线性代数期中模拟测试

时间：90 分钟　　满分：100 分

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）：

1. 设 A, B 都是 n 阶对称矩阵，则下列结论中不正确的是（ B ）.

A. $A+B$ 也是对称矩阵　　B. AB 也是对称矩阵

C. $A^m + B^m$（m 是正整数）也是对称矩阵　　D. $BA^T + AB^T$ 也是对称矩阵

2. 设 A 是 n 阶矩阵，且 $A^2 - A = I$，则下列说法中错误的是（ B ）.

A. 方程组 $Ax = b$ 有唯一解　B. $\det A = 0$　C. $A - I$ 可逆　D. 秩 $R(A) = n$

3. 设 n 阶方阵 A 经过有限次初等变换后得到矩阵 B，则（ C ）.

A. $|A| = |B|$　　B. 方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 同解

C. A 和 B^T 等价　　D. 一定存在初等矩阵 P 和 Q，使得 $A = PBQ$

4. 若 A, B 是任意两个非零矩阵，且满足 $AB = O$，则（ A ）.

A. A 的列向量线性相关，B 的行向量线性相关

B. A 的列向量线性相关，B 的列向量线性相关

C. A 的行向量线性相关，B 的行向量线性相关

D. A 的行向量线性相关，B 的列向量线性相关

5. 设分块矩阵 $X = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 1 \end{pmatrix}$，$X$ 的逆矩阵为 $X^{-1} = \begin{pmatrix} A_2 & \alpha_2 \\ \beta_2 & \alpha \end{pmatrix}$，其中 A_1, A_2 为 n 阶矩阵，α 为实数，则 α 的值为（ D ）.

A. 1　B. $\beta_1 A_1^{-1} \alpha_1$　C. $\dfrac{1}{1+\beta_1 A_1^{-1}\alpha_1}$　D. $\dfrac{1}{1-\beta_1 A_1^{-1}\alpha_1}$

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）：

6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{20} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{10} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 34 \end{pmatrix}}$.

7. 设 A 是 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，且 $|A| = a, |B| = b, C = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$，则 $|C| = \underline{(-1)^{mn}ab}$.

8. 设 A 是 n 阶可逆矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，且 $|A| = \dfrac{1}{2}$，则 $\left|(3A)^{-1} + 4A^*\right| = \underline{2\left(\dfrac{7}{3}\right)^n}$.

9. 空间直角坐标系中，$\boldsymbol{a}=(1,0,1),\boldsymbol{b}=(1,-2,0),\boldsymbol{c}=(-1,2,1)$，则 $Prj_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\underline{-\frac{5\sqrt{6}}{6}}$.

10. 过点 $M_0(4,-1,1)$ 与平面 $2x-7y+4z+1=0$ 平行的平面方程为 $\underline{2x-7y+4z-19=0}$.

三、(10 分) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\\x_1^4&x_2^4&x_3^4&x_4^4\end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)\prod_{1\le i<j\le 4}(x_j-x_i)$ (或其等价答案).

四、(12 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，解矩阵方程 $AX=A+2X$.

提示：先算 $(A-2I)^{-1}$, 再计算 $X=(A-2I)^{-1}A=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$.

五、(14 分) 方程组 $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\x_1-2x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2-2x_3=\lambda^2\end{cases}$ 在 λ 取何值时有解？并在 $\lambda=1$ 时，求解方程组.

答案：在 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$ 时有解，当 $\lambda=1$ 时解为 $\begin{cases}x_1=1+x_3\\x_2=x_3\end{cases}$，$x_3$ 为任意值.

六、(14 分) 已知 $AP=PB$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求 A 及 A^5.

提示：先说明矩阵 P 可逆（上/下三角矩阵，对角线上没有零元，行列式不为 0，故可逆），

再由题干得 $A=PBP^{-1}$，$A^5=PBP^{-1}PBP^{-1}PBP^{-1}PBP^{-1}PBP^{-1}=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=A$，

计算即可。答案为 $A^5=A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$.（没说明可逆的同学，本次未扣分）

七、(10 分) 已知三条不同直线的方程分别为 $l_1: ax+2by+3c=0$，$l_2: bx+2cy+3a=0$，

$l_3: cx+2ay+3b=0$，证明：这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

提示：本题证明方法较多，在此给出官方标答。

证必要性：设三直线l_1,l_2,l_3交于一点，则线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c \\ bx+2cy=-3a \\ cx+2ay=-3b \end{cases} \qquad (*)$$

有唯一解，故系数矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & 2c \\ c & 2a \end{pmatrix}$与增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{pmatrix}$的秩均为2，于是

$$|\overline{A}|=0.$$

由于

$$|\overline{A}|=\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}=6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$$

$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

但$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故$a+b+c=0$.

充分性：由于$a+b+c=0$，则从必要性的证明可知$|\overline{A}|=0$，故秩$(\overline{A})<3$

由于

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]=-2[(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2]\neq 0$$

故秩$(A)=2$.于是秩(A)=秩$(\overline{A})=2$．因此方程组（*）有唯一解，即三直线交于一点.

仅供参考.