

线性代数1-4章若干问题(或习题)的总结

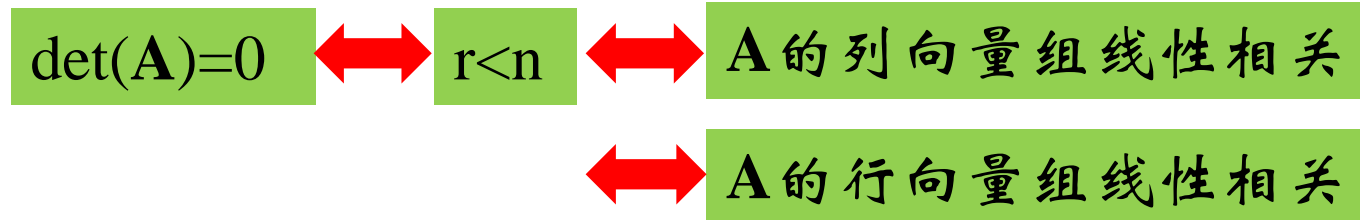
做初等行变换时是否可以同时做初等列变换？

初等行变换的几种用途	行变换的同时可以做列变换吗？	备注
计算行列式	可以	
求矩阵的秩	可以	也可不用
用 $(A, E) \rightarrow (E, A^{-1})$ 法求逆矩阵	不可以	
判断列向量组的线性相关性	可以,但是不必	
寻找列向量组的极大无关组	不可以	
解线性方程组	一般不可以	除非...
化矩阵A为行阶梯形矩阵	一般不用	看题目要求
化矩阵A为行最简形矩阵	一般不用	看题目要求
化矩阵A为其等价标准形	可以	一般得用

矩阵与行列式的区别与联系

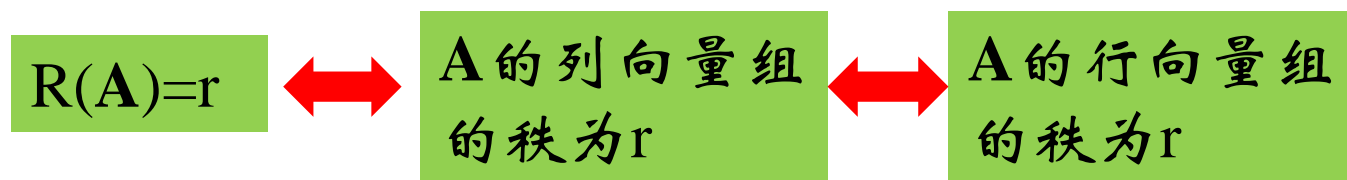
联系:

1. 当矩阵 A 为方阵时, 行列式 $\det(A)$ 可以看作 A 的一个函数.
2. 设 n 阶方阵的 A 秩为 r , 则成立以下关系:



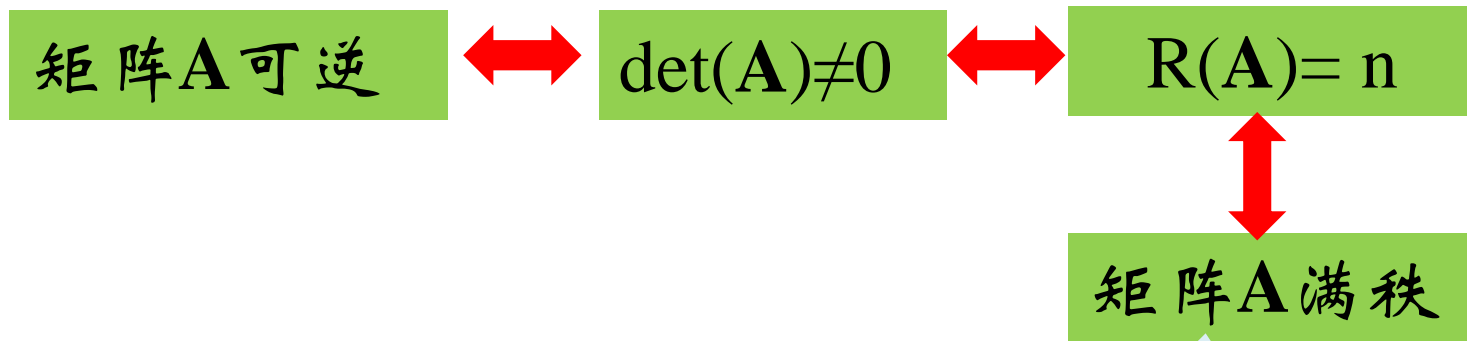
区别:

1. 矩阵可以是长方形(行数和列数可以不等)的, **非正方形的矩阵是没有行列式的**; **行列式必须是正方形**(行数和列数必须相等).
2. 无论多少阶的**行列式**, 都是**一个数**; 矩阵一般不是一个数, 而是一个数组 (1×1 的矩阵除外).
3. 对于 $m \times n$ 的矩阵 A , 则其秩 $R(A) \leq \min\{m, n\}$, 且有以下关系:



注意:

1. “可逆矩阵”仅针对**方阵**而言；对于一般的长方形的矩阵，本课程中没有“可逆”的概念.
2. 当 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 时(即 A 为 n 阶方阵时),



此时 A 既是列满秩(秩=列数)的,也是行满秩(秩=行数)的.

做题过程要有依据，不能“想当然”

例：设 A, B 均为同阶方阵，则行列式

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = ?$$

$= |A|^2 - |B|^2$ 吗？ **×**

以上结论一般不成立。

解：由于

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{分块行变换: } r_2 + r_1} \begin{pmatrix} A & B \\ B + A & A + B \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{分块列变换: } c_1 - c_2} \begin{pmatrix} A - B & B \\ O & A + B \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - B & B \\ O & A + B \end{vmatrix} = |A - B| \cdot |A + B|.$$

由拉普拉斯展开定理

试算：当 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 时, $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = 9$.

关于矩阵秩的一些经典结论



命题1(P75: 15): 对于任意的 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 均有:

证明

$$R(A+B) \leq R(A) + R(B).$$

命题2(PPT例题): 对于任意的 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, 均有:

$$R(AB) \leq \min \{R(A), R(B)\}.$$

非常实用, 已证明, 还有其他思路可证.

命题3(P76: 19): 对于 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, 若 $AB=O$, 则有:

证明

$$R(A) + R(B) \leq n.$$

命题4(P76: 20): 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则有:

$$R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n, \\ 1, & R(A) = n - 1, \\ 0, & R(A) < n - 1. \end{cases}$$

证明

命题1 对于任意的 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 均有:

$$R(A+B) \leq R(A) + R(B).$$

返回

证明思路(之一): (此题也可由分块矩阵的初等变换等思路证得.)

设矩阵 A, B 的列向量组分别为 $A=(\alpha_1, \dots, \alpha_n), B=(\beta_1, \dots, \beta_n)$,

则有

$$A+B=(\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_n+\beta_n),$$

考虑向量组: (I): $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$. (II): $\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_n+\beta_n$.

可见向量组(II)可被向量组(I)线性表示. 因此

$$R(A+B) = \text{向量组(II)的秩} \leq \text{向量组(I)的秩} \quad (*1)$$

又设 $R(A)=p, R(B)=q$, 且不妨设 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 与 $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 的

极大无关组分别为 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ 与 $\{\beta_1, \dots, \beta_q\}$, 并设

向量组(III): $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q\}$, 则可见:

向量组(I)可被向量组(III)线性表示. 因此, 结合(*1)式, 可得

$R(A+B) \leq \text{向量组(I)的秩} \leq \text{向量组(III)的秩} \leq p+q.$ 证毕.

命题3：对于 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, 若 $AB=O$, 则有：

$$R(A)+R(B) \leq n.$$

[返回](#)

证明思路(之一):

设矩阵 B 的列向量组为 $(\beta_1, \dots, \beta_p)$, 于是由题设条件可得

$$A(\beta_1, \dots, \beta_p) = O = (0, \dots, 0).$$

也即: β_1, \dots, β_p 均为齐次方程组 $Ax=0$ 的解, 因此若设 $Ax=0$ 的解空间为 S , 则必有 $\beta_1, \dots, \beta_p \in S$, 故必有

$$R(B) = R\{\beta_1, \dots, \beta_p\} \leq \dim(S). \quad (*2)$$

$\dim(S)$ 代表 S 的维数.

结合(*2)式, 并由 S 与齐次方程组基础解系的关系可知:

$$R(B) \leq \dim(S) = n - R(A),$$

也即:

$$R(B) + R(A) \leq n.$$

证毕.

命题4: 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则有:

$$R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n, \\ 1, & R(A) = n - 1, \\ 0, & R(A) < n - 1. \end{cases}$$

证明思路:

当 $R(A)=n$ 时, 可知 $\det(A) \neq 0$; 且由于 $AA^* = \det(A) E$, 可知此时伴随矩阵 A^* 也可逆. 因此可得: 此时, $R(A^*)=n$.

当 $R(A) < n-1$ 时, 由矩阵秩的定义可知:

A 的所有 $n-1$ 阶子式全为0.

而矩阵 A^* 的每个元素都是 A 的一个 $n-1$ 阶子式, 故此时必有

$$A^* = O. \quad \text{因而此时 } R(A^*) = 0.$$

当 $R(A)=n-1$ 时, 由矩阵秩的定义可知:

至少存在着 A 的一个 $n-1$ 阶子式不为0,

也即:

伴随矩阵 A^* 至少有一个元素不为0.

因而此时必有:

$$R(A^*) \geq 1. \quad (*3)$$

另外, 由于此时 $\det(A) = 0$, 因此 $AA^* = \det(A) E = O$.

于是由性质3的结论可知:

$$R(A) + R(A^*) \leq n,$$

故可得

$$R(A^*) \leq n - R(A) = n - (n-1) = 1. \quad (*4)$$

结合(*3)与(*4)可得, 此时必成立

$$R(A^*) = 1.$$

综上, 证毕.



关于习题(尤其是证明题)的推理习惯的养成

- 每一步都要有理论依据，逻辑要严谨。应对自己的每一步推导负责。平时应该养成“没有理论依据，就不写下一步”的习惯。
- 表述应规范、完整。涉及到的定义用词须准确，不能自己私自“造词”。
- 加强自我思辨能力。善用老师这一“拐杖”。对待“难题”，要有独立解决的勇气和定力。

常见错误示例

“矩阵 A 为0”, “矩阵 A 的值为0”.



概念错误. 原意本应表达为“矩阵 A 的行列式值为0”.

“当矩阵的列向量组线性相关时, 这些列向量要么互相成比例, 要么有零向量.”



逻辑错误. 有反例.

“行最简行列式.”



无此定义. 一般应表达为“行最简形”.