东北大学考试试卷（B/闭卷）

2022—2023 学年 秋季 学期

课程名称：概率论与数理

总分	一	二	三	四	五

说明：样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(2)=0.9772$.

上分位数：$t_{0.05}(8)=1.86$，$t_{0.025}(8)=2.31$，$t_{0.05}(9)=1.83$，$t_{0.025}(9)=2.26$，$\chi^2_{0.95}(9)=3.33$，$\chi^2_{0.05}(9)=16.92$，$\chi^2_{0.05}(8)=15.51$，$\chi^2_{0.95}(8)=2.73$.

一、计算题（8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 设 A 和 B 为随机事件，$P(A)=0.6$，$P(B)=0.5$，$P(A|B)=0.4$，求 $P(A\cup\bar{A}B)$.
2. 随机变量(X, Y)服从二维正态分布 $N(1, 2, 4, 9, -0.5)$，求 $E(XY)$.
3. 袋子里装着比赛用的乒乓球，每局比赛都随机取一球，每局比赛后将用过的球放回袋子。若袋子中有 5 个球，其中 3 个新球 2 个旧球，求在已知第二局取到是新球的条件下，第一局取到也是新球的概率。
4. 随机变量 X 的概率密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 随机变量 $Y=X^2$，求随机变量 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.
5. 随机变量 X 服从均匀分布 $U(0, 2)$，用切比雪夫不等式估算概率 $P(|X-1|<2)$.
6. 随机变量 X, Y 相互独立，分别服从二项分布 $B(2, p)$，$B(1, p)$，并且 $P(X>1)=\frac{1}{9}$，若随机变量 $Z=max(X, Y)$，求 Z 的分布律。
7. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0, 4)$的简单随机样本，常数 a, b 取何值时使得随机变量 $Y=a(X_1-2X_2)^2+b(2X_3-3X_4)^2$ 服从自由度为 2 卡方分布。
8. 某商店每周售出的某种贵重商品的数量服从泊松分布 $P(2)$，每周售出该商品的数量是独立的，用中心极限定理估算 50 周内至少卖出 120 件该商品的概率。

二、计算题（3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

袋子中有 2 个红球，3 个白球，现从袋子中无放回取 3 次球，随机变量 X 表示取到的白球总数，Y 表示第三次取到的白球个数，求：

1. 随机变量(X, Y)的联合分布律；
2. 随机变量 $Z=3X+2Y-1$ 的期望；
3. 随机变量(X, Y)的协方差.

三、计算题（3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

随机变量(X, Y)的联合概率密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}Ax^{-3}y^{-4}, & x\ge 1, y\ge 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 求：

1. 常数 A 及概率 $P(Y\le X)$;
2. 边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 与条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$;
3. 随机变量 $Z=min(X, Y)$的概率密度函数 $f_Z(z)$.

四、计算题（2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

某电解质溶液中电解质浓度（单位：$mol.kg^{-1}$）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现随机抽取 9 份样品，测得电解质浓度的样本均值 $\bar{x}=1.2$，样本方差 $s^2=0.16$，求：

1. 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，是否可以认为该电解质溶液浓度的均值 $\mu=1.4$;
2. 该电解质溶液浓度方差 σ^2 的置信水平为 95%的置信上限(保留两位小数)。

五、计算题（2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

已知总体 X 的分布律为

X	0	1	2
P	$(1-\theta)^2$	$2\theta(1-\theta)$	θ^2

参数 $\theta(0<\theta<1)$ 未知，现从总体 X 中随机抽取容量为 n 的简单随机样本，其中样本中有 n_0 个 0，n_1 个 1，n_2 个 2，求：

1. 参数 θ 的矩估计；
2. 参数 θ 的最大似然估计。

密

东北大学考试试卷（B闭卷）

2022—2023 学年春季学期

课程名称：概率论与数理统计

总分	一	二	三	四	五	六

一. 计算题 （共3小题，每小题6分，共18分）

1.设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\frac{2}{3}$，求 $P(AB|\overline{C})$。

2. 设 A,B 两工厂产品的次品率分别为 1%和 2%，先从由 A 和 B 的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，问该次品是由哪家工厂生产的可能性大。

3. 设随机变量 $X\sim P(\lambda)$，$P(X=1)=P(X=2)$，求 $P(0<X^2<3)$。

二. 计算题 （共3小题，每小题6分，共18分）

1. 设 A,B 为随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$，令 $X=\begin{cases}1, A\text{发生}\\0, A\text{不发生}\end{cases}$，$Y=\begin{cases}1, B\text{发生}\\0, B\text{不发生}\end{cases}$，求二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律。

2.已知随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，随机变量 $Y=e^X$，求 Y 的密度函数。

3. 设总体 X 的密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2}, \theta<x<2\theta\\0, \text{其它}\end{cases}$（其中 $\theta(\theta>0)$ 是未知参数），$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，若 $a\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，求参数 a 的值。

三. 计算题 （共3小题，每小题6分，共18分）

1. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布，且其方差为 σ^2，令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，求 $D(X_1-\overline{X})$ 和 $Cov(X_1,\overline{X})$。

2. 某学校有 5000 名学生，每人以 20%的概率去图书馆自习，图书馆应至少设多少个座位，才能以 95%的概率保证去上自习的同学都有座位？

3. 设总体 X 服从指数分布 $E(1)$，$X_1,X_2,\cdots X_5$ 是来自总体 X 的简单随机样本，求 $P(\min\{X_1,X_2,\cdots X_5\}<\frac{1}{2})$。

四、计算题 （共3小题，每小题6分，共18分）

设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{3}, 0<x<1, 0<y<2\\0, \text{其它}\end{cases}$

1. 求 $f_X(x),f_Y(y)$，并判断随机变量 X,Y 的独立性；

2. 求 $f_{Y|X}(y|x)$ 和 $f_{X|Y}(x|y)$；

3.. 求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

五. 计算题 （每题 7 分，共 14 分）

1. 已知一批罐头的重量 X（单位：千克）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$（其中 μ,σ^2 均未知），从中随机地抽取 11 听罐头，得到重量的平均值为 1（千克），标准差为 0.5（千克），求 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间。（计算结果保留两位小数）

2. 某化工厂生产化学制品的日产量 X（吨）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，当设备正常工作时一天的产量为 800 吨，现测得五天产量的平均值为 790 吨，标准差为 7 吨，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，是否可以认为该设备处于正常工作状态？

六. 计算题 （每题 7 分，共 14 分）

设总体 X 的密度函数为 $f(x;\theta)=\dfrac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}$，其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,\ldots,X_n$ 是来自 X 的简单随机样本。

1. 求参数 θ 的矩估计。
2. 求参数 θ 的最大似然估计。

试卷中可能用到的上分位数及其它数值：

$\Phi(1)\approx0.8413$， $\Phi(2)\approx0.9772$， $z_{0.05}\approx1.645$， $z_{0.025}\approx1.96$， $t_{0.025}(4)\approx2.78$，

$t_{0.025}(5)\approx2.57$，$t_{0.05}(4)\approx2.13$，$t_{0.05}(5)\approx2.02$，$\chi^2_{0.025}(10)\approx20.48$，$\chi^2_{0.975}(10)\approx3.25$，

$\chi^2_{0.025}(11)\approx21.92$，$\chi^2_{0.975}(11)\approx3.81$，$\sqrt{5}\approx2.236$

东北大学考试试卷（B/闭卷）

2022—2023 学年春季学期

课程名称：高等数学①(二)

总分	一

一、 填空题 （每题 3 分，共 15 分）

1. 设$f(x)$可微分,$x-2z=f(y-3z)$，则$2\dfrac{\partial z}{\partial x}+3\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

2. 微分方程的$\dfrac{dy}{dx}=e^{x-y}$通解为__________.

3. 曲面$e^z-z+xy=3$在点（2，1，0）处的切平面方程是________.

4. 交换二次积分$\int_0^1 dx\int_{2-\sqrt{1-x^2}}^{x+1} f(x,y)dy$ 的积分次序__________.

5. 设$\sum$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧，则积分$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dxdy=$__________.

二、(每题 5 分，共 10 分)

1. 已知三角形顶点$A(1,-1,2),B(5,-6,2),C(1,3,-1)$，计算$AC$边上高的长度.

2. 计算二重积分$\iint\limits_D x\sqrt{y}dxdy$，其中$D$是由两条抛物线$y=\sqrt{x}$，$y=x^2$所围成.

三、(每题 6 分，共 18 分)

1. 求过点$(-1,2,3)$垂直于直线$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$而与平面$7x+8y+9z+10=0$的平行的直线方程.

2. 计算累次积分$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1\dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy$.

3. 求微分方程$y''+3y'+2y=3xe^x$的通解.

四、(每题 6 分，共 18 分)

1. 设$u=f(x^2+y^2,z)$，f具有二阶连续偏导数，而$z=z(x,y)$由方程$x+y-z=e^z$确定，求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

二	三	四	五	六	七	八	九	十

2. 设曲面$\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，求$\iint\limits_{\Sigma}(x+|z|)dS$.

3. 求函数$u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$在点$(1,2,-2)$处沿曲线$\begin{cases}x=t\\ y=2t^2\\ z=-2t^4\end{cases}$在该点处的与参数增大方向一致的切向量的方向导数.

五、（6 分）计算$I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$，其中$\Sigma$为曲面$z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$的上侧.

六、（7 分）设$f(x)$可导，且$f(\pi)=1$，试求$f(x)$，使$I=\int\limits_{AB}[\sin x-f(x)]\dfrac{y}{x}dx+f(x)dy$与路径无关，并求$A$，$B$两点坐标分别为$(1,0)$，$(\pi,\pi)$时的曲线积分.

七、（7 分）求曲线$x^3+y^3-xy=1(x\geq 0,y\geq 0)$上的点到原点的最长和最短距离.

八、（7 分）设薄片所占的区域是介于两个圆$\rho=a\cos\theta,\rho=b\cos\theta(0<a<b)$之间的平面闭区域，求该薄片（$\rho=1$）的质心.

九、（7 分）设 A（1, 2），B（3, 4），质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周按逆时针从 A 运动到 B 的过程中受到力$\overrightarrow{F}$的作用，$\overrightarrow{F}$的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于线段 OP 且与y轴正向的夹角小于$\dfrac{\pi}{2}$，求变力$\overrightarrow{F}$对质点 P 所做的功.

十、（5 分）试证：$z=\sqrt{|xy|}$在点$(0,0)$处连续，偏导数存在，但是不可微分.