第五章 差分方程与滤波

1. 线性、时不变、因果关系
2. 差分方程
3. 滤波的基础知识
4. 模拟滤波器和数字滤波器
5. 差分方程流图
6. 脉冲响应
7. 阶跃响应

数字系统输入与输出之间的方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- **x[n]：输入**
- **y[n]：输出**

- **输出之和等于输入之和**
- **a, b为系数**
- **该方程具有滤波的功能，也称为数字滤波器**

差分方程

《差分方程的作用》

- 对于数字信号处理系统，如滤波器等，都可以利用差分方程建立数学模型，为系统的设计和分析提供理论基础。
- 在数字信号处理系统的设计中，利用差分方程进行系统仿真，为系统的优化和改进提供参考。
- 对于新提出的数字信号处理算法，通过差分方程进行建模和仿真，可以验证算法的有效性，为算法的实际应用奠定基础。

线性、时不变、因果系统

- 系统：对信号具有某种作用的事物整体。
- 滤波器就是一个系统。
- 要求系统是线性、时不变、因果系统。

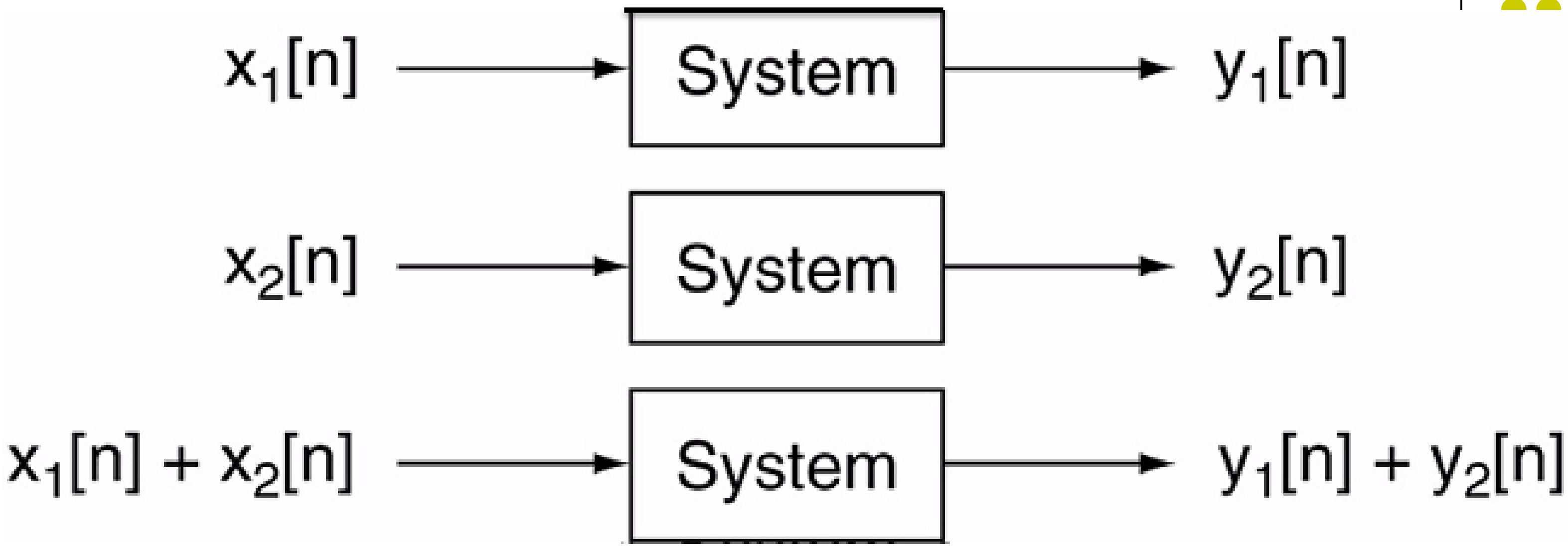
线性系统

- 线性系统满足叠加原理
- 叠加原理：若输入 x1 的输出为 y1，输入 x2 的输出为 y2，当输入为两者之和（x1+x2）时，输出为两个输出（y1+y2）之和。

- 输出=a（输入）+b（输入）+c（输入）

  a, b, c: 为权重系数

线性系统

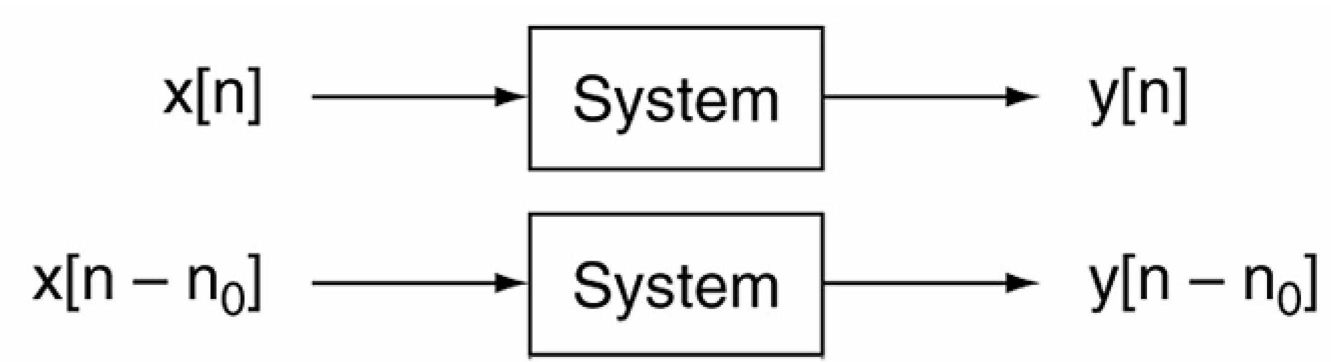


对于非线性系统不满足叠加原理，如平方系统

输出＝（输入）^{2}

时不变系统

- 输入延迟，输出也延迟相同的时间。



因果系统

- 因果系统是输出取决于现在和以前的输入，而与以后的输入无关。

差分方程

- 差分方程用来描述线性、时不变、因果数字滤波器。
- X 表示滤波器的输入

  x[n]:　　现在的输入
  x[n-1]: 前一个的输入
  x[n-2]: 再前一个的输入

- y 表示滤波器的输出

  过去的输出为：y[n-1], y[n-2]

- 每个值之间有一个采样周期的延迟

差分方程的一般表达式为

- 输出之和等于输入之和
- a,b为权系数，称为滤波器的系数
- N为滤波器的阶数:过去输出的个数

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

上式展开

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \ldots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \ldots + b_M x[n-M]$$

令： $a_0 = 1$

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \ldots - a_N y[n-N] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \ldots + b_M x[n-M]$$

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-K] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-K]$$

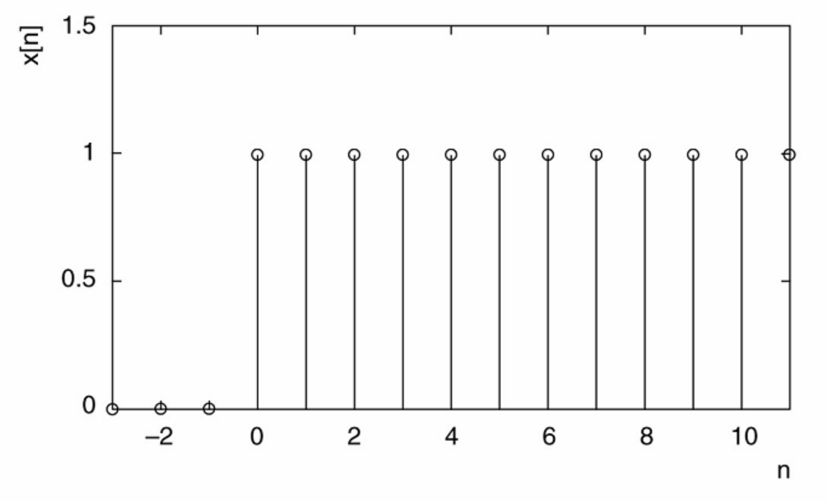
现在的输出取决于以前的输出、现在和以前的输入，与以后的输入和输出无关

- **一个滤波器的差分方程为**

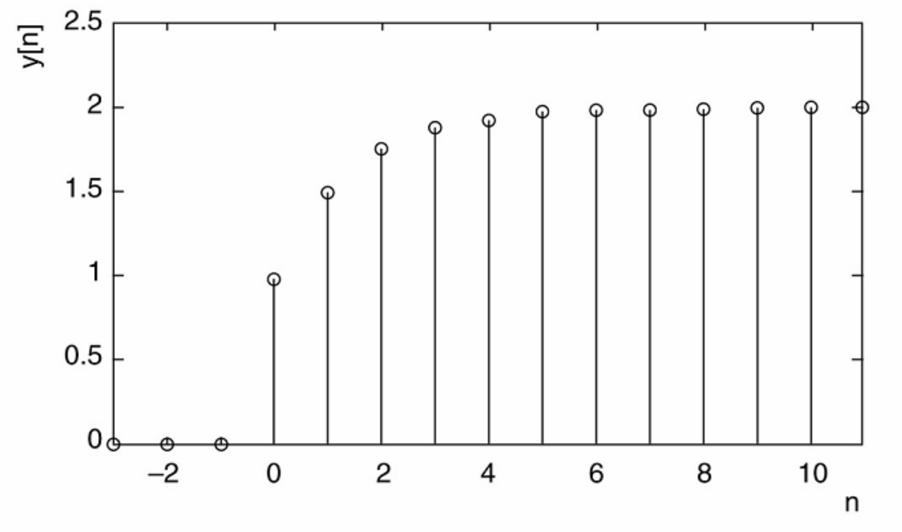
例

输入x[n]

$$y[n]=0.5y[n-1]+x[n]$$



求前12个输出



$$\boxed{y[n]=0.5y[n-1]+x[n]}$$

求上面差分方程的前6个输出

$n=0$时，$y[-1]$不存在

$$y[0]=0.5y[-1]+x[0]=0.5\times 0+1=1$$

$$y[1]=0.5y[0]+x[1]=0.5\times 1+1=1.5$$

$$y[2]=0.5y[1]+x[2]=0.5\times 1.5+1=1.75$$

$$y[3]=0.5y[2]+x[3]=0.5\times 1.75+1=1.875$$

$$y[4]=0.5y[3]+x[4]=0.5\times 1.875+1=1.937$$

$$y[5]=0.5y[4]+x[5]=0.5\times 1.937+1=1.9688$$

练习：

4.11 递归滤波器的差分方程为 $y[n]+0.25y[n-1]=x[n]$，输入信号为 $x[n]=u[n]-u[n-5]$，求滤波器输出的前十个采样值。

4.12 滤波器的差分方程为 $y[n]=0.3x[n]-0.25x[n-1]+0.1x[n-2]$，输入信号为 $x[n]=2\delta[n]-\delta[n-2]$，求出并画出滤波器输出的前十个采样值。

滤波的基础知识

- 滤波：

  以特定的方式改变信号的频率特性。

- 滤波器：

  为了达到滤波目的而组成的系统。

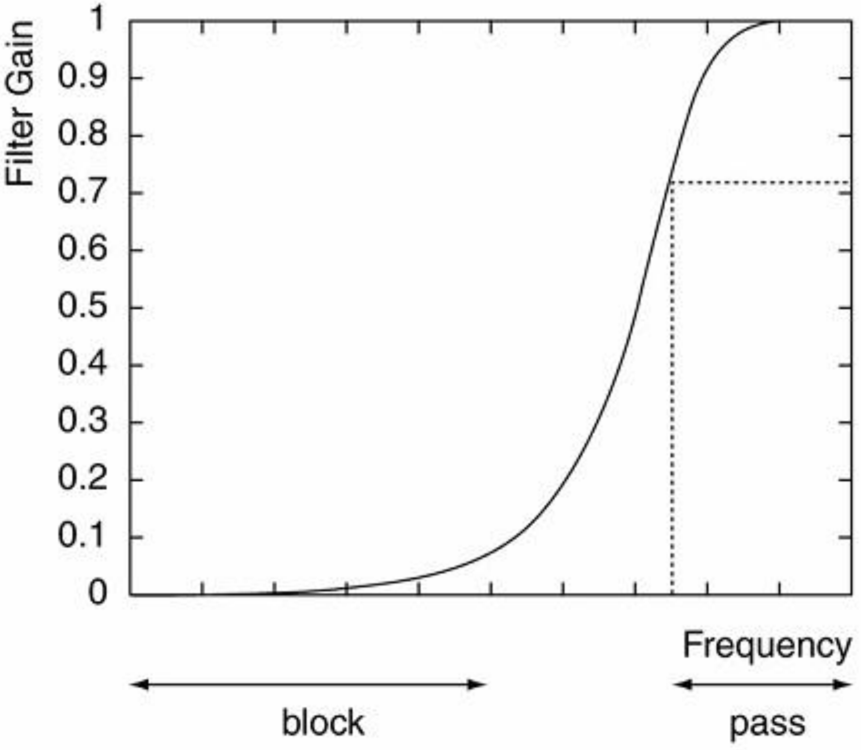
- 滤波器分类：

  高通滤波器，低通滤波器，带通滤波器，带阻滤波器。

高通滤波器

- **高通滤波器**：只允许高频信号通过，阻碍其他信号。

如：在声纳系统中，信号中船和海洋是低频信号，为了正确地识别目标，需要消除低频信号，保留高频信号，应使用高通滤波器。

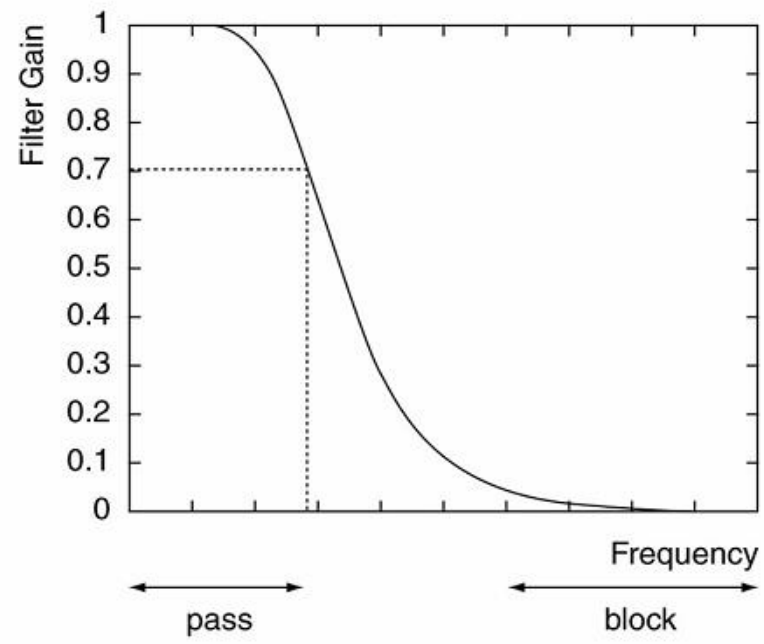


(b) High Pass Filter

低通滤波器

- **低通滤波器**：只允许低频信号通过，阻碍其他信号。

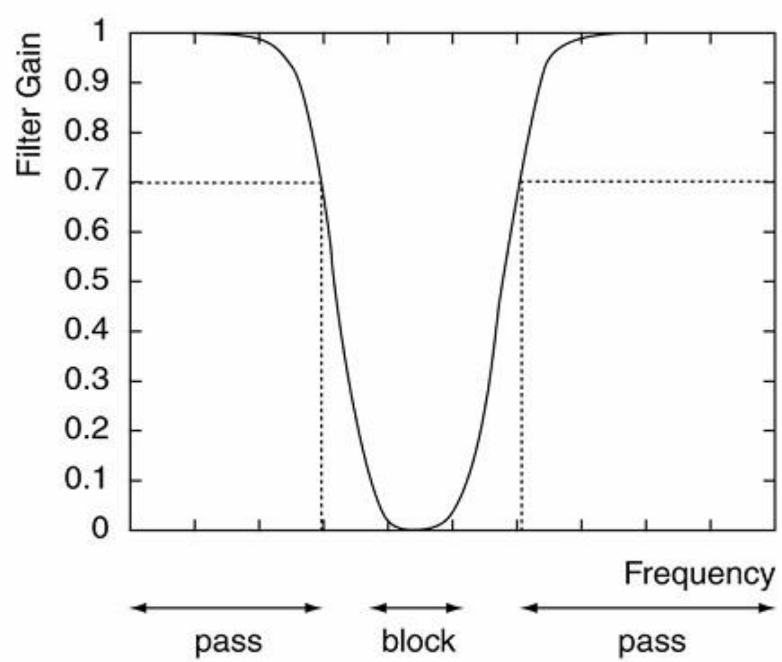
如：在乐曲中，主要内容是由低频和中频率信号组成的，而杂音通常是高频信号，这时应使用低通滤波器，让低中频信号通过，阻碍高频信号。



(a) Low Pass Filter

带阻滤波器

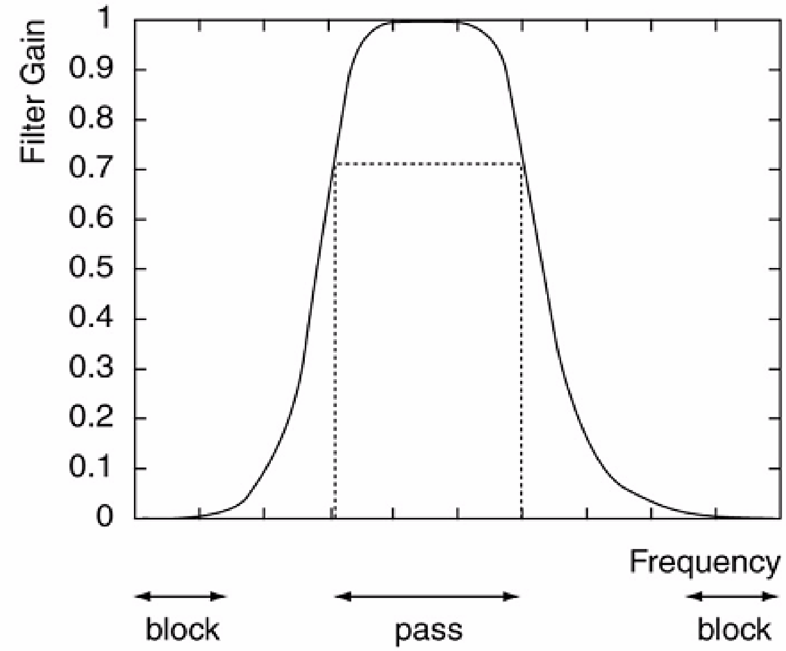
- **带阻滤波器：阻碍特定频带的信号，允许其他信号通过**
- **可检测电力系统中的某些故障特征信号。例如，当系统发生谐振等故障时，会在特定频率上出现异常信号，带阻滤波器可阻碍这些异常信号，防止故障扩大。**



(d) Band Stop Filter

带通滤波器

- **带通滤波器**：只允许特定频带的信号通过，阻碍其他信号。
- 对机械设备的振动信号进行分析可以监测设备的运行状态和诊断故障。带通滤波器可提取与设备特定振动模式或故障特征相关的频率成分，帮助工程师分析设备的振动情况，判断是否存在故障以及故障的类型和位置，如在旋转机械的振动监测中，可提取出与轴承故障、齿轮故障等相关的特征频率信号。

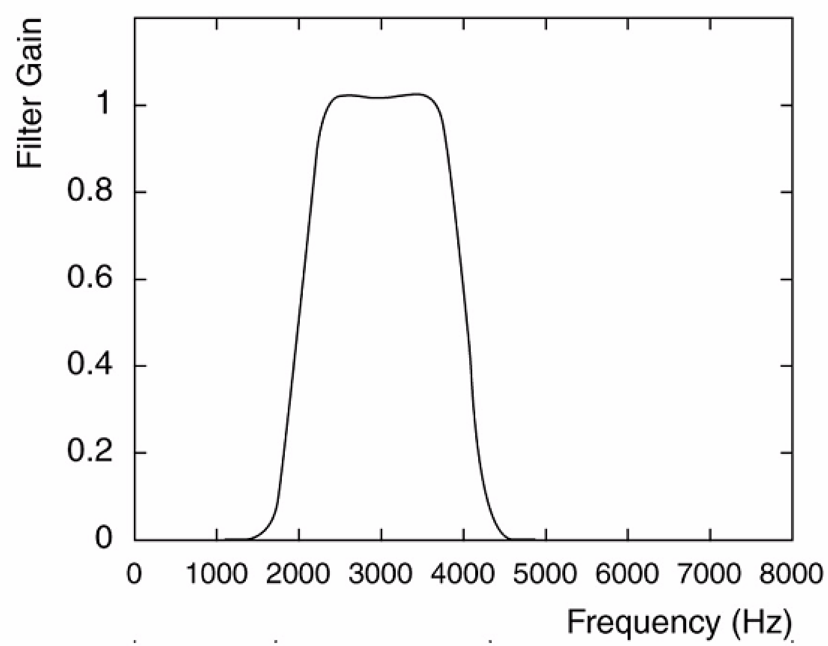


(c) Band Pass Filter

数字滤波器图示

- 横坐标：频率；
- 纵坐标：滤波器增益

增益（dB）= 20 log（增益）

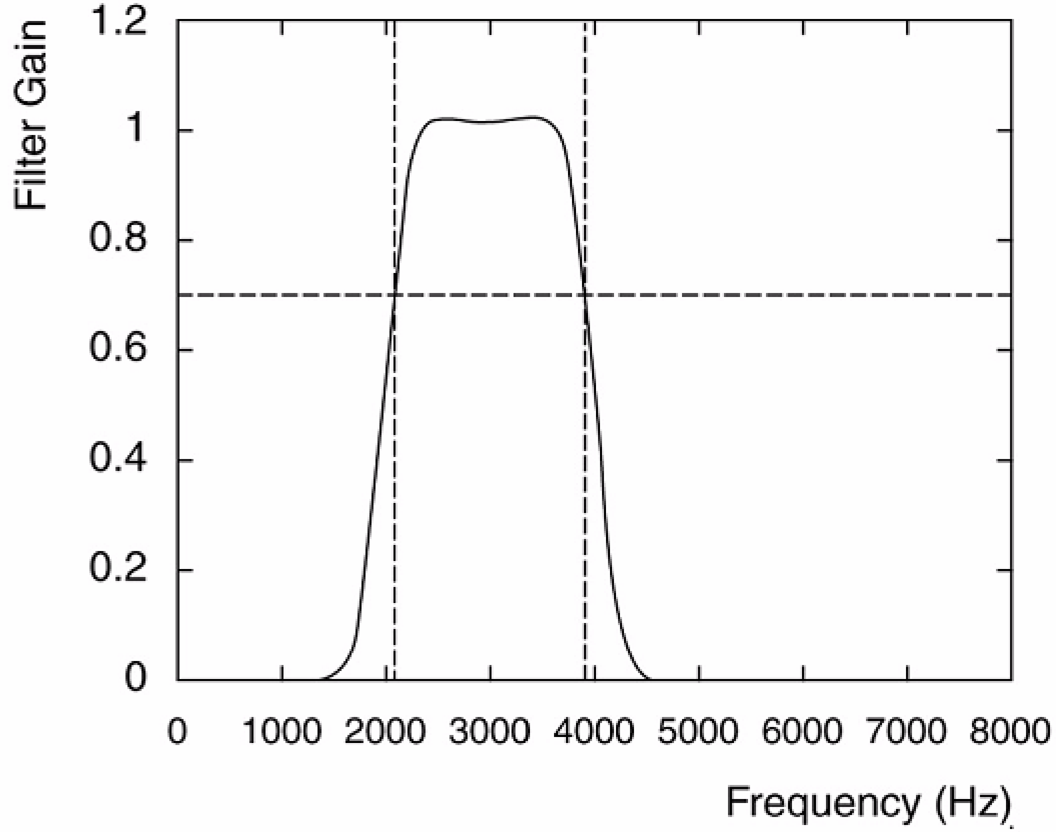


滤波器的截止频率

最大增益的

=0.707所对应的

频率。

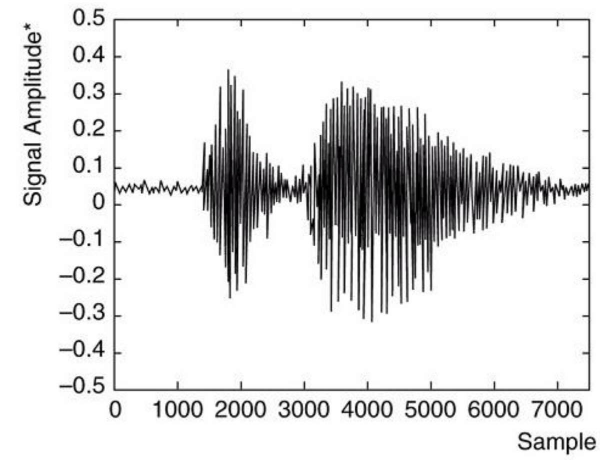


模拟滤波器和数字滤波器

- 模拟滤波器：由电阻、电容和电感等电子元器件组成的，系统对所有部件的值非常敏感，并有些部件的特性随温度变化比较大。

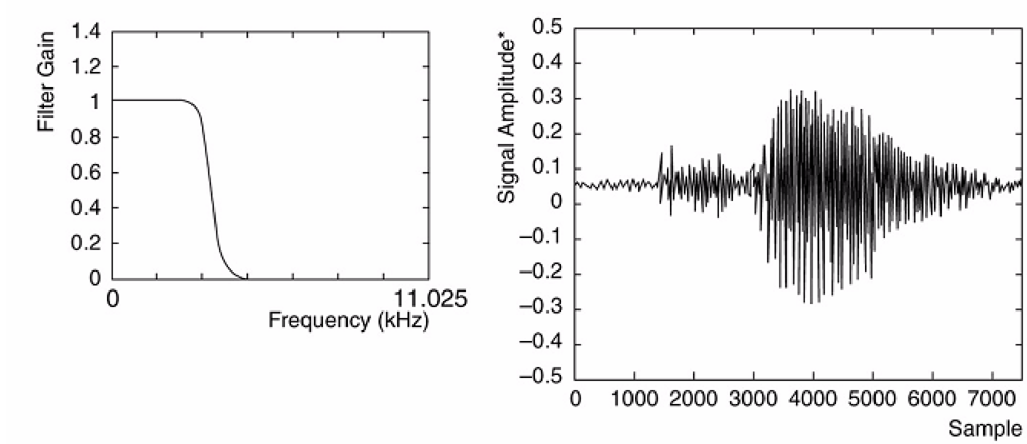
- 数字滤波器：由软件组成，很少依赖硬件，具有模拟滤波器无法比拟的优点，如滤波参数易于修改。

输入信号



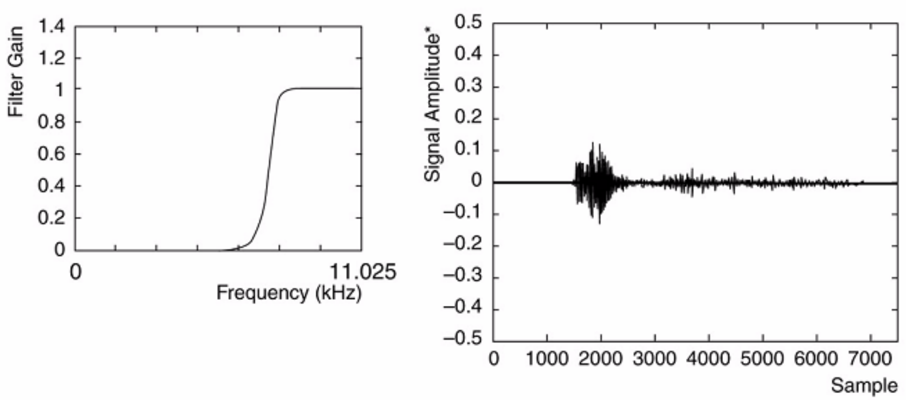
(a) The Original Speech Sample ("TWO")

低通滤波后



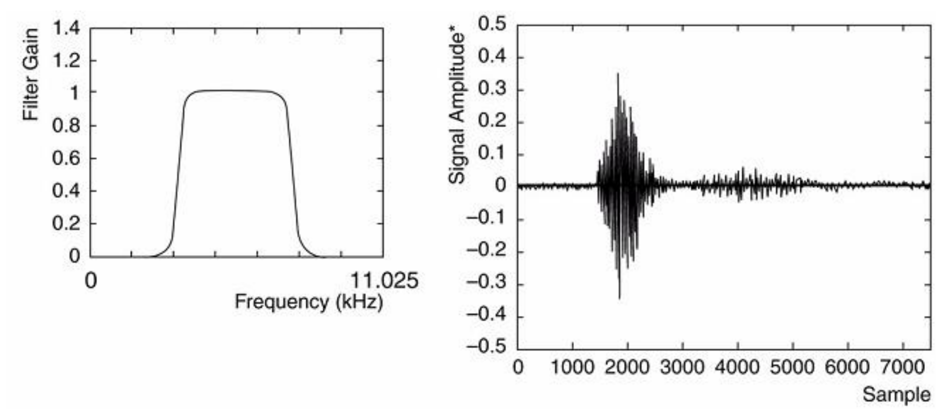
(b) The Low Pass Filter and the Speech Signal After Low Pass Filtering

高通滤波后



(c) The High Pass Filter and the Speech Signal After High Pass Filtering

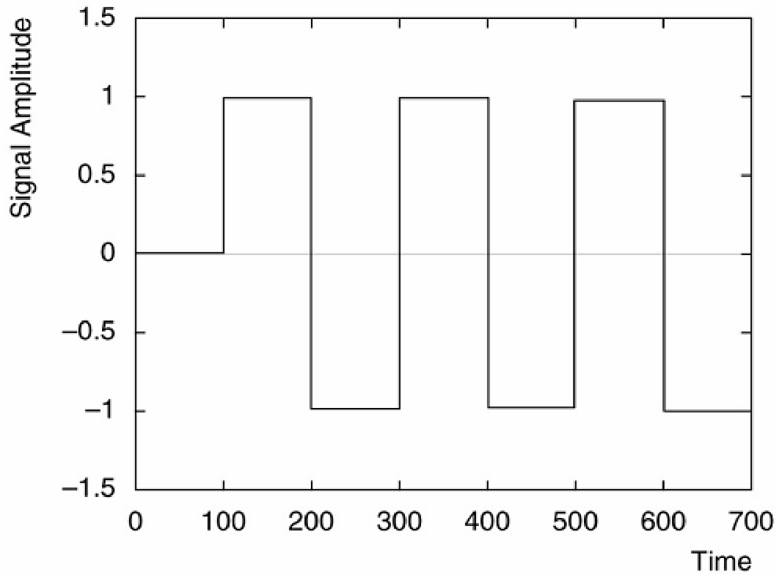
带通滤波后



(d) The Band Pass Filter and the Speech Signal After Band Pass Filtering

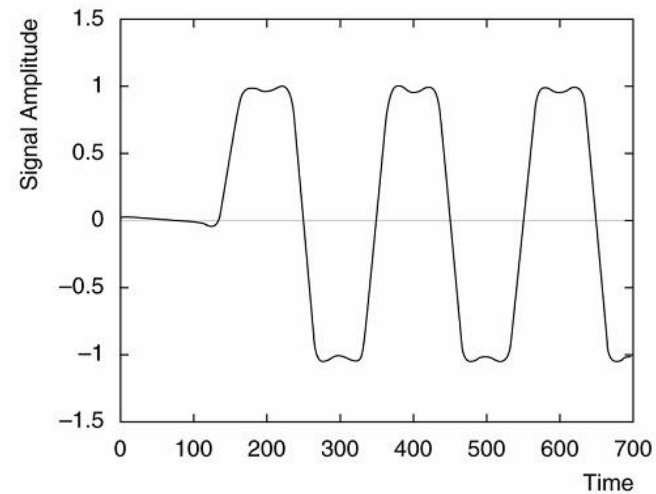
例

输入方波



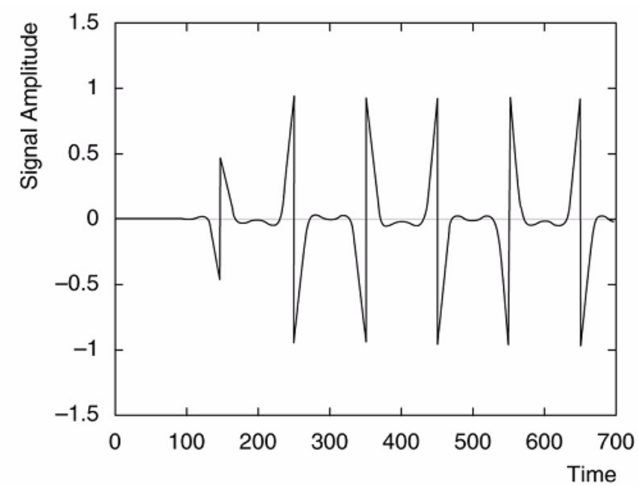
(a) Square Wave

低通滤波后（平滑）



(b) Low Pass Filtered Square Wave

高通滤波后（尖锐）



(c) High Pass Filtered Square Wave

递归滤波器

- **数字系统依赖于输入和过去的输出**

$$\boxed{y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

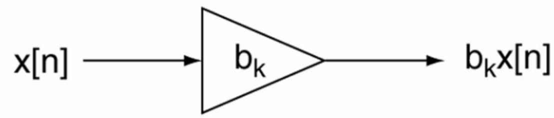
非递归滤波器

- 数字系统仅依赖于输入，不依赖于输出

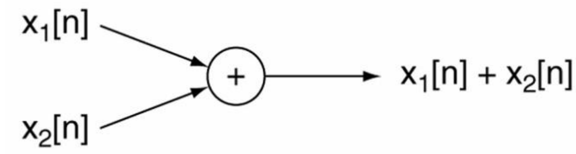
$$\boxed{y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

差分方程流图

(a) Delay Element



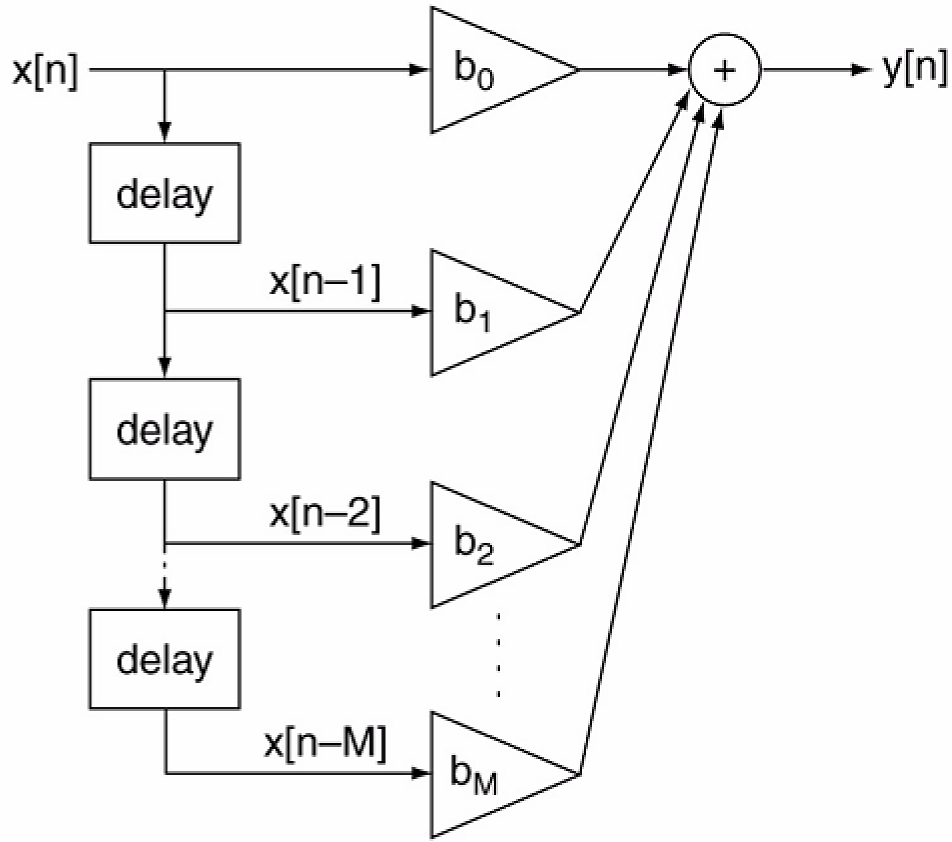
(b) Coefficient Multiplier



(c) Summer

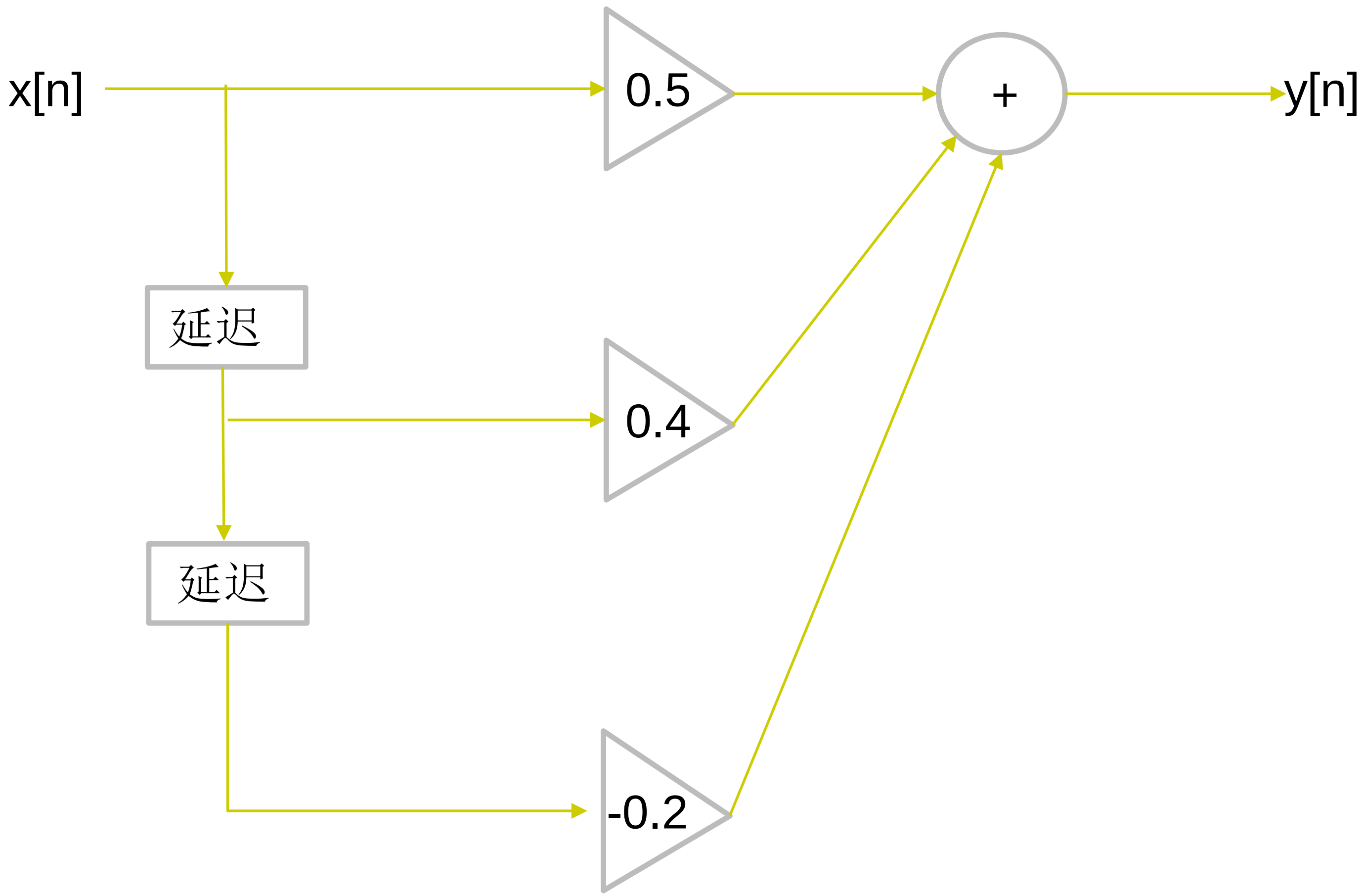
- **非递归差分方程**

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

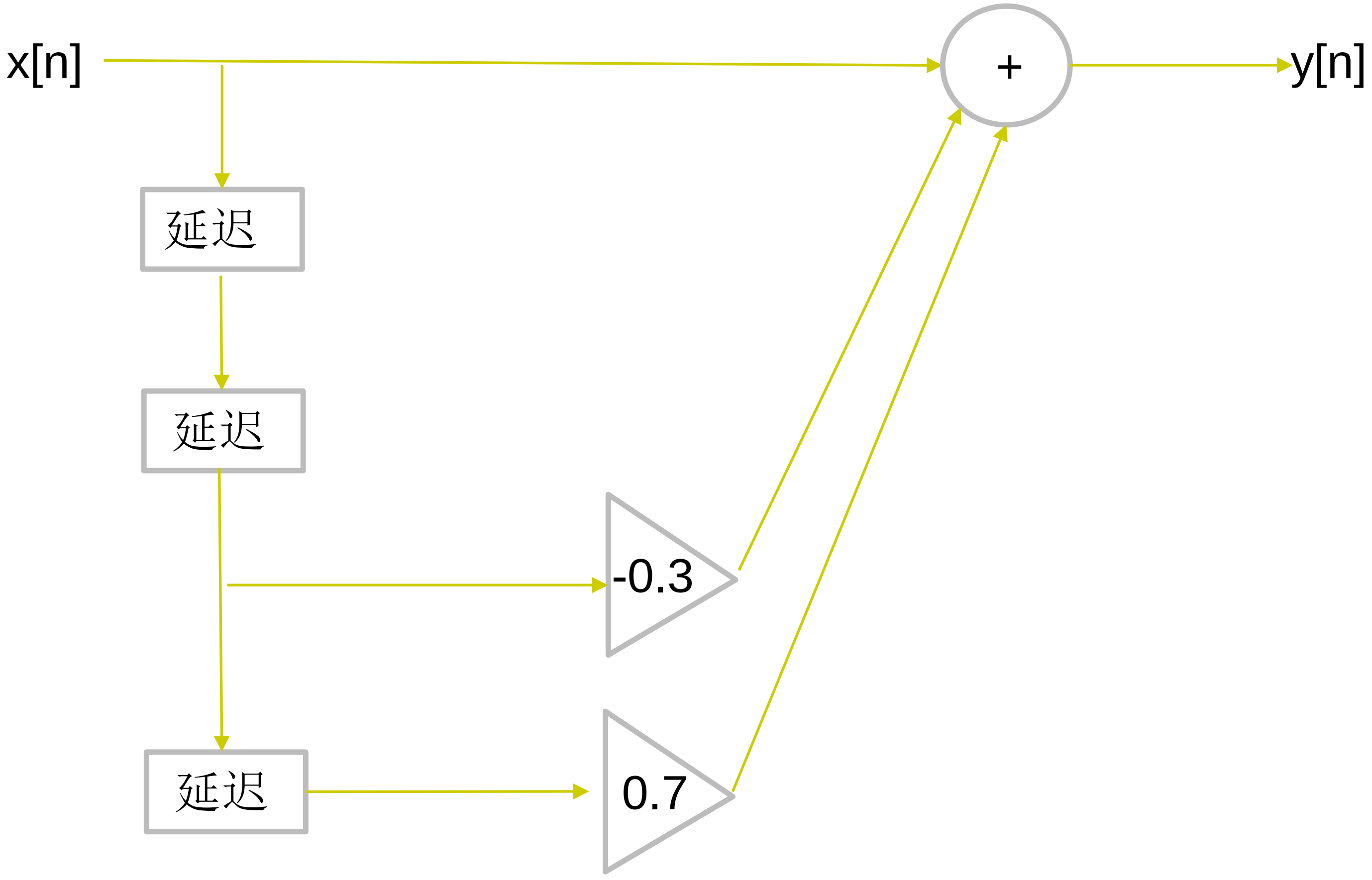


例：　画出下面差分方程的流图

$$y[n] = 0.5x[n] + 0.4x[n-1] - 0.2x[n-2]$$


x[n]
0.5
+
y[n]
延迟
0.4
延迟
-0.2

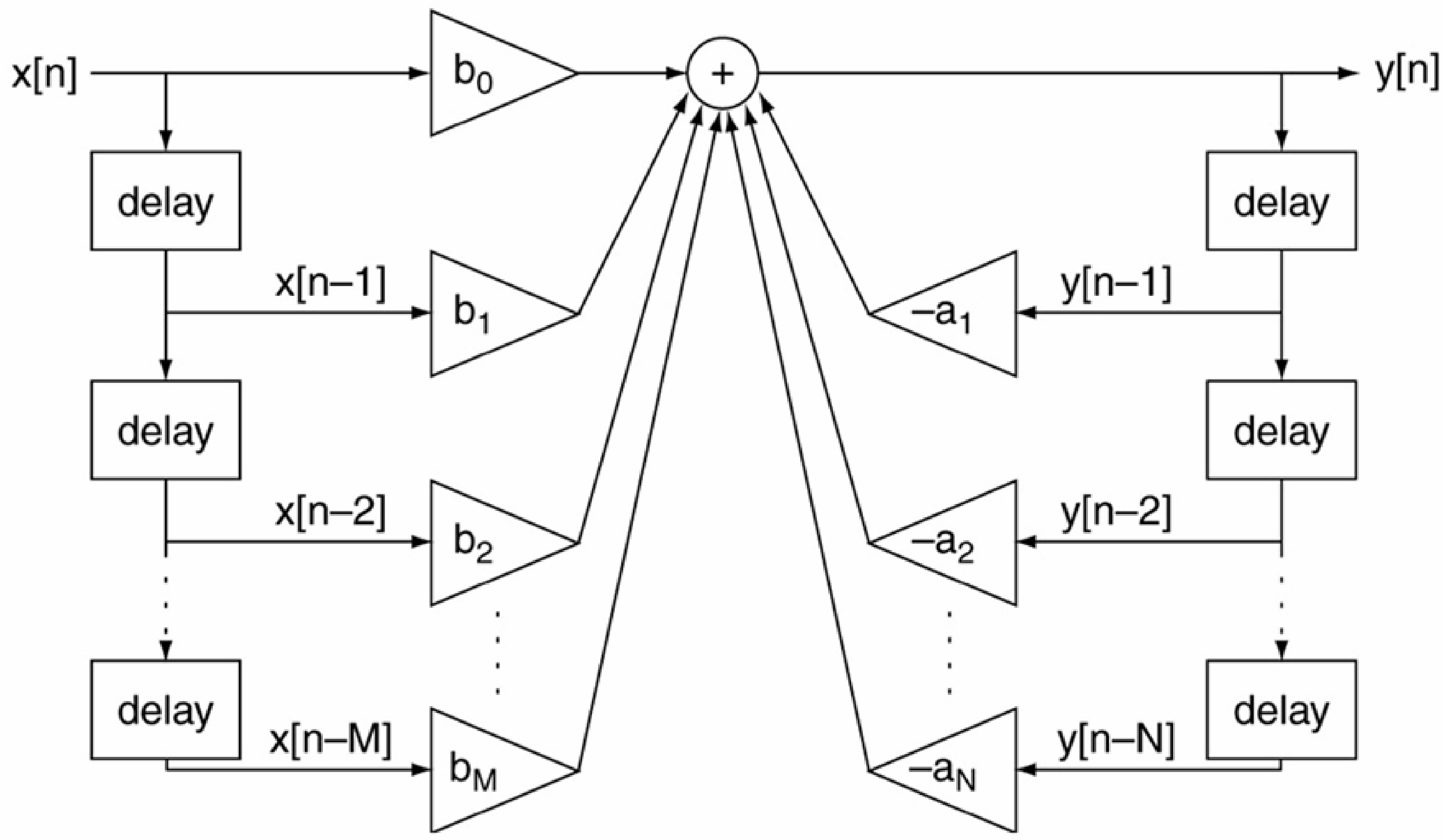
写出下面流图的差分方程



$$y[n]=x[n]-0.3x[n-2]+0.7x[n-3]$$

递归差分方程

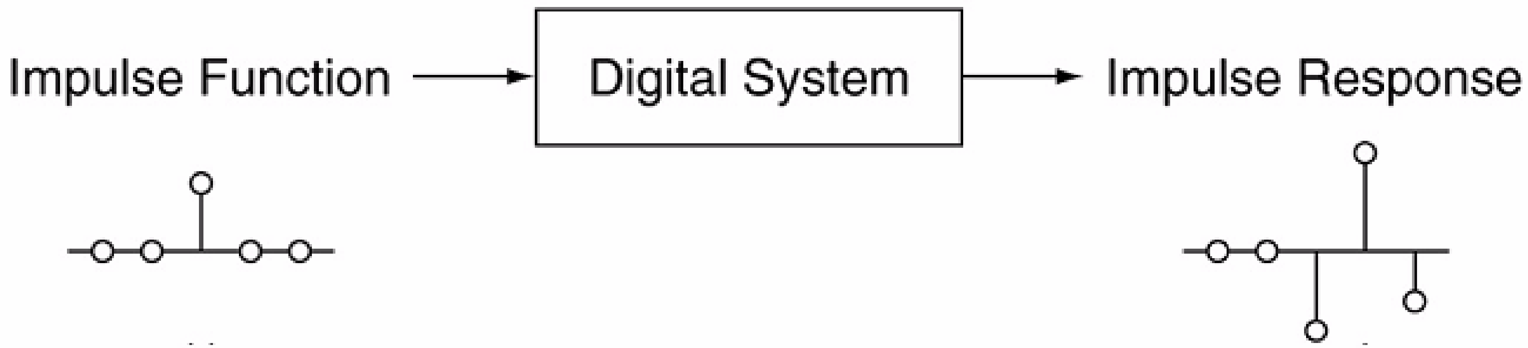
$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$



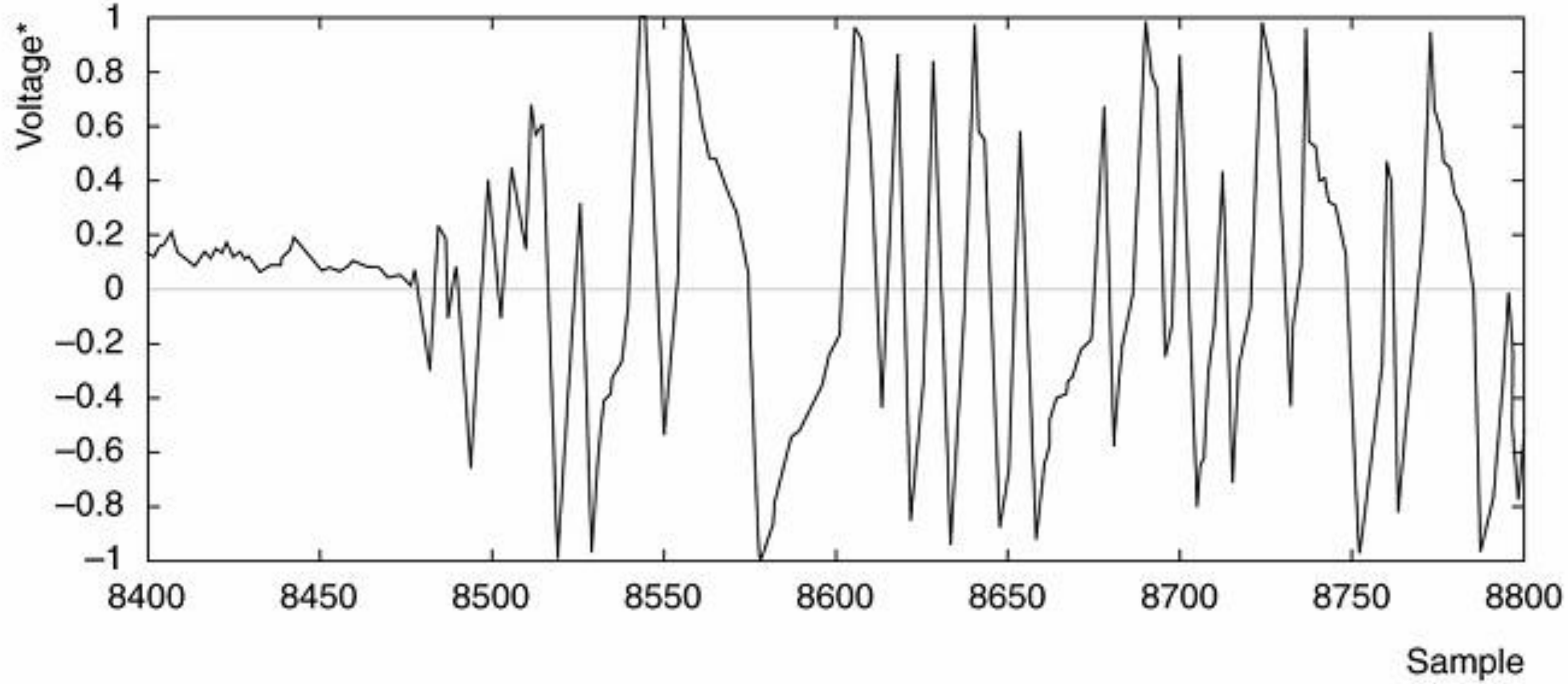
脉冲响应

- 滤波器的脉冲响应就是滤波器对脉冲输入的响应。
- 当滤波器的输入是单位脉冲时，输出也是单位脉冲。可用下面的图表示

脉冲响应



钢琴键的敲击的脉冲响应



(a) Piano

例：　对下面差分方程求脉冲响应的前6个值

$$y[n]\text{-}0.4y[n-1]=x[n]-x[n\text{-}1]$$

用$\delta[n]$代替$x[n]$，脉冲响应用$h[n]$表示，即$h[n]$代替$y[n]$

$$h[n]\text{-}0.4h[n-1]=\delta[n]-\delta[n\text{-}1]$$

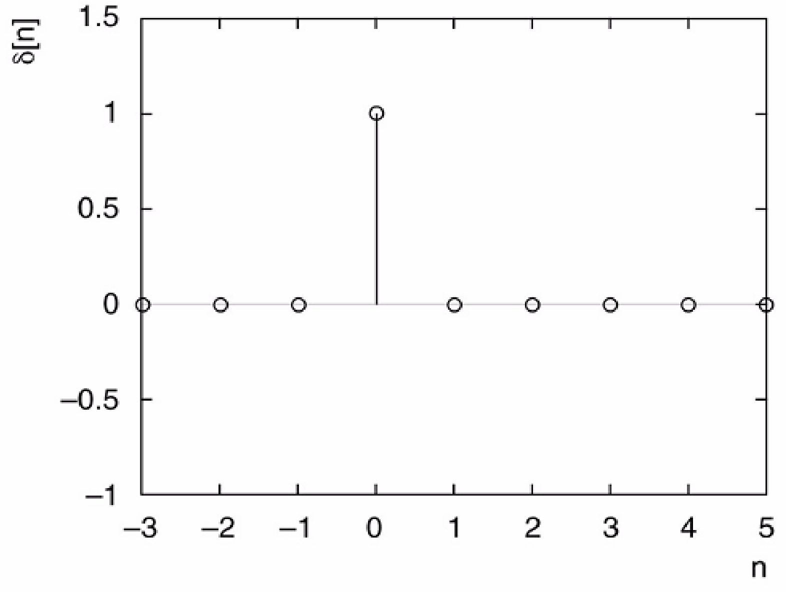
$$h[n]=0.4h[n-1]+\delta[n]-\delta[n\text{-}1]$$

$\delta[0]=1,$其它为零，满足因果关系，脉冲响应在$n=0$前为零

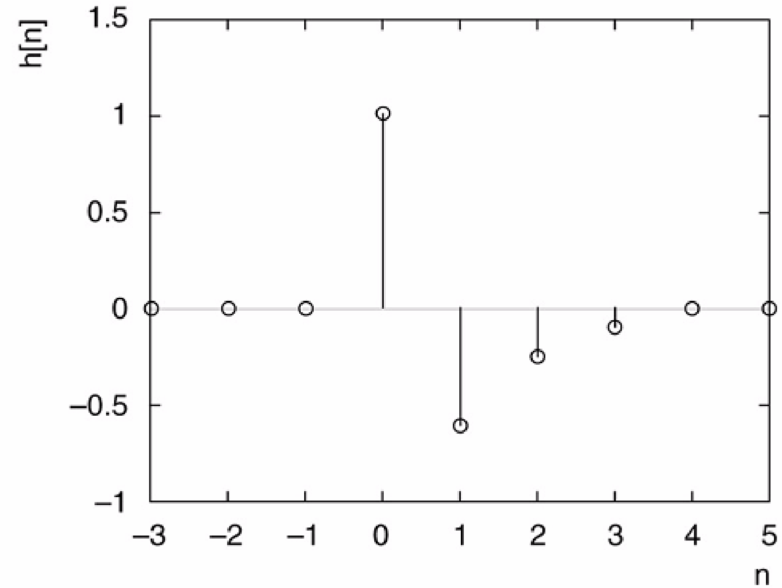
$$h[0]=0.4h[-1]+\delta[0]-\delta[\text{-}1]=0.4\times 0+1-0=1$$
$$h[1]=0.4h[0]+\delta[1]-\delta[0]=0.4\times 1+0-1=\text{-}0.6$$
$$h[2]=0.4h[1]+\delta[2]-\delta[1]=0.4\times(\text{-}0.6)+0-0=\text{-}0.24$$
$$h[3]=0.4h[2]+\delta[3]-\delta[2]=0.4\times(\text{-}0.24)+0-0=\text{-}0.096$$
$$h[4]=0.4h[3]+\delta[4]-\delta[3]=0.4\times(\text{-}0.096)+0-0=\text{-}0.0384$$
$$h[5]=0.4h[4]+\delta[5]-\delta[4]=0.4\times(\text{-}0.0384)+0-0=\text{-}0.01536$$

例：在下图中可见，虽然在后没有输入，但脉冲响应不是立即下降为零，这一特性是递归滤波器所具有的。

无限脉冲响应（Infinite Impulse Response, IIR）：脉冲响应不立即下降为零的响应。



(a) Impulse Function



(b) Impulse Response

例：　对下面差分方程求脉冲响应的前6个值

$$y[n]=0.25(x[n]-x[n-1]-x[n-2]-x[n-3])$$

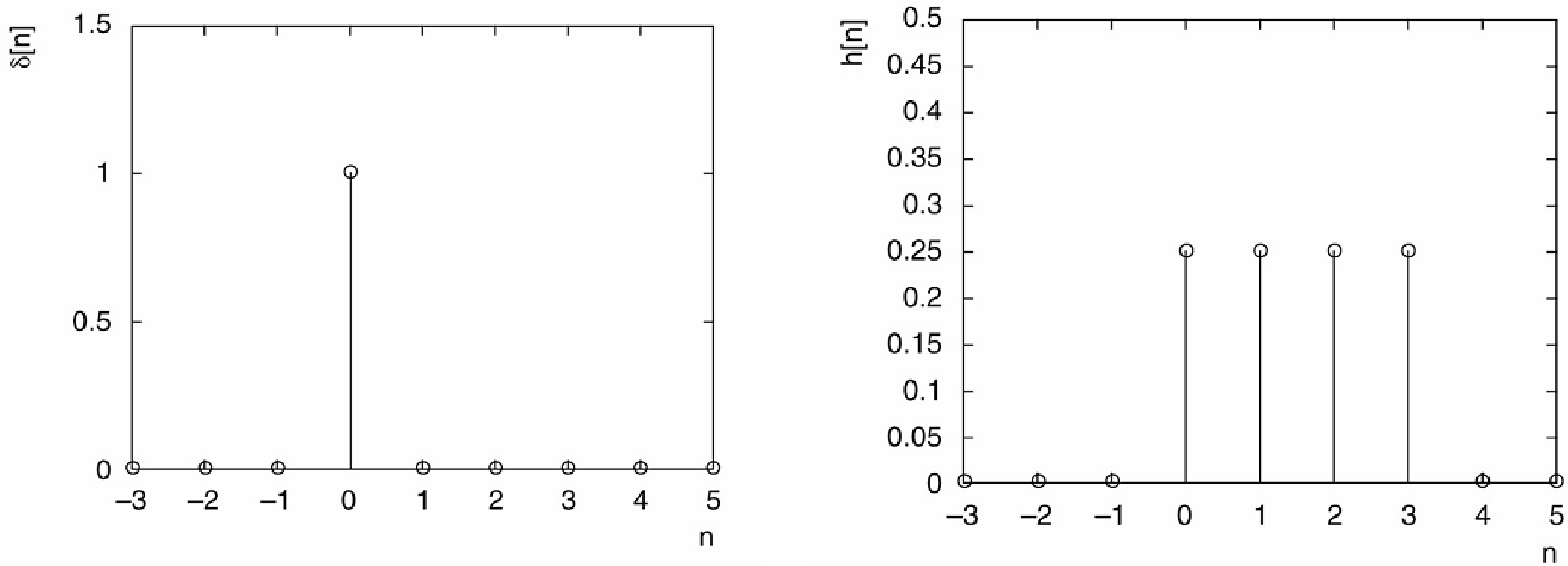
用$\delta[n]$代替$x[n]$，脉冲响应用$h[n]$表示，即$h[n]$代替$y[n]$

$$h[n]=0.25\ (\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3])$$

$\delta[0]=1$,其它为零，满足因果关系，脉冲响应在$n=0$前为零

$$h[0]=0.25\ (\delta[0]+\delta[-1]+\delta[-2]+\delta[-3])=0.25\times(1+0+0+0)=0.25$$
$$h[1]=0.25\ (\delta[1]+\delta[0]+\delta[-1]+\delta[-2])=0.25\times(0+1+0+0)=0.25$$
$$h[2]=0.25\ (\delta[2]+\delta[1]+\delta[0]+\delta[-1])=0.25\times(0+0+1+0)=0.25$$
$$h[3]=0.25\ (\delta[3]+\delta[2]+\delta[1]+\delta[0])=0.25\times(0+0+0+1)=0.25$$
$$h[4]=0.25\ (\delta[4]+\delta[3]+\delta[2]+\delta[1])=0.25\times(0+0+0+0)=0$$
$$h[5]=0.25\ (\delta[5]+\delta[4]+\delta[3]+\delta[2])=0.25\times(0+0+0+0)=0$$

有限脉冲响应（finite impulse response, FIR）：脉冲响应在有限个非零值后立即下降为零，这种脉冲响应称为有限脉冲响应。



(a) Impulse Function

(b) Impulse Response

阶跃响应

- **阶跃响应：**

是滤波器对单位阶跃函数的响应，它给出了系统对输入端电平变化的响应。

例：　对下面差分方程求阶跃响应

$$y[n]\text{-}0.2y[\text{n-2}]=0.5x[n]+0.3x[n-1]$$

用$u[n]$代替$x[n]$，脉冲响应用$s[n]$表示，即$s[n]$代替$y[n]$

$$s[n]\text{-}0.2s[\text{n-2}]=0.5u[n]+0.3u[n-1]$$

$$s[n]=0.2s[\text{n-2}]+0.5u[n]+0.3u[n-1]$$

$$s[0]=0.2s[-2]+0.5u[0]+0.3u[-1]=0.2\times 0+0.5\times 1+0.3\times 0=0.5$$
$$s[1]=0.2s[-1]+0.5u[1]+0.3u[0]=0.2\times 0+0.5\times 1+0.3\times 1=0.8$$
$$s[2]=0.2s[0]+0.5u[2]+0.3u[1]=0.2\times 0.5+0.5\times 1+0.3\times 1=0.9$$
$$s[3]=0.2s[1]+0.5u[3]+0.3u[2]=0.2\times 0.8+0.5\times 1+0.3\times 1=0.96$$
$$s[4]=0.2s[2]+0.5u[4]+0.3u[3]=0.2\times 0.9+0.5\times 1+0.3\times 1=0.98$$
$$s[5]=0.2s[3]+0.5u[5]+0.3u[4]=0.2\times 0.96+0.5\times 1+0.3\times 1=0.992$$

用 Matlab 解差分方程

%解差分方程 y[n]-0.95y[n-1]+0.9025y[n-2]=1/3[x[n]+x[n-2]], n>=0

% x[n]=cos(pi*n/3),

% y[-1]=-2, y[-2]=-3, x[-1]=1, x[-2]=1，过去的输出和输入

%Matlab代码如下：

```
b=[1,1,1]/3; a=[1,-0.95, 0.9025];
Y=[-2,-3]; X=[1,1];% 过去的输出和输入，给出初始条件
xic=filtic(b,a,Y,X); %对应过去的输入和输出
n=[0:50];
x=cos(pi*n/3);%输入信号
y=filter(b,a,x,xic);%差分方程对输入信号的运算
plot(n,y);title('系统响应曲线y'); %差分方程运算结果图示
figure;
plot(n,x);title('系统输入曲线x') %输入信号图示
```

学习使用signal.lfilter函数，该函数用来输出差分方程的解。

$y(n)-0.6y(n-1)=x(n)+2x(n-1)$，初始条件为y(-1)=1，求输入为$x(n)=(0.1\cdot a)^n u(n)$时系统的零状态、零输入、全响应，并绘图，a=7；

```
#解差分方程
# y[n]-0.6y[n-1]=x[n]+2x[n-1],初始条件：y[-1]=1，输入信号：x[n]=(0.1a)**n*u[n]，a=7

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy import signal

nmin = 0
nmax = 8
n = np.arange(nmin,nmax+1,1) #n的取值从min到max,间隔1

den = np.array([1,-0.6]) #y[n]的系数
num = np.array([1,2]) #x[n]的系数

xn = (0.1*7)**n #输入信号x[n]，u[n]在n大于等于0时为1

x01 = np.array([0]);#xn的初始值
zi1 = signal.lfilter_zi(num,den) #差分方程

#解差分方程
y3,_ = signal.lfilter(num,den,xn,zi=zi1)#x[n]带入了差分方程

#计算单位冲激响应
#t4,y4 = signal.dimpulse((num,den,1),n=nl)

plt.subplot(211)
plt.stem(n,xn)
plt.ylim(-1,2.5)
plt.title(“x[n]”) #输入信号图示

plt.subplot(212)
plt.stem(n,y3)
plt.ylim(-1,10)
plt.title(“y[n]”) # 差分方程运算结果图示

plt.show()
```

数字世界的隐秘脉络：差分方程

在数字信号处理中，差分方程宛如一条隐秘而关键的脉络，静静编织着离散世界的秩序。它以简洁而有力的数学语言，搭建起输入与输出之间的桥梁，诉说着系统的前世今生。

每一个离散的时间点，都是它的舞台。当输入信号如灵动的音符般跃入，差分方程便依据既定的规则，将过往的记忆与当下的触动融合，奏响输出的旋律。它是系统的忠实史官，用系数和变量记录着信号的变迁，或是让高频的激情绽放，或是将低频的沉稳保留。

在滤波器的构建中，它是幕后的巧匠，精心雕琢频率的轮廓；于信号预测的征程里，它又化身为睿智的先知，凭借对历史的洞悉，窥探未来的走向。差分方程，以其独特的魅力，在数字的宇宙中，演绎着一场场关于信号的奇妙旅程 。

第5章的作业

一、《数字信号处理基础》书中练习

4.1
4.2
4.3
4.4
4.6
4.8
4.9
4.10
4.14
4.15
4.16
4.23
4.24
4.27
4.29

二、《数字传感技术与机器人控制》书中第5章思考题1、2