第六章　z 变换

6.1　z 变换的基础

6.2　传输函数

6.3　传输函数与稳定性

Z 变换

- 时域中用差分方程和卷积表示数字滤波器；
- Z 变换使数字信号和系统的描述更加紧凑，使数字信号的计算更加容易。

6.1 z 变换的基础

- **z 变换定义**

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$Y(z)=Z\{y[n]\}$$

  - $X(z)$ 称为 $x[n]$ 的z变换
  - $Y(z)$ 称为 $y[n]$ 的z变换

- **z 域**：z的取值范围，它是含有复数的频域
- **z 变换的收敛域**：对于指定的 $x[n]$，能使其

$X(z)$ 收敛的所有 z 值的集合（z 的取值范围）。

例

计算 $x[n]=\delta[n]$的z变换 $X(z)$

解：

$\delta[n]$只在 $n=0$处有非零值，所以有

$$Z\{x[n]\}=X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta[n]z^{-n}=\delta[0]=1$$

z的收敛域为整个z平面。

例

计算 $x[n]=\delta[n\text{-}1]$的 z变换 $X(z)$

解

$\delta[n-1]$只在 $n=1$处有非零值，所以有

$$Z\{x[n]\}=X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta[n\text{-}1]z^{-n}=\delta[0]z^{-1}=z^{-1}$$

z的收敛域为$z\neq 0$的区域。

6.1 Z 变换的基础

- **Z 变换的特性**

  —— 时移特性

如果 $Z\{x[n]\} = X(z)$

则 $Z\{x[n-1]\} = z^{-1}X(z)$

$$Z\{x[n-k]\} = z^{-k}X(z)$$

证明：z 变换的特性 —— 时移特性

$$Z\{x[n-1]\} = z^{-1}X(z)$$

若信号$x[n]$的z变换为$X(z)$，　令：$y[n] = x[n-1]$，那么$y[n]$的z变换为：

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n}$$

令：$m = n-1$，则$n = m+1$

$$Y(z) = \sum_{m=-1}^{\infty} x[m]z^{-m-1}$$　因为$x[-1] = 0$

所以上式为

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m-1} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m}\right)z^{-1} = z^{-1}X(z)$$

即

$Z\{x[n-1]\}=z^{-1}X(z)$

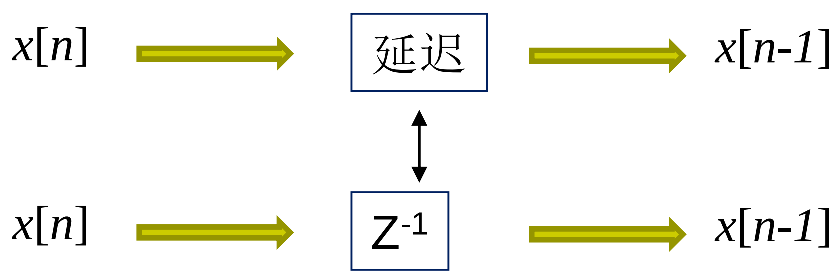
$$Z\{x[n-k]\} = z^{-k}X(z)$$

证明：Z 变换的特性 —— 时移特性

$$Z\{x[n-k]\} = z^{-k}X(z)$$

在z域中的因子z^{-1}，相当于在时域中一个采用间隔的延迟

对比差分方程的流图



例

计算 $x[n]=u[n]$的 z变换 $X(z)$

$$Z\{x[n]\}=X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\ldots\ldots$$

按照几何级数求和公式，得

$$Z\{x[n]\}=X(z)=\frac{1}{1\text{-}z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

z的收敛域为$z\neq 1$

作 业

计算 $x[n]=2\delta[n]+\delta[n-1]+0.5\delta[n-2]$的 z变换 $X(z)$

作 业

计算 $x[n]=2\delta[n]+\delta[n-1]+0.5\delta[n-2]$的 z变换 $X(z)$

解：

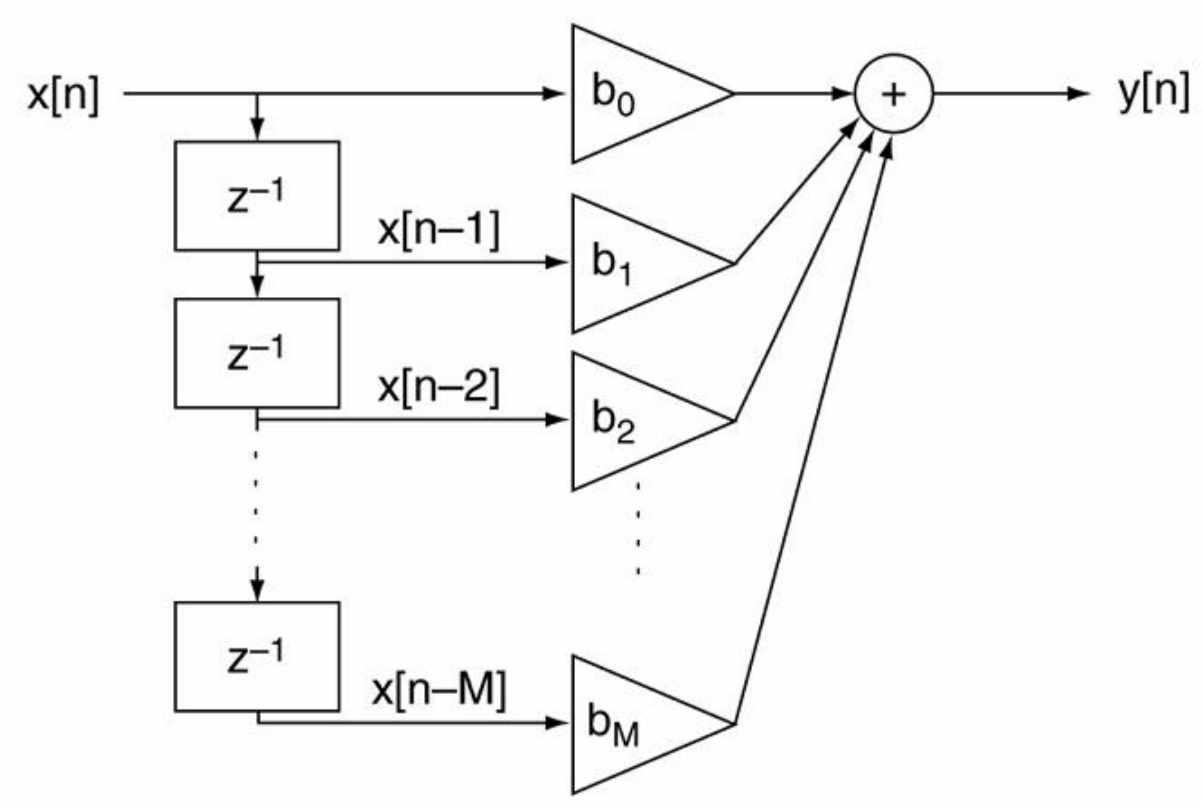
$$\mathrm{Z}\{\delta[n]\}=\sum_{n=0}^{\infty}\delta[n]z^{-n}=\delta[0]=1$$

所以

$$Z[x[n]\}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=x[0]z^{0}+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}=2+z^{-1}+0.5z^{-2}$$

6.1 Z 变换的基础

- 时移特性的流图



差分方程的 Z 变换

根据差分方程定义

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

展开

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \ldots + b_M x[n-M]$$

对上式两侧做Z变换， 令$x[n]$的z变换为$X(z)$，$y[n]$的z变换为$Y(z)$

$$a_0 Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \ldots + a_N z^{-N} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \ldots + b_M z^{-M} X(z)$$

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}) Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}) X(z)$$

得到传输函数为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$Y(z) = H(z) X(z)$$

6.2 传输函数

7.2.1 传输函数与差分方程

- 传输函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

比值 H(z) 称为传输函数

$$Y(z)=H(z)X(z)$$

求下面差分方程的传输函数

$$2y[n]+y[n-1]+0.9y[n-2]=x[n-1]+x[n-4]$$

令： $Z\{x[n]\}=X(z),\qquad Z\{y[n]\}=Y(z)$

对方程两侧进行Z变换

$$2Y(z)+z^{-1}Y(z)+0.9z^{-2}Y(z)=z^{-1}X(z)+z^{-4}X(z)$$

$$(2+z^{-1}+0.9z^{-2})Y(z)=(z^{-1}+z^{-4})X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}+z^{-4}}{2+z^{-1}+0.9z^{-2}}$$

求下面传输函数的差分方程

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

$$(1-0.5z^{-1})Y(z)=(1+0.5z^{-1})X(z)$$

$$Y(z)-0.5z^{-1}Y(z)=X(z)+0.5z^{-1}X(z)$$

上式两侧做z逆变换

$$y[n]-0.5y[n-1]=x[n]+0.5x[n-1]$$

作业 1

求下面差分方程的传输函数

$$y[n]\text{-}0.2y[n-1]=x[n]+0.8x[n-1]$$

作业 2

求下面传输函数的差分方程

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z}{(2z-1)(4z-1)}$$

6.2 传输函数

6.2.2 传输函数与脉冲响应

$$x[n] \Rightarrow \boxed{\text{差分方程 Difference equation}} \Rightarrow y[n]$$

$$x[n] \Rightarrow \boxed{\text{脉冲响应 Impulse response}} \Rightarrow y[n] = h[n] * x[n]$$

$$X(z) \Rightarrow \boxed{\text{传输函数 Transfer function}} \Rightarrow Y(z) = H(z)X(z)$$

6.2　传输函数

- 传输函数与脉冲响应

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h[n]z^{-n}$$

根据脉冲函数定义：

$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

从脉冲响应出发

输入信号$x[n]$可以表示成：

$$x[n]=x[0]\delta[n]+x[1]\delta[n-1]+x[2]\delta[n-2]+......+x[N]\delta[n-N]$$

可以表示成下面式子

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N}x[k]\delta[n-k]$$

根据脉冲响应与脉冲函数之间的关系

若输入为脉冲： $\delta[n-k]$ $\Rightarrow$ 对应的输出为： 脉冲响应 $h[n-k]$

若输入为： $x[n]$ $\Rightarrow$ 对应的输出为： $y[n]$

这样可以得到

$$y[n]=\sum_{k=0}^{N}x[k]h[n-k]$$

推导

$\because \quad y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$

又$\because$ 单位脉冲响应在零以前是没有采样点

$\therefore \quad y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]h[n-k]$

对上式两边做z变换， 令$Y(z)$为$y[n]$的z变换， $X(z)$为$x[n]$

$$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty}x[k]h[n-k])z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}x[k]h[n-k]z^{-(n-k)}z^{-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}h[n-k]z^{-(n-k)}$$

$\because$ 滤波器具有因果关系，所以上式第二个求和中从$n=k$开始，而不是$n=0$

$\therefore \quad Y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k}\sum_{n=k}^{\infty}h[n-k]z^{-(n-k)}$

令： $m=n-k$

则 $Y(z)=(\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k})\sum_{n=k}^{\infty}h[m]z^{-(m)}=X(z)[\sum_{n=k}^{\infty}h[m]z^{-(m)}]$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{n=k}^{\infty}h[m]z^{-(m)}$$

$\because \quad H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \qquad \therefore \quad H(z)=\sum_{n=k}^{\infty}h[m]z^{-(m)}$

6.2 传输函数

7.2.3 计算滤波器的输出

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$y[n] = Z^{-1}\{Y(z)\}$$

例

数字滤波器的脉冲响应为 $h[n]=\delta[n]+0.4\delta[n-1]+0.2\delta[n-2]+0.05\delta[n-3]$

求此滤波器的传输函数。

解：

∵ $Z\{\delta[n]\}=1$

∴ 滤波器的传输函数 $H(z)=1+0.4z^{-1}+0.2z^{-2}+0.05z^{-3}$

6.3 传输函数与稳定性

6.3.1 极点与零点

- 极点：传输函数分母为零时 z 的取值。
- 零点：传输函数分子为零时 z 的取值。

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}}$$

6.3 传输函数与稳定性

根据传输函数的表达式

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}}$$

可以求出极点和零点。

传输函数为

$$H(z)=\frac{4z^{-1}}{4-9z^{-1}+2z^{-2}}$$

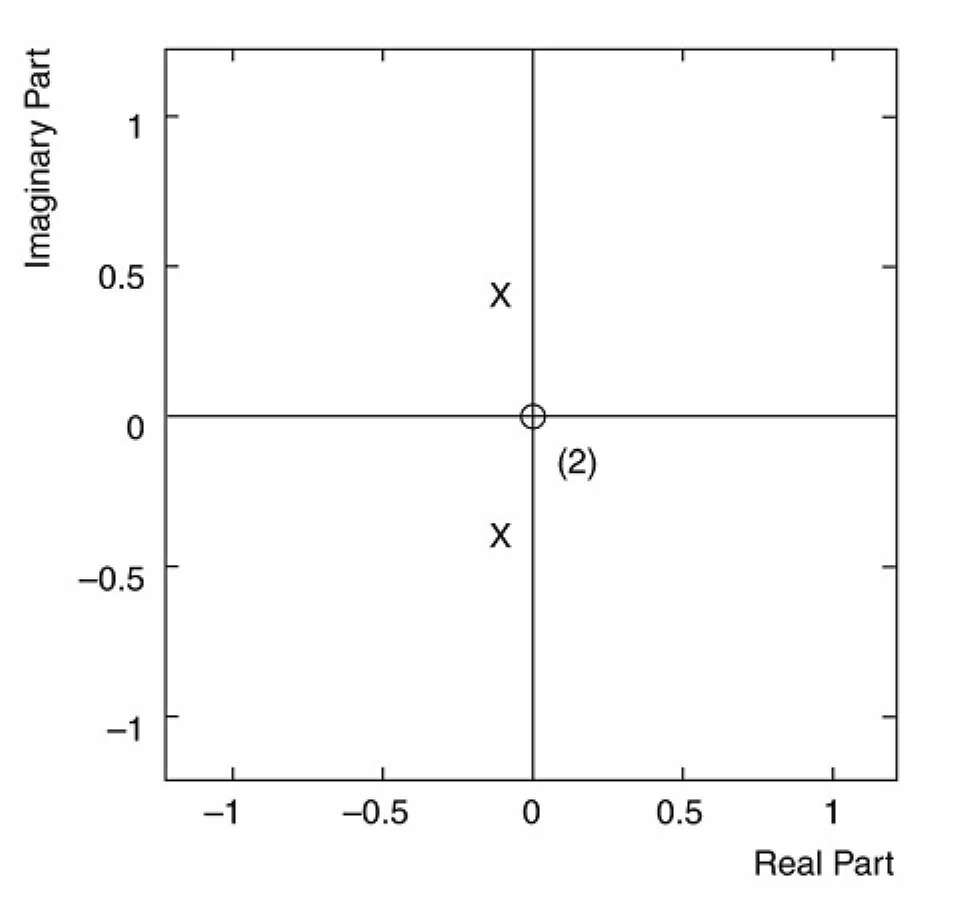
求极点和零点

解：　上式简化为　$H(z)=\dfrac{z}{(z-0.25)(z-2)}$

所以　　一个零点：$z=0$

二个极点：$z=0.25,\quad z=2$

z 平面表示零点和极点

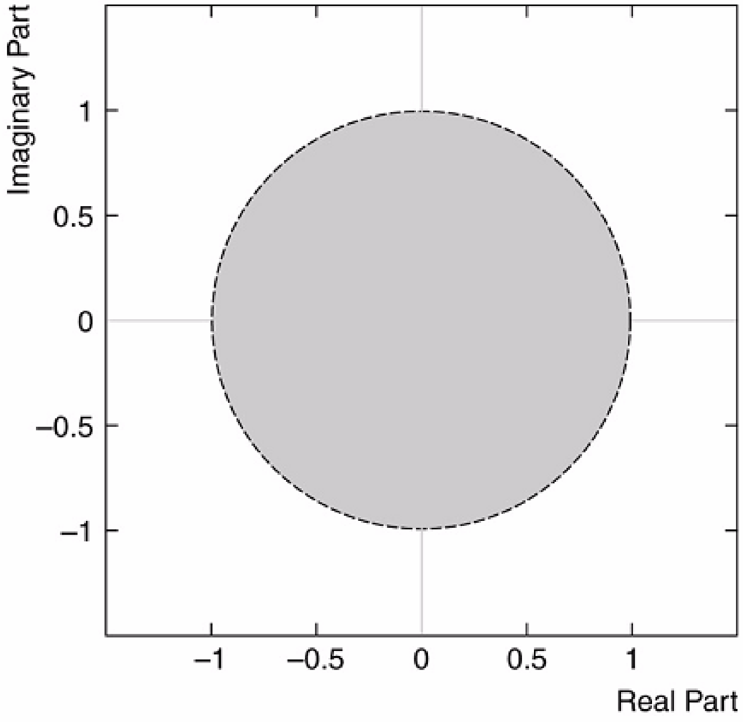


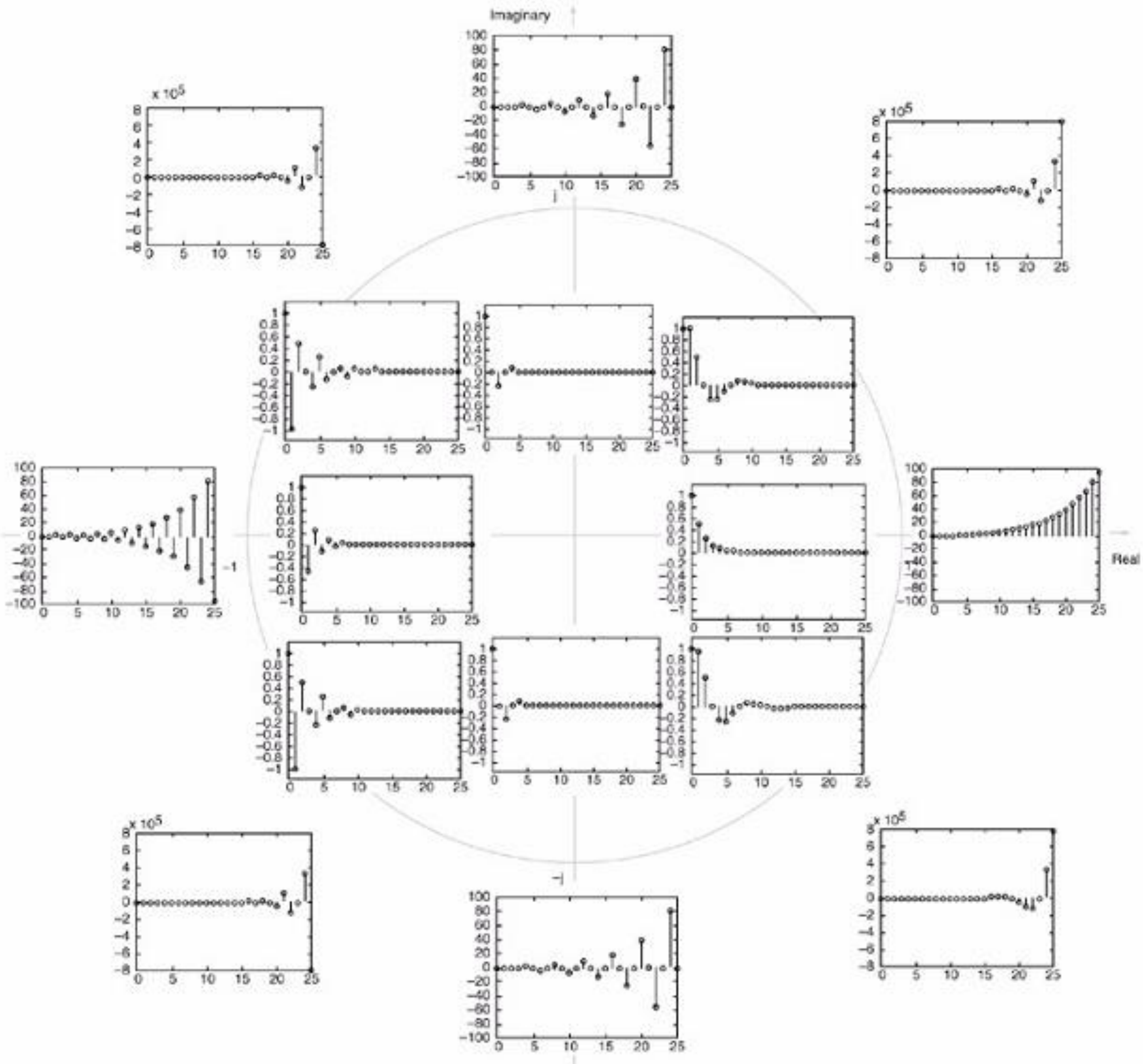
6.3.2 稳定性

- 稳定性：如果输入为大小有限的值，滤波器的输出总是稳定在一定的规律上。

- 不稳定的输出：若输入有小的改变，输出将发生很大的变化。

- 稳定性判断：
- 单位圆以Z平面的原点为圆心、半径为1的圆，若滤波器的所有极点都在单位圆内，则滤波器是稳定的；若单位圆上有极点，滤波器是临界稳定的；若单位圆外有极点，滤波器是不稳定的。





Imaginary
Real
j
-j
-1
x 10^5

传输函数为

$$H(z)=\frac{1-z^{-2}}{1+0.7z^{-1}+0.9z^{-2}}$$

判断其稳定性

解：　上式简化为 $H(z)=\dfrac{z^2-1}{z^2+0.7z+0.9}$

解一元二次方程：　$z^2+0.7z+0.9=0$

$$z=\frac{-0.7\pm\sqrt{0.7^2-4\times(1)\times(0.9)}}{2\times1}=\frac{-0.7\pm j\sqrt{3.11}}{2}=-0.35\pm j0.8818$$

$$|z|=\sqrt{(-0.35)^2+(0.8818)^2}=0.9487<1$$

在单位圆内，所以系统是稳定的。

- **一阶系统：仅有一个极点的系统**

$$H(z)=\frac{1}{1+az^{-1}}=\frac{z}{z+\alpha}$$

- **二阶系统：仅有二个极点的系统**

$$H(z)=\frac{1}{1+az^{-1}+\beta z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2+\alpha z+\beta}=\frac{z^2}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

Z 变换 Matlab 代码

%对信号x[n] = $0.5^n + (1/3)^n$进行 Z 变换。

```
syms n  % 生成变量n
x=0.5^n+(1/3)^n;   %定义离散信号
F=ztrans(x);  % 对x的z变换
pretty(F);  %给出Z变换表达式
```

Z 域内画出零极点图 Matlab 代码

```
%传输函数H(z)=10*z/((z-1)*(z-2)^2)=10*z/(z^3-5*z^2+8*z-4)

b=[0 0 10 0];%分子的系数
a=[1 -5 8 -4];%分母的系数
zplane(b,a)%画出零极点分布图
```

对差分方程做 z 变换 Python 代码

```
import numpy as np
from scipy import signal   #使用SciPy库中的scipy.signal模块来进行Z变换的计算
#对差分方程 y[n]-0.9y[n-1]=x[n]-0.5x[n-1] 做Z变换，求传输函数

# 定义系统的差分方程系数
b = [1, -0.5]  # x[n]的系数
a = [1, -0.9]  # y[n]的系数

# 计算系统的Z变换函数
system = signal.TransferFunction(b, a, dt=1.0)

# 打印系统的Z变换函数
print( “系统Z变换的传输函数分子和分母的系数:")
print(system)
```

作 业 3

《数学传感技术与机器人控制》的第5章 3、4、5

《Z变换：时间与抽象的桥梁》

Kimi撰写

在数学的浩瀚宇宙中，Z变换宛如一颗璀璨星辰，静默而深邃。它以一种独特的姿态，将离散时间信号的复杂性化为简洁的符号与公式，仿佛是时间与空间交织的魔法。

想象一条蜿蜒的离散时间路径，信号在其中跳跃、闪烁，每一个点都承载着信息的重量。Z变换轻轻一挥魔杖，将这些离散的瞬间凝聚成一个整体，化作一个关于Z的函数。它像是一个神秘的映射，将现实世界中的离散信号投射到一个抽象的复数平面，那里有着无限的可能性。

在这个复数的世界里，Z变换展现出它的智慧与力量。它能轻松地分析信号的稳定性，洞察其频率特性，甚至预测未来的走向。每一个Z的值都像是一个窗口，透过它，我们得以窥探信号的本质。它既是一种工具，也是一种语言，连接着现实与抽象，过去与未来。

Z变换，是数学的诗，是信号的梦。它在寂静的逻辑中绽放光芒，用简洁的符号编织出复杂世界的秩序。