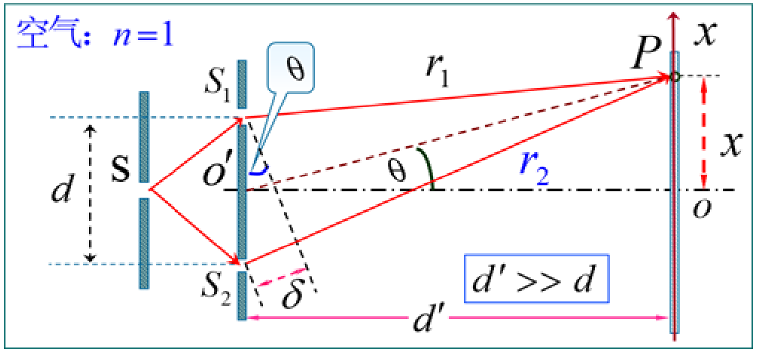
例 1：空气中，以单色光照射到相距为 0.2mm 的双缝上，双缝与屏幕的垂直距离为 1m，

求：1）第1级明纹到同侧的第4级明纹的距离为7.5mm，求单色光的波长；

2）若入射光的波长为 600nm，求相邻两明纹间的距离。

解：1) $\delta = (\overline{SS}_2 + r_2) - (\overline{SS}_1 + r_1) = r_2 - r_1 \approx d\dfrac{x}{d'}$



$\overline{SS}_1 = \overline{SS}_2$

明条纹：$\delta = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2},\ k = 0, 1, 2, \cdots$

$$x_k = \pm 2k \cdot \frac{d'\lambda}{2d},\ k = 0, 1, 2, \cdots$$

同侧：$x_k = 2k \cdot \dfrac{d'\lambda}{2d},\ k = 0, 1, 2, \cdots$

$$\Delta x = x_4 - x_1 = 3\frac{d'}{d}\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{\Delta x \cdot d}{3d'} = 500\,\text{nm}$$

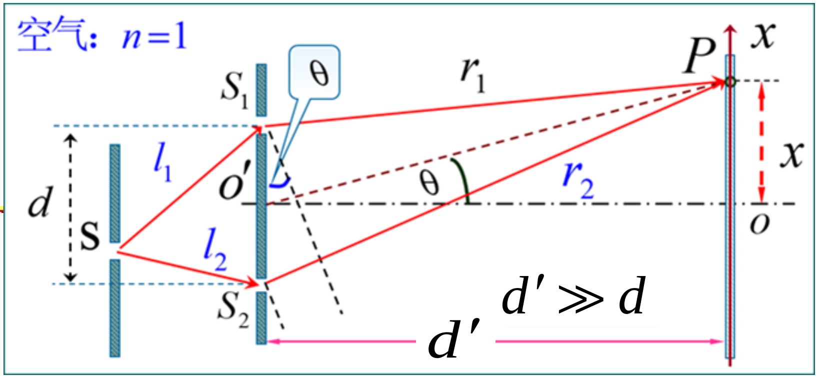
2) $$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{d'}{d}\lambda = 3\,\text{mm}$$

例 2：空气中，在双缝干涉实验中，单色光源S到两缝S_1、S_2距离分别为l_1、l_2，且有：$l_1 - l_2 = 3\lambda$，两缝间距为 d，双缝到观察屏的垂直距离为 d', $d' \gg d$

求：1）接收屏中央O处出现的为何条纹？

2）零级明纹到屏中央O点的距离；

3）相邻两明纹间的距离。



解：$\delta = (\overline{SS}_2 + r_2) - (\overline{SS}_1 + r_1) = (l_2 - l_1) + (r_2 - r_1)$

$$\delta \approx -3\lambda + d\frac{x}{d'}$$

明条纹：$\delta = -3\lambda + d\frac{x_k}{d'} = 2k\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

暗条纹：$\delta = -3\lambda + d\frac{x_k}{d'} = (2k-1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = \pm1, \pm2, \cdots$

1）接收屏中央O处： $x_{k'} = 0$, $\delta = -3\lambda = 2k'\frac{\lambda}{2}$, $k' = -3$, **3级明条纹**

2）**0级明条纹**： $k = 0, \delta = 0$, $-3\lambda + d\frac{x_0}{d'} = 0$, $\Rightarrow x_0 = 3\frac{d'}{d}\lambda > 0$, 条纹上移

3）同侧，相邻明纹：

$$-3\lambda + d\frac{x_{k+1}}{d'} = 2(k+1)\frac{\lambda}{2},$$

$$-3\lambda + d\frac{x_k}{d'} = 2k\frac{\lambda}{2},$$

$\Rightarrow \Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{d'}{d}\lambda$, 条纹间距不变

思考： 如果将杨氏双缝干涉实验装置放入某种透明液体中，对比在空气中，情况如何？

设：$\overline{SS}_1 = \overline{SS}_2$　　**光程差：** $\Delta = n(\overline{SS}_2 + r_2) - n(\overline{SS}_1 + r_1) = n(r_2 - r_1) \approx nd\dfrac{x}{d'}$

$r_2 - r_1 \approx d\dfrac{x}{d'}$

1、干涉加强(明纹)：$\boxed{\Delta = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2},\ k = 0,1,2,\cdots}$

$$x_k = \pm 2k \cdot \frac{d'\lambda}{2nd} = \pm k \cdot \frac{d'\lambda}{nd},\ k = 0,1,2,\cdots,$$

条纹间距：$\Delta x = \dfrac{d'\lambda}{nd}$，$(\Delta k = 1)$

2、干涉减弱(暗纹)：$\boxed{\Delta = \pm(2k-1)\dfrac{\lambda}{2},\ k = 1,2,\cdots}$

$$x_k = \pm(2k-1) \cdot \frac{d'\lambda}{2nd},\ k = 1,2,\cdots$$

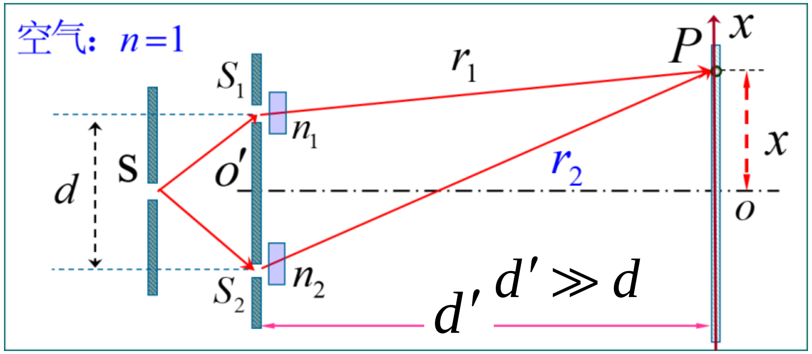
例： 杨氏双缝干涉实验装置放置在空气中，在屏上P点处为第4级明条纹；若将整个装置放入某种透明液体中，P点处变为第6级明条纹，

求： 该液体的折射率为多少？　　$n = 1.5$

例 3：空气中，一双缝装置的一个缝被折射率为 $n_1=1.40$ 的薄玻璃片所遮盖，另一个缝被折射率为 $n_2=1.70$ 的薄玻璃片所遮盖。在玻璃薄片遮盖后，屏上原来的中央极大所在点（O点），现变为第5级明纹，单色光波长 $\lambda=480\text{nm}$，且两玻璃薄片厚度均为e，

求：玻璃薄片厚度 $e=?$

解：光程差：



$$\varDelta=[(\overline{SS}_2+r_2-e)+n_2e]-[(\overline{SS}_1+r_1-e)+n_1e]$$

$$\varDelta=(r_2-r_1)+(n_2-n_1)e\approx d\frac{x}{d'}+(n_2-n_1)e$$

明条纹：$\varDelta=\pm 2k\dfrac{\lambda}{2},\ k=0,1,2,\cdots$

k级明纹：$d\dfrac{x_k}{d'}+(n_2-n_1)e=\pm 2k\dfrac{\lambda}{2}=\pm k\lambda,\ k=0,1,2,\cdots$

第5级明纹：$k=5,\quad x_5=0,$

$$0+(n_2-n_1)e=5\lambda$$

玻璃薄片厚度 e：

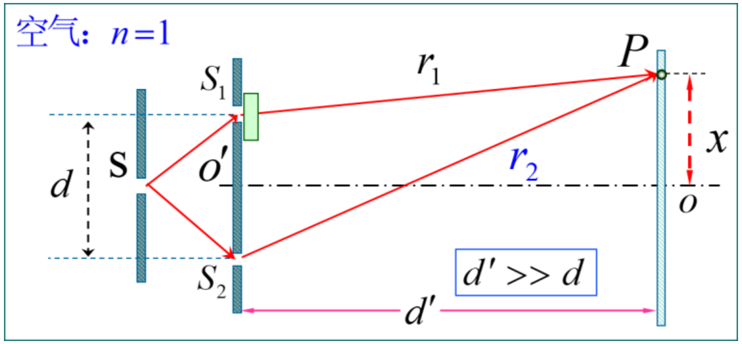
$$e=\frac{5\lambda}{n_2-n_1}=8\times10^{-6}\ \text{m}$$

例 4: 将杨氏双缝干涉实验装置放置在空气中，用波长**500nm**的单色光照射。

若用一厚度为 $e = 6.0\times10^{-6}$ m 的云母片覆盖在一条狭缝上，

使屏上原来的中央极大所在点（O点），变为第7级明纹，

求： 1）条纹如何移动？ 2）云母片的折射率为多少？



解： 1) 光程差：$\varDelta = (\overline{SS}_2 + r_2) - [(\overline{SS}_1 + r_1 - e) + ne]$

$$\varDelta = (r_2 - r_1) + (1-n)e \approx d\frac{x}{d'} + (1-n)e$$

明条纹： $\varDelta = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2},\ k = 0,1,2,\cdots$

0级明纹： $k = 0,\ \varDelta = 0,\ x_0,\quad d\dfrac{x_0}{d'} + (1-n)e = 0,\ \Rightarrow x_0 = (n-1)e\dfrac{d'}{d} > 0,$

条纹上移

2） 第7级明纹：

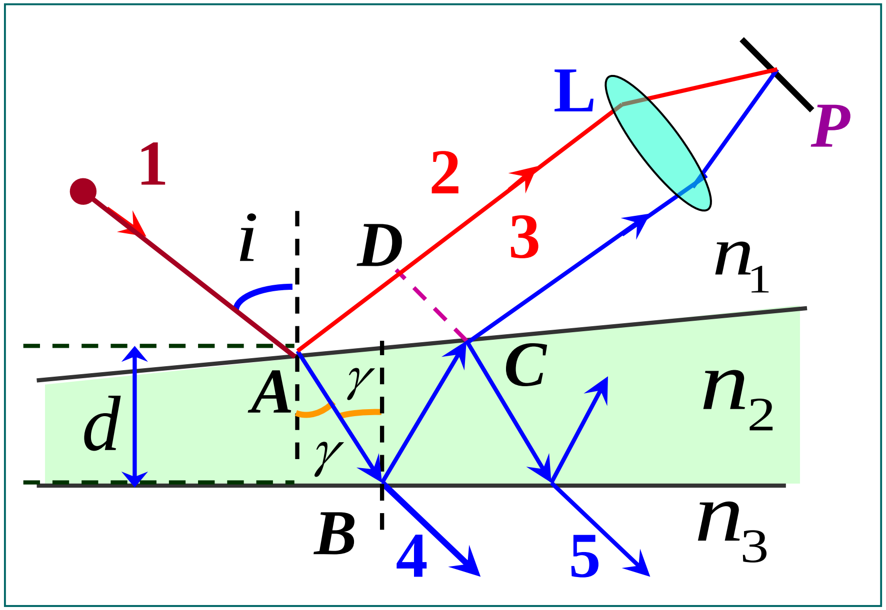
$$k = 7,\quad x_7 = 0,$$

$$0 + (1-n)e = -7\lambda$$

云母片折射率：

$$n = 1 + \frac{7\lambda}{e} = 1.58$$

二、薄膜干涉----反射光的光程差（重点）



1、反射光的光程差

$$\varDelta_r = 2n_2 d\cos\gamma + \varDelta_0$$

$$= 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i} + \varDelta_0$$

$$\varDelta_0 = \begin{cases} 1)\ \dfrac{\lambda}{2}, & \begin{pmatrix} n_1 > n_2 < n_3, \\ n_1 < n_2 > n_3 \end{pmatrix} \\ 2)\ 0, & \begin{pmatrix} n_1 > n_2 > n_3, \\ n_1 < n_2 < n_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

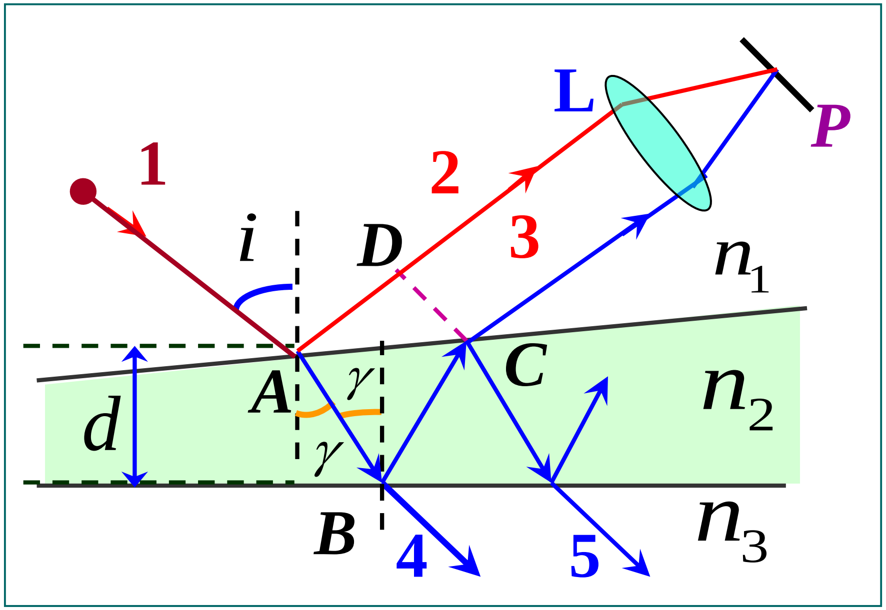
1) 干涉加强(明纹中心)：

$$\varDelta_r = 2k\frac{\lambda}{2},\quad k = 0,1,2,\cdots$$

2) 干涉减弱(暗纹中心)：

$$\varDelta_r = (2k+1)\frac{\lambda}{2},\quad k = 0,1,2,\cdots$$

二、薄膜干涉----反射光的光程差（重点）



1、反射光的光程差

$$\Delta_r = 2n_2 d\cos\gamma + \Delta_0$$

$$= 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i} + \Delta_0$$

$$\Delta_0 = \begin{cases} 1)\ \dfrac{\lambda}{2}, & \begin{pmatrix} n_1 > n_2 < n_3, \\ n_1 < n_2 > n_3 \end{pmatrix} \\ 2)\ 0, & \begin{pmatrix} n_1 > n_2 > n_3, \\ n_1 < n_2 < n_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

光程差相等的各点，在同一条(同一级)干涉条纹上

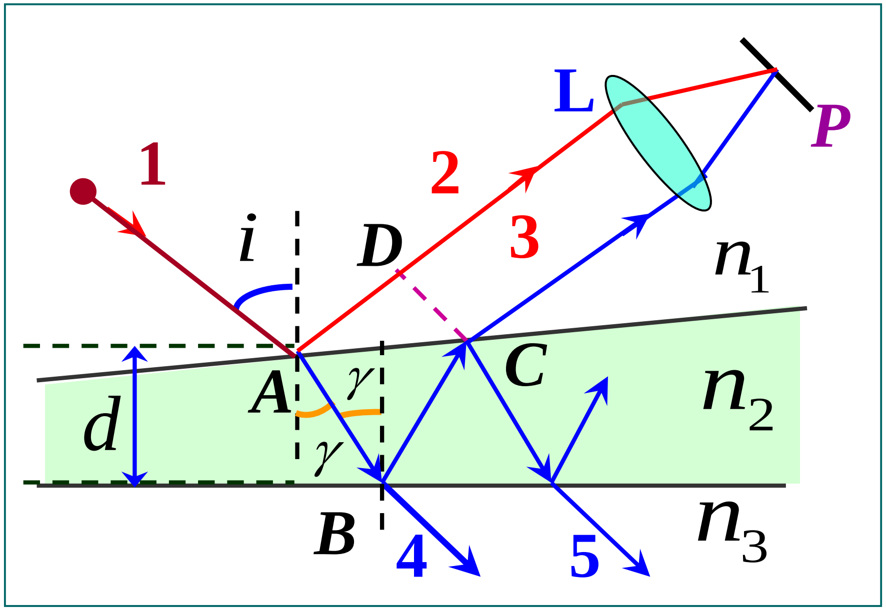
等倾干涉： 当薄膜厚度均匀，条纹级次(光程差)取决于入射角；

特点： 倾角(入射角)相同的光线对应同一条(级)干涉条纹。

等厚干涉： 当入射角确定，条纹级次(光程差)取决于薄膜厚度；

特点： 薄膜上厚度相同的点在同一条(同一级)干涉条纹上。

二、薄膜干涉----反射光的光程差（重点）



2、透射光的光程差

$$\Delta_t = 2n_2 d\cos\gamma + \Delta_0$$
$$= 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i} + \Delta_0$$

$$\Delta_0 = \begin{cases} 1)0, & \begin{pmatrix} n_1 > n_2 < n_3, \\ n_1 < n_2 > n_3 \end{pmatrix} \\ 2)\dfrac{\lambda}{2}, & \begin{pmatrix} n_1 > n_2 > n_3, \\ n_1 < n_2 < n_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

注意： 透射光和反射光干涉具有互补性，符合能量守恒定律.

如反射光干涉加强，透射光即为干涉减弱；

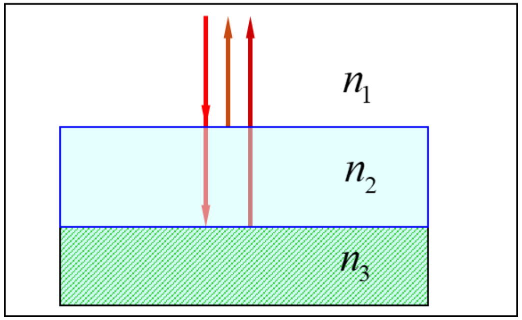
如反射光干涉减弱，透射光即为干涉加强；

透射光干涉情况，可以利用反射光干涉来讨论

二、薄膜干涉----反射光的光程差（重点）

◆ **当光线垂直入射时：**

$$i=\gamma=0^\circ$$



➢ **反射光的光程差**

$$\varDelta_r=2n_2d\cos\gamma+\delta_0$$

$$=2d\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}+\varDelta_0$$

$$\varDelta_0=\begin{cases}1)\dfrac{\lambda}{2}, & \begin{pmatrix}n_1>n_2<n_3,\\ n_1<n_2>n_3\end{pmatrix}\\ 2)0, & \begin{pmatrix}n_1>n_2>n_3,\\ n_1<n_2<n_3\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$\boxed{\varDelta_r=2n_2d+\varDelta_0}=\begin{cases}\text{明纹：}\quad 2k\dfrac{\lambda}{2},\ k=0,1,2,\cdots,\\ \text{暗纹：}\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2},\ k=0,1,2,\cdots,\end{cases}$$

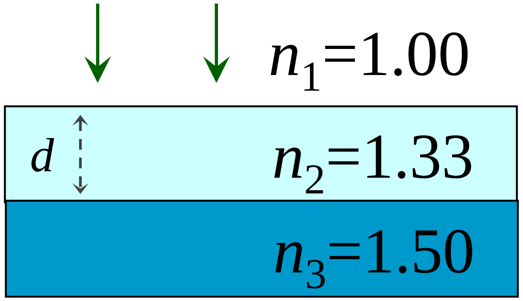
（等厚干涉）

二、薄膜干涉----反射光的光程差（重点）

1）增透膜（$n_1<n_2<n_3$）

例 5： 为增强照相机镜头的透射光，在镜头（$n_3=1.50$）上镀一层 MgF_2 薄膜（$n_2=1.33$），使对人眼和感光底片最敏感的黄绿光 $\lambda = 550\ \mathrm{nm}$ 反射相消，增强其透射，假设光垂直照入射镜头，求：MgF_2 薄膜的最小厚度。

解： 透射光干涉加强，即：反射光干涉减弱



反射光干涉减弱（相消）条件：

$$\Delta_r = 2n_2 d = (2k+1)\frac{\lambda}{2},\quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$d = (2k+1)\frac{\lambda}{4n_2},\quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

薄膜的最小厚度（$k = 0$）为：

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_2} = 1.034\times10^{-7}\ \mathrm{m}$$

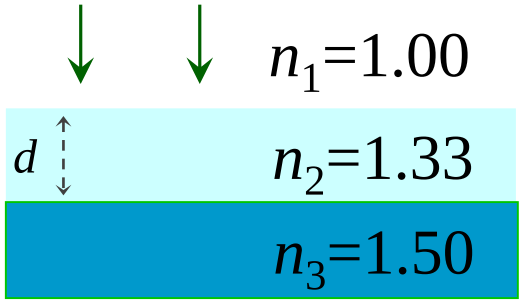
二、薄膜干涉----反射光的光程差（重点）

2）增反膜

减少透光量，增加反射光，使膜上下两表面的反射光满足干涉加强条件。

例 6： 在镜头（n_3=1.50）上镀一层 MgF_2 薄膜（n_2=1.33），厚度均匀，今以黄绿光 λ = 550 nm 单色光垂直入射，使反射光加强，**求：** MgF_2 薄膜的最小厚度。

解： 反射光干涉加强条件：



$$\Delta_r = 2n_2 d = 2k\frac{\lambda}{2}, \quad k = \cancel{0}, 1, 2, \cdots$$

$$d = k\frac{\lambda}{2n_2}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

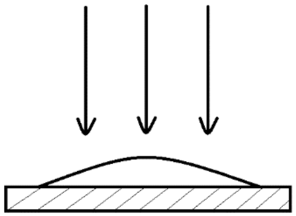
薄膜的最小厚度（$k = 1$）为： $d_{\min} = \dfrac{\lambda}{2n_2} = 2.068\times10^{-7}\,\text{m}$

例 7：折射率n_2=1.2的油滴落在折射率n_3=1.5平板玻璃上，形成一球冠型薄膜。测得油膜中心最高处高度 d_m=1.1μm ，用波长 λ=600nm的单色光垂直照射，从油膜上方观察反射光干涉，

求：1）油膜周边，是明环，还是暗环？

2）整个油膜可看到几个明环？

3）整个油膜可看到几个暗环？



解： 1) 反射光： $\Delta_r = 2n_2 d + \Delta_0 = 2n_2 d$ $\qquad n_1 < n_2 < n_3, \quad \Delta_0 = 0$

油膜周边： $d = 0, \quad \Delta_r = 0,$ 明环

2) 明环： $\Delta_r = 2n_2 d = 2k\dfrac{\lambda}{2} = k\lambda, , k = 0,1,2,\cdots,$

$$0 \le d \le d_m, \quad \Rightarrow 0 \le k \le \frac{2n_2 d_m}{\lambda} = 4.4, \qquad k = 0,1,2,3,4,$$ 5个明环

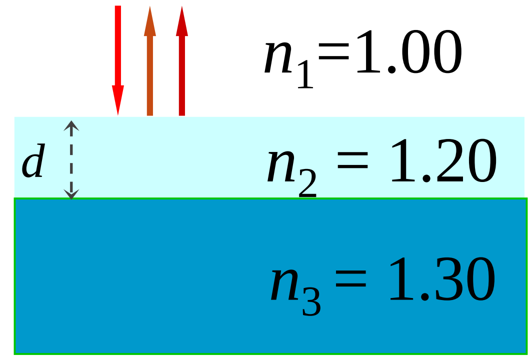
3) 暗环： $\Delta_r = 2n_2 d = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}, k = 0,1,2,\cdots,$

$$0 \le d \le d_m, \quad \Rightarrow -0.5 < k \le \frac{1}{2}(\frac{4n_2 d_m}{\lambda} - 1) = 3.9, \qquad k = 0,1,2,3,$$ 4个暗环

例 8：一油轮漏出的油(折射率 n_2=1.20)污染了某海域，在海水(n_3=1.30)表面形成一层薄薄的油膜，油膜厚度为460nm，

求：1）如果太阳正位于海域上空，一直升飞机的驾驶员从机上向下观察，他正对着油膜，则他将观察到油膜呈现什么颜色?

2）如果一潜水员潜入水下，正对此油膜，又将看到油膜呈什么颜色?



解：1) 反射光： $\Delta_r = 2n_2 d + \Delta_0 = 2n_2 d$

干涉加强（明）： $\Delta_r = 2k\dfrac{\lambda}{2}, \ k = 1, 2, \cdots$

$$\lambda = \frac{2n_2 d}{k} = \frac{1104\text{nm}}{k}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

可见光的范围，真空中：

$\lambda : 400 \sim 760\text{nm}$

$k = 1, \quad \lambda = 1104\text{nm}$ ✗ 看不见

$k = 2, \quad \lambda = 552\text{nm}$ ✓ 绿色

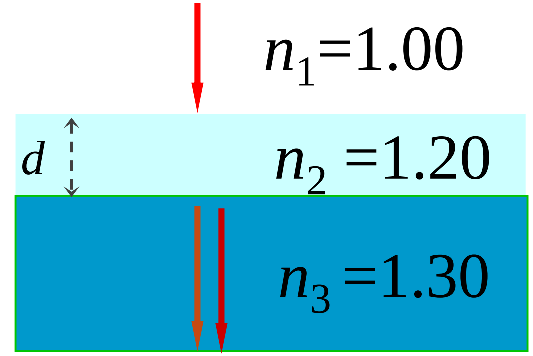
$k = 3, \quad \lambda = 368\text{nm}$ ✗ 看不见

例 8：一油轮漏出的油(折射率 n_2=1.20)污染了某海域，在海水(n_3=1.30)表面形成一层薄薄的油膜，油膜厚度为460nm，

求：1）如果太阳正位于海域上空，一直升飞机的驾驶员从机上向下观察，他正对着的油膜，则他将观察到油膜呈现什么颜色?

2）如果一潜水员潜入水下，正对此油膜，又将看到油膜呈什么颜色?

解：2) 反射光： $\Delta_r = 2n_2 d + \Delta_0 = 2n_2 d$



反射光干涉减弱：
（透射光干涉加强）

$$\Delta_r = (2k+1)\frac{\lambda}{2},\quad k = 0,1,\cdots$$

$$\lambda = \frac{4n_2 d}{2k+1} = \frac{2208\text{nm}}{2k+1},\quad k = 0,1,2,\cdots$$

可见光的范围，真空中：

$\lambda : 400 \sim 760\text{nm}$

$k=0,\quad \lambda = 2208\text{nm}$ ✗ 看不见

$k=1,\quad \lambda = 736\text{nm}$ ✓ 红色

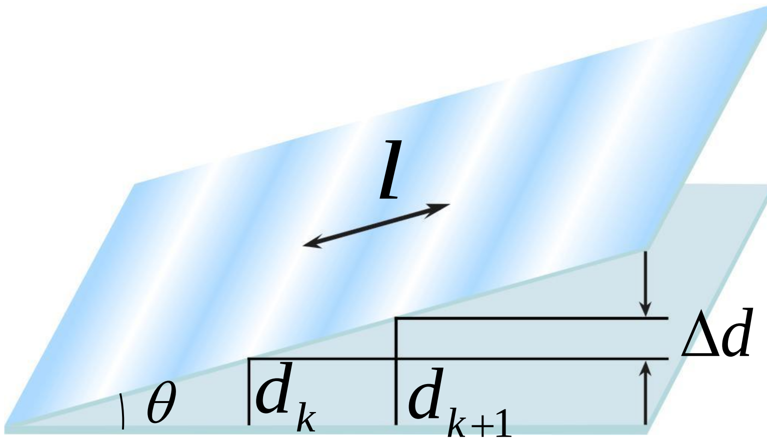
$k=2,\quad \lambda = 442\text{nm}$ ✓ 紫色

$k=3,\quad \lambda = 315\text{nm}$ ✗ 看不见

一、等厚干涉

1、劈尖膜

1）劈尖膜



以$n_1 = n_3$、垂直入射，
观察反射光为例

$n_1 < n_2 > n_3$ 或 $n_1 > n_2 < n_3$，　$\varDelta_0 = \dfrac{\lambda}{2}$

明纹：　$\varDelta_r = 2n_2 d_k + \dfrac{\lambda}{2} = 2k\dfrac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k = 1, 2, \cdots$

暗纹：　$\varDelta_r = 2n_2 d_k + \dfrac{\lambda}{2} = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, \cdots$

相邻条纹间距 l 与所对应的膜厚度差Δd 之间的关系：

$$\Delta d = d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2n_2}, \qquad \Delta d = \boxed{l\sin\theta = \frac{\lambda}{2n_2}}$$

相邻条纹间距l
与劈尖顶角θ
之间的关系

例9： 折射率为1.60的两块标准平面玻璃板之间形成一个劈形膜(劈尖角 θ 很小)．用波长 λ ＝600nm的单色光垂直入射，产生等厚干涉条纹。如在劈形膜内充满n=1.40的液体时，相邻明纹间距比劈形膜内是空气时的间距缩小Δl＝0.5mm，则劈尖角 θ 为多少？

解：

空气中：$l_1 \sin\theta = \dfrac{\lambda}{2}$

液体中：$l_2 \sin\theta = \dfrac{\lambda}{2n}$

$$\Delta l = l_2 - l_1 \qquad \Delta l \sin\theta = \frac{\lambda}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\theta \approx \sin\theta = \frac{\lambda}{2\Delta l}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.7\times 10^{-4}\,\text{rad}$$

相邻条纹间距 l 与所对应的膜厚度差Δd 之间的关系：

$$\Delta d = d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2n_2}, \qquad \Delta d = \boxed{l\sin\theta = \frac{\lambda}{2n_2}}$$

相邻条纹间距l与劈尖顶角θ之间的关系

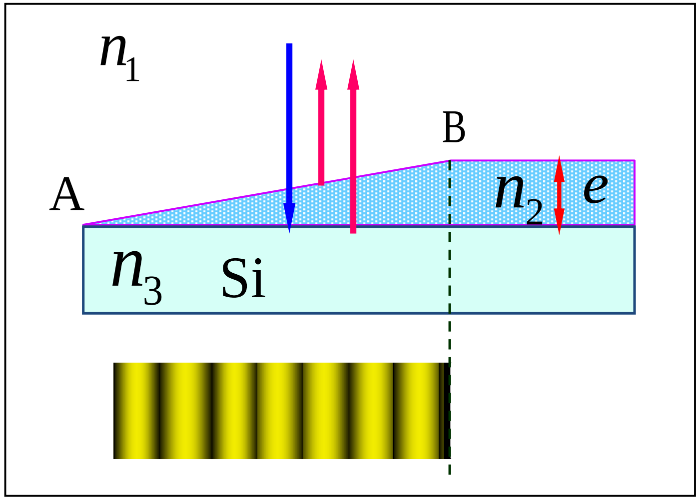
一、等厚干涉

1、劈尖膜

2）劈尖膜的应用

例10：用波长为600nm平行单色光垂直照射，观察反射光，在AB段共有8条暗纹，B处恰好是一条暗纹，n_1=1.00，n_2=1.50，n_3=3.42，求：薄膜厚度e。

(3) 测膜厚



解：反射光：$n_1 < n_2 < n_3$，$\Delta_0 = 0$

$$\Delta_r = 2n_2 d + \Delta_0 = 2n_2 d$$

干涉减弱（暗）：

$$\Delta_r = 2n_2 d_k = (2k+1)\frac{\lambda}{2},\ k = 0,1,2,\cdots$$

B处，7级暗纹：$k = 7$，$d_7 = d_B = e$

$$\Rightarrow 2n_2 e = (2\times 7+1)\frac{\lambda}{2} = \frac{15\lambda}{2}$$

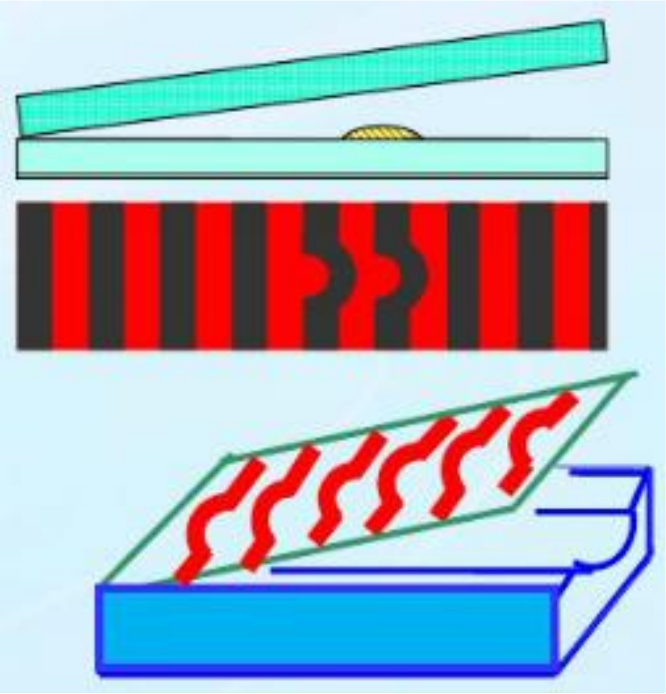
$$\Rightarrow e = \frac{15\lambda}{4n_2} = 1500\text{nm}$$

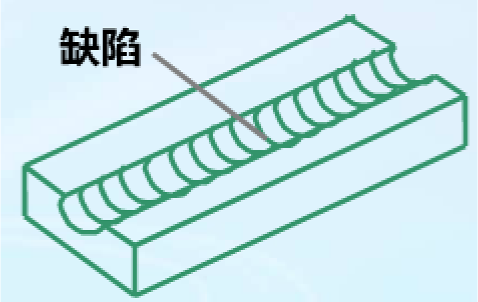
一、等厚干涉

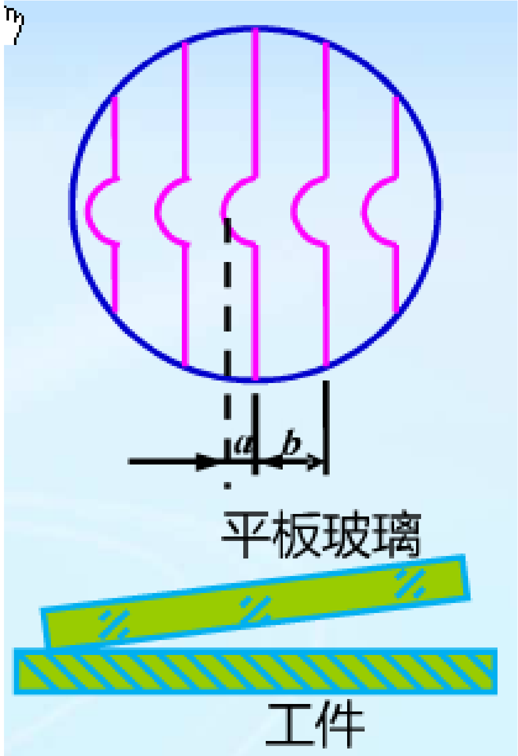
1、劈尖膜

2）劈尖膜的应用

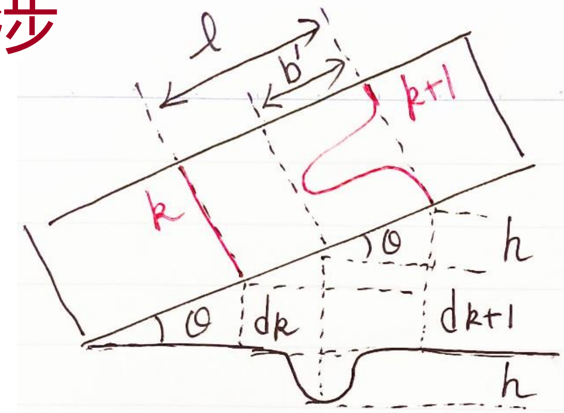
(4) 检验光学元件表面的平整度







一、等厚干涉



设：空气中

$n_1 = n_3,\ n_2 = 1.0$

$\Delta d = d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2n_2} = \frac{\lambda}{2}$

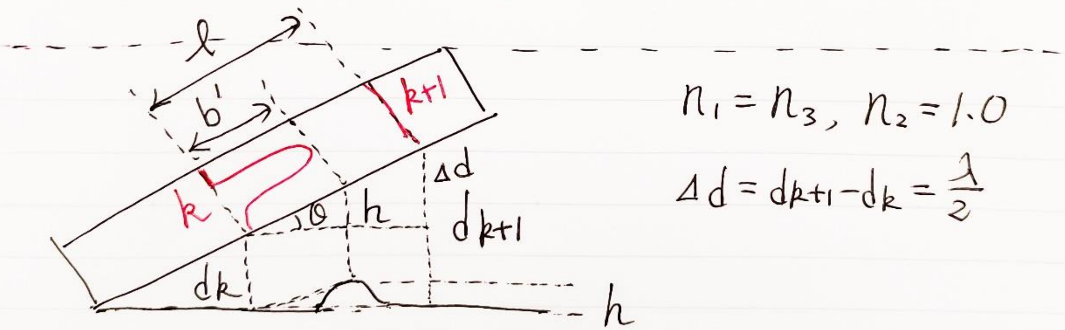
相邻条纹间距 l：

$l \sin\theta = \frac{\lambda}{2}$

最大深度 h：

$b' \sin\theta = h$

$\Rightarrow\ h = b' \cdot \frac{\lambda}{2l}$



$n_1 = n_3,\ n_2 = 1.0$

$\Delta d = d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2}$

$$\left.\begin{aligned} l \sin\theta &= \Delta d = \frac{\lambda}{2} \\ b' \sin\theta &= h \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = b' \cdot \frac{\lambda}{2l}$$

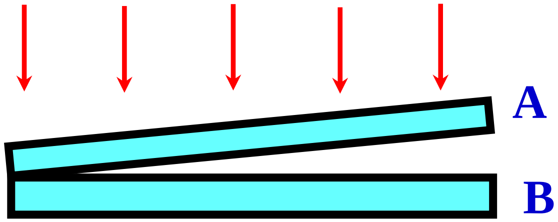
例 11：一光学平板玻璃A与待测工件B之间形成空气劈尖，用波长 **500 nm** 的单色光垂直入射。看到的反射光的干涉条纹如图所示，有些条纹弯曲部分的顶点恰好与其右边条纹的直线部分相切，则工件的上表面缺陷是：

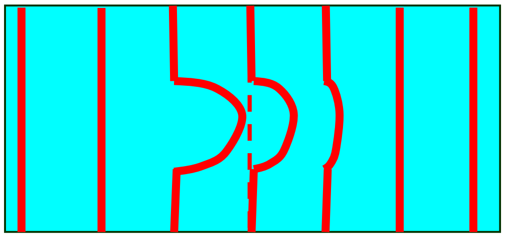
(A) 不平处为凸起，最大高度为500 nm;

(B) 不平处为凸起，最大高度为250 nm;

(C) 不平处为凹槽，最大深度为500 nm;

(D) 不平处为凹槽，最大深度为250 nm





凸起，最大高度*h*：

$$h = b'\frac{\lambda}{2l} = l\,\frac{\lambda}{2l} = \frac{\lambda}{2}$$

牛顿环的应用——测量曲率半径

3、牛顿环 （以$n_1=n_3$、垂直入射，观察反射光为例）

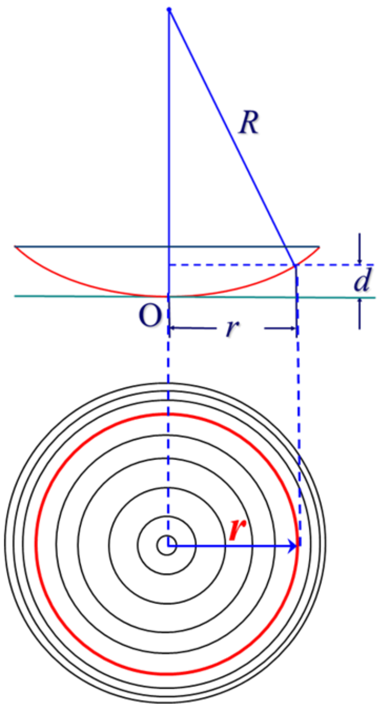
$n_1<n_2>n_3$ 或 $n_1>n_2<n_3$， $\Delta_0=\dfrac{\lambda}{2}$

明纹： $\Delta_r=2n_2d_k+\dfrac{\lambda}{2}=2k\dfrac{\lambda}{2}=k\lambda,\quad k=1,2,\cdots$

暗纹： $\Delta_r=2n_2d_k+\dfrac{\lambda}{2}=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2},\quad k=0,1,\cdots$

$$r^2=R^2-(R-d)^2=2Rd-d^2$$

$$\because\quad R>>d\rightarrow 2Rd>>d^2\qquad\Rightarrow d=\frac{r^2}{2R}$$



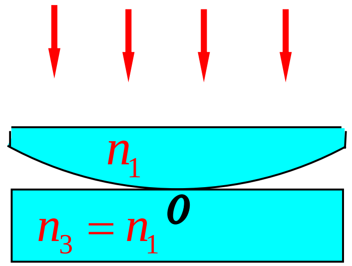
明环： $r_k=\sqrt{\dfrac{(2k-1)R\lambda}{2n_2}},\qquad (k=1,2,\cdots)$

暗环： $r_k=\sqrt{\dfrac{kR\lambda}{n_2}},\qquad (k=0,1,2,\cdots)$

牛顿环的应用——测量曲率半径

例 12：空气(折射率 n=1.0)中，用波长为633nm的单色光做牛顿环实验，如图所示，测得 k 级暗环的半径为 5.63 mm，k+5 级暗环的半径为 7.96mm，求平凸透镜的曲率半径R。

解： 暗环半径：$r_k = \sqrt{\dfrac{kR\lambda}{n_2}} = \sqrt{kR\lambda}$



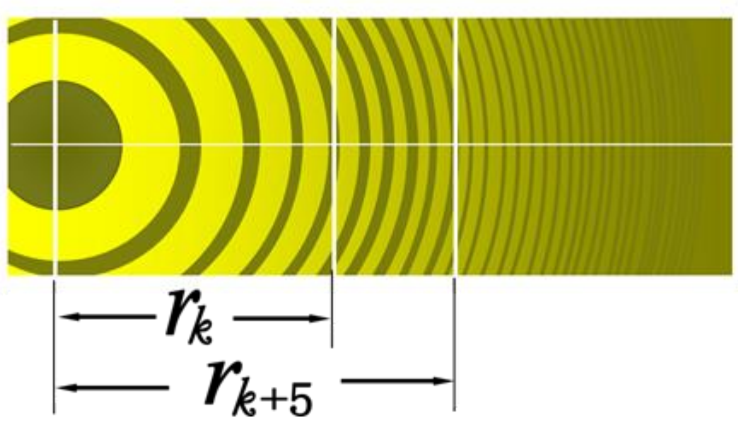
$$r_k = \sqrt{kR\lambda},$$

$$r_{k+5} = \sqrt{(k+5)R\lambda},$$

$$\Rightarrow r_{k+5}^2 - r_k^2 = 5R\lambda$$

$$\Rightarrow R = \frac{r_{k+5}^2 - r_k^2}{5\lambda}$$

$$= \frac{(7.96\text{mm})^2 - (5.63\text{mm})^2}{5\times 633\text{nm}} = 10\text{m}$$



牛顿环的应用——测量曲率半径

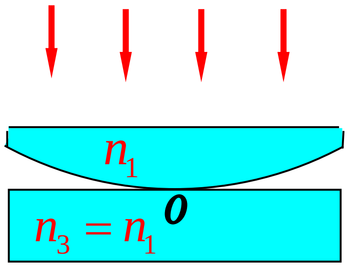
例 13：空气(折射率 n=1.0)中，用紫光照射一牛顿环，借助于低倍测量显微镜测得由中心往外数第 k 级明环的半径 $r_k = 3.0\times10^{-3}\,m$ ，

k 级往上数第16 个明环半径 $r_{k+16} = 5.0\times10^{-3}\,\text{m}$ ，

平凸透镜的曲率半径R=2.5m，求紫光的波长？

解：明环半径：

$$r_k = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2n_2}} = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}$$



$$r_{k+16} = \sqrt{\frac{[2(k+16)-1]R\lambda}{2}},$$

$$\Rightarrow r_{k+16}^2 - r_k^2 = 16R\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{r_{k+16}^2 - r_k^2}{16R} = 400\text{nm}$$

例 14: 当把折射率**n=1.40**的薄膜放入迈克耳逊干涉仪的一臂时，产生了 **7** 个条纹的移动，已知钠光的波长为**589.3 nm**，求薄膜的厚度*e*。

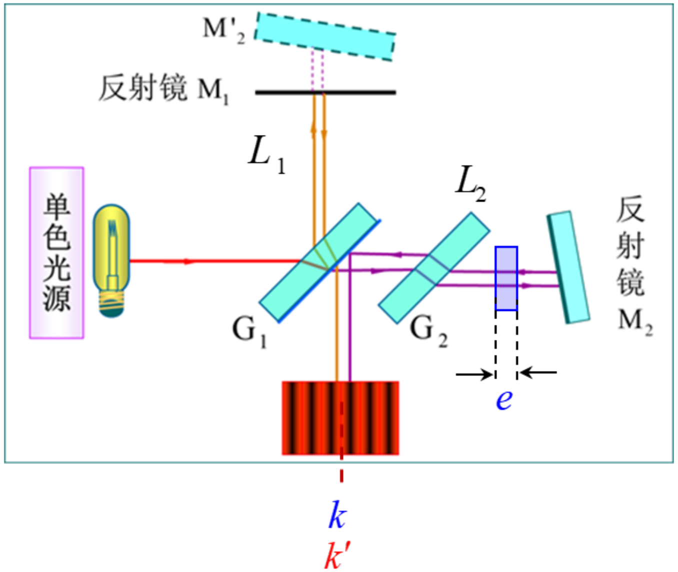
解： 放入薄膜前，*k* 级明纹：

$$\varDelta = L_2 - L_1 = 2k\frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

放入薄膜后，*k′* 级明纹：

$$\varDelta' = (L_2 - 2e + 2ne) - L_1$$

$$= (L_2 - L_1) + 2(n-1)e = 2k'\frac{\lambda}{2} = k'\lambda$$



$$\Rightarrow 2(n-1)e = (k'-k)\lambda = 7\lambda \Rightarrow e = \frac{(k'-k)\lambda}{2(n-1)} = \frac{7\times 589.3\text{nm}}{2\times(1.40-1.00)}$$

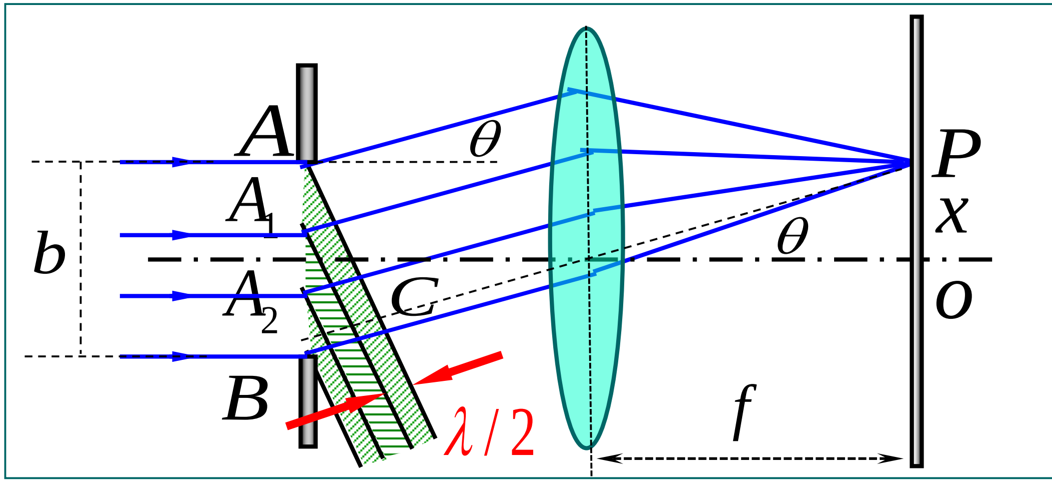
$$\Rightarrow e = 5.156\times 10^{-6}\,\text{m}$$

思考：在迈克耳孙干涉仪的一支光路中，放入一片折射率为*n*的透明介质薄膜后，测出两束光的光程差的改变量为一个波长λ，则薄膜的厚度是：$e = \dfrac{\lambda}{2(n-1)}$

二、单缝的夫琅禾费衍射-明暗纹条件（重点）

空气中，$n = 1.00$

菲涅尔半波带法



$$\frac{BC}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{b\sin\theta}{\frac{\lambda}{2}} = N$$

（ N 个半波带）

1、中央明纹中心 $b\sin\theta = 0, \quad \theta = 0$

2、暗纹中心

（干涉减弱）

$$b\sin\theta = \pm 2k\frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

3、明纹中心

$$b\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

三、条纹位置、宽度（重点）

一般，θ很小， $\tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta$

1)、暗纹中心位置 $\begin{cases} b\sin\theta = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} = \pm k\lambda \\ \tan\theta = \dfrac{x}{f} \end{cases} \Rightarrow x_k = \pm k\dfrac{f\lambda}{b}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$

2)、明纹中心位置 $\begin{cases} b\sin\theta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} \\ \tan\theta = \dfrac{x}{f} \end{cases} \Rightarrow x_k = \pm(2k+1)\dfrac{f\lambda}{2b}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$

3)、明纹宽度： （1）、中央明纹宽度：（屏上，两侧1级暗纹之间距离）

1级暗纹：$x_1 = \dfrac{f\lambda}{b} \Rightarrow \Delta x_0 = 2x_1 = 2\dfrac{f\lambda}{b}$

（2）、k级明纹宽度：（屏上，同一侧，k、k+1级暗纹之间距离）

k，k+1级暗纹：$x_k = k\dfrac{f\lambda}{b},\ x_{k+1} = (k+1)\dfrac{f\lambda}{b} \Rightarrow \Delta x = x_{k+1} - x_k = \dfrac{f\lambda}{b}$

例 15： 空气中，在夫琅禾费单缝衍射中，已知缝宽 $b= 0.1\text{mm}$，透镜 L_2的焦距 $f = 50\text{cm}$。今用含有 λ_1 和 λ_2 两种波长光垂直照射狭缝，发现 λ_1的第2级暗纹中心刚好与 λ_2 的第3级暗纹中心重合。若已知 $\lambda_1 = 600\text{nm}$，

求： 1、$\lambda_2 =$ ？；

2、λ_1 与 λ_2 2级明纹中心之间距离？

3、比较 λ_1 和 λ_2 中央明纹的宽度。

解：

1、暗纹：$b\sin\theta = 2k\dfrac{\lambda}{2} = k\lambda \Rightarrow \begin{cases} b\sin\theta_1 = k_1\lambda_1 \\ b\sin\theta_2 = k_2\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2 \quad \Rightarrow \lambda_2 = \dfrac{k_1}{k_2}\lambda_1$

k_1级与k_2级重合： $\theta_1 = \theta_2 \quad \Rightarrow \lambda_2 = \dfrac{2}{3}\times 600\text{nm} = 400\text{nm}$

2、明纹：$\begin{cases} b\sin\theta = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} \\ \tan\theta = \dfrac{x_k}{f} \end{cases} \Rightarrow x_k = (2k+1)\dfrac{f\lambda}{2b} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = (2\times 2+1)\dfrac{f\lambda_1}{2b} \\ x_2' = (2\times 2+1)\dfrac{f\lambda_2}{2b} \end{cases}$

$$\Delta x = x_2 - x_2' = \frac{5f(\lambda_1 - \lambda_2)}{2b}, \qquad \Rightarrow \Delta x = 2.5\text{mm}$$

例 15: 空气中，在夫琅禾费单缝衍射中，已知缝宽 $b = 0.1\text{mm}$，透镜 L_2的焦距 $f = 50\text{cm}$。今用含有 λ_1 和 λ_2 两种波长光垂直照射狭缝，发现 λ_1的第2级暗纹中心刚好与 λ_2 的第3级暗纹中心重合。若已知 $\lambda_1 = 600\text{nm}$，

求：1、$\lambda_2 = ?$ ；
2、λ_1 与 λ_2 2级明纹中心之间距离？
3、比较 λ_1 和 λ_2 中央明纹的宽度。

解： 3、中央明纹的宽度： 1级暗纹：

$$\begin{cases} b\sin\theta = 2k\dfrac{\lambda}{2} \\ \tan\theta = \dfrac{x_k}{f} \end{cases} \Rightarrow x_k = k\frac{f\lambda}{b} \Rightarrow x_1 = \frac{f\lambda}{b} \quad \Rightarrow \Delta x_0 = 2x_1 = 2\frac{f\lambda}{b}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x_{01} = 2\dfrac{f\lambda_1}{b} = 6\text{mm} \\ \Delta x_{02} = 2\dfrac{f\lambda_2}{b} = 4\text{mm} \end{cases} \Rightarrow \Delta x_{01} - \Delta x_{02} = 2\text{mm}$$

例 16: 在宽度$b=0.6mm$的单缝后有一薄透镜，焦距 $f = 40$ cm，以平行单色光垂直入射，在焦平面屏上形成衍射条纹。如果在透镜主光轴与屏之交点O和距O点1.4mm的P点看到的是亮纹，

求： 1、入射光的波长；

2、从P点看，对该光波而言，狭缝处的波面可分成的半波带的数目。

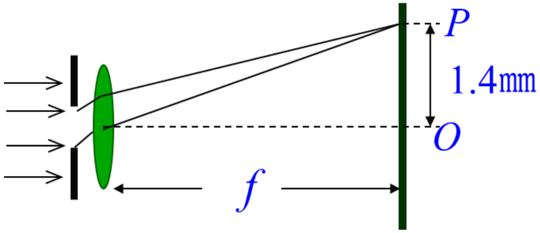
(入射光在可见光波长范围内)

解：

P点，明纹：

$$\begin{cases} b\sin\theta = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} \\ \tan\theta = \dfrac{x_p}{f} \end{cases} \Rightarrow b\frac{x_p}{f} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}\left(\frac{2bx_p}{f\lambda} - 1\right),$$



λ: 400nm ~ 760nm

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2bx_p}{f\lambda_{\max}} - 1\right) < k < \frac{1}{2}\left(\frac{2bx_p}{f\lambda_{\min}} - 1\right), \Rightarrow 2.75 < k < 4.75, \Rightarrow k = 3,\ 或,\ k = 4$$

（1） $k = 3$, $b\dfrac{x_p}{f} = (2\times3+1)\dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 600\text{nm}$, $N = (2k+1) = 7$, 7个半波带， 3级明纹

（2） $k = 4$, $b\dfrac{x_p}{f} = (2\times4+1)\dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 467\text{nm}$, $N = (2k+1) = 9$, 9个半波带， 4级明纹

例 17： 设人眼在正常照度下的瞳孔直径约为 **3mm**，而在可见光中，人眼最敏感的波长为 **550nm**，

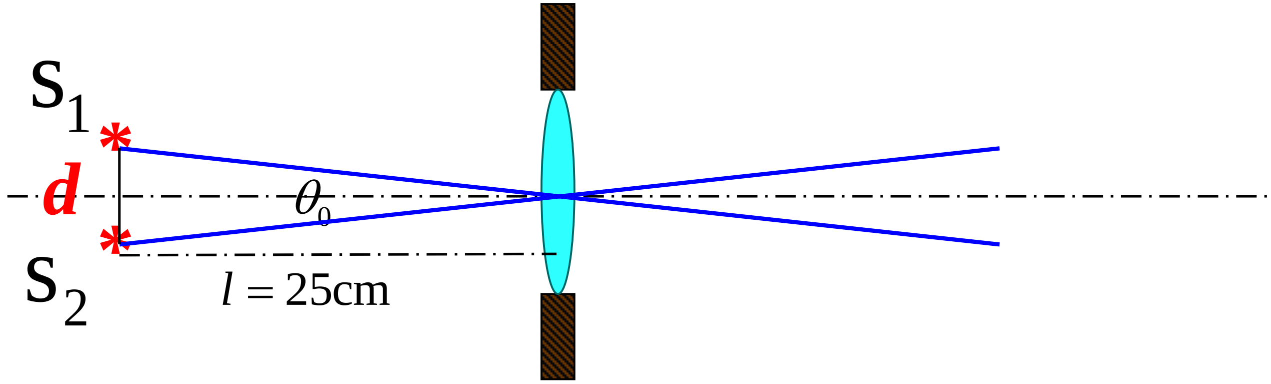
求： 1、人眼的最小分辨角有多大？

2、若物体放在距人眼 **25cm**（明视距离）处，则两物点间距为多大时才能被分辨？

解：

1、$$\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D} = \frac{1.22\times 5.5\times 10^{-7}\,\text{m}}{3\times 10^{-3}\,\text{m}} = 2.2\times 10^{-4}\,\text{rad}$$

2、$$d \approx l\theta_0 = 25\text{cm}\times 2.2\times 10^{-4} = 0.055\text{mm}$$



例 18： 用**每毫米500条栅纹**的光栅，观察钠光谱线（**λ=590nm**），***f* =1 m**，

求： **1)** 光线垂直入射时，最多能看到几级条纹?

2) 光线以入射角30° 入射时，最多能看到几级条纹?

解：1）

$$d = b + b' \approx \frac{1}{500}\,\text{mm}$$

$$(b+b')\sin\theta = k\lambda, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}, \qquad -1 < \sin\theta < 1$$

$$-1 < \sin\theta = \frac{k\lambda}{b+b'} < 1, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$-\frac{b+b'}{\lambda} < k < \frac{b+b'}{\lambda} \Rightarrow -3.39 < k < 3.39$$

$$\Rightarrow k = -3, -2, -1, \ 0, +1, +2, +3$$

7条主极大，最多能看到第3级主极大条纹

例 18： 用每毫米500条栅纹的光栅，观察钠光谱线（λ=590nm），f =1 m，

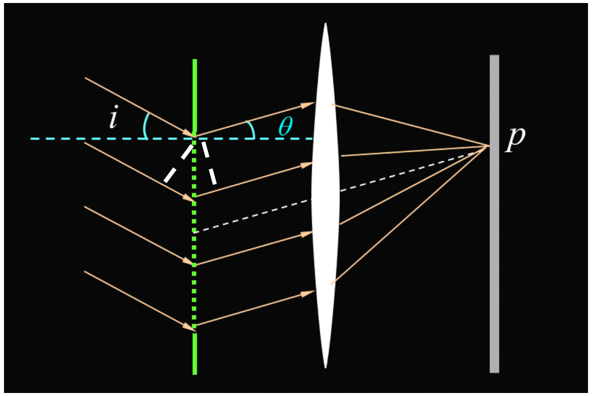
求： 1) 光线垂直入射时，最多能看到几级条纹？

2) 光线以入射角30° 入射时，最多能看到几级条纹？

解：2）

$$d(\sin i+\sin\theta)=k\lambda,$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$



$$-\frac{\pi}{2}<\theta<+\frac{\pi}{2},\qquad -1<\sin\theta<1$$

$$\frac{d}{\lambda}(\sin 30^0-1)<k<\frac{d}{\lambda}(\sin 30^0+1),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{\lambda}<k<\frac{3}{2}\frac{d}{\lambda}\qquad\Rightarrow -1.7<k<5.1$$

$$\Rightarrow k=-1,\ \ 0,+1,+2,+3,+4,+5$$

7条主极大，最多能看到第5级主极大条纹

例 18： 用每毫米500条栅纹的光栅，观察钠光谱线（λ=590nm），f =1 m，

求： 1) 光线垂直入射时，最多能看到几级条纹？

2) 光线以入射角30° 入射时，最多能看到几级条纹？

3) 用白光垂直入射时，第1级光谱在焦平面的宽度？

解： 3）光栅方程：$d\sin\theta = (b+b')\sin\theta = 2k\dfrac{\lambda}{2} = k\lambda$

1级主极大，k =1：　　$d\sin\theta_1 = \lambda$

白光（可见光）波长范围：**400nm～ 760nm**

$$d\sin\theta_{1\max} = \lambda_{\max},\qquad \lambda_{\max} = 760\text{nm}$$

$$\sin\theta_{1\max} = \frac{\lambda_{\max}}{d} = 0.38,\qquad \theta_{1\max} \approx 22.3^\circ$$

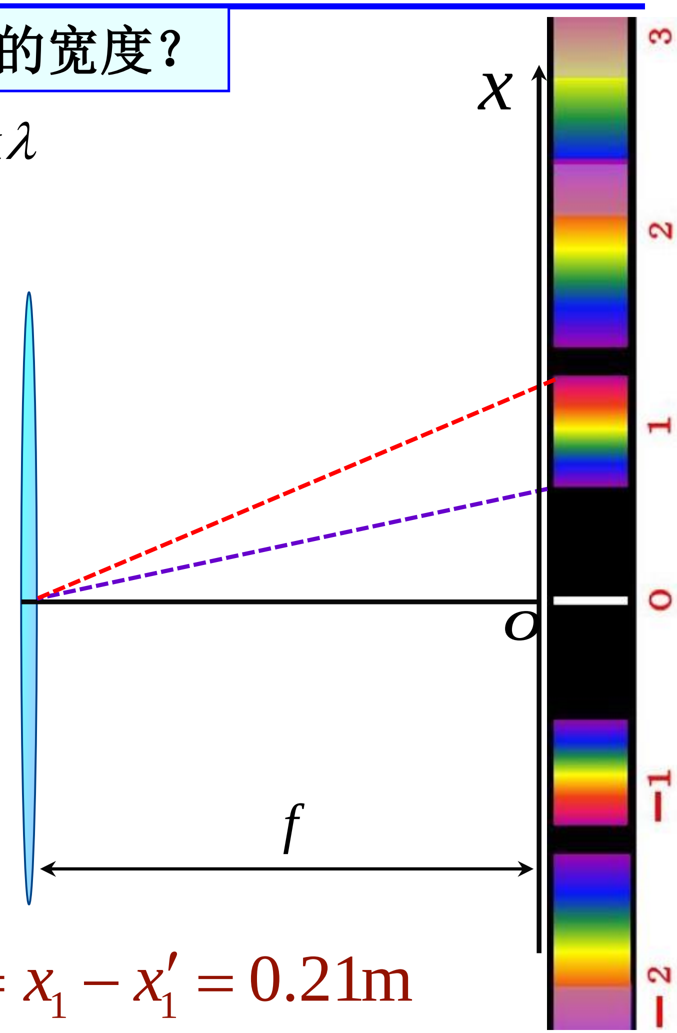
$$\tan\theta_{1\max} = \frac{x_1}{f},\qquad x_1 = f\tan\theta_{1\max} = 0.41\text{m}$$

同理：$d\sin\theta_{1\min} = \lambda_{\min},\qquad \lambda_{\min} = 400\text{nm}$

$$\sin\theta_{1\min} = \frac{\lambda_{\min}}{d} = 0.2,\qquad \theta_{1\min} \approx 11.5^\circ$$

$$\tan\theta_{1\min} = \frac{x_1'}{f},\qquad x_1' = f\tan\theta_{1\min} = 0.20\text{m}$$

$$\Rightarrow \Delta x = x_1 - x_1' = 0.21\text{m}$$



例 19: 空气中，用波长为 $\lambda = 600$ nm 的单色光垂直照射光栅，观察到第2级、第3级主极大分别出现在 $\sin\theta = 0.20$ 和 $\sin\theta = 0.30$ 处，第4级缺级，

求：1）光栅常数？ 2）狭缝的最小宽度？3）列出全部主极大条纹的级数。

解： 1）第二级主极大：

$$d\sin\theta = (b+b')\sin\theta = 2k\frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

$$\Rightarrow d = b+b' = \frac{k\lambda}{\sin\theta} = \frac{2\times600\times10^{-9}}{0.2}\,\mathbf{m} = 6\times10^{-6}\,\mathbf{m}$$

2）第四级缺级：

$$\frac{b+b'}{b} = \frac{4}{1}，\quad 或 \cancel{\frac{4}{2}}，\quad 或\frac{4}{3} \Rightarrow b_{\min} = \frac{(b+b')}{4} = 1.5\times10^{-6}\,\mathbf{m}$$

2级不缺级

3）

$$-1 < \sin\theta < +1, \quad -\frac{b+b'}{\lambda} < k < \frac{b+b'}{\lambda} \Rightarrow -10 < k < +10$$

$$k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cancel{\pm4}, \pm5, \pm6, \pm7, \cancel{\pm8}, \pm9$$

15条主极大，最高级次：$k_{\max} = 9$

例：可见光波长范围：**400nm～760nm**，用平行的白光垂直入射一光栅上时，它产生的不与另一级光谱重叠的完整的可见光光谱是第几级光谱？

解：设k级光谱不与其他高几次光谱重叠

k级光谱中，
白光中，波长最大对应的衍射角：

$$d\sin\theta_{\max} = k\lambda_{\max}, \quad \lambda_{\max} = 760\text{nm}$$

相邻，(k+1)级光谱中，
白光中，波长最小对应的衍射角：

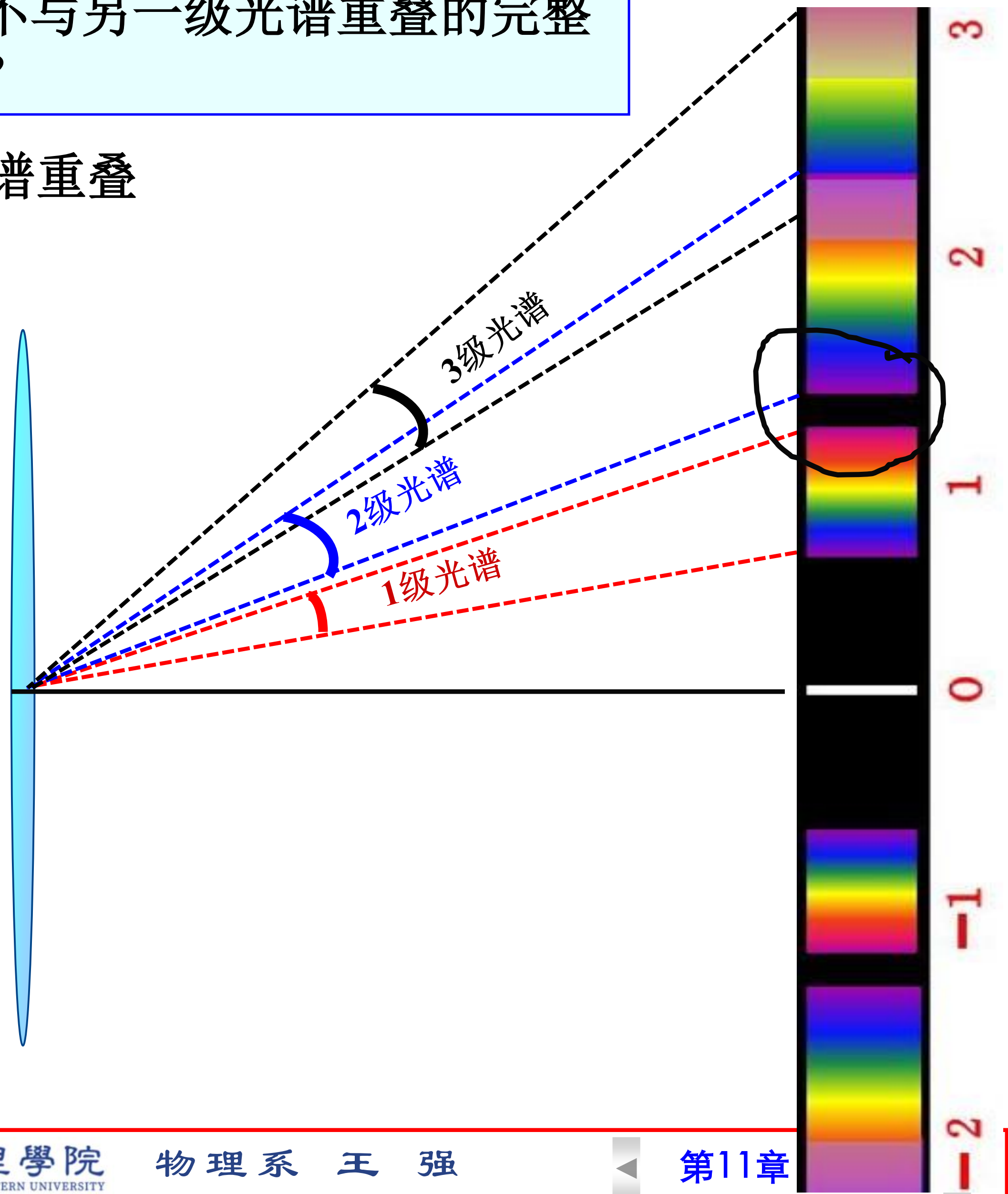
$$d\sin\theta_{\min} = (k+1)\lambda_{\min}, \quad \lambda_{\min} = 400\text{nm}$$

不重叠： $\theta_{\max} < \theta_{\min}$

$$\Rightarrow k\lambda_{\max} < (k+1)\lambda_{\min}$$

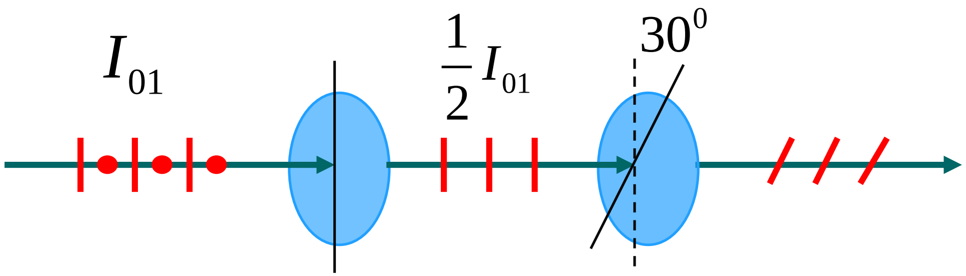
$$\Rightarrow k < \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}} = \frac{400\text{nm}}{760\text{nm} - 400\text{nm}} \approx 1.1$$

k=1，1级光谱不与其他光谱重叠

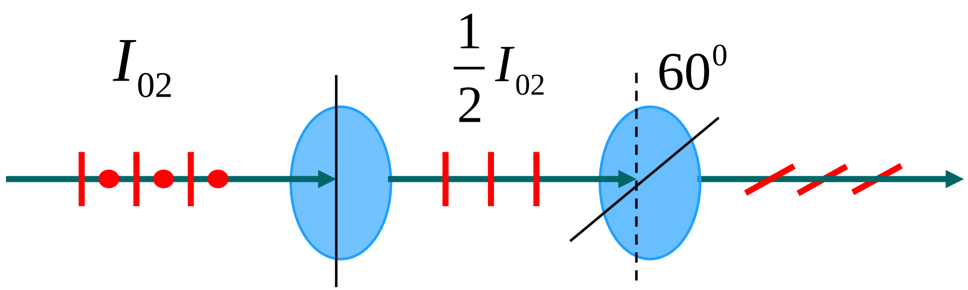


例 20：两偏振片组装成起偏和检偏器，当两偏振片的偏振化方向夹角成 30º 时，观察一普通光源；夹角成 60º 时，观察另一普通光源，两次观察所得的透射光强相等，

求：两普通光源光强之比。



$$I_1 = \frac{1}{2}I_{01}\cos^2 30^0 = \frac{3}{8}I_{01}$$



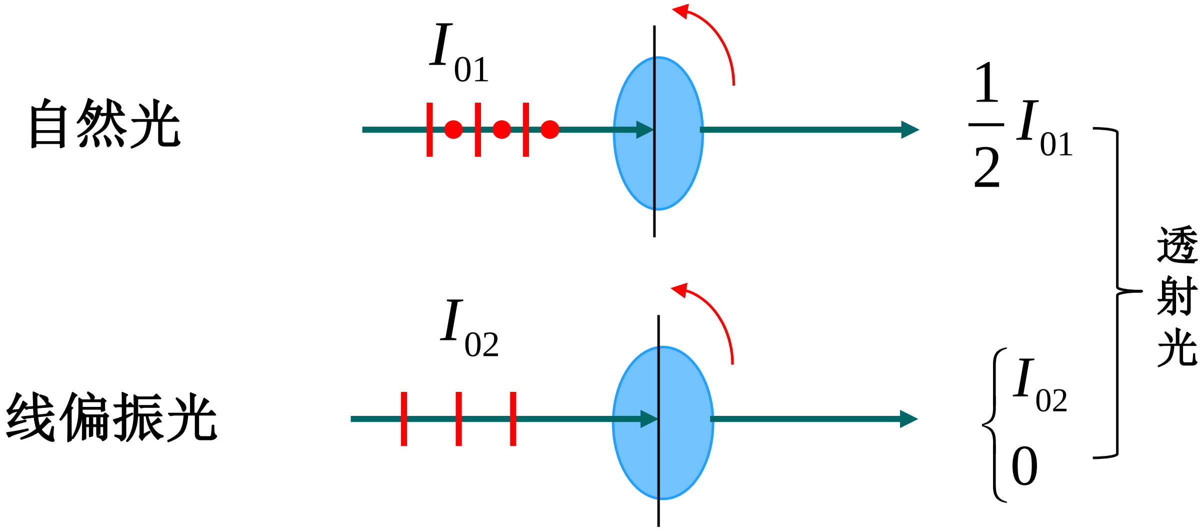
$$I_2 = \frac{1}{2}I_{02}\cos^2 60^0 = \frac{1}{8}I_{02}$$

$$I_1 = I_2 \Rightarrow \frac{I_{01}}{I_{02}} = \frac{1}{3}$$

例 21： 一束由自然光和线偏振光组成的混合光通过一偏振片，当偏振片转动时，透射光强可以变化 5 倍，

求： 在入射光中，1）自然光的强度 I_{01} 和线偏振光的强度 I_{02} 之比。

2）自然光的强度占总入射光强度的几分之几？

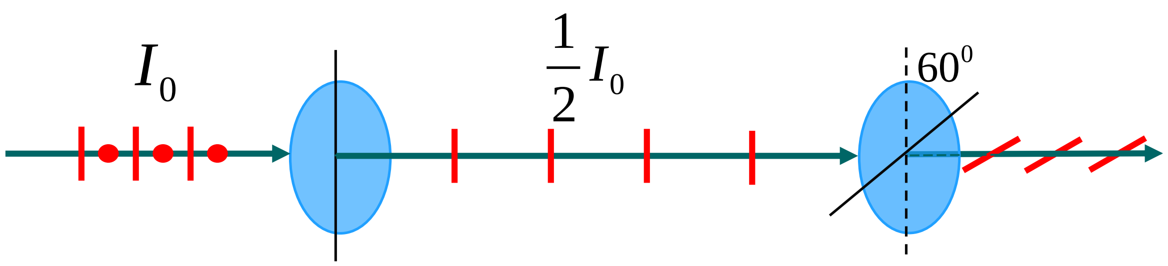


$$I_{max} = \frac{1}{2}I_{01} + I_{02}$$

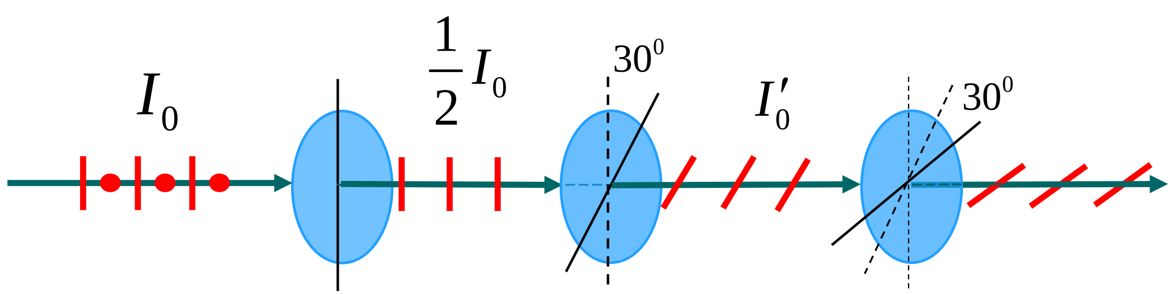
$$I_{min} = \frac{1}{2}I_{01} + 0$$

$$\Rightarrow I_{max} = 5I_{min} \Longrightarrow \frac{I_{01}}{I_{02}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{I_{01}}{I_{01}+I_{02}} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{I_{02}}{I_{01}+I_{02}} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

例 22： 自然光通过两起偏方向夹角成 **60°**偏振片时，透射光强 I_1；当在两偏振片之间插入另一偏振片，与前两个两偏振片的起偏方向夹角均成 **30°**时，**求：** 此时透射光强为多少？



$$I_1 = \frac{1}{2}I_0\cos^2 60^0 = \frac{1}{8}I_0$$

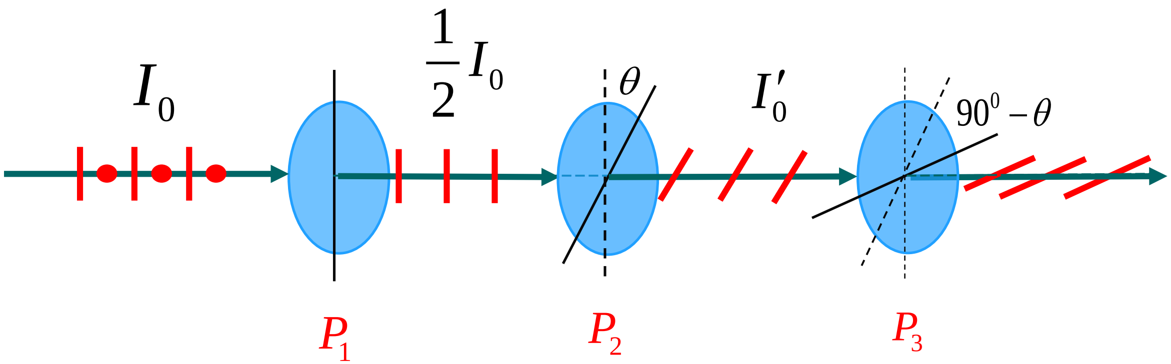


$$I_2 = I_0'\cos^2 30^0 = \frac{9}{32}I_0$$

$$I_0' = \frac{1}{2}I_0\cos^2 30^0 = \frac{3}{8}I_0$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{9}{4}I_1$$

例 23： 光强为I_0自然光相继通过3个偏振片P_1、P_2、P_3后，透射光强为$\frac{3}{32}I_0$；已知P_1与P_3的偏振化方向相互垂直。若以入射光线为轴，旋转P_2，要使透射光强为零，P_2需要转过的最小角度为多少度？



$$I = I_0'\cos^2(90°-\theta)$$

$$I_0' = \frac{1}{2}I_0\cos^2\theta$$

$$I = \frac{1}{2}I_0\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{1}{8}I_0\sin^2 2\theta = \frac{3}{32}I_0 \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_{\min} = 30°$$