微积分上重要公式

成惠资料订购链接

一、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$ （系数不为 0 的情况）

二、极限重要公式（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ （2）$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ （3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}(a>o)=1$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ （5）$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$ （6）$\lim\limits_{x\to-\infty}arc\tan x=-\dfrac{\pi}{2}$

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{arc}\cot x=0$ （8）$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{arc}\cot x=\pi$ （9）$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

（10）$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\infty$ （11）$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$

三、下列常用等价无穷小关系（$x\to0$）

$\sin x\sim x$ $\tan x\sim x$ $\arcsin x\sim x$ $\arctan x\sim x$ $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

$\ln(1+x)\sim x$ $e^x-1\sim x$ $a^x-1\sim x\ln a$ $(1+x)^\partial-1\sim\partial x$

四、导数的四则运算法则

$(u\pm v)'=u'\pm v'$ $(uv)'=u'v+uv'$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

五、基本导数公式

⑴ $(c)'=0$ ⑵ $x^\mu=\mu x^{\mu-1}$ ⑶ $(\sin x)'=\cos x$

⑷ $(\cos x)'=-\sin x$ ⑸ $(\tan x)'=\sec^2x$ ⑹ $(\cot x)'=-\csc^2x$

⑺ $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$ ⑻ $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

⑼ $(e^x)'=e^x$ ⑽ $(a^x)'=a^x\ln a$ ⑾ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

⑿ $(\log_a{}^x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ ⒀ $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ⒁ $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

⒂ $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ ⒃ $(\mathrm{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$ ⒄ $(x)'=1$ ⒅ $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

六、高阶导数的运算法则

（1）$\left[u(x)\pm v(x)\right]^{(n)}=u(x)^{(n)}\pm v(x)^{(n)}$ （2）$\left[cu(x)\right]^{(n)}=cu^{(n)}(x)$

（3）$\left[u(ax+b)\right]^{(n)}=a^nu^{(n)}(ax+b)$ （4）$\left[u(x)\cdot v(x)\right]^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}c_n^ku^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$

七、基本初等函数的 n 阶导数公式

（1）$\left(x^n\right)^{(n)}=n!$　　（2）$\left(e^{ax+b}\right)^{(n)}=a^n\cdot e^{ax+b}$　　(3) $\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\ln^n a$

(4) $\left[\sin(ax+b)\right]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

(5) $\left[\cos(ax+b)\right]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

(6) $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{a^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$　　(7) $\left[\ln(ax+b)\right]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{a^n\cdot(n-1)!}{(ax+b)^n}$

八、微分公式与微分运算法则

⑴ $d(c)=0$　　⑵ $d\left(x^\mu\right)=\mu x^{\mu-1}dx$　　⑶ $d(\sin x)=\cos xdx$

⑷ $d(\cos x)=-\sin xdx$　　⑸ $d(\tan x)=\sec^2 xdx$　　⑹ $d(\cot x)=-\csc^2 xdx$

⑺ $d(\sec x)=\sec x\cdot\tan xdx$　　⑻ $d(\csc x)=-\csc x\cdot\cot xdx$

⑼ $d\left(e^x\right)=e^xdx$　　⑽ $d\left(a^x\right)=a^x\ln adx$　　⑾ $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$

⑿ $d\left(\log_a{}^x\right)=\frac{1}{x\ln a}dx$　　⒀ $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　⒁ $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

⒂ $d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$　　⒃ $d(\operatorname{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

九、微分运算法则

⑴ $d(u\pm v)=du\pm dv$　　⑵ $d(cu)=cdu$

⑶ $d(uv)=vdu+udv$　　⑷ $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$

十、基本积分公式

⑴ $\int kdx=kx+c$　　⑵ $\int x^\mu dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+c$　　⑶ $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c$

⑷ $\int a^xdx=\frac{a^x}{\ln a}+c$　　⑸ $\int e^xdx=e^x+c$　　⑹ $\int\cos xdx=\sin x+c$

⑺ $\int\sin xdx=-\cos x+c$　　⑻ $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\sec^2 xdx=\tan x+c$

⑼ $\int\frac{1}{\sin^2 x}=\int\csc^2 xdx=-\cot x+c$　　⑽ $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$

⑾ $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c$

十一、下列常用凑微分公式

积分型	换元公式
$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$	$u=ax+b$
$\int f\left(x^\mu\right)x^{\mu-1}dx=\frac{1}{\mu}\int f\left(x^\mu\right)d\left(x^\mu\right)$	$u=x^\mu$

$\int f(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d(\ln x)$	$u=\ln x$
$\int f(e^x)\cdot e^x dx=\int f(e^x)d(e^x)$	$u=e^x$
$\int f(a^x)\cdot a^x dx=\frac{1}{\ln a}\int f(a^x)d(a^x)$	$u=a^x$
$\int f(\sin x)\cdot\cos xdx=\int f(\sin x)d(\sin x)$	$u=\sin x$
$\int f(\cos x)\cdot\sin xdx=-\int f(\cos x)d(\cos x)$	$u=\cos x$
$\int f(\tan x)\cdot\sec^2 xdx=\int f(\tan x)d(\tan x)$	$u=\tan x$
$\int f(\cot x)\cdot\csc^2 xdx=\int f(\cot x)d(\cot x)$	$u=\cot x$
$\int f(\arctan x)\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=\int f(\arctan x)d(\arctan x)$	$u=\arctan x$
$\int f(\arcsin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f(\arcsin x)d(\arcsin x)$	$u=\arcsin x$

十二、补充下面几个积分公式

$\int\tan xdx=-\ln|\cos x|+c$ $\int\cot xdx=\ln|\sin x|+c$

$\int\sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|+c$ $\int\csc xdx=\ln|\csc x-\cot x|+c$

$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$ $\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+c$ $\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c$

十三、分部积分法公式

(1)形如$\int x^n e^{ax}dx$，令$u=x^n$， $dv=e^{ax}dx$

形如$\int x^n\sin xdx$令$u=x^n$， $dv=\sin xdx$

形如$\int x^n\cos xdx$令$u=x^n$， $dv=\cos xdx$

(2)形如$\int x^n\arctan xdx$，令$u=\arctan x$， $dv=x^n dx$

形如$\int x^n\ln xdx$，令$u=\ln x$， $dv=x^n dx$

(3)形如$\int e^{ax}\sin xdx$， $\int e^{ax}\cos xdx$令$u=e^{ax},\sin x,\cos x$均可。

十四、第二换元积分法中的三角换元公式

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ $x=a\sin t$ (2) $\sqrt{a^2+x^2}$ $x=a\tan t$ (3) $\sqrt{x^2-a^2}$ $x=a\sec t$

十五、三角函数公式

1.半角公式

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \qquad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\frac{\sin A}{1+\cos A} \qquad \cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}=\frac{\sin A}{1-\cos A}$$

2.万能公式

$$\sin a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \qquad \cos a=\frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \qquad \tan a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$$

十六、几种常见的微分方程

1.可分离变量的微分方程：$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ ， $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$

2.齐次微分方程：$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$

3.一阶线性非齐次微分方程：$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$ 解为：$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c\right]$

微分方程的相关概念：

一阶微分方程：$y'=f(x,y)$ 或 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

可分离变量的微分方程：一阶微分方程可以化为$g(y)dy=f(x)dx$的形式，解法：

$\int g(y)dy=\int f(x)dx$ 得：$G(y)=F(x)+C$称为隐式通解。

齐次方程：一阶微分方程可以写成$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\phi(x,y)$，即写成$\frac{y}{x}$的函数，解法： 一阶线性

设$u=\frac{y}{x}$，则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，$u+\frac{du}{dx}=\phi(u)$，$\therefore\frac{dx}{x}=\frac{du}{\phi(u)-u}$分离变量，积分后将$\frac{y}{x}$代替$u$，

即得齐次方程通解。

微分方程：

1、一阶线性微分方程：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

$$\begin{cases}\text{当}Q(x)=0\text{时,为齐次方程，}y=Ce^{-\int P(x)dx}\\ \text{当}Q(x)\neq 0\text{时，为非齐次方程，}y=(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)e^{-\int P(x)dx}\end{cases}$$

2、贝努力方程：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n,(n\neq 0,1)$

全微分方程：

如果$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$中左端是某函数的全微分方程，即：

$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，其中：$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$

$\therefore u(x,y)=C$应该是该全微分方程的通解。

二阶微分方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x),\left\langle\begin{array}{l}f(x)\equiv 0\text{时为齐次}\\ f(x)\neq 0\text{时为非齐次}\end{array}\right.$$

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法：

$(*)y''+py'+qy=0$，其中p,q为常数；

求解步骤：

1、写出特征方程:$(\Delta)r^2+pr+q=0$，其中r^2，r的系数及常数项恰好是(*)式中y'',y',y的系数；

2、求出(Δ)式的两个根r_1,r_2

3、根据r_1,r_2的不同情况，按下表写出(*)式的通解：

r_1，r_2的形式	(*)式的通解
两个不相等实根$(p^2-4q>0)$	$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$
两个相等实根$(p^2-4q=0)$	$y=(c_1+c_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根$(p^2-4q<0)$ $r_1=\alpha+i\beta$，$r_2=\alpha-i\beta$ $\alpha=-\frac{p}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$	$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=f(x)$，p,q为常数

$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型，λ为常数；

$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型