微积分（I）期中模拟测试

时间：90 分钟　　满分：100 分

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）：

1. 下列命题中，正确的有（ A ）.

(1) 无界变量必为无穷大量；　(2) 有限个无穷大量之和仍为无穷大量；

(3) 无穷大量必为无界变量；　(4) 无穷大量与有界变量之积仍为无穷大量.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解析：无穷大量必为无界变量，但无界变量未必是无穷大量。故(1)错误，(3)正确。有限个无穷大量之和未必是无穷大量，如 $n+(-n)=0$ 在 $n\to\infty$ 时不满足无穷大量的定义，故(2)错误。无穷大量与有界变量之积未必是无穷大量，如 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\frac{1}{x}=1$，故(4)错误.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题中错误的是（ D ）.

A. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　B. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

C. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　　D. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

解析：因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故有 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

对于 A，C 选项：

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0,$$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}，\text{故 } f'(0) \text{ 存在.}$$

对于 B 选项：

$$2f(0)=\lim_{x\to0}\left[f(x)+f(-x)\right]=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{f(x)+f(-x)}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}=0,$$

故 B 正确.

取 $f(x)=|x|$，则熟知 $f'(0)$ 不存在，但 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0$，故 D 错误.

3. 设对 $\forall x\in\mathbf{R}$，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[g(x)-\varphi(x)\right]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$（ D ）.

A. 存在且等于 0　　B. 存在但未必等于 0　　C. 一定不存在　　D. 不一定存在

解析：当 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 都存在时，据夹逼准则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 才一定存在.

再例如，取 $f(x)=2e^{-|x|}+x$，$\varphi(x)=e^{-|x|}+x$，$g(x)=3e^{-|x|}+x$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

4. 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，又 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，则当 $\Delta x<0$ 时，有（ D ）.

A. $\Delta y > dy > 0$　　B. $\Delta y < dy < 0$　　C. $dy > \Delta y > 0$　　D. $dy < \Delta y < 0$

解析：由拉格朗日中值定理 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(\xi)\cdot\Delta x$，其中 ξ 在 $x+\Delta x$ 和 x 之间.

由 $dy = f'(x)dx = f'(x)\Delta x$ 及 $f''(x) > 0$，可知 $dy < \Delta y < 0$.

5. 设 $f(1)=0$， $f'(1)=10$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x} =$ （ C ）.

A. 0　　B. 5　　C. $\dfrac{5}{2}$　　D. 10

解析：据导数定义，有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}$$

$$= f'(1)\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2+x\tan x}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2+x\tan x}\right]$$

$$= f'(1)\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x\tan x}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x\tan x}\right]$$

$$= f'(1)\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\dfrac{\tan x}{x}}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\dfrac{\tan x}{x}}\right] = f'(1)\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{2}.$$

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）：

6. 设 $y = f\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$， $f'(x) = \ln x^{\frac{1}{3}}$，则 $dy =$ $\dfrac{1}{(x+1)^2}\ln\dfrac{2x-1}{x+1}dx$.

7. 函数 $y = x^2\ln x$ 的 $n(n\geq 3)$ 阶导数为 $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-3}\cdot 2\cdot(n-3)!}{x^{n-2}}$.

8. 函数 $f(x) = \lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ 的所有间断点及其类型是 $x=0$是第一类可去间断点，

$x = k\pi(k\neq 0, k\in\mathbf{Z})$是第二类无穷间断点.

9. 曲线 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 的渐近线有 $y=1$.

10. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x} = 8$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} =$ e^4.

三、求下列极限的值（共 12 分）：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(4x^2-3\right)^{30}\left(3x-2\right)^{40}}{\left(6x^2+7\right)^{50}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$ （2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(3+2\sin x\right)^x-3^x}{\tan^2 x}=\dfrac{2}{3}$

四、计算题（共 16 分）：

（1）已知 $y=y(x)$ 由方程 $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\arctan\frac{y}{x}}$ 所确定，求 $y''=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x-y\right)^3}$；

（2）设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ t^2-y+a\sin y=1\end{cases}$ 所确定，且 $y(0)=b$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{2\left(1-a\cos b\right)}$.

五、应用题（8 分）：

求星型线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 处的切线 $x+y-2\sqrt{2}=0$ 与法线 $x-y=0$ 方程.

六、计算题（8 分）：

设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ ax^2+bx+c, & x\ge0\end{cases}$，且 $f''(0)$ 存在，试确定 $a=\dfrac{1}{2},b=1,c=1$ 的值.

七、证明题（8 分）：

设 $0<x_1<\sqrt{2}$，$x_n=\dfrac{2+2x_{n-1}}{2+x_{n-1}}(n\ge2)$，试证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$ 存在，并求此极限.

提示：因为 $0<\dfrac{2+2x_{n-1}}{2+x_{n-1}}=x_n=2-\dfrac{2}{2+x_{n-1}}<2$，且

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2}{2+x_{n-1}}-\frac{2}{2+x_n}=\frac{2(x_n-x_{n-1})}{(2+x_n)(2+x_{n-1})}$$

即 $x_{n+1}-x_n$ 和 x_n-x_{n-1} 同号，故数列要么单调增，要么单调减，单调有界证毕.

八、证明题（8 分）：

设函数 $f(x)$ 在 $\left[-1,1\right]$ 上有二阶导数，$f'(x)$ 为偶函数，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

（1）$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；（2）$\exists\eta\in(-1,1)$，使得 $f'(\eta)+f''(\eta)=1$.

提示：（1）构造 $g(x)=f(x)-x$； （2）构造 $h(x)=e^x g(x)$，利用第一问.