

微积分参考答案

一、选择题

1.C

2.C

3.D

4.D

5.B

二、填空题

1. $k=3$

2. $(-1) \cdot 2^{2024} \cdot 2023!$

3. $y=x$

4. $2 - \frac{\pi}{2}$

5. $\frac{\pi}{4}$

三、计算题

1. e^{-4}

此题考查重要极限，代入即可

$$=e^{\lim_{x \rightarrow 0} x - 2f(x)/\sin x}$$

凑导数定义！此处不能洛必达法则。

$$=e^{-4}$$

2.这个题没要求代入点，下面的答案代入了

解 因 $\frac{dx}{dt} = -2t \sin t^2$, $\frac{dy}{dt} = -2t^2 \sin t^2$ ($t > 0$), 故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = t, \quad \text{则} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(t)}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{2t \sin t^2}, \quad \text{则} \quad \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

3.拆成两个部分分别积分即可

结果为

$$\int \left(\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1}(x)}} + x \sin(x) \cos(x) \right) dx = \frac{1}{8} \left(\sin(2x) - 2x \cos(2x) + 16\sqrt{\tan^{-1}(x)} \right) + \text{constant}$$

$$4.2\sqrt{2}n$$

$$5. x(y) = c_1 e^{3y} - (2y)/3 - 2/9$$

四、凑微分，无需真正计算

五、前两问如图所示

解 (1) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$, 设切点为 (a, b) , 则 $b = \sqrt{a-2}$

切线方程为: $y - \sqrt{a-2} = \frac{1}{2\sqrt{a-2}}(x-a)$, 如图4所示, 因

为过 $(1, 0)$, 则

$$-\sqrt{a-2} = \frac{1}{2\sqrt{a-2}}(1-a)$$

解得 $a = 3, b = \sqrt{3-2} = 1$, 切点 $(3, 1)$;

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 - \int_2^3 \sqrt{x-2} dx = 1 - \frac{2}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$(2) V = V_2 - V_1 = \frac{1}{3}(\pi \cdot 1^2 \cdot 2) - \pi \int_2^3 (\sqrt{x-2})^2 dx = \frac{2}{3}\pi - \pi \int_2^3 (x-2) dx \\ = \frac{2}{3}\pi - \pi \left[\frac{9-4}{2} - 2 \right] = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi.$$

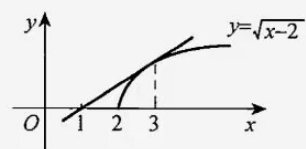


图4

(3)大的体积减去小的体积

$$V=V_1-V_2=4/5\pi$$

六、对函数求导数以及二阶导数，进行分析即可

$$y' = 1/6((-3\pi + 4x)\cos(x) + 4\sin(x))$$

$$y'' = 1/6(8\cos(x) + (3\pi - 4x)\sin(x))$$

发现二阶导数恒大于零，说明一阶导数单调递增

$$\text{而 } y'(0) < 0, y'(\frac{\pi}{2}) > 0$$

得到至少存在一个零点，此零点即为最小值点

七、此题为前几年的原题