2023 - 2024 学年第一学期期中考试模拟试题

《高等数学》

仲英学业辅导中心、南洋学辅 · 联合出品

班级：__________ 学号：__________

姓名：__________ 座号：__________

成绩	

…………………………装…………………………订…………………………线…………………………

预祝考生们取得理想成绩！

命题：自动化 2204 徐彬宵 (1～10) 计试 2101 肖追日 (11 ～ 14)
计算机 2203 陈洋 (15 ～ 18) 自动化 2202 任黎堃 (19 ～ 21)
排版：自动化 2204 徐彬宵 应数 2101 杨嘉昱

一、选择题（共 5 题，每题 3 分）

1. 下列说法正确的是 ( )

   A. 对数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$，若数列 $\{x_ny_n\}$ 无界，则必有 $\{x_n\}$ 无界或 $\{y_n\}$ 无界

   B. 若 $\forall\eta>0$，有无穷多个 $x_n\in(a-\eta,a+\eta)$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a

   C. 当 $x\to0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是无穷大量

   D. 若数列 $\{x_n\}$ 的奇偶子列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛，则 $\{x_n\}$ 的极限存在

2. 当 $x\to0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ( )

   A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

3. 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2e^{(n+1)x}+1}{e^{nx}+x^n+1}$，则 $f(x)$ 跳跃间断点的个数是 ( )

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 下列命题正确的是 ( )

   A. 若 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

   B. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}=f'(0)$

   C. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)-f(0)}{\sqrt{x^2}}$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

   D. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sqrt[3]{x})-f(0)}{\sqrt{x^2}}$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

5. 设 $\alpha > 0, \beta \neq 0$，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x^{2\alpha} + x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} - x^2] = \beta$，则 $\alpha + \beta =$ （ ）

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. 2　　C. $\dfrac{5}{2}$　　D. 3

二、填空题（共 5 题，每题 3 分）

6. 设 $f(x)$ 可导，$F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$，若 $F(x)$ 在 $x = 0$ 也可导，则 $f(0)$ 的值是________.

7. 设 $f(x)$ 在原点与 $y = \sin x$ 相切，则极限 $\lim\limits_{n \to \infty} n^{1/2} \sqrt{f\left(\dfrac{2}{n}\right)} =$ ________

8. 若曲线 $y = x^2 \ln(ax)(a > 0)$，则当 a 变动时，拐点的轨迹方程是________

9. 设 $x = x(y)$ 是函数 $y = \ln x + e^x$ 的反函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} y^2} =$________

10. 极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}) =$ ________

三、计算与证明：本题共 9 小题，共 70 分。其中 11,12 题每题 8 分，$13 \sim 18$ **题每题 9 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

11. 计算极限：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2}{n^3}.$$

12. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $f(0), f^{'}(0), f^{''}(0)$ 均不为 0。试求所有满足使得

$$\lim_{h \to 0} \frac{k_1 f(h) + k_2 f(2h) + k_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0$$

实数对 (k_1, k_2, k_3)。

13. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有定义，满足

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(\frac{x}{3})}{x}=0.$$

试证明：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0.$$

14. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=0,f(1)=2$.

试证明：存在两两相异的点 $\eta_1,\eta_2,\eta_3\in(0,1)$，使得

$$f^{'}(\eta_1)f^{'}(\eta_2)\sqrt{1-\eta_3}\geq 2.$$

15. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^3 + t + \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{3}t^3 - t + \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

确定，求 $y = y(x)$ 的极值和曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

16. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $x_0 = 2, x_n = 2 + \dfrac{1}{x_{n-1}}, n = 1, 2, \cdots$ 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

17. 设在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f''(x)>0$, 而 $f(0)<0$. 试证：$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

18. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，且 $f(0)=0, f(1)=1, f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $|f'''(\xi)|\geq 24$.

四、附加题：本题共 3 小题，共 20 分。其中 19 题 6 分，20、21 题 7 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

19. 设 $F(x,y)=\dfrac{f(y-x)}{2x}, F(1,y)=\dfrac{y^2}{2}-y+5, x_0>0, x_1=F(x_0,2x_0),\cdots,x_{n+1}=F(x_n,2x_n)$. 证明 x_n 极限存在并求该极限。

20. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 可导，$0\le a\le b\le \dfrac{\pi}{2}$。证明在区间 (a,b) 中存在两点 ξ_1,ξ_2 使得

$$f'(\xi_1)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi_2)\frac{\sin\xi_1}{\cos\xi_2}.$$

21. (1) 证明 Young 不等式：设 $a, b > 0, p > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，那么有

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(提示：利用函数的凹凸性)

(2) 证明 Holder 不等式：设 $x_j, y_j \geqslant 0$ $(1 \leq j \leq n)$，并且 $p > 1, q > 1$ 满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

则成立不等式

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^q \right)^{1/q}.$$