第二章 矩阵

§1 矩阵的概念及其基本运算

矩阵是线性代数中一个重要的数学概念，在线性代数中起着极其重要的作用，本章将引进矩阵的概念，并讨论矩阵的基本运算、逆矩阵、分块矩阵以及初等变换和初等矩阵。重点是逆矩阵的计算和矩阵方程的求解以及初等变换和初等矩阵之间的关系。

变量个数与方程个数不相等的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4.1)$$

其系数由m行n列的m×n个数

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

构成，不能形成行列式. 因此，需进一步引入矩阵的概念.

定义2.1 由$m\times n$个数a_{ij} $(i=1, 2, \dots, m, j=1, 2,\dots, n)$组成的$m$行$n$列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为m行n列**矩阵**,简称$m\times n$矩阵, 记为:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

组成矩阵的这$m\times n$个数称为矩阵**A**的元素, a_{ij}称为矩阵**A**的第i行第j列元素. 矩阵**A**也简记为(a_{ij})或$(a_{ij})_{m\times n}$或$\mathbf{A}_{m\times n}$.

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素为复数的矩阵称为**复矩阵**，本课程中，除特殊说明外，一般都仅讨论实矩阵.

只有一行的矩阵称为行矩阵也称为**行向量**，写为：

$\boldsymbol{A}=(a_1\ \ a_2\ \ \ldots\ a_n)$，或 $\boldsymbol{A}=(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)$.

只有一列的矩阵称为列矩阵也称为**列向量**，写为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

行数和列数都等于n的矩阵称为n阶**方阵**，记为$\boldsymbol{A}_n$.

1×1矩阵$\boldsymbol{A}=(a)$只有一个元素，看成数一样，记为$\boldsymbol{A}=a$.

n阶方阵左上角到右下角的元素也称为主对角线元素，主对角线以外全为零的方阵称为对角矩阵. 对角矩阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix} \qquad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

也记为 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n)$.

若矩阵**A**, **B**的行数和列数都相等，称**A**, **B**为同型矩阵.

元素全是0的矩阵称为零矩阵，$m\times n$零矩阵记为$\mathbf{O}_{m\times n}$或$\mathbf{O}$.

注意，不同型的零矩阵是不同的.

下面介绍矩阵的基本关系及运算

一、相等

设有两个矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B}=(b_{ij})_{s\times t}$,
如果m=s, n=t, 并且

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1, 2,\dots, m;\ j=1, 2,\dots, n),$$

则称矩阵**A**与**B**相等, 记为**A=B**.

两个矩阵相等, 是指两个矩阵完全一样, 即阶数相同而且对应的元素完全相等.

二、加法

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$, $\mathbf{B}=(b_{ij})_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$,
则矩阵$C=(c_{ij})_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ (其中$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=1, 2,\ldots, \mathrm{m}$; $j=1, 2,\ldots, \mathrm{n}$)
称为A与B的和, 记作A+B. 即

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意:只有两个矩阵阶数相同时才能相加.

例1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}, \text{则 } \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\ 3 & 8 & 6\end{pmatrix}.$$

元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，记为$\mathbf{O}$. 注意：阶数不同的零矩阵是不同的.

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵$(-a_{ij})_{m\times n}$为$\mathbf{A}$的**负矩阵**，记为$-\mathbf{A}$.

定义两个矩阵的**减法**为：$\mathbf{B}-\mathbf{A}=\mathbf{B}+(-\mathbf{A})$.

矩阵加法满足下列运算规律(设$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$是同阶矩阵):

(i) 交换律：$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

(ii) 结合律：$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

(iii) $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$

(iv) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$

三、数乘法

设k为数, $\mathbf{A}=(a_{\mathrm{ij}})_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$为矩阵, 则矩阵

$$(ka_{\mathrm{ij}})_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$$

称为k与$\mathbf{A}$的数乘, 记作$k\mathbf{A}$或$\mathbf{A}k$. 即

$$\mathrm{k}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathrm{k}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

数乘矩阵满足下列运算规律(设**A**、**B**是同阶矩阵)

(i) $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$; (这里的1为数)

(ii) 关于数乘的结合律: $(kl)\mathbf{A}=k(l\,\mathbf{A})$; ($k$, l为数)

(iii) 关于数的分配律: $(k+l)\,\mathbf{A}=k\mathbf{A}+l\mathbf{A}$; ($k$, l为数)

(iv) 关于矩阵的分配律: $k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}$. ($k$为数)

四、(矩阵之间的)乘法

设矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times p}$, 若记

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},$$

若**C**=**AB**, 则乘积矩阵**C**的第i行第j列元素c_{ij}就是**A**的第i行和**B**的第j列的乘积。

i=1,2,…, m; j=1,2,…,p)

则矩阵$\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\times p}$称为**A与B的乘积**,记作 **C=AB**. 即

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

两矩阵**A**, **B**可乘的唯一条件: 前面矩阵**A**的列数等于后面矩阵**B**的行数.

当**A**, **B**可乘时, 它们的积**C**=**AB**满足:

C的行数=**A**的行数,

C的列数=**B**的列数.

例2　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

求AB.

解

$$AB=\begin{pmatrix}1\times1+2\times0+3\times3 & 1\times0+2\times1+3\times(-1) & 1\times(-1)+2\times2+3\times0\\ 4\times1+5\times0+6\times3 & 4\times0+5\times1+6\times(-1) & 4\times(-1)+5\times2+6\times0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10 & -1 & 3\\ 22 & -1 & 6\end{pmatrix}$$

注意：这里AB有意义，但BA无意义.

例3 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

求AB和BA.

解

$$AB=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\quad ,\quad BA=\begin{pmatrix} b_{1j}a_{i1} & b_{1j}a_{i2} & \cdots & b_{1j}a_{in} \\ b_{2j}a_{i1} & b_{2j}a_{i2} & \cdots & b_{2j}a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{nj}a_{i1} & b_{nj}a_{i2} & \cdots & b_{nj}a_{in} \end{pmatrix}$$

注意：这里AB的阶数一般不等于BA的阶数.

例4 已知矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & -8\\ -2 & 4\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

求AB和BA.

解

$$AB=\begin{pmatrix}-12 & -24\\ 6 & 12\end{pmatrix}\quad BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

由此例题可见:

(1) 即使AB与BA同阶, 但一般情况下AB$\neq$ BA.

特殊情形: 对于两个n阶方阵A, B, 若AB=BA, 则称A与B是可交换的.

(2) 虽然A$\neq$O, B$\neq$O, 但是(也有可能)BA=O.

从而由AB=O一般不能推出A和B中有一个是零矩阵的结论.

即使A$\neq$O, 由AX=AY(一般情况下)也不能得到X=Y的结论.

矩阵的乘法满足下列运算规律(设运算都是有意义的):

(i) 结合律：$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

(ii) 分配律：$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$; (左分配律)

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$; (右分配律)

(iii) $k(\mathbf{AB})=(k\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(k\mathbf{B})$. ($k$是数)

注1：矩阵乘法一般不满足交换律，即对于两个可乘的矩阵**A**与**B**，一般情况下

$$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}.$$

注2：在某些(特殊)条件下或对某些特殊的矩阵**A**与**B**，可能存在

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$$

的情形.

对角线元素全相等的对角矩阵

$$\mathrm{diag}(\lambda,\lambda,\ldots,\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\end{pmatrix}$$

也称为**数量矩阵**.

对角线元素全等于1的数量矩阵, 即

$$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

称为**单位矩阵**. n阶单位矩阵记为$\mathbf{E}_n$或$\mathbf{I}_n$, 或$\mathbf{E}$, $\mathbf{I}$.

单位矩阵具有如下性质:

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_n=\mathbf{A}_{m\times n},\quad \mathbf{E}_m\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times n}.$$

设A为方阵，定义A的幂为：

$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E},\ \mathbf{A}^1 = \mathbf{A},\ \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^1\mathbf{A}^1, \ldots,\ \mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A}^1$.(k为整数)

矩阵的幂满足以下运算规律(设A与B是同阶方阵，k和l是非负整数)

(i) $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l}$；

(ii) $(\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl}$;

(iii) 若AB=BA，则$(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k = \mathbf{B}^k\mathbf{A}^k$;

当AB≠BA时，此等式一般不成立

注意：当$(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$时，一般也不一定成立AB=BA.

例如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

有 $(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$ (k=0,1, 2,…)，但AB≠BA.

五 矩阵的转置

设矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$，则矩阵$\mathbf{B}=(b_{ij})_{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}$(其中$b_{ij}=a_{ji}$，$i$=1, 2,…, n; j=1, 2,…, m) 称为**A的转置**，记作$\mathbf{B}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$，或$\mathbf{A}'$，即

若$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

矩阵的转置满足下列运算规律(设运算都是有意义的)：

(i) $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$；

(ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$；

(iii) $(k\mathbf{A})^{\mathrm{T}}=k\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$；($k$是数)

(iv) $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

注意此式中各矩阵的位置，此结论是可以证明或验证的.

称满足条件$\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$的矩阵$\mathbf{A}$为对称矩阵. 显然对称矩阵是方阵.

设$\mathbf{A}=(a_{\mathrm{ij}})_{\mathrm{n}}$，则$\mathbf{A}$是对称矩阵$\Leftrightarrow a_{\mathrm{ij}}= a_{\mathrm{ji}}$，即

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对称矩阵的元素以主对角线为轴对称.

称满足条件$\mathbf{A}=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$的矩阵$\mathbf{A}$为反对称矩阵. 反对称矩阵是方阵.

设$\mathbf{A}=(a_{\mathrm{ij}})_{\mathrm{n}}$，则$\mathbf{A}$是反对称矩阵$\Leftrightarrow a_{\mathrm{ij}}=-a_{\mathrm{ji}}$,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

注：反对称矩阵$\boldsymbol{A}$的对角线元素必定为0.

六 方阵的行列式

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_n$是n阶方阵，则n阶行列式$|a_{ij}|_n$称为$\mathbf{A}$的行列式，记为$\det\mathbf{A}$(或$|\mathbf{A}|$)，即$\det\mathbf{A}=|\mathbf{A}|=|a_{ij}|_n$.

方阵的行列式满足以下运算规律(设$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$是n阶方阵，k是常数)

(i) $\det(\mathbf{A}^T)=\det\mathbf{A}$;

(ii) $\det(k\mathbf{A})=k^n\det\mathbf{A}$;

(iii) $\det(\mathbf{AB})=\det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}$.

注意：关于两个矩阵和的行列式$\det(\mathbf{A}+\mathbf{B})$的计算，目前尚未发现(面向一般情形的)简便可行的运算定律.

§2 逆矩阵

问题: 能否定义"矩阵除法"———矩阵乘法的逆运算?

联想"数的除法"与数的乘法的关系:

$ax=b$, 且 $xa=b$. ⟺ $x=b \div a$

(当 $a \neq 0$ 时)

也可写作:

$x=ba^{-1}$

或

$x=a^{-1}b$

对于矩阵**A, X, B**, 若**AX=B** 或 **XA=B**, 能否……?

由于矩阵乘法运算不满足交换律，所以，由**AX**=**B**和**XA**=**B**所对应的矩阵**X**一般是不同的.

例如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

因此，定义“矩阵除法”是困难的. 为解决矩阵乘法运算的逆运算，我们引进逆矩阵的概念.

定义2.2 对n阶方阵A，如果存在n阶方阵B，使

$$AB=BA=E,$$

则称方阵A是**可逆**的，且称B是A的**逆矩阵**，记为$B=A^{-1}$.

返回推论

可逆矩阵又称为**非异阵**或**非奇异阵**.

若矩阵A是可逆矩阵，则

由$BA=C$可得$B=CA^{-1}$；　由$AB=C$可得$B=A^{-1}C$,

这就解决了矩阵乘法运算的逆运算问题.

注：如果A不是可逆矩阵，一般由$AB=C$或$BA=C$不能唯一确定矩阵B.

显然单位矩阵E是可逆的，且$E^{-1}=E$，但零矩阵不可逆.

问题：满足什么条件的矩阵是可逆的?逆矩阵是不是唯一的?

定理2.1 若矩阵A可逆，则A的逆矩阵是唯一的.

证明：设B, C都是A的逆矩阵，则有

$$\mathbf{B}=\mathbf{BE}=\mathbf{B}(\mathbf{AC})=(\mathbf{BA})\mathbf{C}=\mathbf{EC}=\mathbf{C}.$$

证毕.

命题：可逆矩阵满足以下运算规律(设A与B是n阶可逆矩阵，k是常数)

(i) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$;　　(ii) $(k\mathbf{A})^{-1}=(1/k)\,\mathbf{A}^{-1}$, 其中$k\neq 0$;

(iii) $(\mathbf{A}^{T})^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^{T}$;　　(iv) $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

证明　仅证(iv)，其它完全类似.

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})=\mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{E}.$$

$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB})=\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{E}$，所以(iv)成立.

证毕.

对n阶方阵A，其行列式|A|的各元素的代数余子式A_{ij}也称为方阵A的代数余子式.

由方阵A的代数余子式组成的如下形式的矩阵

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为方阵A的伴随矩阵，伴随矩阵也记为adj(A).

定理2.2 对任意方阵A有：$\mathbf{AA}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$.

证 设$\mathbf{A}=(a_{ij})_n$，记$\mathbf{AA}^*=(b_{ij})_n$，则

$$b_{ij}=a_{i1}\mathbf{A}_{j1}+a_{i2}\mathbf{A}_{j2}+\ldots+a_{in}\mathbf{A}_{jn}=|\mathbf{A}|\delta_{ij} \quad (i, j=1,2,\ldots,n).$$

故$\mathbf{AA}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$. 类似地，也成立$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$. 证毕.

定理2.3 (方)矩阵A可逆的充分必要条件是$|A|\neq 0$.

当$|A|\neq 0$时，有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

其中A^*为矩阵A的伴随矩阵.

证　必要性：设A可逆，则$AA^{-1}=E$，所以$|A||A^{-1}|=|E|=1$,所以$|A|\neq 0$. (而且$|A^{-1}|$等于$|A|$的倒数)

充分性：若$|A|\neq 0$，则由$AA^*=A^*A=|A|E$

得

$$A\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{|A|}A^*A=E$$

可知A可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

证毕.

推论 设A是方阵，若AB=E，则B=A^{-1}.

证 因AB=E，所以$|A|\neq 0$，因而A^{-1}存在，于是

$$B=EB=A^{-1}AB=A^{-1}.$$

证毕.

推论 设A是方阵，若BA=E，则B=A^{-1}.

注：以上推论意味着：若要验证矩阵A是否可逆，只需“单侧”验证定义2.2即可.

例5 求方阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

解 因为$|\mathbf{A}|=5\neq 0$，所以**A**可逆，并且

$$A_{11}=4,\quad A_{12}=-1,$$

$$A_{21}=-3,\quad A_{22}=2,$$

因此**A**的伴随矩阵为

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

总结: 2阶方阵**A**的伴随矩阵(与**A**相比)
对角元素互换;
非对角元素乘负号.

故得**A**的逆矩阵为

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/5 & -3/5\\ -1/5 & 2/5\end{pmatrix}.$$

例6 求方阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

解 因为$|\mathbf{A}|=10\neq 0$，所以**A**可逆，又

$A_{11}=-1$， $A_{12}=5$， $A_{13}=-1$

$A_{21}=-5$， $A_{22}=5$， $A_{23}=5$

$A_{31}=7$， $A_{32}=-5$， $A_{33}=-3$

所以有

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}-1 & -5 & 7\\ 5 & 5 & -5\\ -1 & 5 & -3\end{pmatrix},\qquad \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1 & -5 & 7\\ 5 & 5 & -5\\ -1 & 5 & -3\end{pmatrix}$$

例7 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&3\\3&1&2\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix},\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&3\end{pmatrix}$$

求解矩阵方程**AXB=C.**

解 由例6知**A**可逆. 而$|\mathbf{B}|=-1\neq0$, 故**B**也可逆.

由**AXB=C**，得

$\mathbf{X}=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1})=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AXB})\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}$.

又因为

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1&-5&7\\5&5&-5\\-1&5&-3\end{pmatrix}\qquad\mathbf{B}^{-1}=-\begin{pmatrix}5&-3\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$$

所以有

$$\mathbf{X}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1 & -5 & 7\\ 5 & 5 & -5\\ -1 & 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4 & 11\\ 0 & -5\\ -6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -10 & 5\\ 32 & -19\end{pmatrix}$$

例8. (02研) 已知A, B是三阶方阵,且满足$2A^{-1}B=B-4E$, 其中E是三阶单位矩阵.

(1) 求证矩阵$A-2E$可逆;

(2) 求$A-2E$的逆矩阵.

(1) 证明: $2A^{-1}B=B-4E \Rightarrow 2B= AB- 4A$

$$\Rightarrow (A-2E)B=4A$$

于是$|A-2E||B|=|4A|=4^3|A|\neq 0$, 即$A-2E$可逆. (同时说明B也可逆.)

(2) 由 $(A-2E)B=4A \Rightarrow (A-2E)B(1/4)A^{-1}= E$

于是, $(A-2E)^{-1} = (1/4)BA^{-1}$ 再由题设条件

$$= (1/4)B(1/2)B^{-1}(B-4E) = (1/8)(B-4E).$$

推荐自修: 教材P37: 例2.7

矩阵在线性方程组求解中也有重要作用. 对方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

记矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

则方程组可写成矩阵形式: $\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$.

矩阵$\mathbf{A}$称为方程组的系数矩阵.

如果矩阵$|\mathbf{A}|\neq 0$，则$\mathbf{A}$可逆，于是方程组的解为

$$\boldsymbol{x}=\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^{*}\boldsymbol{\beta}.$$

故

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k1} \\ \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k2} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kn} \end{pmatrix}$$

而对于其中的每个$\sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$，有

$$\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj} = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}$$

$$= b_1 \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & 1 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ b_n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 1 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

因此,

$$\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_j.$$

于是,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k1} \\ \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k2} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{D_1}{D} \\ \dfrac{D_2}{D} \\ \vdots \\ \dfrac{D_n}{D} \end{pmatrix}.$$

这就是第一章中Cramer法则的结论.

§3　分块矩阵

对于行数和列数较大的矩阵进行运算通常是复杂的.

可以采用所谓的“分块”法，将“大”矩阵的运算转换成“小”矩阵的运算.

所谓分块法，即用若干条(虚拟的)横线和纵线将矩阵A划分成许多小矩阵，每一个小矩阵称为A的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

例如，可以将矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

按下述方法(虚拟地)分块：

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

记为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{A}_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{22}=\begin{pmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

也可将矩阵$\mathbf{A}$(根据实际需要)按其他方案分块:

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \qquad \mathbf{A}=\left(\begin{array}{c:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \qquad \mathbf{A}=\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

矩阵具体如何分块，一般没有限制. 但应突出特点，便于简化处理. 灵活恰当的运用分块矩阵，可获得事半功倍的效果.

分块矩阵的运算规则与一般矩阵的运算规则很类似，分别说明如下:

分块矩阵的相等

(1) 设**A**, **B**都是m×n矩阵，且它们采用相同的分块法：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr}\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{B}_{sr}\end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{A}_{ij}$与$\mathbf{B}_{ij}$ (i=1, 2,…, s; j=1, 2,…, r)的行数相同，列数相同，则

$$\mathbf{A}=\mathbf{B} \iff \mathbf{A}_{ij}=\mathbf{B}_{ij}\ (i=1, 2,\ldots, s;\ j=1, 2,\ldots, r)$$

分块矩阵的加法

(2) 设**A**, **B**都是m×n矩阵，且它们采用相同的分块法：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr}\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{B}_{sr}\end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{A}_{ij}$与$\mathbf{B}_{ij}$ (i=1, 2,…, s; j=1, 2,…, r)的行数相同，列数相同，则

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r}+\mathbf{B}_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{A}_{s1}+\mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr}+\mathbf{B}_{sr}\end{pmatrix}.$$

(3) 设$\mathbf{A}$是m×n矩阵，且采用分块法：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr}\end{pmatrix}$$

则：

对于任意的数k，有

$$k\mathbf{A}=\begin{pmatrix}k\mathbf{A}_{11} & \cdots & k\mathbf{A}_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ k\mathbf{A}_{s1} & \cdots & k\mathbf{A}_{sr}\end{pmatrix}.$$

分块矩阵的
数乘

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & \mathbf{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \mathbf{A}_{sr}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}.$$

分块矩阵的
转置

分块矩阵的乘法

(4)设有两个矩阵$\mathbf{A}_{m\times n}$, $\mathbf{B}_{n\times l}$, 分块成:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{st}\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{B}_{t1} & \cdots & \mathbf{B}_{tr}\end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{A}_{i1}$, $\mathbf{A}_{i2}$,…, $\mathbf{A}_{it}$, 的列数分别等于$\mathbf{B}_{1j}$, $\mathbf{B}_{2j}$,…, $\mathbf{B}_{tj}$,的行数, (i=1,2,…,s, j=1,2,…,r). 则有

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{C}_{s1} & \cdots & \mathbf{C}_{sr}\end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{t}\mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj},(i=1,2,\ldots,s,\ j=1,2,\ldots,r)$$

(5) 设$\mathbf{A}$为n阶方阵，若$\mathbf{A}$的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且非零子块都是方阵，即

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \mathbf{A}_s \end{pmatrix}$$

则称$\mathbf{A}$为**分块对角矩阵**. 分块对角矩阵具有性质:

(a) $|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}_1||\mathbf{A}_2|\ldots|\mathbf{A}_s|$;

(b) $$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & & & \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \mathbf{A}_s^{-1} \end{pmatrix}$$

例9 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\3&4&0&1\\1&0&2&3\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{AB}$.

解 把$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$分块成

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&-1\\0&1&2&1\\\hdashline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{E}&\mathbf{A}_1\\\mathbf{O}&\mathbf{E}\end{pmatrix},\mathbf{B}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\\\hdashline 1&0&2&3\\0&1&-1&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{B}_2\end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{E}&\mathbf{A}_1\\\mathbf{O}&\mathbf{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{B}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_1&\mathbf{E}+\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2\\\mathbf{E}&\mathbf{B}_2\end{pmatrix}$$

由于

$$\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

例10 设

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cc:c:cc} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

求$\mathbf{A}^{-1}$.

解 因为$\mathbf{A}$是分块对角矩阵，所以

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

例11 设

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{array}\right)$$

求$\mathbf{A}^{-1}$.

解 对$\mathbf{A}$进行分块，即$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}$. 记$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix}$

则有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11}+\mathbf{A}_1\mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{12}+\mathbf{A}_1\mathbf{X}_{22} \\ \mathbf{A}_2\mathbf{X}_{21} & \mathbf{A}_2\mathbf{X}_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix}.$$

所以有

$$\mathbf{X}_{11}+\mathbf{A}_1\mathbf{X}_{21}=\mathbf{E}, \tag{*1}$$

$$\mathbf{X}_{12}+\mathbf{A}_1\mathbf{X}_{22}=\mathbf{O}, \tag{*2}$$

$$\mathbf{A}_2\mathbf{X}_{21}=\mathbf{O}, \tag{*3}$$

$$\mathbf{A}_2\mathbf{X}_{22}=\mathbf{E}, \tag{*4}$$

由于矩阵$\mathbf{A}_1$和$\mathbf{A}_2$都可逆，因此

由(*3)可得$\mathbf{X}_{21}=\mathbf{O}$，代入(*1)又可得$\mathbf{X}_{11}=\mathbf{E}$，

由(*4)可得$\mathbf{X}_{22}=\mathbf{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{pmatrix}$，　再由(*2)可得

$$\mathbf{X}_{12}=-\mathbf{A}_1\mathbf{X}_{22}=-\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31 & -18\\ 19 & -11\end{pmatrix}.$$

所以，$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12}\\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 31 & -18\\ 0 & 1 & 19 & -11\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -7 & 4\end{pmatrix}.$

例12 设AB=E, BA=E, 求证: A是可逆方阵, 且$A^{-1}=B$.

注: 此题的假设条件与"AB=BA=E"有所不同, 请仔细体会.

证明: 设A是m×n矩阵, B是n×m矩阵. 以下用反证法.

假设m>n, 作分块 $A=\begin{pmatrix} A_n \\ A_{m-n}\end{pmatrix}$, $B=(B_n, B_{m-n})$,

其中A_n, B_n都是n阶方阵. 于是可得

$$AB=\begin{pmatrix} A_n \\ A_{m-n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_n & B_{m-n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_nB_n & A_nB_{m-n} \\ A_{m-n}B_n & A_{m-n}B_{m-n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_{m-n}\end{pmatrix}.$$

可得: $A_nB_n=E_n$, $A_nB_{m-n}=O$, $A_{m-n}B_n=O$, $A_{m-n}B_{m-n}=E_{m-n}$.

易见上述四个等式不可能同时成立, 故假设"m>n"对于AB=E不成立. 类似可证明假设"m<n"对于BA=E也不成立.

故只能m=n. 因此A, B都是方阵. 故A可逆, 且$A^{-1}=B$.

证毕.

§4 矩阵的初等变换

对线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

如果记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则，线性方程组可用矩阵表示成

$$\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}.$$

称**A**为线性方程组的系数矩阵，β为方程组的常向量，$(\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\beta})$为方程组的增广矩阵.

解线性方程组的常用方法是对它进行一系列的变换，得到容易求解的且与原方程组同解的方程组，进而求出其解. 例如，对线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 - 8x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

互换第一，第三个方程位置，用1/2乘第二个方程得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 11 \end{cases}$$

第二个方程减第一个方程的2倍，第三个方程减第一个方程的3倍可得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

再让第三个方程减第二个方程2倍，第一个方程减第二个方程可得

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

于是方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2 \\ x_2 = 2x_3 + 1 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \qquad x_3 \in R$$

或写成

$$\begin{cases} x_1 = -c + 2 \\ x_2 = 2c + 1 \\ x_3 = c \end{cases} \quad , c \in R$$

上述求解方法称为消元法，消元过程就是对线性方程组进行下列三种变换:

1. 互换两个方程的位置;
2. 用一个非零常数乘某个方程;
3. 将某个方程的倍数加到另一个方程.

此处的常数不能为零!

此处的倍数可以为零(但取零的意义不大).

这三种变换称为线性方程组的初等变换.

易见，线性方程组经过初等变换，其解不变.

为了利用矩阵研究线性方程组的求解问题，对矩阵给出如下初等变换的概念 .

定义2.3 对矩阵作下列三种类型的变换分别称为第一，第二，第三种**初等行(列)变换**：

1. 互换矩阵的某两行(列)；
2. 某行(列)乘以非零常数；
3. 某行(列)的若干倍加到另一行(列).

表达初等变换的具体做法可用如下符号：

符号	含义	符号	含义
$r_i \leftrightarrow r_j$	互换第i, j 两行	$c_i \leftrightarrow c_j$	互换第i, j 两列
kr_i	第i行乘以非零常数k	kc_i	第i列乘以非零常数k
r_i+kr_j	第j行的k倍加到第i行	c_i+kc_j	第j列的k倍加到第i列

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为**初等变换**.

各种初等变换都是可逆的，且逆变换也是同类型的初等变换.

可见，对线性方程组作初等变换相当于对增广矩阵作初等行变换，对增广矩阵作初等行变换方程组解不变.

定义2.4 如果矩阵A可以经过有限次的初等变换变成矩阵B，则称**矩阵A与B等价**，记为**A~B**.

注: "A~B (A与B等价)" 并非 "A=B (A等于B)".

矩阵的等价性具有下列三个性质

（i）反身性：A~A;

（ii）对称性：若A~B，则B~A;

（iii）传递性：若A~B，B~C，则A~C.

因此,"矩阵之间的等价"是一种等价关系.

若某矩阵的每行第一个非零元素的左下方元素都是0，且零行(若有的话)都排在最下面，则称此矩阵为**行阶梯形矩阵**.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

注：零矩阵也是行阶梯形矩阵.

若某个行阶梯形矩阵的每行第一个非零元素全是1,且所在列的其它元素都是0,则称此矩阵为行最简形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

定理2.4 任何矩阵都可以经过初等行变换化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

例13 用矩阵的初等行变换化矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & -3 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

解

$$A\overset{\substack{r_3-2r_2\\ r_1\leftrightarrow r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & -1 & -2 & 3 & -2\end{pmatrix}\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵

$$\overset{r_1-2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 7 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

行最简形矩阵

定理2.5 任意m×n矩阵A都与形为$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$的矩阵等价.

其中E_r为r阶单位矩阵，$0 \le r \le \min\{m, n\}$，并且r是唯一的.

该矩阵$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$称为$A$的等价标准形.

仅当n>r时才有此零矩阵块

仅当m>r时才有此零矩阵块

仅当m>r 且n>r时才有此零矩阵块

当且仅当$A=O$时，r=0，此时规定E_0为数0.

r就是矩阵A的秩(以后会讲).

例14 求矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$的等价标准形.

解 由例14有

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{c_3+c_1-2c_2 \\ c_4-7c_1+3c_2 \\ c_5-2c_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这是
行最简形矩阵

这是
等价标准形

矩阵的初等变换可类似地推广到分块矩阵上来.

定义2.5 对分块矩阵作下列三种类型的变换分别称为分块矩阵的第一、二、三种初等行(列)变换:

1. 互换分块矩阵的某两个行块(或互换某两个列块);
2. 某个行块左乘一个可逆方阵;(行变换)

   某个列块右乘一个可逆方阵;(列变换)
3. 某个行块左乘一矩阵后加到另一行块.(行变换)

   某个列块右乘一矩阵后加到另一列块.(列变换)

此处相乘的矩阵可以是不可逆矩阵

分块矩阵的初等行变换与初等列变换统称为分块矩阵的初等变换.

注意:做行变换一律左乘矩阵,做列变换一律右乘矩阵.

§5　初等矩阵

定义2.6 对单位矩阵作一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

初等矩阵有如下三种类型:

$$1.\ E \overset{r_i \leftrightarrow r_j}{\sim} E(i,j)=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第i行} \\ \\ \leftarrow \text{第j行} \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

另外可见 $E \overset{c_i \leftrightarrow c_j}{\sim} E(i,j)$

第一类初等矩阵$E(i,j)$还具有以下性质:

$$E_m(i,j)A=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

效果：$r_i \leftrightarrow r_j$.
在A的左侧乘以$E_m(i,j)$，相当于把A的第i行与第j行互换.

$$AE_n(i,j)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

效果：$c_i \leftrightarrow c_j$，在A的右侧乘以$E_n(i,j)$，相当于把A的第i列与第j列互换.

此外，易见：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

$$\boldsymbol{E}(\mathrm{i}, \mathrm{j})\, \boldsymbol{E}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) = \boldsymbol{E},$$

因此

$$[\boldsymbol{E}(\mathrm{i}, \mathrm{j})]^{-1} = \boldsymbol{E}(\mathrm{i}, \mathrm{j}).$$

$$2.\quad E \overset{k\times r_i}{\sim} E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \to \text{第i行} \quad (k \neq 0)$$

另外可见 $E \overset{kc_i}{\sim} E(i(k))$

可验证:

在$\boldsymbol{A}$的左侧乘以$\boldsymbol{E}_m(\mathrm{i}(k))$, 相当于把$\boldsymbol{A}$的第i行乘$k$倍.

在$\boldsymbol{A}$的右侧乘以$\boldsymbol{E}_n(\mathrm{i}(k))$, 相当于把$\boldsymbol{A}$的第i列乘$k$倍.

易 见:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \frac{1}{k} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

$$\mathbf{E}\big(i(k)\big)\mathbf{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \mathbf{E}.$$

因 此

$$\left[\mathbf{E}\big(i(k)\big)\right]^{-1} = \mathbf{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

3. $E \overset{r_i+kr_j}{\sim} E(i+j(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第i行} \\ \\ \leftarrow \text{第j行} \\ \\ \\ \end{matrix}$

此处须注意

另外可见 $E \overset{c_j+kc_i}{\sim} E(i+j(k))$

在A的左侧乘以E_m(i+j(k))，相当于把A的第j行的k倍加到第i行.

在A的右侧乘以E_n(i+j(k))，相当于把A的第i列的k倍加到第j列.

易见

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & -k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

$$\mathbf{E}(\mathrm{i}+\mathrm{j}(\mathrm{k}))\,\mathbf{E}(\mathrm{i}+\mathrm{j}(-\mathrm{k})) = \mathbf{E}.$$

因此

$$[\mathbf{E}(\mathrm{i}+\mathrm{j}(\mathrm{k}))]^{-1} = \mathbf{E}(\mathrm{i}+\mathrm{j}(-\mathrm{k})).$$

综上所述，对于初等矩阵，有如下结论.

1. 初等矩阵是可逆的，且其逆矩阵仍然是初等矩阵；

2.

对矩阵A作一次初等行变换所得到的矩阵= 对A左乘(即在A的左侧乘上)一个相应的初等矩阵；

对矩阵A作一次初等列变换所得到的矩阵= 对A右乘(即在A的右侧乘上)一个相应的初等矩阵.

口诀： 左行右列.

例15 设$\mathbf{A}$为3阶矩阵，将$\mathbf{A}$的第二行与第三行互换得$\mathbf{B}$，再将$\mathbf{B}$的第一行的-1倍加到第二行得$\mathbf{C}$，求满足$\mathbf{A}=\mathbf{PC}$的矩阵$\mathbf{P}$.

解 由已知有：$\mathbf{B}=\mathbf{E}(2,3)\mathbf{A}$，$\mathbf{C}=\mathbf{E}(2+1(-1))\mathbf{B}$，

所以有：$\mathbf{C}=\mathbf{E}(2+1(-1))\,\mathbf{E}(2,3)\,\mathbf{A}$

于是有：$\mathbf{A}=[\mathbf{E}(2,3)]^{-1}[\mathbf{E}(2+1(-1))]^{-1}\mathbf{C}$

即：$\mathbf{P}=[\mathbf{E}(2,3)]^{-1}[\mathbf{E}(2+1(-1))]^{-1}$

$$=\mathbf{E}(2,3)\,\mathbf{E}(2+1(1))$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

由初等矩阵和初等变换的关系可得如下结论：

定理2.7 矩阵A与B等价的充分必要条件是：

存在有限个初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_l$和$\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_t$，使得

$$\mathbf{A}= \mathbf{P}_l\ldots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{B}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\ldots\mathbf{Q}_t.$$

推论 对任意矩阵A，都有初等矩阵$\mathbf{P}_1$，$\mathbf{P}_2$，…，$\mathbf{P}_l$和$\mathbf{Q}_1$，$\mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_t$，使得

$$\mathbf{P}_l\ldots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\ldots\mathbf{Q}_t= \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

定理2.8 矩阵A可逆的充分必要条件是:

A可表示为有限个初等矩阵的乘积.

推论 矩阵A与B等价的充分必要条件是:

存在可逆矩阵P和Q，使得PAQ= B.

下面给出利用初等变换求矩阵逆矩阵的方法.

若$\mathbf{A}$可逆，由定理2.5知，存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_t$，使

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_t.$$

于是有

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_t \mathbf{A}= \mathbf{E}, \qquad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_t \mathbf{E}= \mathbf{A}^{-1}.$$

所以有

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_t (\mathbf{A}, \mathbf{E})= (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_t \mathbf{A}, \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_t \mathbf{E})= (\mathbf{E}, \mathbf{A}^{-1}).$$

这意味着：可以对分块矩阵$(\mathbf{A}, \mathbf{E})$做一系列的初等行变换，当把其中原先的子块$\mathbf{A}$变换称单位矩阵$\mathbf{E}$时，另一个原先的子块$\mathbf{E}$就同时被变换为$\mathbf{A}^{-1}$了.

以上讨论为我们指明了一个计算矩阵逆的有效方法.

例16 求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&1\\3&8&-3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

$$(\mathbf{A}\vdots\mathbf{E})=\begin{pmatrix}1&2&-1&1&0&0\\2&3&1&0&1&0\\3&8&-3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&1&0&0\\0&-1&3&-2&1&0\\0&2&0&-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1+2r_2\\-1\times r_2}]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&5&-3&2&0\\0&1&-3&2&-1&0\\0&0&6&-7&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{6}\times r_3}\begin{pmatrix}1&0&5&-3&2&0\\0&1&-3&2&-1&0\\0&0&1&-\frac{7}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2+3r_3\\r_1-5r_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{17}{6}&\frac{1}{3}&\frac{-5}{6}\\0&1&0&\frac{-3}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{-7}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

所以,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{17}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-5}{6}\\ \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{-7}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}17 & 2 & -5\\ -9 & 0 & 3\\ -7 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

注1: 以上的计算中, 只对矩阵(A, E)采用初等行变换.

思考: 如果要用矩阵的初等列变换求逆矩阵, 应该怎么做?

初等矩阵及其性质，也可以类似地推广到分块矩阵上来. 我们对此问题只做一个简单的介绍:

单位矩阵可按如下方式分块：

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_t \end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{E}_i$都是单位矩阵. 该分块矩阵称为单位分块矩阵.

定义2.6 对单位分块矩阵作一次分块矩阵的初等变换所得的分块矩阵称为初等分块矩阵.

同样地，初等分块矩阵也有如下三种类型：

$$
E(i,j)=\left(\begin{array}{ccccccc}
E_1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & O & \cdots & E_j & & \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
 & & E_i & \cdots & O & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & E_t
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
\leftarrow \text{第i行块}\\
\\
\leftarrow \text{第j行块}\\
\\
\\
\end{array}
$$

$$
E(i(C))=\left(\begin{array}{ccccccc}
E_1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & E_{i-1} & & & & \\
 & & & C & & & \\
 & & & & E_{i+1} & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & E_t
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
\\
\leftarrow \text{第i行块}\\
\\
\\
\\
\end{array}
，C\text{是可逆矩阵}
$$

$$E(i+j(K))=\begin{pmatrix} E_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & E_i & \cdots & K & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & E_j & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & E_t \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第i行块} \\ \\ \leftarrow \text{第j行块} \\ \\ \\ \end{array}$$

定理2.9 对分块矩阵**A**作一次分块矩阵的初等行(列)变换所得到的分块矩阵等于对**A**左(右)乘一个相应的初等分块矩阵.

与初等行变换求逆矩阵方法一样，也可以对分块矩阵只做分块矩阵的初等行变换来求分块矩阵的逆矩阵.

例17 设$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$是可逆子块，求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$的逆矩阵.

解 由于

$$(A\ \ E)=\begin{pmatrix} A_1 & O & E_1 & O \\ B & A_2 & O & E_2 \end{pmatrix} \overset{A_1^{-1}r_1}{\sim} \begin{pmatrix} E_1 & O & A_1^{-1} & O \\ B & A_2 & O & E_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2-Br_1}{\sim} \begin{pmatrix} E_1 & O & A_1^{-1} & O \\ O & A_2 & -BA_1^{-1} & E_2 \end{pmatrix} \overset{A_2^{-1}r_2}{\sim} \begin{pmatrix} E_1 & O & A_1^{-1} & O \\ O & E_2 & -A_2^{-1}BA_1^{-1} & A_2^{-1} \end{pmatrix}$$

所以，

$$\begin{pmatrix} A_1 & O \\ B & A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ -A_2^{-1}BA_1^{-1} & A_2^{-1} \end{pmatrix}$$