电子科技大学 2023 -2024 学年第一学期期中考试 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 24 分，每题选项中只有一个正确答案）.

1. D　　2.C　　3.D　　4.C　　5.C　　6.B

二、计算题（每小题 7 分，共 14 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(\sqrt[3]{1+x^2}-1)}{x-\sin x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}$（2 分）$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{1-\cos x}$（2 分）$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}$（2 分）

$=2$（1 分）

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{e^x-1}{2}\right)^{\cot x}$　（2 分）$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2\tan x}}$（2 分）$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}}=e^{\frac{1}{2}}$（3 分）

三、计题题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 设 $y=x+x^x+\sqrt[x]{x}\ (x>0)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：$y=x+e^{x\ln x}+e^{\frac{\ln x}{x}}$（2 分）

$y'=1+e^{x\ln x}(\ln x+1)+e^{\frac{\ln x}{x}}\dfrac{1-\ln x}{x^2}$（4 分）$=1+x^x(\ln x+1)+\dfrac{\sqrt[x]{x}(1-\ln x)}{x^2}$（1 分）

2. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{1-t^2},\\ y=\arcsin t,\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$x'(t)=\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$，$y'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$（2 分）

从而 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=-\dfrac{1}{t}$（2 分）

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{t}\right)\dfrac{1}{x'(t)}=-\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}$（3 分）

四、（9 分）设 $0<x_1<1$，当 $n\ge 1$ 时，有 $x_{n+1}=2x_n-x_n^2$，证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求其极限值.

解：由 $0<x_1<1$，得 $0\le x_2=x_1(2-x_1)\le 1$，假设 $x_n\le 1$，则 $0\le x_{n+1}=x_n(2-x_n)\le 1$，所以数列 $\{x_n\}$ 有界。（3 分）又 $x_{n+1}-x_n=2x_n-x_n^2-x_n=x_n(1-x_n)\ge 0$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调上升。（3 分）由单调有界准则，数列 $\{x_n\}$ 有极限。

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由$x_{n+1}=2x_n-x_n^2\Rightarrow a=2a-a^2\Rightarrow a=0$（舍去），或$a=1$，所以数列$\{x_n\}$的极限等于$1$。（3 分）

五、（9 分）设函数$y=y(x)$由方程$e^{x+y}+2x^2+3y-1=0$确定，求$y'(0),y''(0)$.

解:：把$x=0$代入方程得：$y=0$，（1 分）然后在方程两边同时对x求导得：

$e^{x+y}(1+y')+4x+3y'=0$，代入$x=0,y=0$，得$y'(0)=-\dfrac{1}{4}$（4 分）

两边再同时对x求导得：$e^{x+y}(1+y')^2+e^{x+y}y''+4+3y''=0$，代入得

$y''(0)=-\dfrac{79}{64}$（4 分）

六、（8 分）讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$的连续性. 若有间断点，判别其类型.

解：当$|x|<1$时，$f(x)=x$；当$|x|>1$时，$f(x)=-x$，当$|x|=1$时，$f(x)=0$，所以

$$f(x)=\begin{cases}x,|x|<1\\-x,|x|>1\\0,|x|=1\end{cases}\text{，（3 分）}$$

由于$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-x)=-1,\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x)=1$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(x)=1,$ $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(-x)=-1$，（4 分）所以$x=\pm1$是函数$f(x)$的第一类跳跃型间断点，函数在$(-\infty,-1)$、$(-1,1)$和$(1,+\infty)$连续。（2 分）

七、（8 分）选取a,b的值，使当$x\to-\infty$时，$f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}-(ax+b)$为无穷小.

解：由已知$\lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2-4x+5}-(ax+b)]=0$，则有$a<0$，且

$$\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2-4x+5}-(ax+b)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(4+2ab)x+(5-b^2)}{\sqrt{x^2-4x+5}+(ax+b)}\text{（3 分）}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-a^2)x-(4+2ab)+\dfrac{5-b^2}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+a+\dfrac{b}{x}}=0\text{（2 分）}\Rightarrow\begin{cases}1-a^2=0\\4+2ab=0\end{cases}\Rightarrow a=\pm1,b=\mp2\text{（2 分）}$$

所以$a=-1,b=2$.（1 分）

八、（8 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=0$ 并 $f''(0)$ 存在. 若

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, x\neq 0,\\ f'(0), x=0,\end{cases}$$ ，求 $F'(x)$，并证明 $F'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

解：当 $x\neq 0$ 时，$F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$；（2 分）

当 $x=0$ 时，$F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\dfrac{1}{2}f''(0)$

所以 $F'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}f''(0), x=0\end{cases}$ 。（2 分）

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{[xf'(x)-f'(0)x]-[f(x)-f'(0)x]}{x^2}$$ （2 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f'(0)x}{x^2}=f''(0)-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}$$

$$=f''(0)-\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}f''(0)=F'(0)$$ （2 分）

所以 $F'(x)$ 在 $x=0$ 连续。

九、（6 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，试证对任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

证明：令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又

$F(1)=f(1)-1=-1<0$，$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$，由零点定理知，$\exists\eta\in(0,\frac{1}{2})$，

使得 $F(\eta)=0$。（2 分）

设 $G(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$，（2 分）则 $G(x)\in C[0,\eta]\bigcap D(0,\eta)$，且

$G(0)=0, G(\eta)=e^{-\lambda\eta}F(\eta)=0$，由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,\eta)\subseteq(0,1)$，使得 $G'(\xi)=0$，即

$e^{-\lambda\xi}\{f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]-1\}=0$，即 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。（2 分）