第十四章 相对论

§ 14-4 狭义相对论的时空观

1、同时的相对性
2、长度收缩效应
3、时间膨胀效应

一、同时的相对性 Relativity of Simultaneity

由洛伦兹变换，两个事件在不同惯性系中的时间间隔与空间间隔的变换关系为：

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

	空间间隔	时间间隔
S 系	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta t = t_2 - t_1$
S' 系	$\Delta x' = x_2' - x_1' = \dfrac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$\Delta t' = t_2' - t_1' = \dfrac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$

两个事件的时间间隔与空间间隔在不同惯性系中观测，所得结果一般并不相同。

一、同时的相对性 Relativity of Simultaneity

1、同时不同地

设在惯性系 S 中，不同地点 x_1 和 x_2 同时发生两个事件：

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0,\ \Delta x = x_2 - x_1 \neq 0$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \dfrac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' \neq 0$$

"同时"的相对性

2、同时同地

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0$$
$$\Delta x = x_2 - x_1 = 0$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = 0$$

"同时"是绝对的

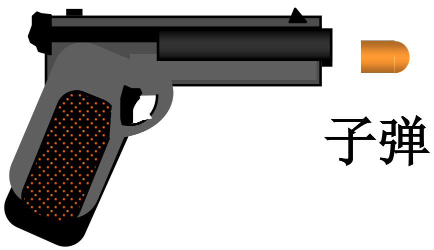
在某个惯性系中同时发生的两个事件，在另一相对它运动的惯性系中，不一定同时发生。 ---------同时的相对性

一、同时的相对性 Relativity of Simultaneity

3、有因果关系的事件(关联事件)，时间次序不会颠倒

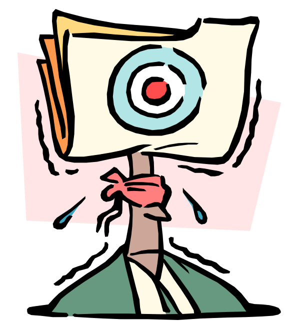
时序：两个事件发生的时间顺序。

事件1：子弹出膛



子弹

事件2：中靶



在实验室参考系中，应先开枪后中靶。

在高速运动的参考系中，是否能先中靶，后开枪？

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1-\frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1-\frac{v\bar{u}}{c^2}\right)$$

$\bar{u}$ 为质点相对于 S 系的速率，$\bar{u} < c$，$v < c$，$\therefore$ $\Delta t'$必与 Δt 同号

结论：有因果联系的两事件的时序不会颠倒！

二、长度收缩(动尺变短) Length Contraction

（长度的测量和同时性概念密切相关）

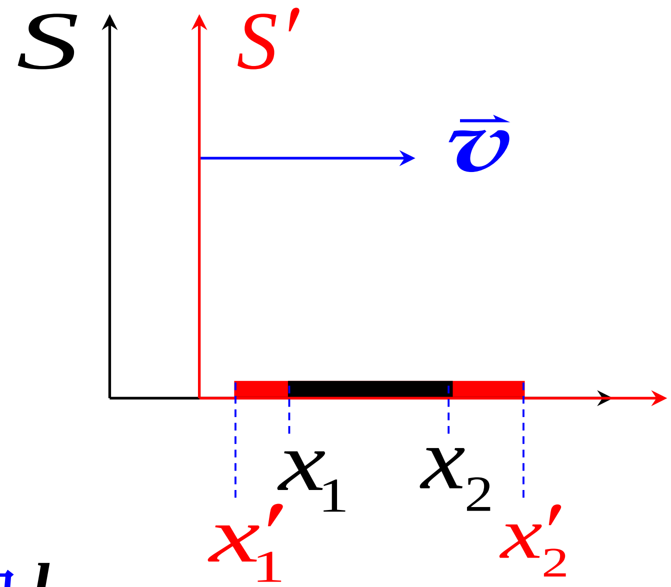
1、原长(固有长度)

原长：在某惯性系中，物体静止时测得它的线度

设棒静止在 S' 系中，l_0 固有长度

不要求同时测量, $\boxed{\Delta t' \text{不一定} = 0}$

$$l_0 = x_2' - x_1'$$



2、当 S' 以速度 v 相对 S 系运动，棒沿运动方向放置，S 系测得棒的长度为 l

$\boxed{\text{同时测量}}$ $\Delta t = 0,\quad l = x_2 - x_1$

	S 系	S' 系
事件1：测棒的左端：	x_1, t_1	x_1', t_1'
事件2：测棒的右端：	$x_2, t_2 = t_1$	x_2', t_2'
测得长度：	$l = x_2 - x_1$	$l_0 = x_2' - x_1'$

二、长度收缩(动尺变短) Length Contraction

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_1 = t_2$$

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\longrightarrow \boxed{l = l_0\sqrt{1-\beta^2}}$$

$l < l_0$，这一现象称为物体沿运动方向的“长度收缩效应”

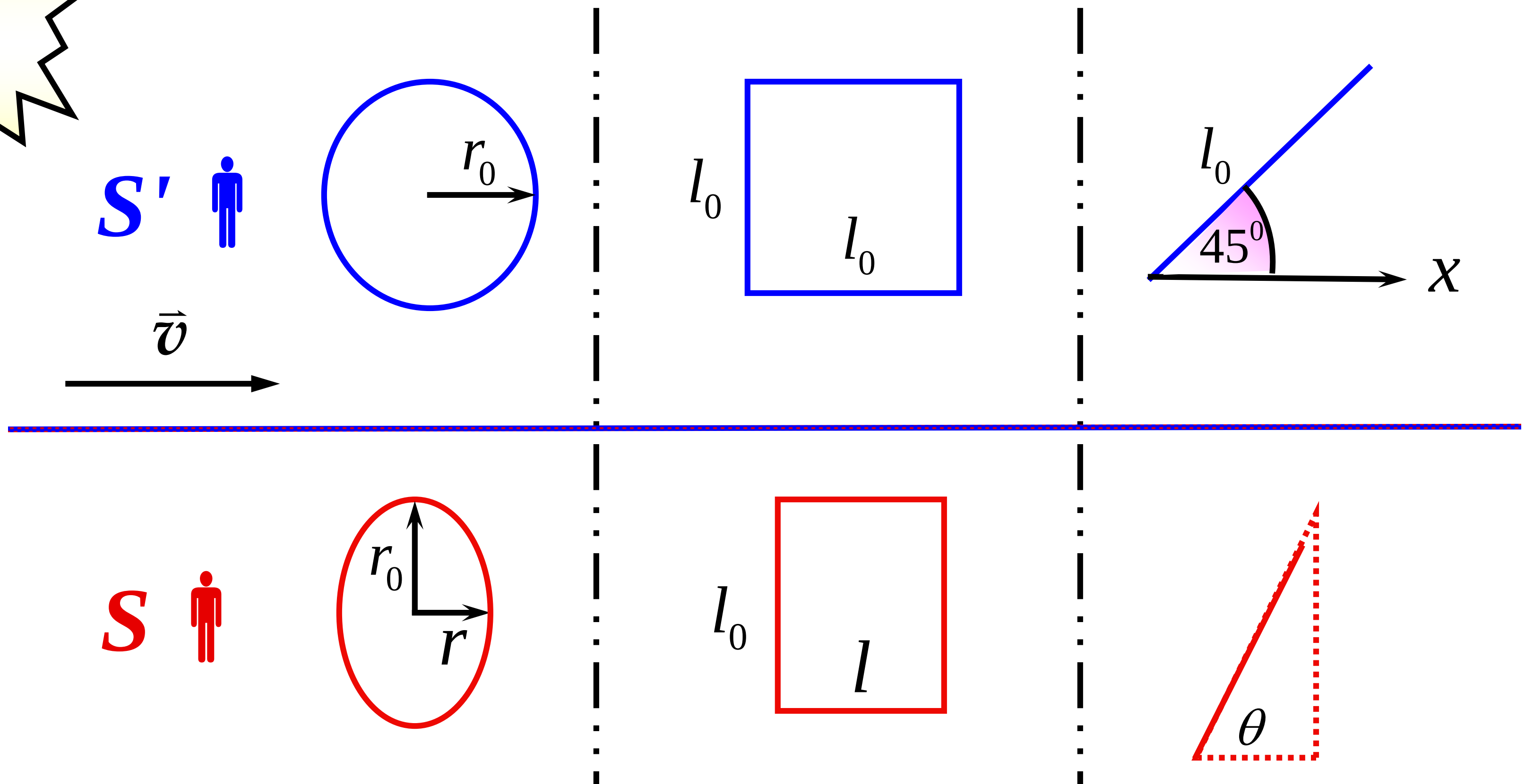
$$\boxed{\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}} \quad \boxed{\Rightarrow \begin{cases} \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases}}$$

垂直于运动方向（v方向）的长度是不变的

二、长度收缩(动尺变短) Length Contraction

思考

静止在S'系的几何图形，在S系中讨论其形状



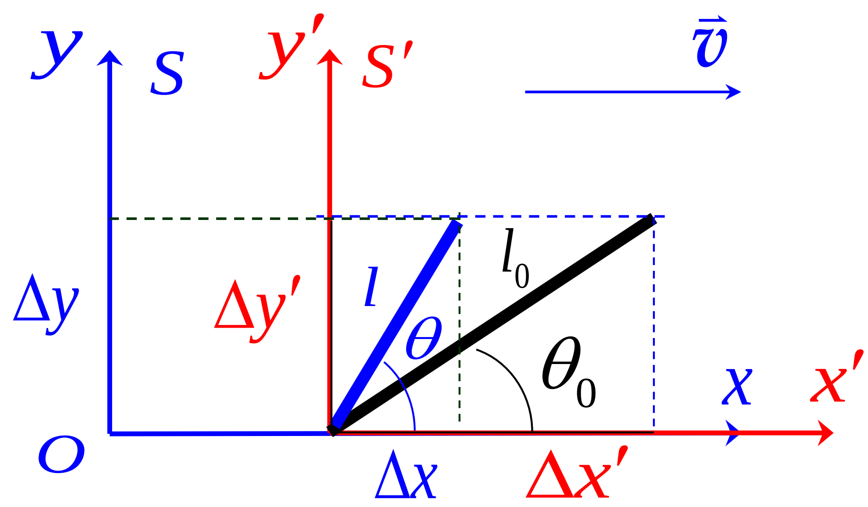
$$r = r_0\sqrt{1-\beta^2} \qquad l = l_0\sqrt{1-\beta^2} \qquad \theta > 45^0$$

例 6: 在 S'系 $x'y'$平面内放置一固有长度为 l_0 的杆，杆通过坐标原点O'且与 x' 轴的夹角为θ_0。求在 S 系中测得的杆长 l 和杆与 x 轴的夹角θ。

解: S'系中，

$$\Delta x' = l_0 \cos\theta_0$$

$$\Delta y' = l_0 \sin\theta_0$$



在 S 系中:

$$\Delta x = \Delta x'\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} = l_0\cos\theta_0\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$$

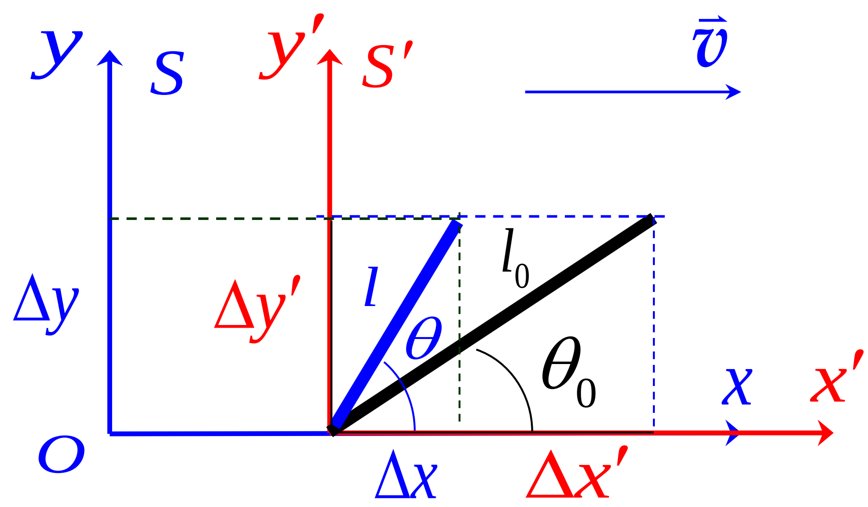
$$\Delta y = \Delta y' = l_0 \sin\theta_0$$

例 6: 在 S'系 $x'y'$平面内放置一固有长度为 l_0 的杆，杆通过坐标原点O'且与 x' 轴的夹角为θ_0。求在 S 系中测得的杆长 l 和杆与 x 轴的夹角θ。

解: 在 S 系中杆的长度为:

$$l=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta_0}$$



在 S 系中:

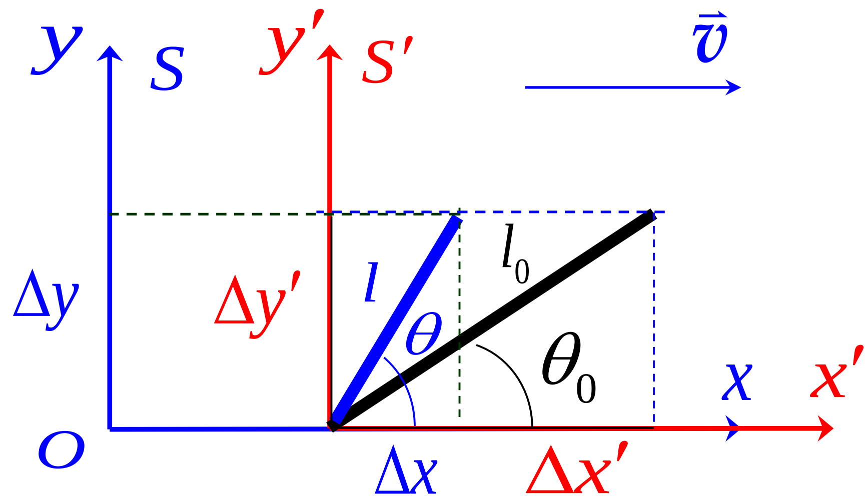
$$\Delta x=\Delta x'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=l_0\cos\theta_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\Delta y=\Delta y'=l_0\sin\theta_0$$

例 6： 在 S'系 $x'y'$平面内放置一固有长度为 l_0 的杆，杆通过坐标原点O'且与 x' 轴的夹角为θ_0 。求在 S 系中测得的杆长 l 和杆与 x 轴的夹角θ。

解： 以 θ 表示杆与x轴的夹角：

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\tan\theta_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}}$$



在 S 系中:

$$\Delta x = \Delta x'\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} = l_0\cos\theta_0\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$$

$$\Delta y = \Delta y' = l_0\sin\theta_0$$

在低速情况下，长度收缩效应情况如何？

例： 长度为**5 m**的飞船，相对地面的速度为 $9\times10^{3}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

则在地面测量飞船长度为：

$$l = 5\times\sqrt{1-\left(\frac{9\times10^{3}}{3\times10^{8}}\right)^{2}}\ \mathrm{m}$$

$$= 4.999999998\ \mathrm{m} \approx 5\ \mathrm{m}$$

在宏观低速情况下，

长度收缩效应很难观测到。

例 7： 一短跑选手在地面上以 10 s 的时间跑完 100 m，一飞船沿同一方向以速率 $v = 0.8\,c$ 飞行。

求： (1) 飞船参考系上测得百米跑道的长度和选手跑过的路程；

(2) 飞船参考系上测得选手的平均速度 。

解： 选手起跑为事件“1”，到终点为事件“2”，依题意有

	地面 S 系	飞船 S' 系
两事件时间间隔	$\Delta t = 10\ \mathrm{s}$	$\Delta t'$
两事件空间间隔	$\Delta x = 100\ \mathrm{m}$	$\Delta x'$
跑道 长度	$l_0 = 100\ \mathrm{m}$	l

(1) l_0为原长， l 为运动长度，由长度收缩公式有

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2} = 100 \times \sqrt{1 - 0.8^2} = 60\ \mathrm{m}$$

例 7： 一短跑选手在地面上以 10 s 的时间跑完 100 m，一飞船沿同一方向以速率 $v = 0.8\,c$ 飞行。

求： (1) 飞船参考系上测得百米跑道的长度和选手跑过的路程；

(2) 飞船参考系上测得选手的平均速度 。

解： 选手起跑为事件“1”，到终点为事件“2”，依题意有

	地面S 系	飞船S'系
两事件时间间隔	$\Delta t = 10\ \text{s}$	$\Delta t'$
两事件空间间隔	$\Delta x = 100\ \text{m}$	$\Delta x'$
跑道 长度	$l_0 = 100\ \text{m}$	l

在 S'系中事件1 和事件2 的空间间隔$\Delta x'$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{100 - 0.8\times 3\times 10^8 \times 10}{\sqrt{1-0.8^2}} = -4.0\times 10^9\ \text{m}$$

$$|\Delta x'| = 4.0\times 10^9\ \text{m}$$

例 7： 一短跑选手在地面上以 10 s 的时间跑完 100 m，一飞船沿同一方向以速率 $v=0.8c$ 飞行。

求 (1) 飞船参考系上测得百米跑道的长度和选手跑过的路程；

(2) 飞船参考系上测得选手的平均速度 。

解 选手起跑为事件“1”，到终点为事件“2”，依题意有

	地面 S 系	飞船 S' 系
两事件时间间隔	$\Delta t=10\text{ s}$	$\Delta t'$
两事件空间间隔	$\Delta x=100\text{ m}$	$\Delta x'$
跑道 长度	$l_0=100\text{ m}$	l

(2) S' 系中选手从起点到终点的时间间隔为 $\Delta t'$

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\dfrac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{10-\dfrac{0.8\times100}{3\times10^8}}{\sqrt{1-0.8^2}}=16.7\text{ s}$$

S' 系中选手的平均速度为:

$$\bar{u}'=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

$$=\frac{-4.0\times10^9}{16.7}=-2.4\times10^8\text{ m/s}=-0.8c$$

二、长度收缩(动尺变短) Length Contraction

讨论

- 当$v << c$时，$\beta = \dfrac{v}{c} \to 0, \quad l = l_0\sqrt{1-\beta^2} \approx l_0$
- 长度收缩效应只发生在运动方向上；
- 垂直于运动方向的长度不会产生长度收缩。
- 长度收缩是观测效应

"观测" 和 "看" 的区别

三、时间膨胀（时间延缓，动钟变慢，Time Dilation ）

固有时(原时)：某惯性系中，同一地点先后发生的两个事件的时间间隔。

设惯性系 S' 相对于S 以速度 v 运动，

在 S' 中，同一地点先后发生两个事件

时间间隔---固有时(原时) $\Delta\tau_0$

$$x_2' = x_1', \qquad \Delta t' = t_2' - t_1' = \Delta\tau_0$$

$$t = \frac{t' + \dfrac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

在 S 中，两个事件的时间间隔：

$$\Delta\tau = \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t' + \dfrac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta\tau > \Delta\tau_0$$

时间膨胀

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

三、时间膨胀（时间延缓，动钟变慢，Time Dilation）

时间延缓效应的实验验证

μ子的寿命实验

B.Rossi, D.B.Hall， 1941

μ子在高空大气顶层形成，静止时平均寿命为 **2.15×10^{-6}s，** 速率为 **0.995c.**

若无时间膨胀效应，只能走**640m**就消失了，地面观测不到。

在地面上看其寿命膨胀 $1/\sqrt{1-0.995^2}\approx10$ 倍， 衰变前可飞行 6400m , 实际上可到达地面。

例 8 π^- 介子是不稳定粒子。从粒子产生到衰变所经历的时间称为粒子寿命。测得静止 π^- 介子的平均寿命 $\tau_0 = 2.6 \times 10^{-8}$ s。某加速器产生的 π^- 介子以速率 $v = 0.75\,c$ 相对实验室运动。

求 π^- 介子衰变前在实验室中通过的平均距离。

分析 以粒子产生、衰变为两个事件

解：按经典理论： $\overline{l} = v\tau_0 = 5.85\ \mathrm{m}$

实验室测得： $\overline{l'} = 8.5 \pm 0.6\ \mathrm{m}$

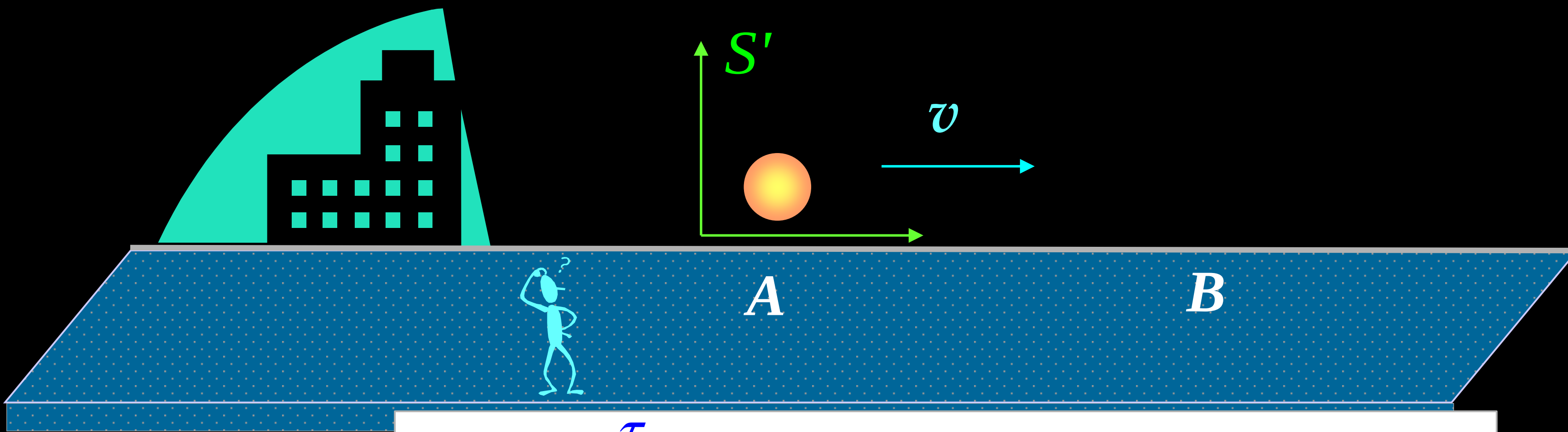
例 8 π^-介子是不稳定粒子。从粒子产生到衰变所经历的时间称为粒子寿命。测得静止 π^-介子的平均寿命 $\tau_0 = 2.6\times10^{-8}$ s。某加速器产生的 π^- 介子以速率 $v = 0.75\,c$ 相对实验室运动。

求 π^-介子衰变前在实验室中通过的平均距离。

分析 以粒子产生、衰变为两个事件

粒子系 S'：静止寿命 $\tau_0 = 2.6\times10^{-8}$ s

两事件发生在同一地点，τ_0 为原时



地面系S：寿命

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-0.75^2}}=1.51\tau_0,\qquad l=v\tau=8.83\,\mathrm{m}$$

三、时间膨胀（时间延缓，动钟变慢，Time Dilation）

低速情况下，时间膨胀效应如何？

例：飞船以 $v = 9\times10^3 \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速率相对地面飞行。
飞船上的钟走了 5 秒，
问地面上的测量经过了几秒？

原时：$\Delta\tau_0 = 5\mathrm{s}$

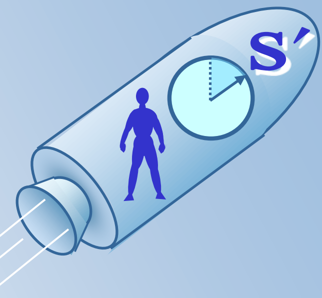
$$\Delta\tau = \frac{\Delta\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{5}{\sqrt{1-\left(9\times10^3 / 3\times10^8\right)^2}} = 5.000000002\,\mathrm{s}$$

低速情况下，时间膨胀效应很难发现！

$v << c$ 时，$\Delta t \approx \Delta t'$

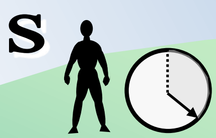
三、时间膨胀（时间延缓，动钟变慢，Time Dilation ）

孪生子佯谬和孪生子效应



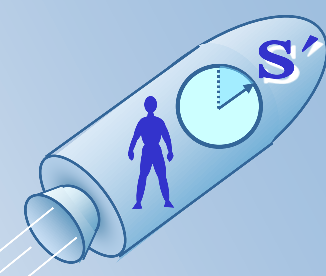
1961年，美国斯坦福大学的海尔弗利克在分析大量实验数据的基础上提出，寿命可以用细胞分裂的次数乘以分裂的周期来推算。对于人来说，细胞分裂的次数大约为50次，而分裂的周期大约是2.4年，照此计算，人的寿命应为120岁。因此，用细胞分裂周期可以代表生命过程的节奏。

设想有一对孪生兄弟，哥哥告别弟弟乘宇宙飞船去太空旅行。在各自的参考系中，哥哥和弟弟的细胞分裂周期都是2.4年。但由于时间延缓效应，在地球上的弟弟看来，飞船上哥哥的细胞分裂周期要比2.4年长，他认为哥哥比自己年轻。而飞船上的哥哥认为弟弟的细胞分裂周期也变长，弟弟也比自己年轻。



到底谁年轻就成了难以回答的问题。

三、时间膨胀 （时间延缓，动钟变慢，Time Dilation ）



孪生子佯谬和孪生子效应

问题的关键是，时间延缓效应是狭义相对论的结果，它要求飞船和地球同为惯性系。要想保持飞船和地球同为惯性系，哥哥和弟弟就只能永别，不可能面对面地比较谁年轻。

这就是通常所说的孪生子佯谬。

如果飞船返回地球则在往返过程中有加速度，飞船就不是惯性系了。这一问题的严格求解要用到广义相对论，计算结果是，兄弟相见时，哥哥比弟弟年轻。

这种现象，被称为孪生子效应。

1971年，美国空军用两组Cs（铯）原子钟做实验。发现绕地球一周的运动钟变慢了**203±10ns**，而按照广义相对论预言运动钟应变慢**184 ± 23 ns**，在误差范围内，理论值和实验值一致，验证了孪生子效应。