Exercițiul 1. (Teorema lui Bayes)

Se investighează o boală B, care afectează 1% din populație:

$$P(B) = 0.01, \quad P(\neg B) = 0.99.$$

Testul are următoarele caracteristici:

$$P(T+ \mid B) = 0.95 \quad \text{(sensibilitate)}, \qquad P(T- \mid \neg B) = 0.90 \quad \text{(specificitate)}.$$

Rezultă:

$$P(T+ \mid \neg B) = 1 - 0.90 = 0.10.$$

(a) Probabilitatea ca o persoană să fie bolnavă, dacă testul este pozitiv

Aplicăm teorema lui Bayes:

$$P(B \mid T+) = \frac{P(T+ \mid B)\,P(B)}{P(T+ \mid B)\,P(B) + P(T+ \mid \neg B)\,P(\neg B)}.$$

Substituind valorile:

$$P(B \mid T+) = \frac{0.95 \times 0.01}{0.95 \times 0.01 + 0.10 \times 0.99} = \frac{0.0095}{0.0095 + 0.099} = \frac{0.0095}{0.1085} \approx 0.0876.$$

$$\boxed{P(B \mid T+) \approx 0.0876 \text{ (adică 8.76\%)}}.$$

Interpretare: Deși testul are sensibilitate ridicată (95%) și specificitate de 90%, boala este rară (1%), iar majoritatea testelor pozitive provin de la persoane sănătoase (rezultate fals pozitive). Astfel, doar aproximativ 9 din 100 de teste pozitive corespund unor cazuri reale de boală.

(b) Specificitatea minimă pentru care $P(B \mid T+) = 0.5$

Folosim formula Bayes și notăm specificitatea cu $s = P(T- \mid \neg B)$. Atunci $P(T+ \mid \neg B) = 1 - s$.

$$0.5 = \frac{0.95 \times 0.01}{0.95 \times 0.01 + (1 - s) \times 0.99}.$$

Rezolvăm pentru s:

$$0.5\,[0.95 \times 0.01 + 0.99(1 - s)] = 0.95 \times 0.01$$

$$
\begin{gathered}
0.00475 + 0.495(1 - s) = 0.0095 \\
0.495 - 0.495s = 0.00475 \\
0.495s = 0.495 - 0.00475 = 0.49025 \\
s = \frac{0.49025}{0.495} \approx 0.9904.
\end{gathered}
$$

$$
\boxed{\text{Specificitatea minimă necesară: } s \approx 99.04\%}.
$$

Interpretare: Pentru ca testul să ofere o probabilitate de cel puțin 50% ca o persoană testată pozitiv să fie într-adevăr bolnavă, testul trebuie să fie extrem de specific — aproximativ 99%.