第 十 章 波 动

10-2 平面简谐波的波函数

知识点：掌握：

平面简谐波的波函数(波动表达式)，

及波函数的物理意义。

一、平面简谐波

1、简谐波（余弦波或正弦波）

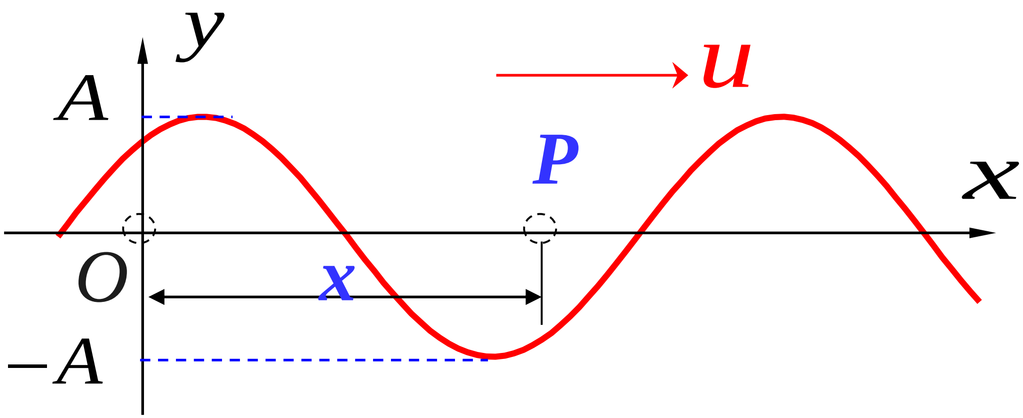
在均匀的、无吸收的介质中，波源作简谐振动时，波所传播到之处，各质点均作同频率的简谐振动，这种在介质中所形成的波。

各种复杂的波都可以看作是许多不同频率的简谐波的叠加

2、平面简谐波： 波面为平面的简谐波

在均匀的、无吸收的介质中，平面简谐波所传播到之处，各质点均作同频率、同振幅的简谐振动。

二、平面简谐波的波函数（波动表达式）



1、沿 x 轴正向传播

设原点O点的振动方程

$$y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

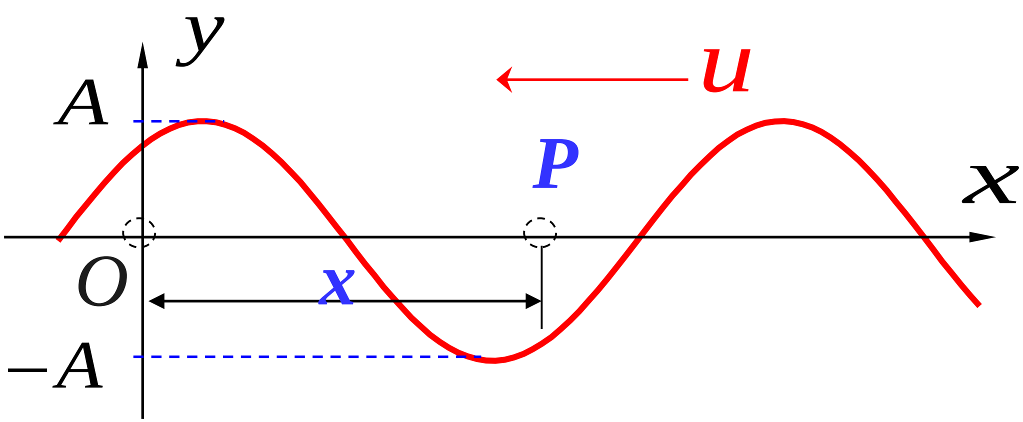
O点的振动状态 ⟶ P点 $\qquad \Delta t = \dfrac{x}{u}$

P点的振动状态在时间上落后于O点

P点在 t 时刻的位移：

$$y_P = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

二、平面简谐波的波函数（波动表达式）



2、沿 x 轴负向传播

设原点O点的振动方程

$$y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

P点的振动状态 ⟶ O点 $\quad \Delta t = \dfrac{x}{u}$

O点的振动状态在时间上落后于P点

P点在 t 时刻的位移：
$$y_P = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

二、平面简谐波的波函数（波动表达式）

掌握

原点O点的振动方程： $y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi_0\right]$$

“—”：沿 x 轴正方向传播；“+”：沿 x 轴负方向传播；

φ_0：坐标原点处质点（或波源）振动的初相。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

$$y(x,t) = A\cos\left[2\pi(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi(\nu t \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0\right]$$

平面简谐波，是时间和空间的双重周期函数

三、波函数的物理意义

以平面简谐波沿x轴正方向传播为例

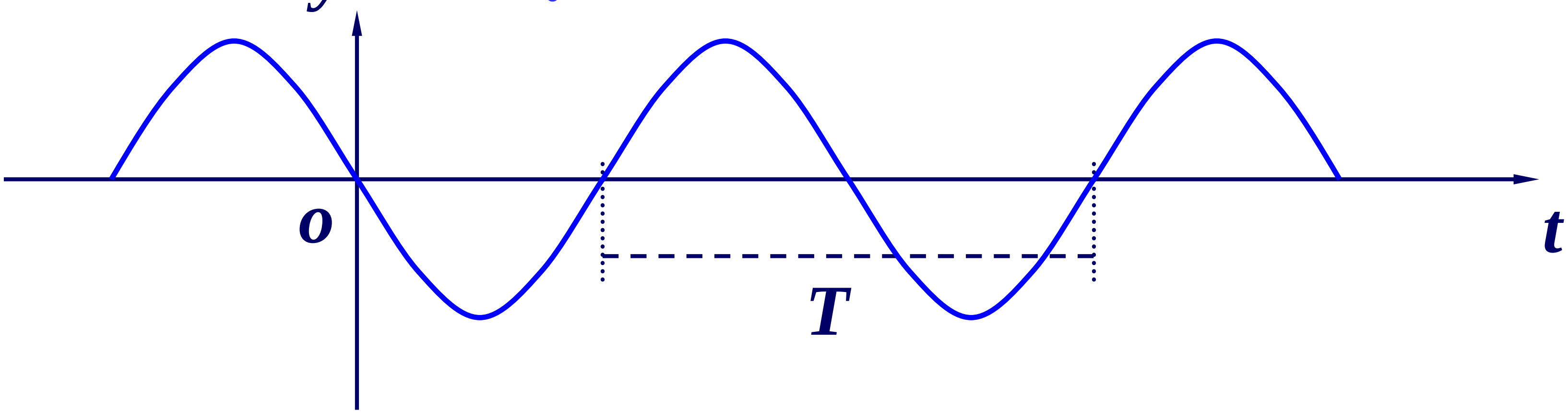
$$y(x,t)=A\cos\left[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0\right]$$

1、x 不变，t 可变：

$$y(x_0,t)=A\cos\left[\omega(t-\frac{x_0}{u})+\varphi_0\right]=A\cos\left[\omega t+(\varphi_0-\omega\frac{x_0}{u})\right]$$

表示在 x_0 处的质点的振动方程

x_0 处的质点振动曲线



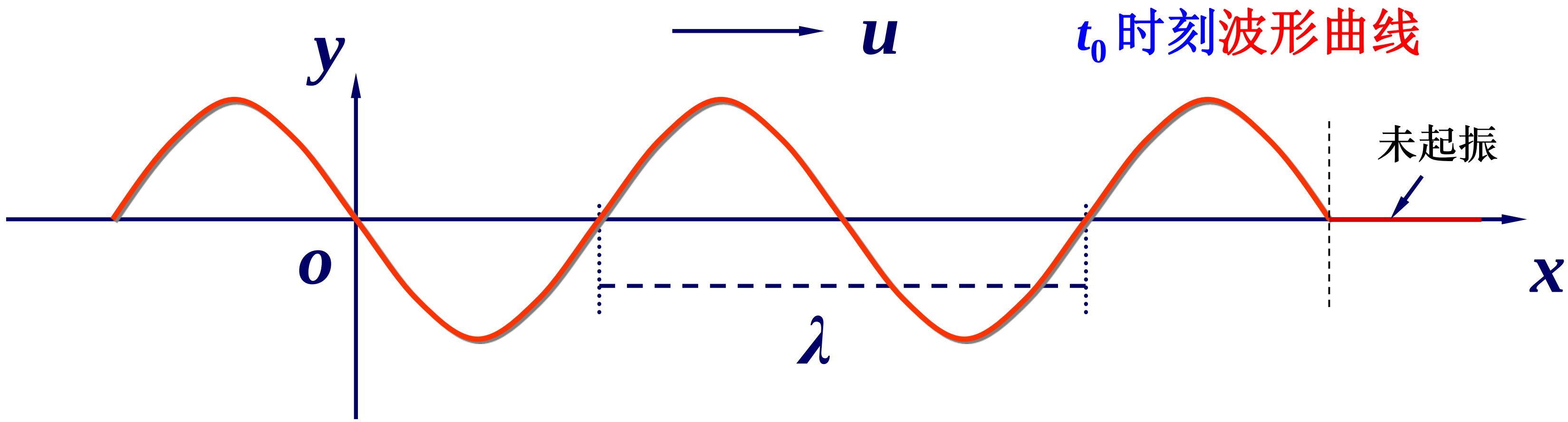
三、波函数的物理意义

$$y(x,t)=A\cos\left[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0\right]$$

2、t 不变，x 可变：

$$y(x,t_0)=A\cos\left[\omega(t_0-\frac{x}{u})+\varphi_0\right]$$

表示 t_0 时刻各质点离开平衡位置的位移与各质点的平衡位置坐标的关系：

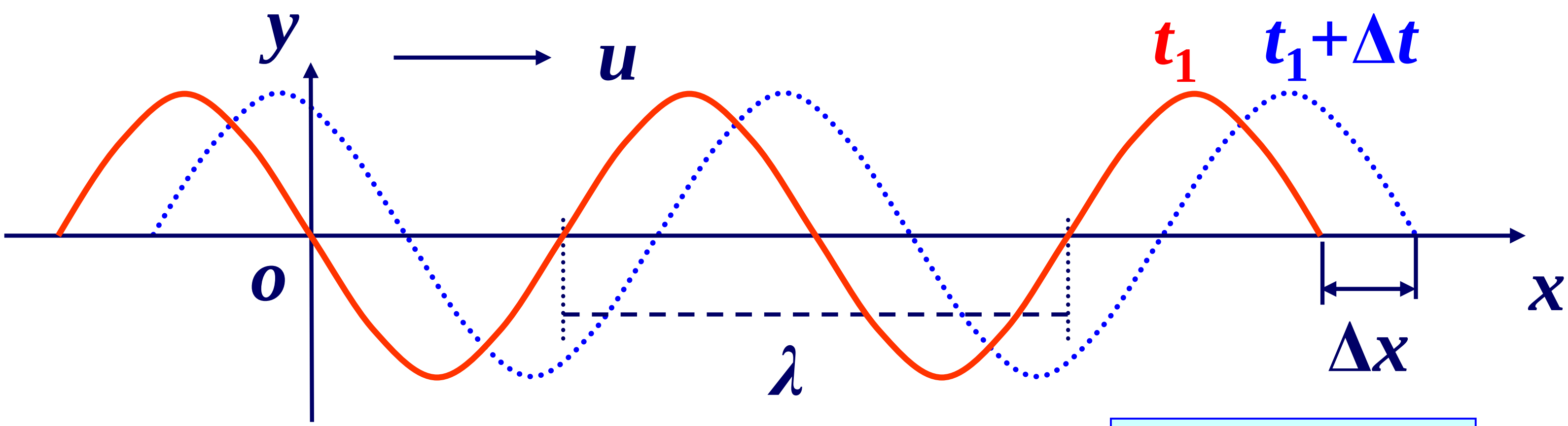


三、波函数的物理意义

$$y(x,t)=A\cos\left[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0\right]$$

3、t，x 均可变：

表示振动状态的传播



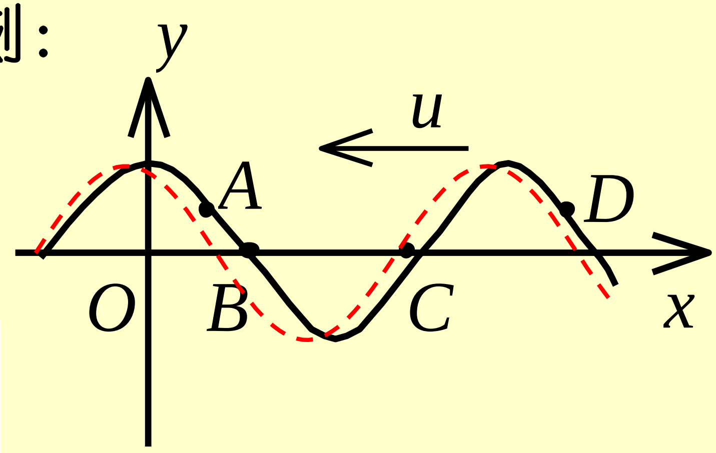
$$\Delta x=u\Delta t$$

在时间Δt 内整个波形沿波的传播方向平移了一段距离Δx

从实质上看：波动是振动的传播

从形式上看：波动是波形的传播

例 1：一平面简谐波以波速 u 沿 x 轴负方向传播，t 时刻波形曲线如图，则该时刻：



(A) A点振动速度大于零.

(B) B点静止不动.

(C) C点向下运动.

(D) D点振动速度小于零. ✓

四、质点的振动速度和振动加速度

以波沿 x 轴正方向传播为例

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

1、质点的振动速度

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-\omega A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

2、质点的振动加速度

$$a=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\omega^2 A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

平面简谐波的波函数（波动表达式）

原点O点的振动方程： $y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi_0\right]$$

“—”：沿 x 轴正方向传播；“＋”：沿 x 轴负方向传播；

φ_0 ：坐标原点处质点（或波源）振动的初相。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

$$y(x,t) = A\cos\left[2\pi(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi(\nu t \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0\right]$$

例 2：一平面简谐波沿 x 轴正方向传播， 已知振幅 A=2 m ，T=2 s，λ=2 m，在 t_0=0 时，坐标原点 o 处的质点位于平衡位置处、且向 y 轴正方向运动，

求：此平面简谐波的波动表达式。

解：设原点 o 处的质点振动方程为： $y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

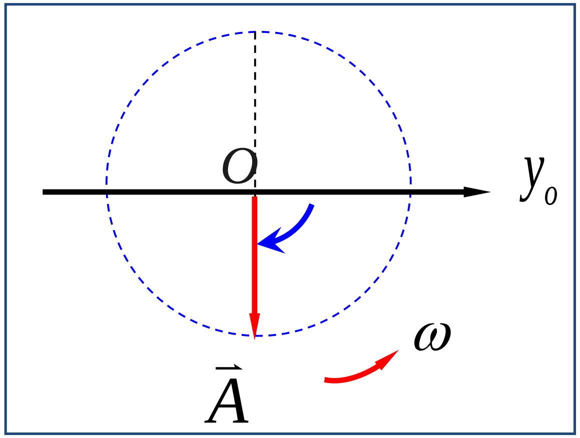
则波动方程为：$y = A\cos\left[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0\right] = A\cos\left[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0\right]$

---

o 点： $y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, $t_0 = 0$, $y_o(t_0 = 0) = 0$, $v_o(t_0 = 0) > 0$

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$y = 2\cos\left[2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{2}) - \frac{\pi}{2}\right] \text{(m)}$$



例 3：一平面简谐波在 $t_0=0$ 时刻的波形曲线如图所示，已知频率为 $\nu=250\text{Hz}$，

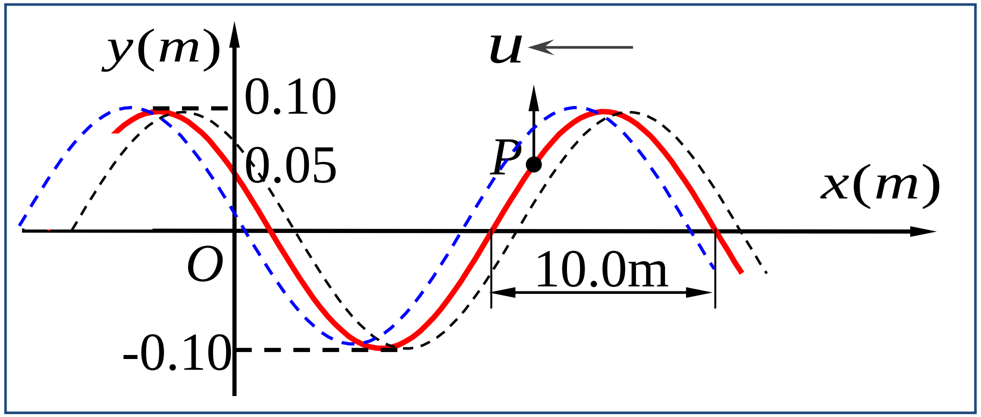
求：此平面简谐波的波动表达式。

解：设原点o处质点振动方程：

$$y_o = A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

则波动方程为：

$$y = A\cos\left[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi_0\right]$$

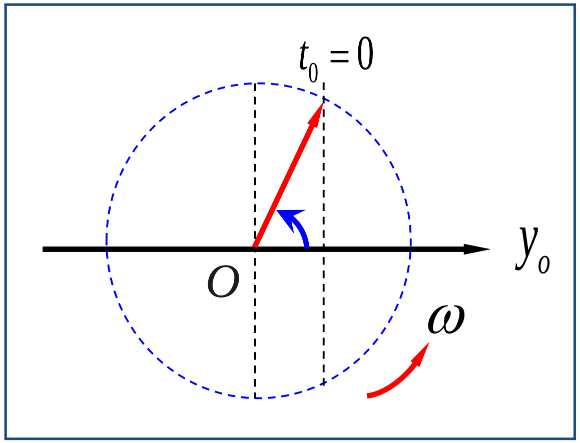


$$A=0.10(\text{m}),\ \omega=2\pi\nu=500\pi(\text{s}^{-1}),\qquad \lambda=20(\text{m}),\ u=\lambda\nu=5000(\text{m/s}),$$

O点： $y_o = A\cos(\omega t+\varphi_0)$,

$$t_0=0,\ y_o(t_0=0)=+\frac{A}{2},\ v(t_0=0)<0,\qquad \varphi_0=+\frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{y=0.10\cos\left[500\pi(t+\frac{x}{5000})+\frac{\pi}{3}\right](\text{m})}$$



例 4：一平面简谐波在 $t=2s$ 的波形曲线如图所示，已知：λ，A，u，

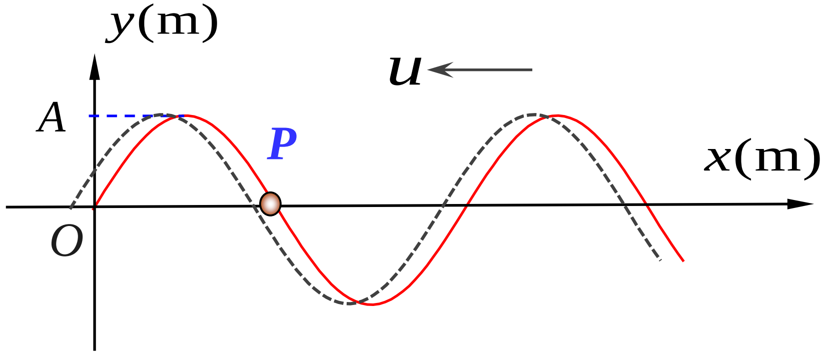
求：1）此平面简谐波的波动表达式；2）P 处质点的振动方程。

解：1）设原点o处的质点振动方程为：

$$y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

则波动方程为：$y = A\cos\left[\omega(t+\frac{x}{u}) + \varphi_0\right]$

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi\frac{u}{\lambda}$$

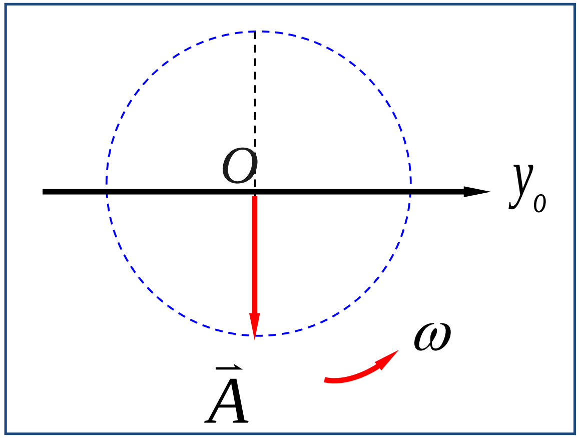


o点：$y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$，　$t=2s,\ y_o(t=2)=0,\ v(t=2)>0$

$$\varphi(t=2) = 2\omega + \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_0 = -2\omega - \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{y = A\cos\left[2\pi\frac{u}{\lambda}(t-2+\frac{x}{u}) - \frac{\pi}{2}\right]}$$



例 4：一平面简谐波在 $t=2\text{s}$ 的波形曲线如图所示，已知：λ，A，u，

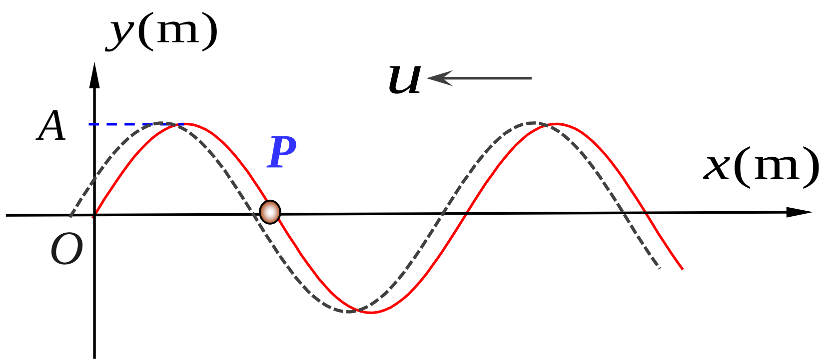
求：1）此平面简谐波的波动表达式；2）P 处质点的振动方程。

解：1）设原点o处的质点振动方程为：

$$y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

则波动方程为：$y = A\cos\left[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi_0\right]$

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi\frac{u}{\lambda}$$

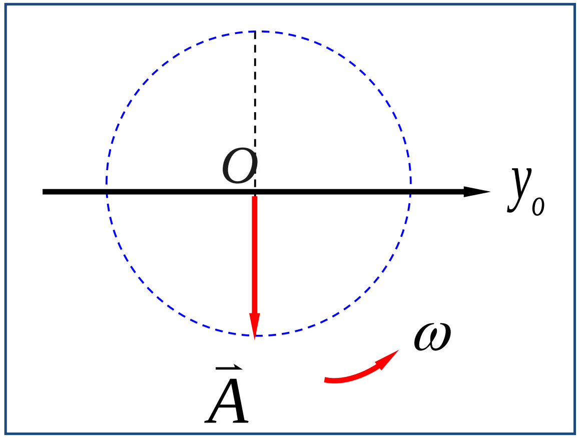


2) p点：

$$x_p = \frac{\lambda}{2},$$

$$y_p = A\cos\left[2\pi\frac{u}{\lambda}(t-2) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\boxed{y = A\cos\left[2\pi\frac{u}{\lambda}(t - 2 + \frac{x}{u}) - \frac{\pi}{2}\right]}$$



例 5：一平面简谐波在 $t_0=0$ 的波形曲线如图所示，

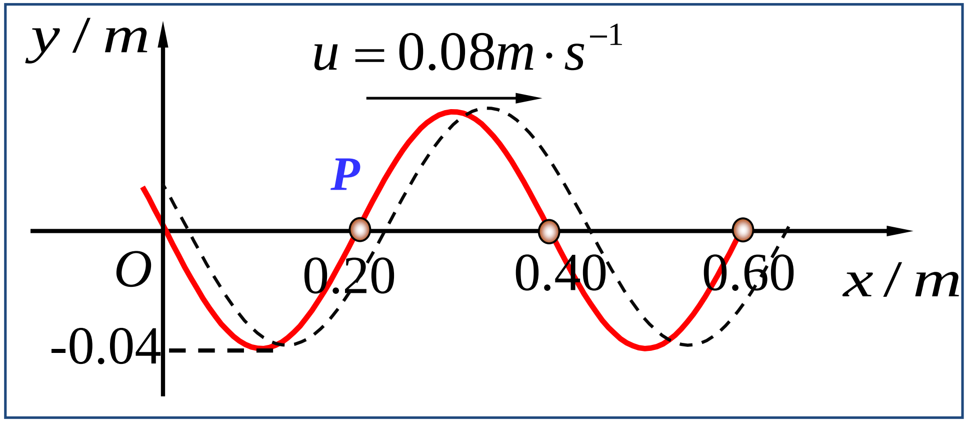
求：1）此平面简谐波的波动表达式；2）P 处质点的振动方程。

解：1）设原点o处质点振动方程：

$$y_o = A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

则波动方程为：

$$y = A\cos\left[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0\right]$$

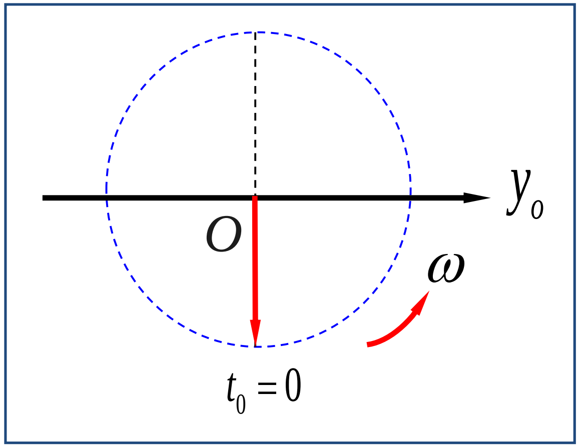


$$A=0.04(\mathrm{m}),\ \lambda=0.40(\mathrm{m}),\ u=0.08(\mathrm{m/s}),\qquad u=\lambda\nu,\ \omega=2\pi\nu=\frac{2}{5}\pi$$

O点：$y_o = A\cos(\omega t+\varphi_0)$,

$$t_0=0,\ y_o(t_0=0)=0,\ v(t_0=0)>0,\qquad \varphi_0=-\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{y=0.04\cos\left[\frac{2}{5}\pi(t-\frac{x}{0.08})-\frac{\pi}{2}\right](\mathrm{m})}$$



例 5：一平面简谐波在 $t_0=0$ 的波形曲线如图所示，

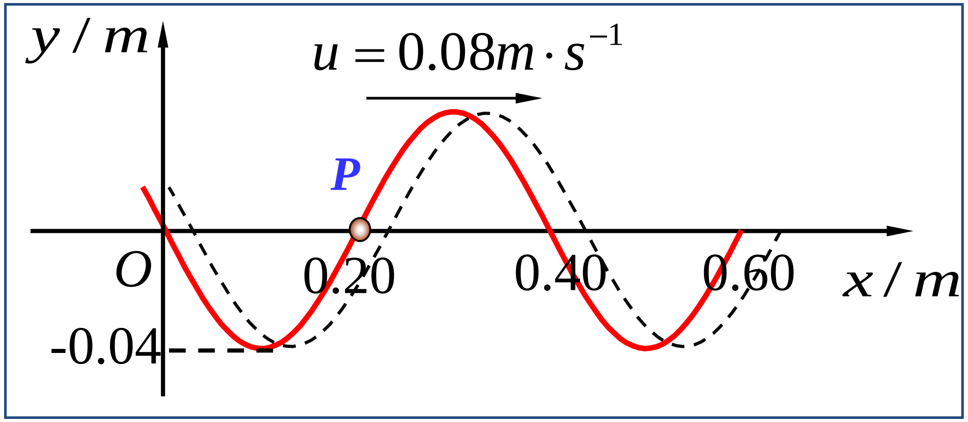
求：1）此平面简谐波的波动表达式；2）P 处质点的振动方程。

解：1）设原点o处质点振动方程：

$$y_o = A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

则波动方程为：

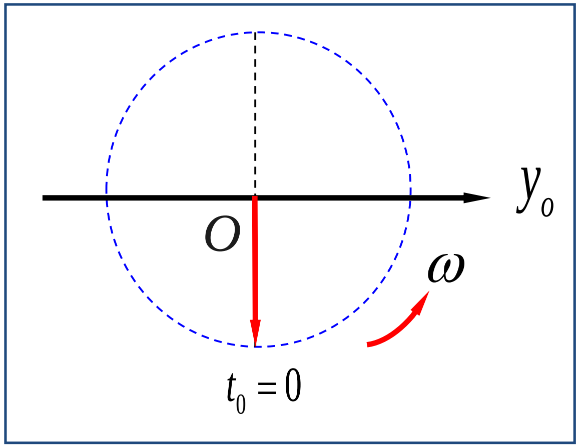
$$y = A\cos\left[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0\right]$$



2) p点：　$x_p = 0.20$ m,

$$y_p = 0.04\cos\left[\frac{2}{5}\pi t-\frac{3\pi}{2}\right](\text{m})$$

$$\boxed{y = 0.04\cos\left[\frac{2}{5}\pi(t-\frac{x}{0.08})-\frac{\pi}{2}\right](\text{m})}$$

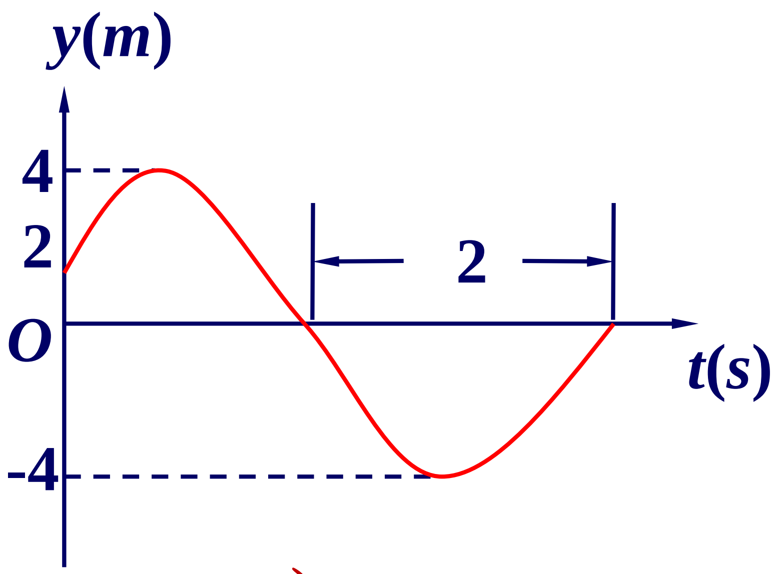


例 6：1）有一平面简谐波以波速 u=4m/s 沿 x 轴正方向传播，已知位于坐标原点处的质元的振动曲线如图所示，

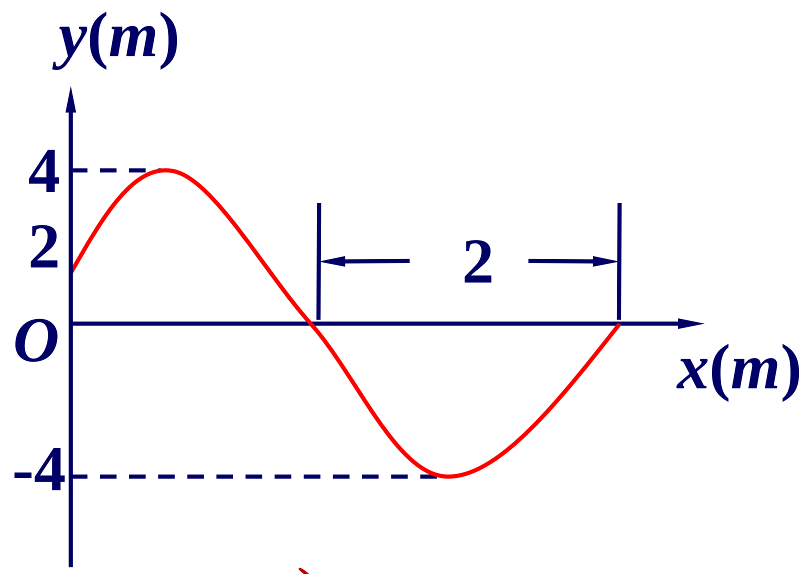
求：该平面简谐波函数。

2）有一平面简谐波以波速 u=4m/s 沿 x 轴正方向传播，已知 $t_0=0$ 时的波形曲线如图所示，

求：该平面简谐波函数。



1）



2）

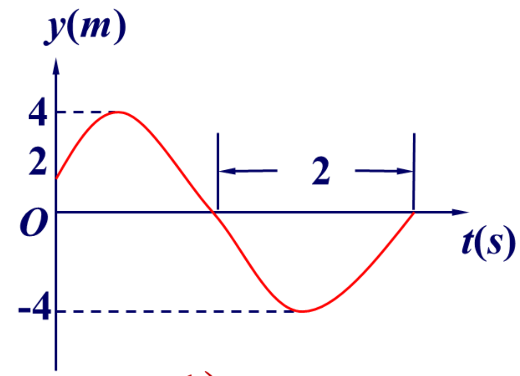
例 6：1）有一平面简谐波以波速 u=4m/s 沿 x 轴正方向传播，已知位于坐标原点处的质元的振动曲线如图所示，求：该平面简谐波函数。

解：1）设原点o处的质点振动方程为：

$$y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

则波动方程为：$y = A\cos\left[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0\right]$

$$A = 4\text{m},\ T = 4\text{s},\ \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}(\text{s}^{-1})$$

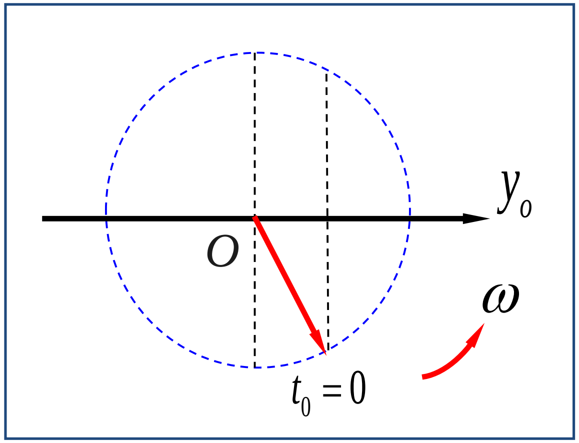


1）

O点： $y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$,

$$t_0 = 0,\ y_o(t_0 = 0) = \frac{A}{2},\ v_0(t_0 = 0) > 0,\quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{y = 4\cos\left[\frac{\pi}{2}(t - \frac{x}{4}) - \frac{\pi}{3}\right](\text{m})}$$



例 6： 2）有一平面简谐波以波速 u=4m/s 沿 x 轴正方向传播，

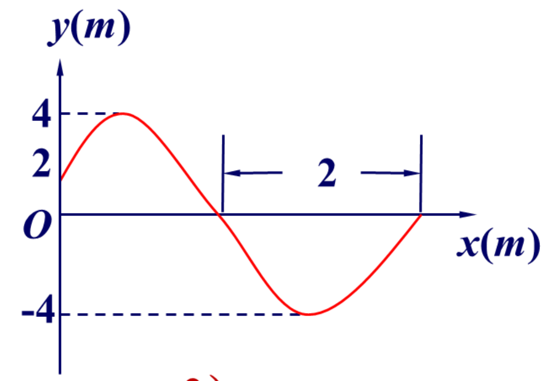
已知 t_0=0 时的波形曲线如图所示，

求：该平面简谐波函数。

解：2）设原点 o 处的质点振动方程为：

$$y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

则波动方程为：$y = A\cos\left[\omega(t - \dfrac{x}{u}) + \varphi_0\right]$

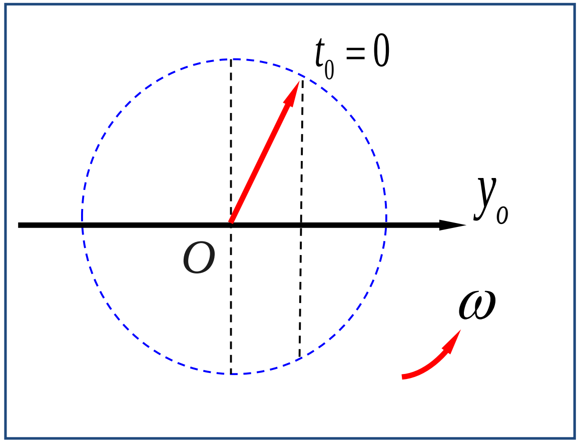


2）

$$A = 4\text{m},\ \lambda = 4\text{m},\ \omega = 2\pi\frac{u}{\lambda} = 2\pi(\text{s}^{-1})$$

O点： $y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$,

$$t_0 = 0,\ y_o(t_0 = 0) = \frac{A}{2},\ v_0(t_0 = 0) < 0, \quad \varphi_0 = +\frac{\pi}{3}$$



$$\boxed{y = 4\cos\left[2\pi(t - \frac{x}{4}) + \frac{\pi}{3}\right](\text{m})}$$