\alpha}_2+ (-k_1-k_2)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

由于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,可得等价条件:

$$k_1=0, k_2=0,$$

因此向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$-$\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_2$-$\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的.

所以, $R\{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\} \ge 2.$ (*9)

综合(*7)与(*9)的结果可知,

$$R\{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\}= 2.$$

论述中若得到向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$-$\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_2$-$\boldsymbol{\alpha}_3$是线性相关的,还需看向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$-$\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_1$-$\boldsymbol{\alpha}_2$以及向量组$\boldsymbol{\alpha}_2$-$\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_1$-$\boldsymbol{\alpha}_2$是否是线性无关的. 如果它们都是线性相关的,那么$R\{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\}<2$. 可得$R\{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\}=1$.

问题2（P75：1(3)）：已知向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则向量组$\alpha_1-\alpha_3, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_1-\alpha_2$的秩为多少？

回总结

解(方法2)：由于

$$(\alpha_1-\alpha_3, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则(根据命题1结论可知) 因$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，可得

$$R\{\alpha_1-\alpha_3, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_1-\alpha_2\}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\text{的秩}=2.$$

对命题1的一些解释

命题3

命题1：已知向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关，且存在一个$m \times n$的矩阵C，使向量组$\beta_1, \ldots, \beta_n$满足条件：

$$(\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)C,$$

则成立以下结论：

$$R\{\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n\} = R(C).$$

注1：命题1中的向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$和$\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$一般未必是矩阵(即：每个向量$\alpha_j$或$\beta_j$未必是列向量)，更未必是方阵. 一般应把这些向量理解为"一些抽象的符号".

注2：当命题1中的m=n，且$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$为n维列向量组时，可知$A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$为n阶(可逆)方阵，并且$B=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$也必为n阶方阵. 此时命题1转化为以下(稍弱的)命题：

命题2: 对于n阶方阵**A**, **B**, 若**A**为可逆矩阵, 且存在n阶方阵**C**, 使

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{C},$$

则必有

$$R(\mathbf{B}) = R(\mathbf{C}).$$

证明: 由于$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{C}$, 因此

$$R(\mathbf{B}) \le \min\{R(\mathbf{A}), R(\mathbf{C})\} \le R(\mathbf{C}). \tag{*11}$$

又由于**A**可逆, 因此

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

从而

$$R(\mathbf{C}) \le \min\{R(\mathbf{A}^{-1}), R(\mathbf{B})\} \le R(\mathbf{B}) . \tag{*12}$$

综合(*11)与(*12)得到$R(\mathbf{B}) = R(\mathbf{C})$.

证毕.

当命题1中的$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$为m个p维列向量$(p\geq m)$时，可知$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$为$p\times m$矩阵，(当$p>m$时$\mathbf{A}$不是可逆矩阵)并且$\mathbf{B}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n)$也必为$p\times n$矩阵.

此时命题1转化为以下(弱于命题1，但强于命题2)的命题3.

命题3：若矩阵$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$的列向量组线性无关，且存在某个$m\times n$矩阵$\mathbf{C}$，使矩阵$\mathbf{B}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n)$满足条件：

$$\mathbf{B}=\mathbf{AC},$$

则必有

$$R(\mathbf{B})=R(\mathbf{C}).$$

注3：此时命题2的证明思路不再适用.

注4：已有同学根据矩阵秩的关系得到了命题3的证明.

注5：命题3的证明仍可沿用命题1的证明思路.

对问题2的总结

对于

问题2（P75: 1(3)）：已知向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则向量组$\alpha_1-\alpha_3, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_1-\alpha_2$的秩为多少?

至少有两种解法，各自特点如下表所示.

解法	优点	缺点	注意事项
解法1	直接根据定义	计算步骤较多	推导步骤要完整
解法2	计算步骤少	需明白命题1的道理	不明白道理勿乱用

问题3 (P75: 17): 已知两个向量组

(I): $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$,

(II): $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$,

具有相同的秩r, 且其中向量组(II)可以被向量组(I)线性表示.

求证: 向量组(I)与向量组(II)等价.

证明:设向量组(I)与(II)各自的一个极大无关组分别为

(III): $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$; (IV): $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r$,

由题设可知向量组(IV)可被(III)线性表示, 即存在r阶方阵C, 使

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r)\mathbf{C}. \qquad (*13)$$

由命题1的结论可知:

$$R(\mathbf{C}) = R\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r\} = r,$$

因此方阵C可逆, 故由(**)式可得

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r)\mathbf{C}^{-1} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r). \qquad (*14)$$

(*14)式意味着即向量组(III)可被向量组(IV)线性表示.

因此, 向量组(I)也可被向量组(II)线性表示.

综上可知, 向量组(I)与向量组(II)等价.

证毕.