12-6 麦克斯韦气体分子速率分布律

重点

知识点：重点掌握：

1、分子速率分布函数及其物理意义；

2、三种速率（对应麦克斯韦速率分布）

一、测定气体分子速率分布的实验

气体分子按速率分布的统计定律，最早由麦克斯韦于1859年在概率理论的基础上导出的，后由玻耳兹曼从经典统计力学中导出。

1920年，施特恩（O. Stern，1888-1969）从实验中证实了麦克斯韦气体分子按速率分布的统计定律。

1933年，我国物理学家葛正权（1896-1988）在博士论文中，以更精确的实验数据验证了这条定律。

一、测定气体分子速率分布的实验

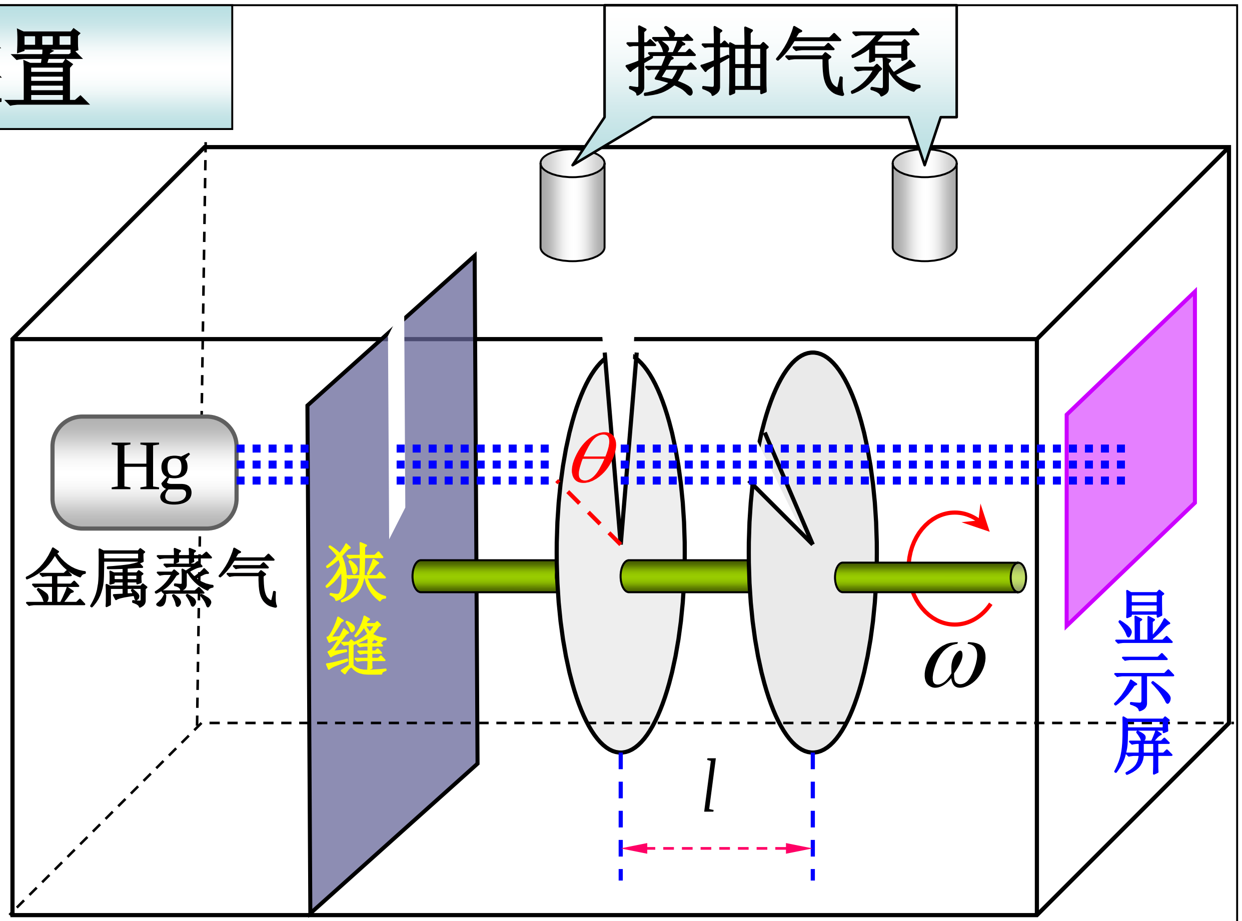
继施特恩之后，分子速率分布实验装置有了不少改进，下图为其中一种装置。

实验装置

$$\theta \approx 2^\circ$$

$$\frac{l}{v} = \frac{\theta}{\omega}$$

$$v = \frac{\omega}{\theta} l$$

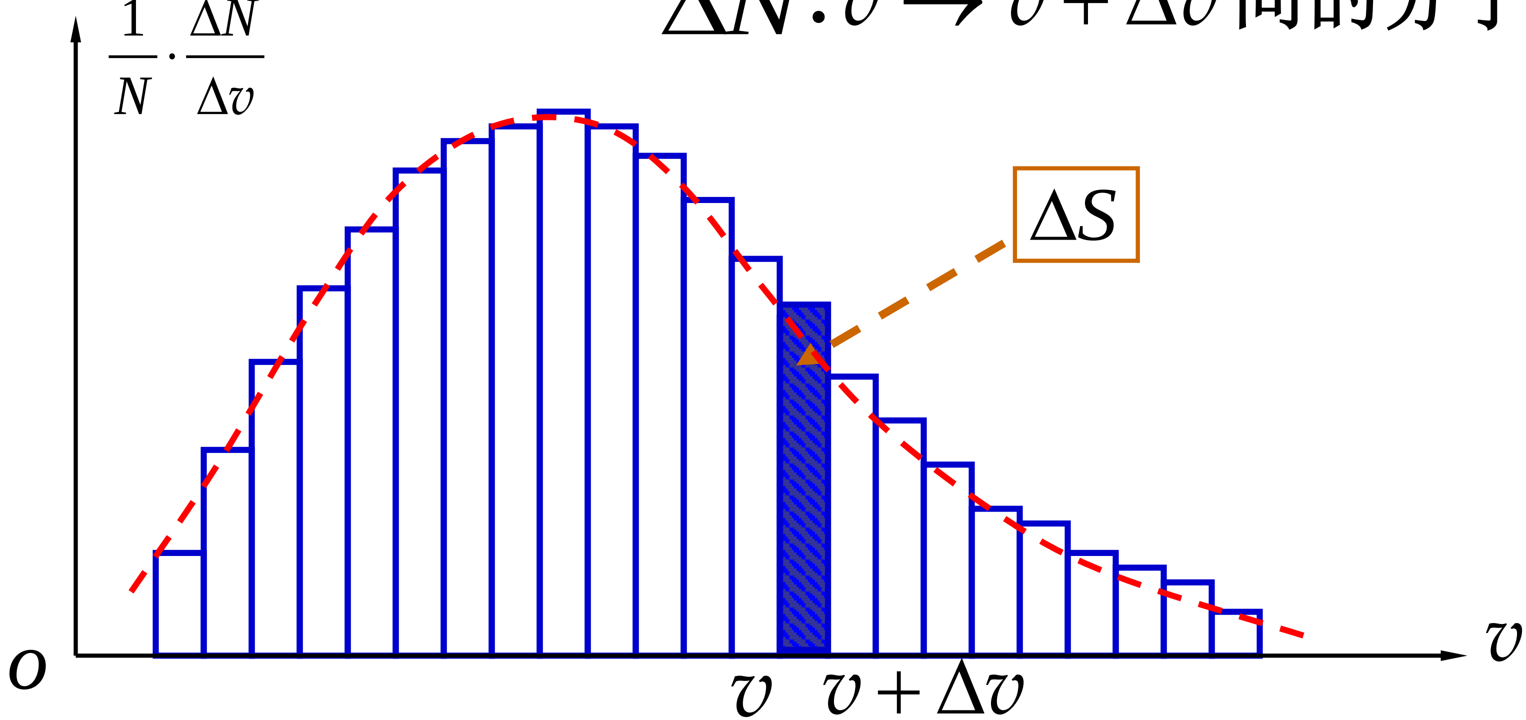


一、测定气体分子速率分布的实验

分子速率分布图

N：分子总数

ΔN：$v \to v+\Delta v$ 间的分子数



$$\Delta S = \frac{\Delta N}{N}$$

表示速率在 $v \to v+\Delta v$ 区间的分子数ΔN占总分子数N的百分比

二、分子速率分布函数（*重点*）

$\lim\limits_{\Delta v \to 0} \dfrac{\Delta N}{N\Delta v}$ 总数为 N 的气体分子，当取 $\Delta v \to 0$ 时，就成为关于 v 的一个函数，用 $f(v)$ 表示，称为分子速率分布函数。

$$f(v) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta N}{N\Delta v} = \frac{1}{N} \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta v} = \frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}v}$$

$$\boxed{f(v) = \frac{1}{N}\frac{dN}{dv}}$$

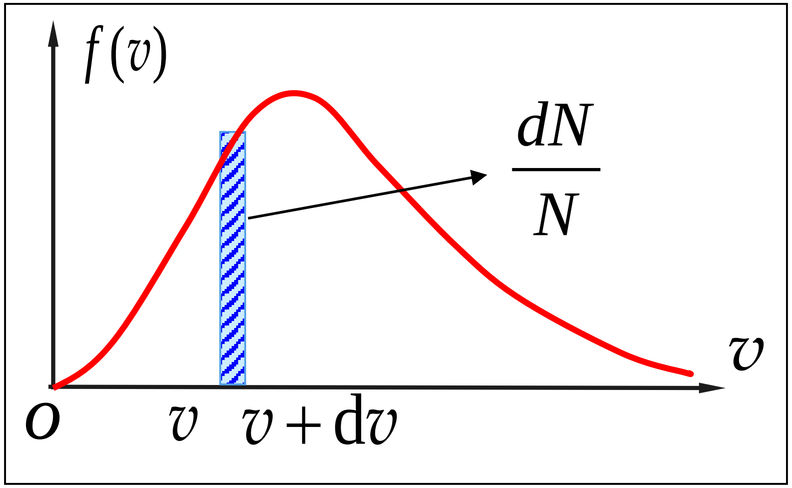
二、分子速率分布函数（*重点*）

N ： 气体分子总数，

dN ： 速率在 $v \to v + dv$ 区间的分子数，

$f(v)$ ： 分子速率分布函数

$$f(v) = \frac{1}{N}\frac{dN}{dv}$$



物理意义——表示在温度为 T 的平衡状态下，速率在 v 附近，单位速率区间的分子数占总分子数的百分比。

$$f(v)=\frac{1}{N}\frac{dN}{dv}$$

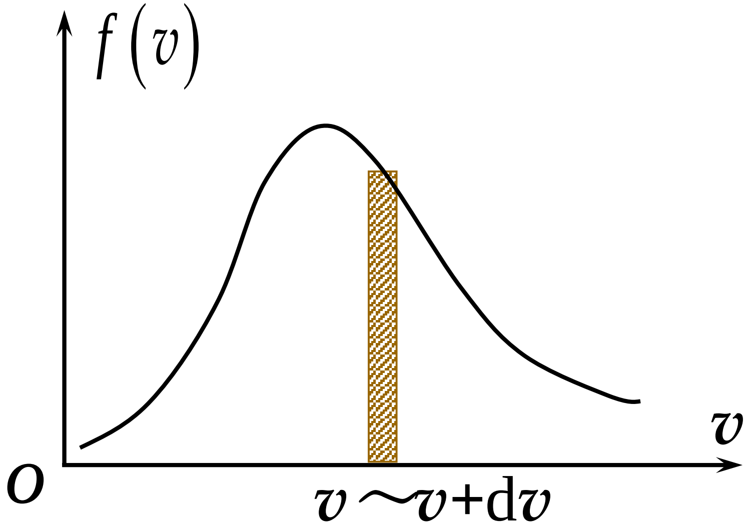
物理意义：表示在温度为T 的平衡状态下，速率在v附近，单位速率区间的分子数占总分子数的百分比。

1) 速率在$v\sim v+dv$ 区间的分子数 dN

$$dN=Nf(v)dv$$

速率在$v\sim v+dv$ 区间的分子数 dN，占总分子数的百分比

$$\frac{dN}{N}=f(v)dv$$



$$f(v)=\frac{1}{N}\frac{dN}{dv}$$

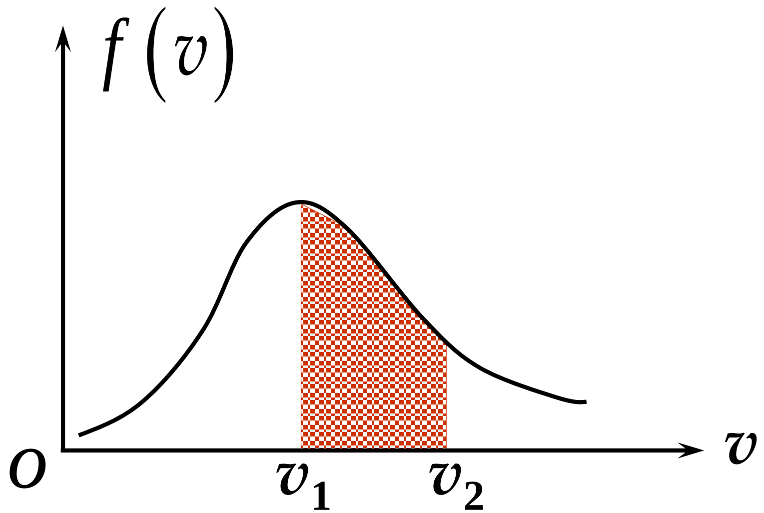
物理意义：表示在温度为T的平衡状态下，速率在v附近，单位速率区间的分子数占总分子数的百分比。

2)速率在$v_1 \sim v_2$区间的分子数

$$\Delta N=\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv$$

速率在$v_1 \sim v_2$区间的分子数，占总分子数的百分比

$$\frac{\Delta N}{N}=\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$$



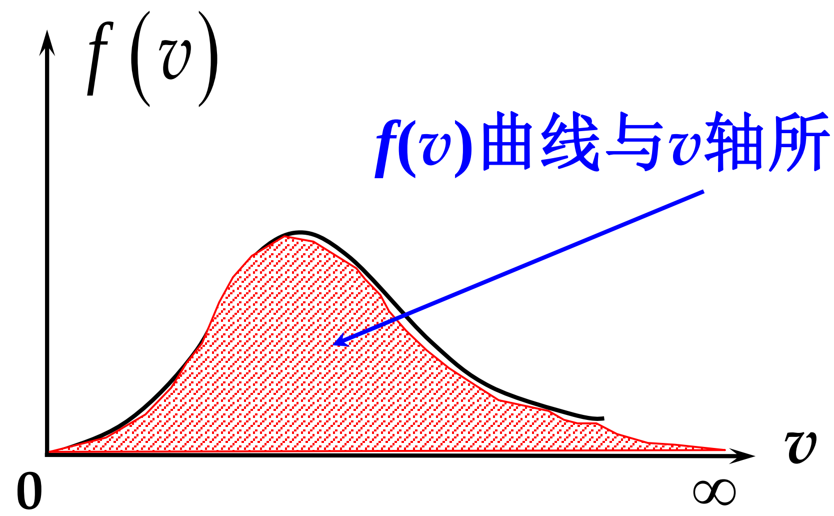
$$f(v)=\frac{1}{N}\frac{dN}{dv}$$

物理意义：表示在温度为T的平衡状态下，速率在v附近，单位速率区间的分子数占总分子数的百分比。

3) 全部分子占总分子数的百分比

$$\int_0^{\infty} f(v)\,dv=1$$

归一化条件



$$f(v)=\frac{1}{N}\frac{dN}{dv}$$

物理意义：表示在温度为T的平衡状态下，速率在v附近，单位速率区间的分子数占总分子数的百分比。

4）速率在$v_1 \sim v_2$区间的分子的平均速率

$$\overline{v}_{12}=\frac{\sum_i v_i}{\Delta N}=\frac{\int_{v_1}^{v_2} v\,dN}{\int_{v_1}^{v_2} dN}=\frac{\int_{v_1}^{v_2} vNf(v)dv}{\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv}$$

$$\boxed{\overline{v}_{12}=\frac{\int_{v_1}^{v_2} vf(v)dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv}}$$

同理：速率在$v_1 \sim v_2$区间，分子速率n次方的平均值：

$$\overline{v_{12}^{n}}=\frac{\int_{v_1}^{v_2} v^n f(v)dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv}$$

$$\boxed{f(v)=\frac{1}{N}\frac{dN}{dv}}$$

物理意义：表示在温度为T的平衡状态下，速率在v附近，单位速率区间的分子数占总分子数的百分比。

5）全部分子的平均速率

$$\bar{v}=\frac{\int_0^\infty v f(v)dv}{\int_0^\infty f(v)dv=1}$$

$$\boxed{\bar{v}=\int_0^\infty v f(v)dv}$$

6）全部分子的速率平方的平均值

$$\boxed{\overline{v^2}=\int_0^\infty v^2 f(v)dv}$$

$$f(v)=\frac{1}{N}\frac{dN}{dv}$$

物理意义：表示在温度为T的平衡状态下，速率在v附近，单位速率区间的分子数占总分子数的百分比。

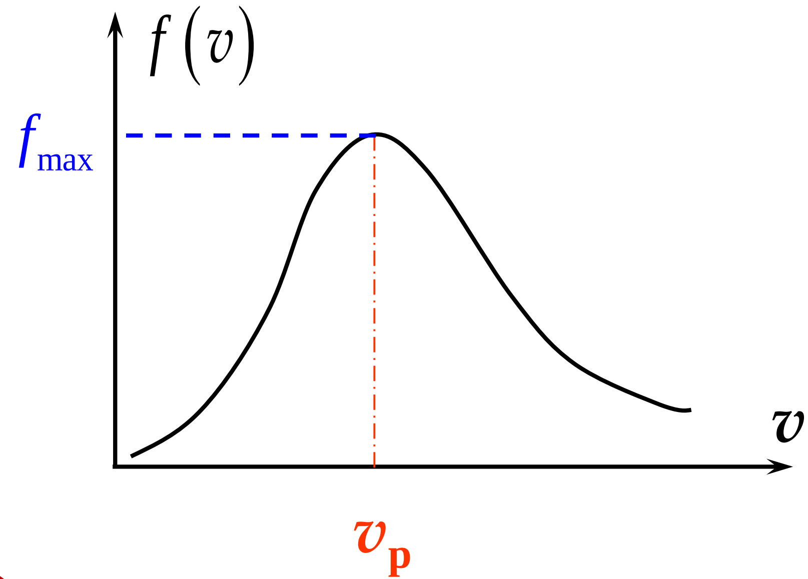
7）最概然速率v_p

—— v_p附近单位速率区间的分子数最多。

可用求极值的方法求得。

令 $\left.\dfrac{df(v)}{dv}\right|_{v_p}=0,$ 解出 v_p

对应 $f(v)$极大值



例 8： 已知 n 为单位体积的分子数（分子数密度），

$f(v)$ 为麦克斯韦速率分布函数，

则 $n\,f(v)\mathrm{d}v$ 表示（ **B** ）

（A）速率 v 附近，$\mathrm{d}v$ 区间内的分子数

（B）单位体积内，速率在 $v \sim v+\mathrm{d}v$ 区间内的分子数

（C）速率 v 附近 $\mathrm{d}v$ 区间内分子数占总分子数比率

（D）单位时间内，碰到单位器壁上速率在 $v \sim v+\mathrm{d}v$ 区间内的分子数

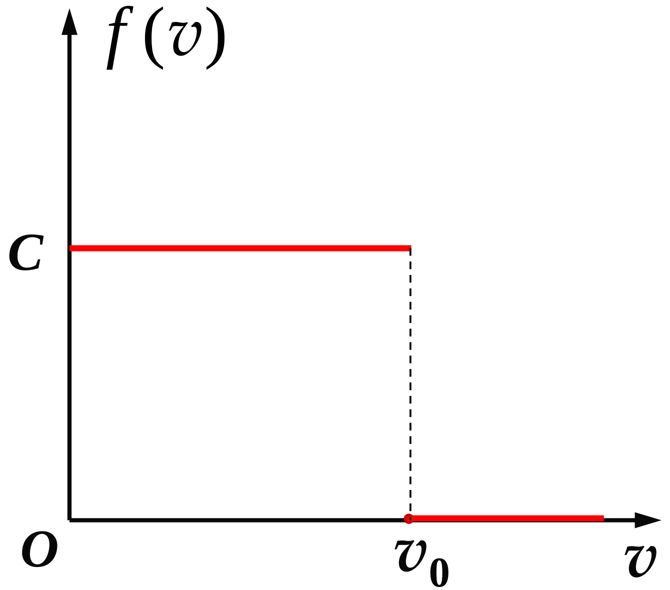
例 9：一系统，由N个粒子组成，其**速率分布函数**为：

$$f(v)=\begin{cases} C & (v_0>v>0) \\ 0 & (v>v_0) \end{cases}$$

求：（1）由N和v_0求常量C；（2）粒子的**平均速率**。（3）粒子的**方均根速率**。

解：（1）$\int_0^\infty f(v)\,dv=1$

$$\Rightarrow \int_0^{v_0} C\mathrm{d}v+0=Cv_0=1,\qquad C=\frac{1}{v_0}$$



（2）$\bar{v}=\int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v=\int_0^{v_0} Cv\,dv+0=C\cdot\frac{v_0^2}{2}=\frac{v_0}{2}$

（3）$\overline{v^2}=\int_0^\infty v^2 f(v)\,dv=\int_0^{v_0} Cv^2 dv+0=C\cdot\frac{v_0^3}{3}$

$$\overline{v^2}=\frac{1}{3}v_0^2,\qquad \sqrt{\overline{v^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}v_0$$

例 10：设有N个气体分子，其速率分布函数为：

$$f(v)=\begin{cases} Av(v_0-v), & 0\le v\le v_0 \\ 0, & v>v_0 \end{cases}$$

求：(1)常数A；

(2)速率介于$0\sim v_0/3$之间的分子数；

(3)速率介于$0\sim v_0/3$之间的气体分子的平均速率；

(4)全部分子的平均速率；

(5)全部分子的方均根速率；

(6)最概然速率v_p。

例 10：设有N个气体分子，其速率分布函数为：

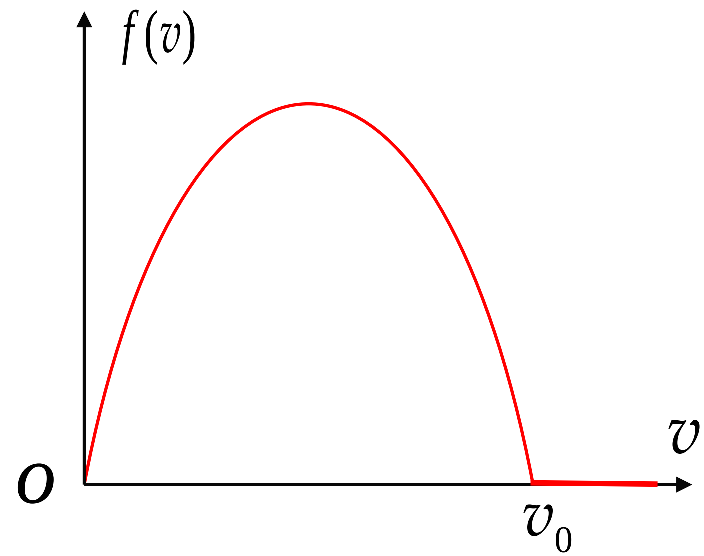
$$f(v)=\begin{cases} Av(v_0-v), & 0\le v\le v_0 \\ 0 \quad , & v>v_0 \end{cases}$$

求：**(1)**常数A；

解：**（1）** $\int_0^{\infty} f(v)\,dv=1$

$$\Rightarrow \int_0^{v_0} Av(v_0-v)\,dv+0$$

$$=\frac{A}{6}{v_0}^3=1, \qquad A=\frac{6}{{v_0}^3}$$



例 10：设有N个气体分子，其速率分布函数为：

$$f(v)=\begin{cases} Av(v_0-v), & 0\le v\le v_0 \\ 0, & v>v_0 \end{cases}$$

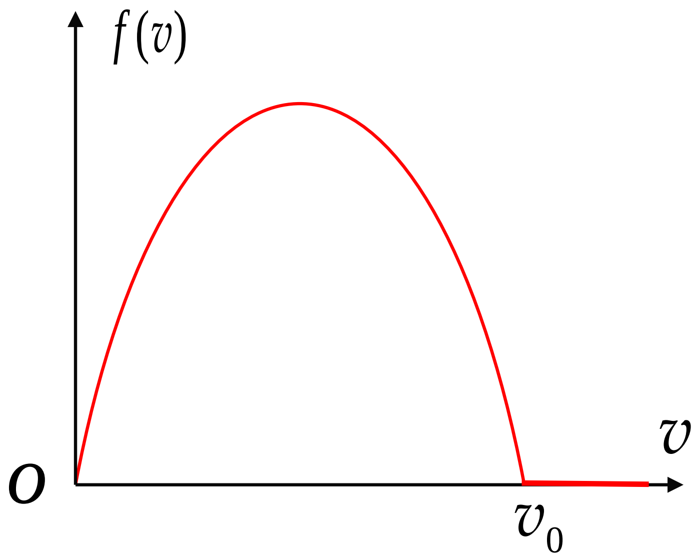
求：(2)速率介于$0\sim v_0/3$之间的分子数；

解：（2）

$$\Delta N=\int dN=\int_0^{\frac{v_0}{3}} Nf(v)\,dv$$

$$=\int_0^{\frac{v_0}{3}} N\frac{6}{v_0^{\ 3}}v(v_0-v)\,dv$$

$$=\frac{7}{27}N$$



例 10：设有N个气体分子，其速率分布函数为：

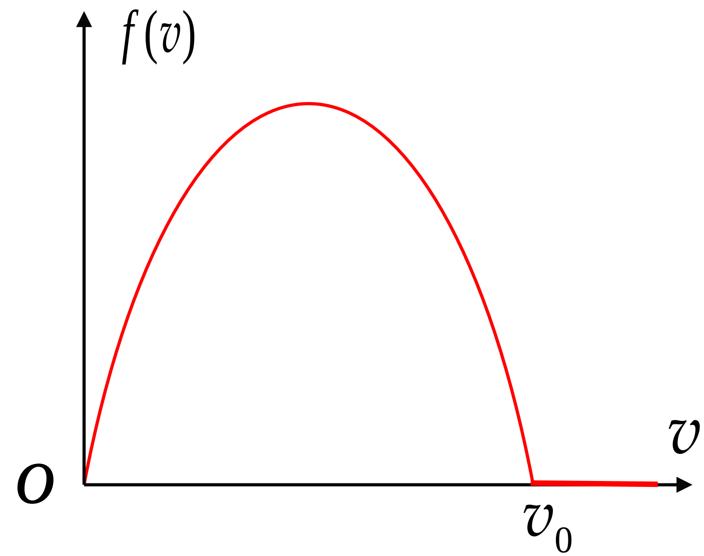
$$f(v)=\begin{cases} Av(v_0-v), & 0\le v\le v_0 \\ 0, & v>v_0 \end{cases}$$

求：(3)速率介于$0\sim v_0/3$之间的气体分子的平均速率；

解：（3）

$$\bar{v}_{12}=\frac{\int_0^{\frac{v_0}{3}} v\,dN}{\int_0^{\frac{v_0}{3}} dN}=\frac{\int_0^{\frac{v_0}{3}} vNf(v)\,dv}{\int_0^{\frac{v_0}{3}} Nf(v)\,dv}$$

$$=\frac{\int_0^{\frac{v_0}{3}} N\frac{6}{v_0^{\,3}}v^2(v_0-v)\,dv}{\int_0^{\frac{v_0}{3}} N\frac{6}{v_0^{\,3}}v(v_0-v)\,dv}=\frac{\frac{v_0}{18}}{\frac{7}{27}}=\frac{3}{14}v_0$$



例 10：设有N个气体分子，其速率分布函数为：

$$f(v)=\begin{cases} Av(v_0-v), & 0\le v\le v_0 \\ 0 \quad , & v>v_0 \end{cases}$$

求：(4)全部分子的平均速率；(5)全部分子的方均根速率；

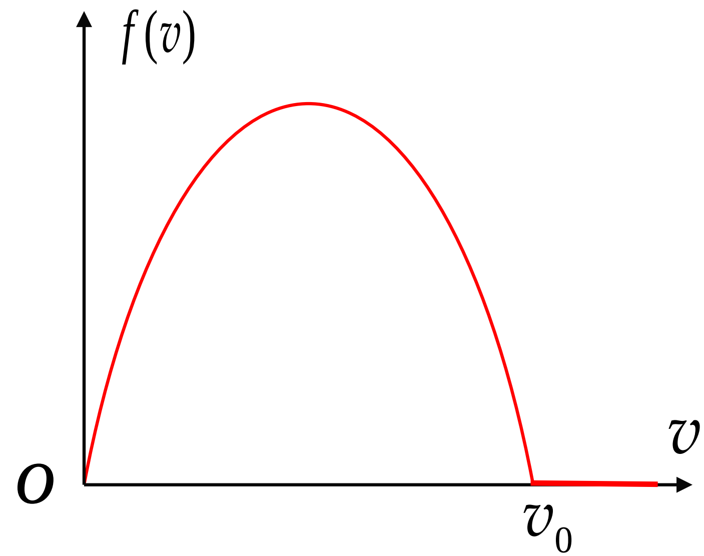
解：（4）$\bar{v}=\int_0^{\infty} v f(v)dv$

$$=\int_0^{v_0}\frac{6}{v_0^{\ 3}}v^2(v_0-v)dv+0=\frac{1}{2}v_0$$

（5）$\overline{v^2}=\int_0^{\infty} v^2 f(v)dv$

$$=\int_0^{v_0}\frac{6}{v_0^{\ 3}}v^3(v_0-v)dv+0=\frac{3}{10}v_0^{\ 2}$$

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3}{10}}v_0$$



例 10：设有N个气体分子，其速率分布函数为：

$$f(v)=\begin{cases} Av(v_0-v), & 0\le v\le v_0 \\ 0, & v>v_0 \end{cases}$$

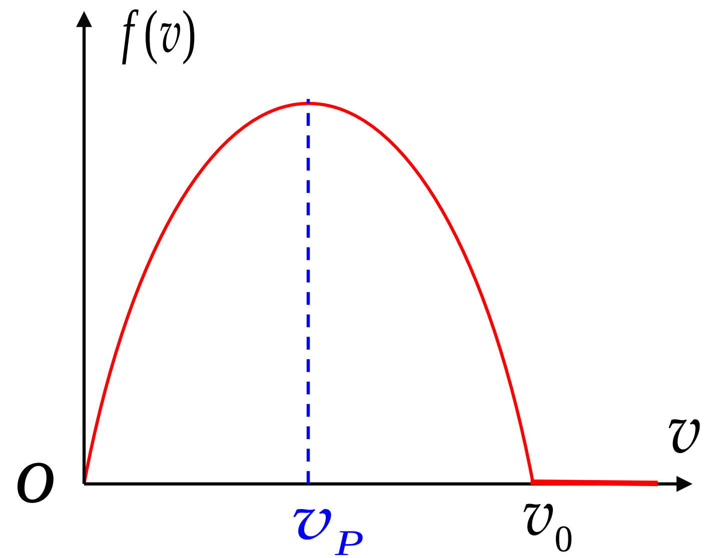
求：(6) 最概然速率v_p

解：（6）

$$\left.\frac{df(v)}{dv}\right|_{v_p}=0$$

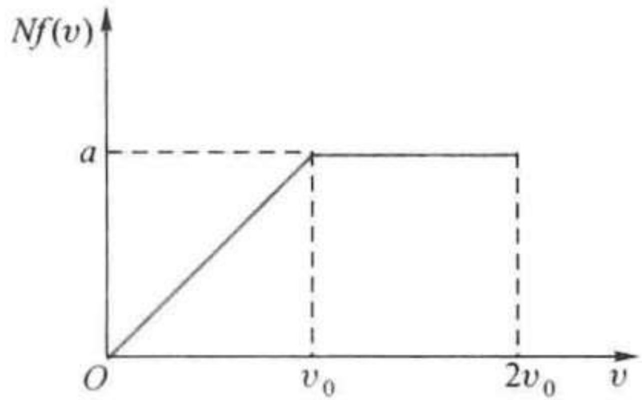
$$\left.\frac{df(v)}{dv}\right|_{v_p}=A(v_0-2v)\Big|_{v_p}=0$$

$$v_P=\frac{1}{2}v_0$$



同理：教材（第七版）P225页，习题：12-25、12-27，作为补充作业

12-25 有 N 个质量均为 m 的同种气体分子，它们的速率分布如图所示.（1）说明曲线与横坐标所包围面积的含义；（2）由 N 和 v_0 求 a 值；（3）求在速率 $v_0/2$ 到 $3v_0/2$ 间隔内的分子数；（4）求分子的平均平动动能.



12-27 导体中自由电子的运动可看作类似于气体分子的运动（故称电子气）. 设导体中共有 N 个自由电子，其中电子的最大速率为 v_F（称为费米速率）. 电子在速率 $v \sim v+dv$ 之间的概率为

$$\frac{dN}{N}=\begin{cases}\dfrac{4\pi A}{N}v^2 dv & (v_F>v>0, A\ \text{为常量}) \\ 0 & (v>v_F)\end{cases}$$

（1）画出分布函数图；（2）用 N、v_F 定出常量 A；（3）证明电子气中电子的平均动能 $\bar{\varepsilon}=\frac{3}{5}\varepsilon_F$，其中 $\varepsilon_F=\frac{1}{2}mv_F^2$ 称为费米能.

三、麦克斯韦气体分子速率分布定律

无外力场，平衡态下的理想气体系统，分子速率在 $v \sim v+dv$ 区间内分子数占总分子数的百分比为：

$$\frac{dN}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2dv=f(v)dv$$

$$\boxed{f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2}$$

***m*：一个分子的质量**

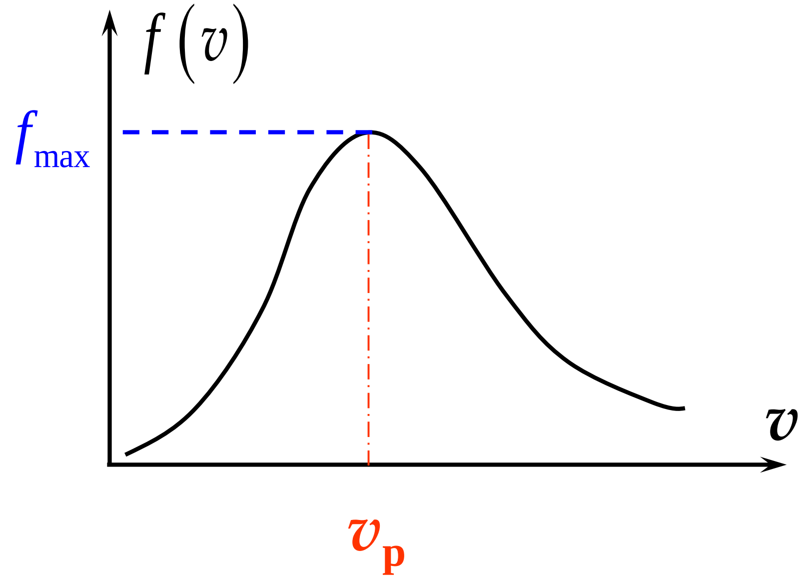
——麦克斯韦速率分布函数

四、三种速率（对应麦克斯韦速率分布）

1、最概然速率v_p

—— v_p附近单位速率区间的相对分子数最多！

可用求极值的方法求得。



令 $\left.\dfrac{df(v)}{dv}\right|_{v_p}=0,$ 解出 v_p

$$v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{mN_A}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

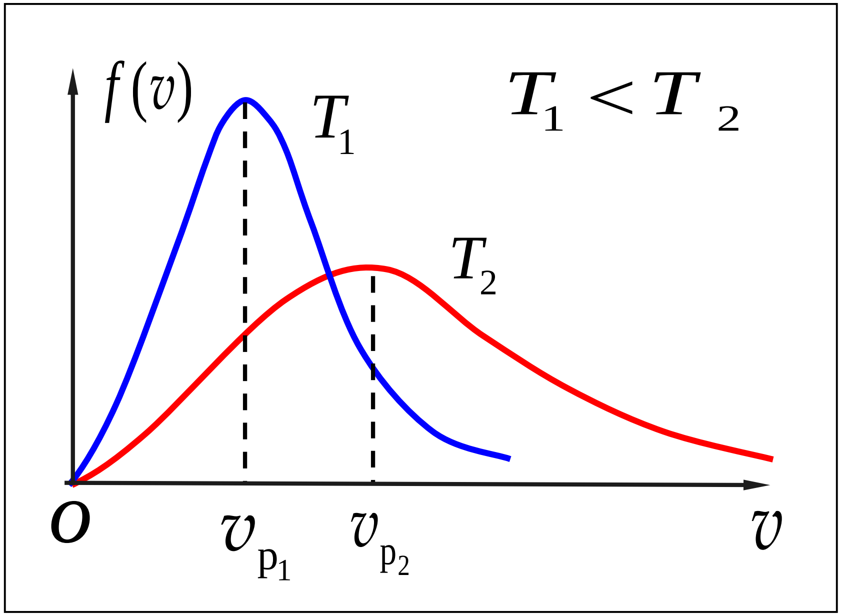
M : 摩尔质量

$$\boxed{v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}\approx 1.41\sqrt{\frac{kT}{m}}=1.41\sqrt{\frac{RT}{M}}}$$

四、三种速率（对应麦克斯韦速率分布）

1、最概然速率v_p

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$



不同温度下，
气体速率分布

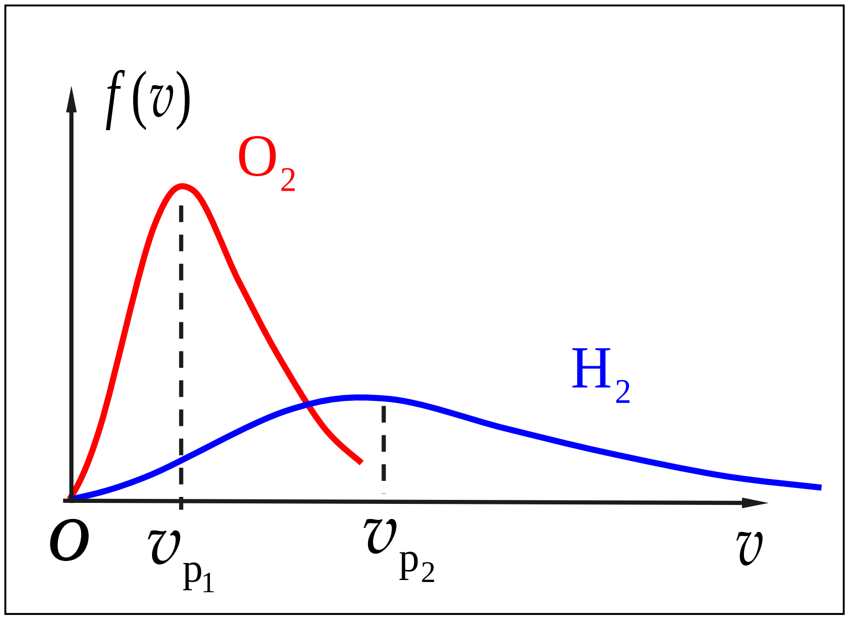
温度越高，分布曲线中的最概然速率v_p增大，但归一化条件要求曲线下总面积不变，

因此分布曲线宽度增大，高度降低。

四、三种速率（对应麦克斯韦速率分布）

1、最概然速率v_p

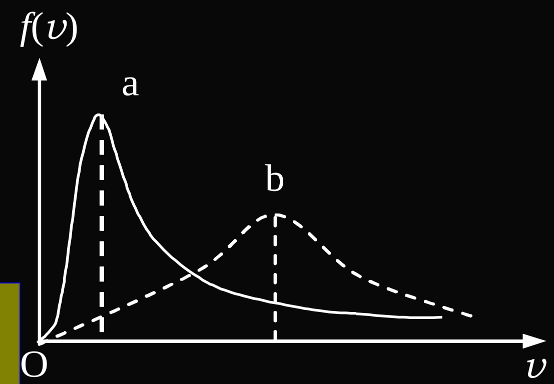
$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$



同一温度下，O_2、H_2气体速率分布

同一温度下，分子质量越大，分布曲线中的最概然速率v_p越小

例11、图示的两条曲线分别表示在相同温度下，氧气和氢气的分子速率分布曲线；令 $(\upsilon_p)_{O_2}$ 和 $(\upsilon_p)_{H_2}$ 分别表示氧气和氢气的最概然速率，则



(A) 图中 a 表示氧气分子的速率分布曲线；$(\upsilon_p)_{O_2} / (\upsilon_p)_{H_2} = 4$.

(B) 图中 a 表示氧气分子的速率分布曲线；$(\upsilon_p)_{O_2} / (\upsilon_p)_{H_2} = 1/4$.

(C) 图中 b 表示氧气分子的速率分布曲线；$(\upsilon_p)_{O_2} / (\upsilon_p)_{H_2} = 1/4$.

(D) 图中 b 表示氧气分子的速率分布曲线；$(\upsilon_p)_{O_2} / (\upsilon_p)_{H_2} = 4$.

$$\upsilon_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

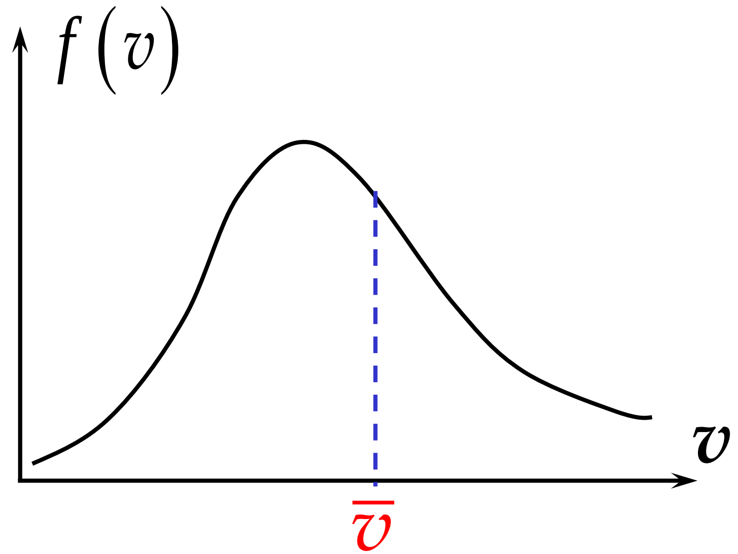
四、三种速率（对应麦克斯韦速率分布）

2、平均速率 $\overline{v}$

$0\sim\infty$ 整个速率区间内，全部分子的的平均速率

$$\overline{v}=\int_0^\infty v f(v)\,dv$$

$$=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$



$$\boxed{\overline{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\approx 1.60\sqrt{\frac{kT}{m}}=1.60\sqrt{\frac{RT}{M}}}$$

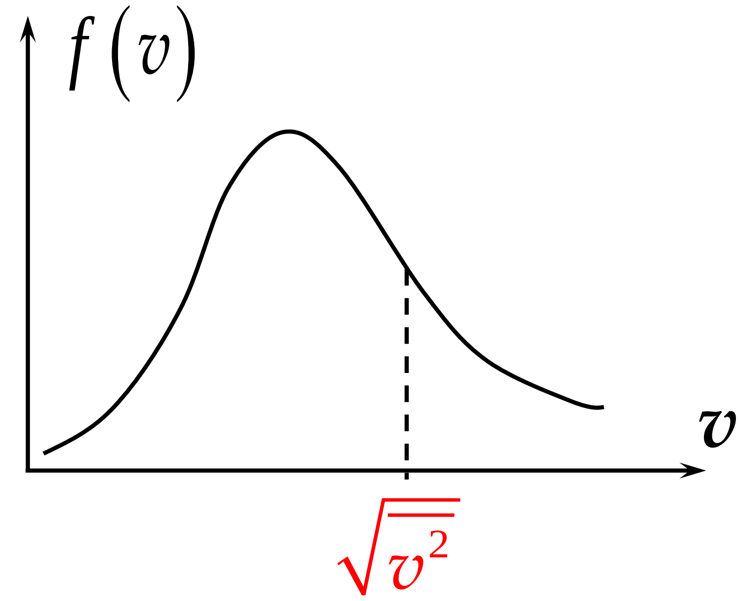
四、三种速率（对应麦克斯韦速率分布）

3、方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$

0~∞ 整个速率区间的方均速率

$$\overline{v^2}=\int_0^\infty v^2 f(v)\,dv$$

$$=\frac{3kT}{m}$$



$$\boxed{\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}\approx 1.73\sqrt{\frac{RT}{M}}}$$

例12： 三容器A、B、C中装有同种理想气体，其分子数密度n相同，而方均根速率之比为 $\sqrt{\overline{v_A^2}}:\sqrt{\overline{v_B^2}}:\sqrt{\overline{v_C^2}}=1:2:4$ ，则其压强之比 $p_A:p_B:p_C$ 为（　　）

(A) 1:2:4　　(B) 1:4:8

(C) 1:4:16　　(D) 4:2:1

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}},\qquad p=nkT$$