三、简谐振动的动力学特征

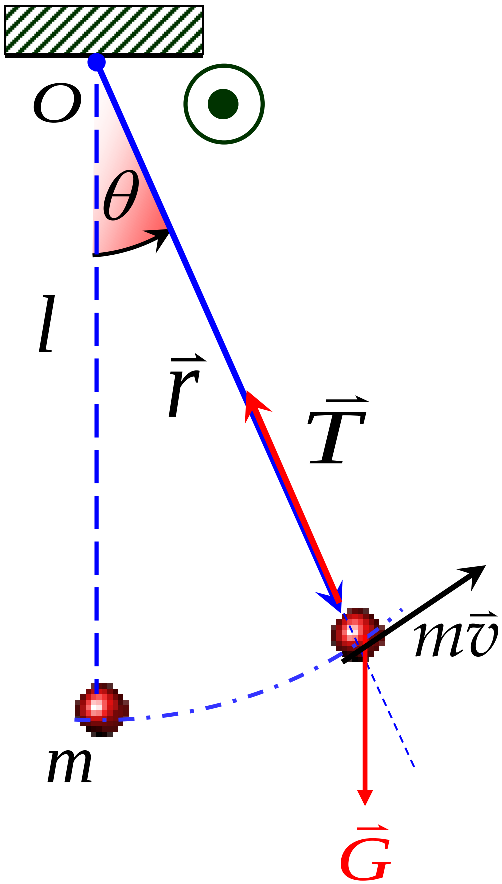
1、几种常见的简谐振动

2)、单摆 $(\theta < 5^\circ)$（数学摆）

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{P}$$

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt}$$



$$M = -mgl\sin\theta, \quad L = lmv = ml^2\omega' = ml^2\frac{d\theta}{dt}$$

当摆角很小时:

$$\sin\theta \approx \theta, \qquad M \approx -mgl\theta = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

令: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$,

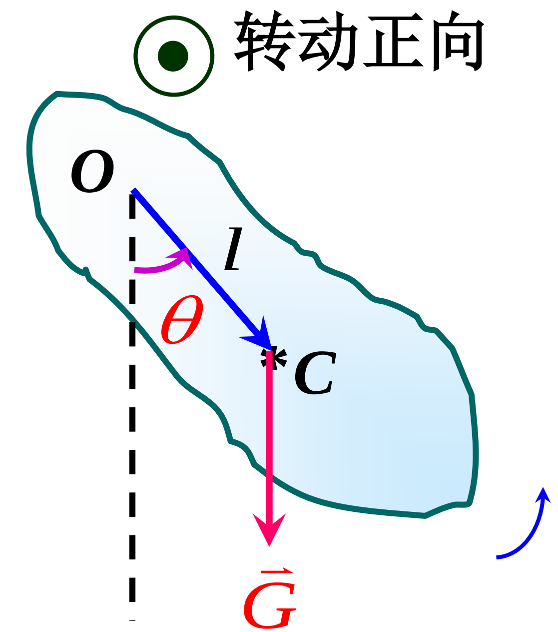
$$\theta = \theta_m\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

三、简谐振动的动力学特征

1、几种常见的简谐振动

3）、复摆 $(\theta < 5^\circ)$（物理摆）



（C点为质心）

定轴转动转动定律

$$M_z = J_z\beta = J_z\frac{d\omega}{dt}$$

$$\vec{M}_z = \vec{l}\times\vec{F},\qquad M_z = -mgl\sin\theta$$

$$M_z \approx -mgl\theta = J_z\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{mgl}{J_z}\theta,\qquad 令：\quad \omega^2 = \frac{mgl}{J_z},$$

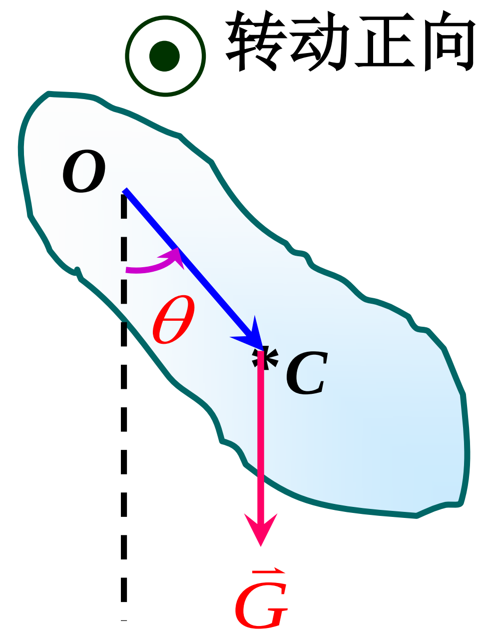
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\theta = 0$$

三、简谐振动的动力学特征

1、几种常见的简谐振动

3)、复摆 $(\theta < 5^\circ)$

（物理摆）



$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\theta = 0$$

$$\boxed{\theta = \theta_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_z}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{mgl}}$$

l 为质心到转轴的垂直距离

三、简谐振动的动力学特征

2、简谐振动的动力学特征

1）受力特点：线性回复力（准弹性力）作用

$$F_{合} = -kx, \qquad M_{合} = -\lambda\theta, \qquad \boxed{f = -k\xi}$$

2）动力学方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0, \qquad \boxed{\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi = 0}$$

3）加速度与位移成正比而方向相反

$$a = -\omega^2 x, \qquad \beta = -\omega^2\theta$$

三、简谐振动的动力学特征

2、简谐振动的动力学特征

4）固有(圆)频率

固有频率决定于系统本身性质

弹簧振子： $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

单　　摆： $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

复　　摆： $\omega=\sqrt{\dfrac{mgl}{J_z}}$

l 为质心到转轴的垂直距离

例 9： 一质量为 m 的比重计，放在密度为 ρ 的液体中，已知比重计圆管的直径为 d。

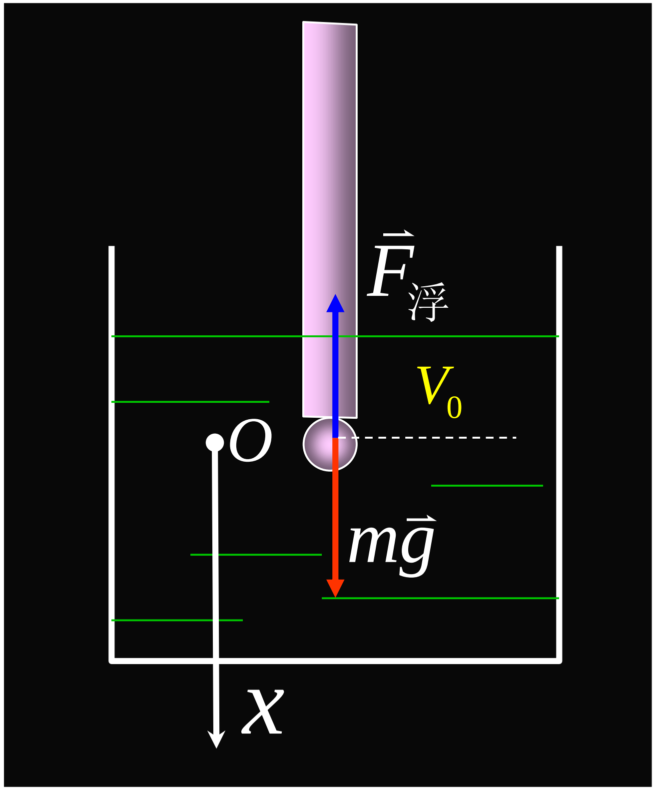
证明： 比重计平衡后，沿竖直方向轻推比重计后，证明比重计在竖直方向的振动为简谐振动，并计算其周期。

解： 取平衡位置为坐标原点

平衡时： $$mg - F_{浮} = 0$$

$$F_{浮} = \rho V_0 g$$

其中 V_0 为比重计平衡时的排水体积



例 9： 一质量为 m 的比重计，放在密度为 ρ 的液体中，已知比重计圆管的直径为 d。

证明： 比重计平衡后，沿竖直方向轻推比重计后，证明比重计在竖直方向的振动为简谐振动，并计算其周期。

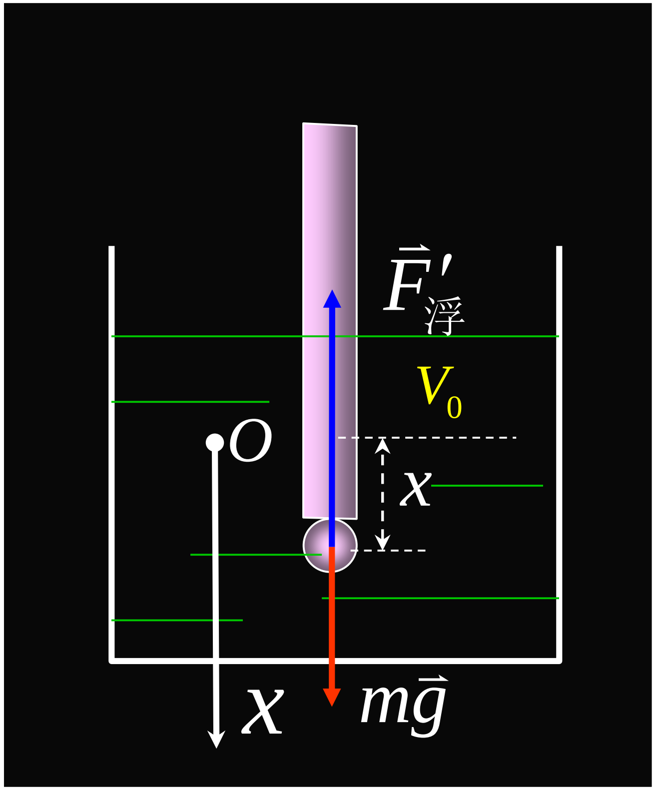
解： 平衡时：$mg=\rho V_0 g$

位移为 x 时：$\vec{F}_{合}=\vec{G}+\vec{F}'_{浮}=m\vec{a}$

$$mg-\rho gV=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

其中 V 为比重计的排水体积

$$mg-\left[V_0+\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 x\right]\rho g=m\frac{d^2x}{dt^2}$$



例 9： 一质量为 m 的比重计，放在密度为 ρ 的液体中，已知比重计圆管的直径为 d。

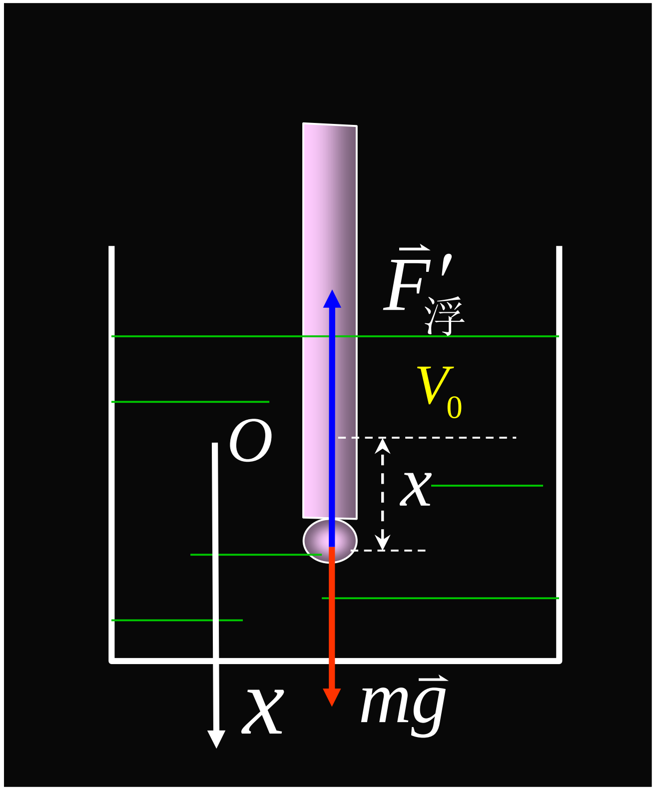
证明： 比重计平衡后，沿竖直方向轻推比重计后，证明比重计在竖直方向的振动为简谐振动，并计算其周期。

解：

$$-\rho g \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{\pi d^2 \rho g}{4m}\right)x = 0$$

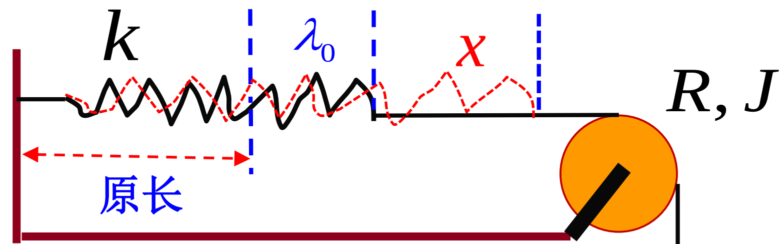
$$\omega = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{\pi\rho g}{m}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4}{d}\sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}$$



例 10： 如图所示，振动系统由一劲度系数为 k 的轻弹簧、一半径为 R、转动惯量为 J 的定滑轮和一质量为 m 的物体（质点）所组成。使物体沿竖直方向略偏离平衡位置后放手，任其振动，

证明： 物体作简谐振动，并计算其周期。

解： 取平衡位置为坐标原点，

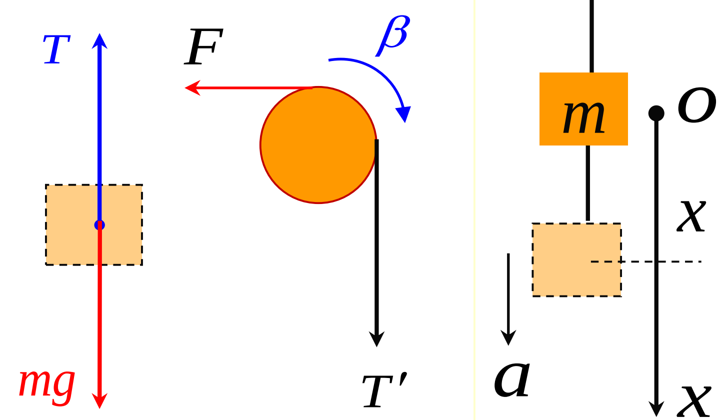


1）平衡时，设弹簧伸长量为 λ_0

则：$mg = k\lambda_0$

2）位移 x 时：$mg - T = ma$

$$M_z = M_F + M_{T'} = J_z\beta \Rightarrow -k(\lambda_0 + x)R + TR = J\beta = J\frac{a}{R}$$



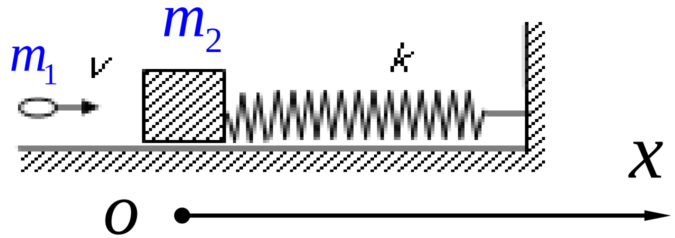
联立得：$-kx = \left(m + \dfrac{J}{R^2}\right)a = \left(m + \dfrac{J}{R^2}\right)\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$T' = T$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m + \left(J/R^2\right)}x = 0,$$

$$\boxed{\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m + \left(J/R^2\right)}{k}}}$$

例 11： 如图所示，质量为0.02kg的子弹,以速度v = 200m·s^{-1}水平射入木块，并陷入木块中，使弹簧压缩而作简谐振动．木块的质量为4.98kg，弹簧的劲度系数k = 5×10^{2}N·m^{-1}，不计桌面摩擦，若以子弹射入瞬间为计时起点，弹簧原长处为坐标原点，向右为x轴正向， **求：** 简谐振动方程。



解： 1）过程 1：碰撞

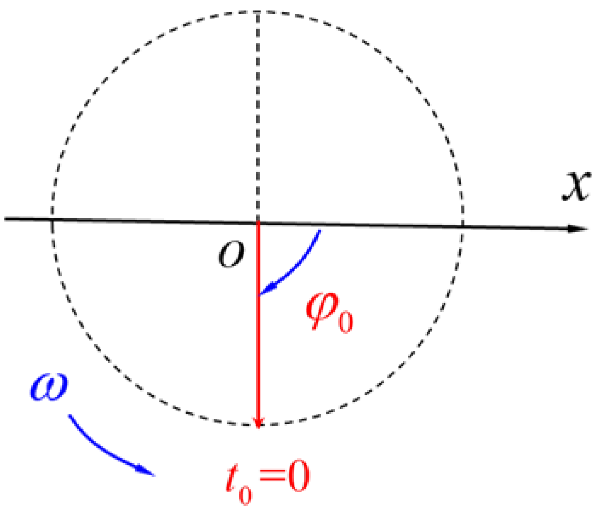
$$m_1 v = (m_1 + m_2)v_0 \Rightarrow v_0 = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)v = 0.8\ (\mathrm{m/s})$$

2）过程 2：振动

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = 10 (\mathrm{rad \cdot s^{-1}})$$

$$t_0 = 0, x_0 = 0, v_0 = 0.8,$$

$$A = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 0.08\ (\mathrm{m}), \qquad \varphi_0 = -\frac{\pi}{2},$$



$$x = 0.08\cos(10t - \frac{\pi}{2})\ (\mathrm{m})$$

第 九 章 振 动

9-4 简谐振动的能量
9-5 简谐振动的合成

知识点：

1、掌握：1）简谐振动系统的能量；
2）两个同方向同频率简谐振动的合成，振动加强和减弱的条件。

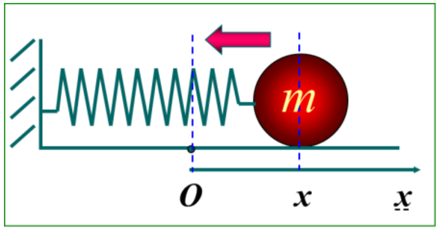
2、一般掌握：拍；

3、了解：相互垂直简谐振动合成的特点。

~~9-6、9-7、9-8~~ ← 不要求

一、简谐振动的能量

（以弹簧振子、水平放置为例）



$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1、动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

2、势能

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

（取弹簧原长处为弹性势能零点）

3、机械能

$$E = E_k + E_P = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

线性回复力是保守力，简谐振动系统机械能守恒

一、简谐振动的能量（以弹簧振子为例）

1、动能 $E_k=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$

2、势能 $E_P=\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$

3、机械能 $E=E_k+E_P=\dfrac{1}{2}kA^2=\dfrac{1}{2}m\omega^2A^2$

线性回复力是保守力，简谐运动系统机械能守恒

结　论

（1）谐振子在振动过程中，动能和势能分别随时间变化，但任一时刻总机械能保持不变。

（2）动能和势能的变化频率是弹簧振子振动频率的两倍。

（3）频率一定时，谐振动的总能量与振幅的平方成正比。

（适合于任何谐振系统）

例 12：一弹簧振子作简谐振动，当其偏离平衡位置的位移的大小为振幅的一半时，
其动能为振动总能量的多少？

解：

$$x = \frac{1}{2}A$$

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}kA^2$$

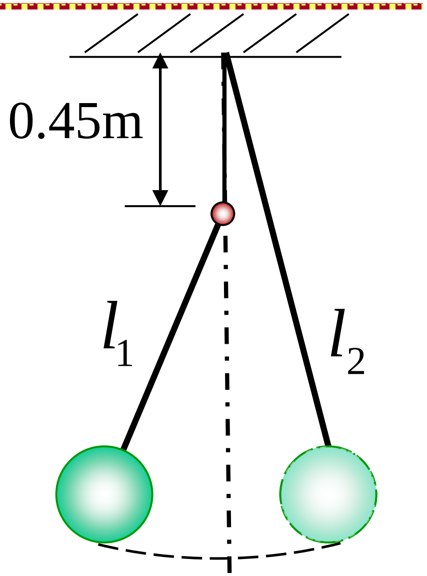
$$E = E_k + E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kA^2 \quad \Rightarrow E_k = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}kA^2$$

$$\Rightarrow \frac{E_k}{E} = \frac{3}{4}$$

例 13：一单摆的悬线长 $l=1.5$ m，在顶端固定点的铅直下方 0.45 m处有一小钉，如图设单摆在左右两边摆动均较小，

求：单摆的左右两边振幅之比 $\dfrac{A_1}{A_2}$ 为多少？

解：设质点质量为m



$$l_1 = 1.5 - 0.45 = 1.05(\text{m}), \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1}}$$

$$l_2 = 1.5(\text{m}), \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l_2}}$$

简谐运动系统机械能守恒 $\quad E = \dfrac{1}{2} m\omega^2 A^2$

$$\frac{1}{2}m(\omega_1 A_1)^2 = \frac{1}{2}m(\omega_2 A_2)^2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = 0.84$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

二、简谐振动的合成

1、两个同方向同频率简谐振动的合成(掌握)

方法1：利用三角函数处理

分振动： $x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_{01}),\quad x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_{02})$

合振动： $x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t+\varphi_{01}) + A_2\cos(\omega t+\varphi_{02})$

$$= A_1\cos\varphi_{01}\cos\omega t - A_1\sin\varphi_{01}\sin\omega t$$

$$+ A_2\cos\varphi_{02}\cos\omega t - A_2\sin\varphi_{02}\sin\omega t$$

$$x = \underbrace{(A_1\cos\varphi_{01}+A_2\cos\varphi_{02})}_{\| \atop A\cos\varphi_0}\cos\omega t - \underbrace{(A_1\sin\varphi_{01}+A_2\sin\varphi_{02})}_{\| \atop A\sin\varphi_0}\sin\omega t$$

$$\boxed{x = A\cos\varphi_0\cos\omega t - A\sin\varphi_0\sin\omega t}\ \boxed{= A\cos(\omega t+\varphi_0)}$$

二、简谐振动的合成

1、两个同方向同频率简谐振动的合成(掌握)

分振动： $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{01}),\quad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{02})$

合振动： $\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$

$$\begin{cases} A\sin\varphi_0 = A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02} \\ A\cos\varphi_0 = A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})} \\ \tan\varphi_0 = \dfrac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}} \end{cases}$$

二、简谐振动的合成

1、两个同方向同频率简谐振动的合成(掌握)

方法2：利用旋转矢量处理

取 $t_0=0$ 时刻

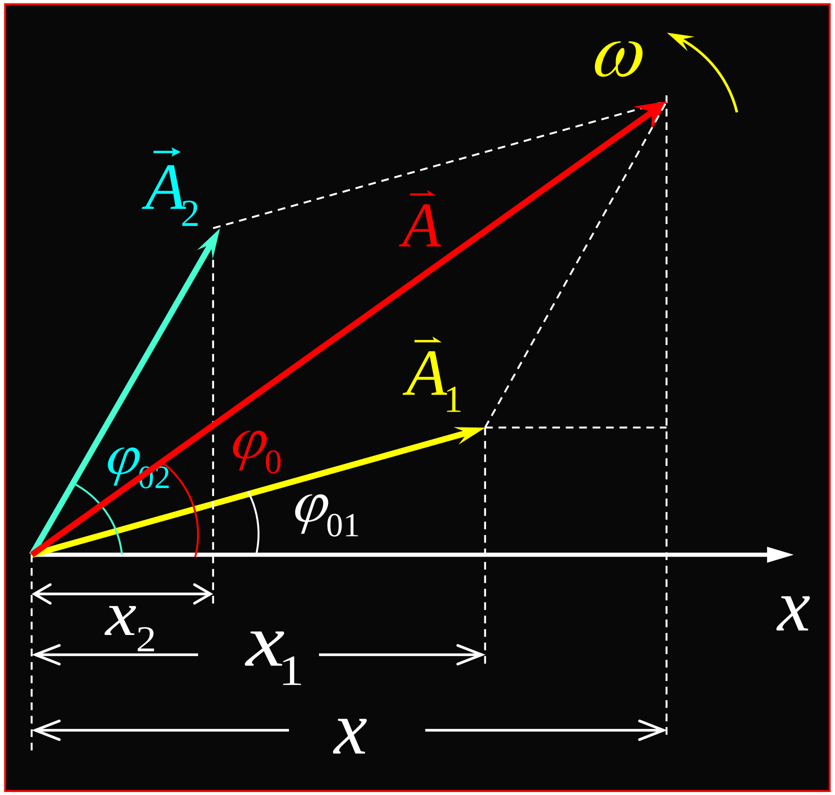
分振动：$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_{01})$

$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_{02})$

合振动：$x=x_1+x_2$

$$\boxed{x=A\cos(\omega t+\varphi_0)}$$

$$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2$$



$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})}$$

$$\tan\varphi_0=\frac{A_1\sin\varphi_{01}+A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01}+A_2\cos\varphi_{02}}$$

二、简谐振动的合成

1、两个同方向同频率简谐振动的合成(掌握)

分振动： $x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_{01})$, $x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_{02})$

合振动： $\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi_0)}$

$$
\begin{cases}
A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})} \\
\tan\varphi_0 = \dfrac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}
\end{cases}
$$

两个同方向同频率简谐振动合成后，仍为同方向同频率的简谐振动

例 14: 已知一质点同时参与两个同方向、同频率的简谐振动,

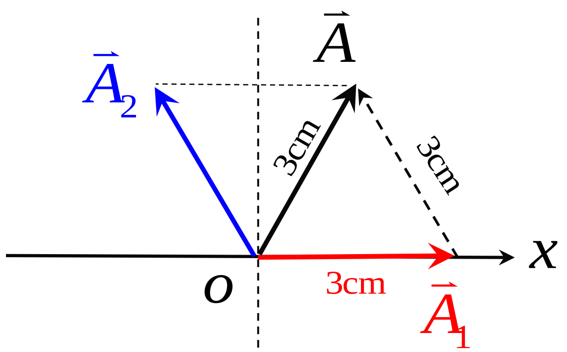
已知其中一个分振动 x_1 的方程为：$x_1(t)=3\cos(2\pi t)(\text{cm})$,

合振动的方程为：$x(t)=3\cos(2\pi t+\frac{\pi}{3})(\text{cm})$,

求： 另一个分振动 x_2 的振幅和初相位.

解: 利用旋转矢量处理

取 $t_0=0$ 时刻



分振动x_1: $A_1=3\text{cm}$, $\varphi_{01}=0$,

合振动x: $A=3\text{cm}$, $\varphi_0=\frac{\pi}{3}$

分振动x_2: $\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2$, $\vec{A}_2=\vec{A}-\vec{A}_1$

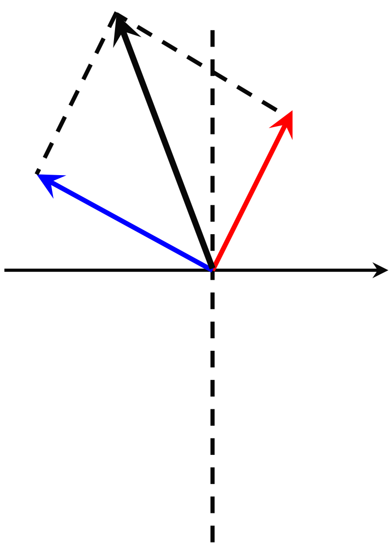
$$A_2=3\text{cm},\quad \varphi_{02}=\frac{2\pi}{3}$$

例 15: 已知一质点同时参与两个简谐振动：

$$x_1(t)=3\cos(2\pi t+\frac{\pi}{3})(\text{cm}),\quad x_2(t)=4\cos(2\pi t+\frac{5\pi}{6})(\text{cm}),$$

求: 合振动的振幅与初相。

解: $A_1=3\text{cm},\quad \varphi_{01}=\frac{\pi}{3},\quad A_2=4\text{cm},\quad \varphi_{02}=\frac{5\pi}{6}$



$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})}$$

$$A=\sqrt{3^2+4^2+2\times3\times4\cos(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3})}=5(\text{cm})$$

$$\tan\varphi_0=\frac{A_1\sin\varphi_{01}+A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01}+A_2\cos\varphi_{02}}=-2.344$$

$$\varphi_0=113^0=0.63\pi(\text{rad})$$

二、简谐振动的合成

1、两个同方向同频率简谐振动的合成(掌握)

讨论两种特殊情况

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$$

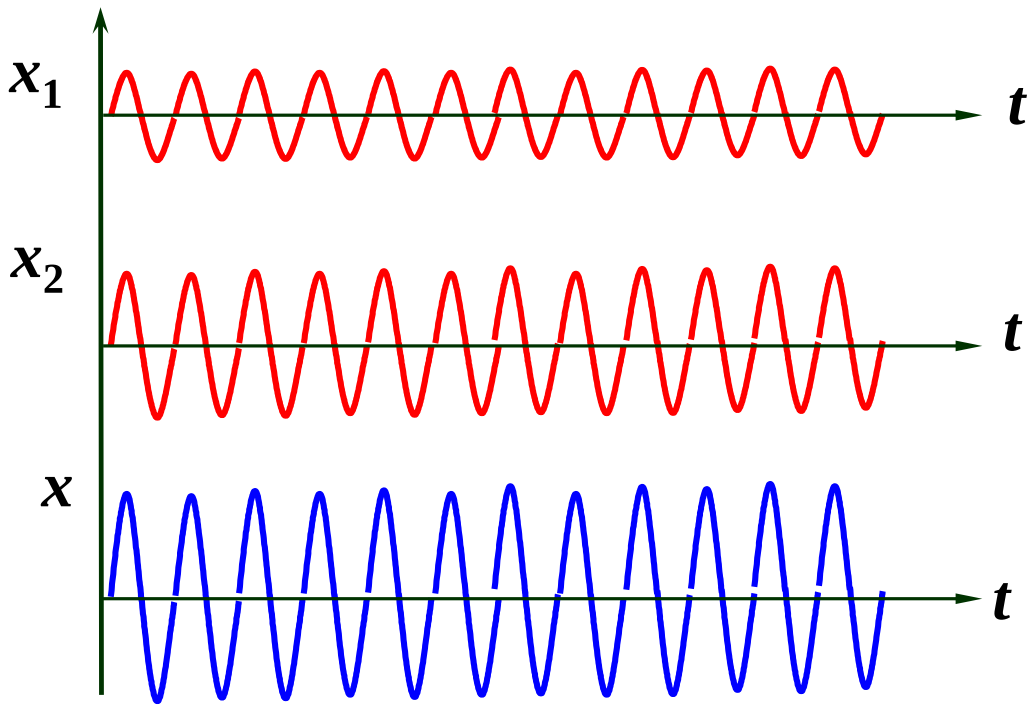
(1) 若两分振动，同相

$\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm 2k\pi$

$(k = 0, 1, 2, \ldots)$

$$A_{max} = A_1 + A_2$$

合振动加强



二、简谐振动的合成

1、两个同方向同频率简谐振动的合成(掌握)

讨论两种特殊情况

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$$

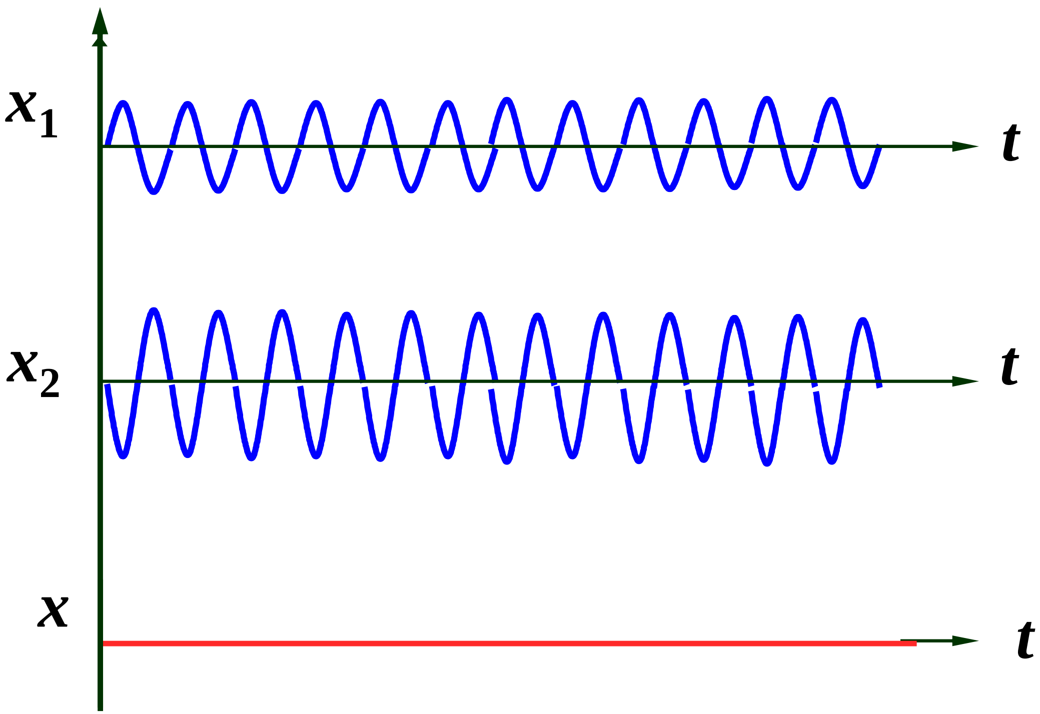
(2) 若两分振动，反相

$\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm(2k+1)\pi$，

$(k = 0, 1, 2, \ldots)$

$$A_{\min} = |A_1 - A_2|$$

合振动减弱



若 $A_1 = A_2$，则 $A_{\min} = 0$

静止

二、简谐振动的合成

2、两个同方向不同频率简谐振动的合成

频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐振动的合成

其合振动的振幅时而加强、时而减弱的现象叫拍

为了突出重点，设两分振动的振幅相等、且初相均为零

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos\omega_1 t = A_1\cos 2\pi\nu_1 t \\ x_2 = A_2\cos\omega_2 t = A_2\cos 2\pi\nu_2 t \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$

讨论 $A_1 = A_2$ ， $|\nu_2 - \nu_1| << \nu_1 + \nu_2$ 的情况

二、简谐振动的合成

2、两个同方向不同频率简谐振动的合成

频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐振动的合成

其合振动的振幅时而加强、时而减弱的现象叫拍

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos 2\pi\nu_1 t + A_1 \cos 2\pi\nu_2 t$$

$$x = \left(2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t\right) \cos 2\pi \frac{\nu_2 + \nu_1}{2} t$$

振幅部分

合振动频率

频率为 $\nu = \dfrac{\nu_1 + \nu_2}{2}$

可看作呈周期性缓慢变化的振幅

频率相对较高的简谐振动

此合振动不是简谐振动，一般比较复杂，只介绍一种常见拍现象

二、简谐振动的合成

2、两个同方向不同频率简谐振动的合成

频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐振动的合成

其合振动的振幅时而加强、时而减弱的现象叫拍

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos 2\pi \nu_1 t + A_1 \cos 2\pi \nu_2 t$$

$$x = \underbrace{\left(2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t\right)}_{\text{振幅部分}} \cos 2\pi \underbrace{\frac{\nu_2 + \nu_1}{2}}_{\text{合振动频率}} t$$

振动频率　$\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$

振幅 $A = \left| 2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t \right|$，变化频率为 $\nu' = |\nu_2 - \nu_1|$，$\begin{cases} A_{max} = 2A_1 \\ A_{min} = 0 \end{cases}$

二、简谐振动的合成

2、两个同方向不同频率简谐振动的合成

频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐振动的合成

其合振动的振幅时而加强、时而减弱的现象叫拍

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos 2\pi\nu_1 t + A_1\cos 2\pi\nu_2 t$$

$$x = \left(2A_1\cos 2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}t\right)\cos 2\pi\frac{\nu_2+\nu_1}{2}t$$

振幅部分

合振动频率

1、钢琴等乐器的调音；

2、利用“拍”的方法测量未知的频率。

振幅 $A = \left|2A_1\cos 2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}t\right|$ 随 t 缓慢变化

合振动可看作振幅缓慢变化的简谐振动

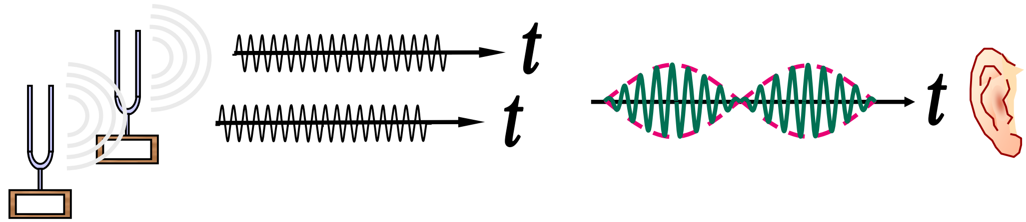
$$\nu' = \left|\nu_2 - \nu_1\right|$$

拍频（振幅变化的频率）

例:

$\nu_1 = 385\ \text{Hz}$

$\nu_2 = 383\ \text{Hz}$



听到的音频 $\nu = 384\ \text{Hz}$

拍频 $\nu' = 2\ \text{Hz}$