线性代数公式总结

一、矩阵的基本运算

1. $A+B=B+A$　　2. $(A+B)+C=A+(B+C)$　　3. $A+(-A)=O$　$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$

4. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$　$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$　　5. $\lambda(\mu \boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$　　6. $kA=0 \Leftrightarrow k=0$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

7. $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=A$　$(A\pm B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\pm B^{\mathrm{T}}$　$(kA)^{\mathrm{T}}=k\left(A^{\mathrm{T}}\right)$　$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

转置行列式不变 $\left|A^{\mathrm{T}}\right|=|A|$　　逆值变 $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$　　$|\lambda A|=\lambda^{n}|A|$

8. $|\alpha,\beta_1+\beta_2,\gamma|=|\alpha,\beta_1,\gamma|+|\alpha,\beta_2,\gamma|$

9. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，3 阶矩阵　$|A+B|\neq|A|+|B|$

$A+B=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3)$　$|A+B|=|\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3|$　$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix}=|A||B|$

10. $|E(i,j(c))|=1$

二、有关矩阵乘法的基本运算

$C=AB$，即 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$.

1.线性性质 $(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B$　　$A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$　　$(\lambda A)B=\lambda(AB)=A(\lambda B)$

2.结合律　$(AB)C=A(BC)$　　3. $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$　　4. $|AB|=|A||B|$

5. $A^kA^l=A^{k+l}$　　$\left(A^k\right)^l=A^{kl}$　　$(AB)^k=A^kB^k$ 不一定成立！

6. $AE=A$，$EA=A$，$A(kE)=kA$，$(kE)A=kA$，$AB=E \Leftrightarrow BA=E$

与数的乘法的不同之处：$(AB)^k=A^kB^k$ 不一定成立！

7.无交换律

因式分解的障碍是交换性，一个矩阵 A 的每个多项式可以因式分解，例如 $A^2-2A-3E=(A-3E)(A+E)$

8.无消去律（矩阵和矩阵相乘）由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O} \nRightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　由 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 和 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O} \nRightarrow \boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

由 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时 $AB=AC \nRightarrow B=C$（无左消去律）特别地，设 A 可逆，则 A **有消去律**.

左消去律：$AB=AC \Rightarrow B=C$　　右消去律：$BA=CA \Rightarrow B=C$

如果 A 列满秩，则 A 有左消去律，即① $AB=0 \Rightarrow B=0$；② $AB=AC \Rightarrow B=C$

三、可逆矩阵的性质

1.当 A 可逆时，⑴ A^{T} 也可逆，且 $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$；

⑵ A^k 也可逆，且 $\left(A^k\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^k$；⑶数 $\lambda\neq0$，λA 也可逆，$(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

2.若 A，B 是两个 n 阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

推论：设 A，B 是两个 n 阶矩阵，则 $AB=E \Leftrightarrow BA=E$

3.命题：初等矩阵都可逆，且 $(E(i,j))^{-1}=E(i,j)$；$(E(i(c)))^{-1}=E\left(i\left(\dfrac{1}{c}\right)\right)$；$(E(i,j(c)))^{-1}=E(i,j(-c))$.

4. 命题：准对角矩阵 $A=\begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk} \end{vmatrix}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ 每个 A_{ii} 都可逆，记 $A^{-1}=\begin{vmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk}^{-1} \end{vmatrix}$.

5. $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶可逆矩阵：

$\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0$ （是非奇异矩阵）；$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{n}$（是满秩矩阵）$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组线性无关；

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 没有非零解；$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{b}\in \mathrm{R}^{\boldsymbol{n}}$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 总有唯一解；$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 等价；

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 可表示成若干个初等矩阵的乘积；$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的特征值全不为 0；$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵；

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组是 $\mathbf{R}^{\boldsymbol{n}}$ 的一组基；$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 是 $\mathbf{R}^{\boldsymbol{n}}$ 中某两组基的过渡矩阵.

6.逆矩阵的求法　① $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$　② $(A\vdots E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\vdots A^{-1})$

③ $\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$　　$\begin{bmatrix} A & B\\ C & D\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}}\\ B^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$

④ $\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n}\end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} & & & a_1\\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} & & & \frac{1}{a_n}\\ & & \iddots & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ \frac{1}{a_1} & & & \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1}\end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} & & & A_1\\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_n & & & \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} & & & A_n^{-1}\\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$

四、伴随矩阵的基本性质：

1. $AA^*=A^*A=|A|E$　2.当 A 可逆时，$A\dfrac{A^*}{|A|}=E$，得 $\boxed{A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}}$，（求逆矩阵的伴随矩阵法）

且得：$\boxed{(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}=(A^{-1})^*}$　$\left((A^{-1})^*=|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=\dfrac{A}{|A|}\right)$

3.伴随矩阵的其他性质

(1) $\boxed{|A^*|=|A|^{n-1}}$，$A^*=|A|A^{-1}$　(2) $(A^T)^*=(A^*)^T$，(3) $\boxed{(cA)^*=c^{n-1}A^*}$，(4) $(AB)^*=B^*A^*$，

(5) $(A^k)^*=(A^*)^k$，(6) $\boxed{(A^*)^*=|A|^{n-2}A}$　　$n=2$ 时，$(A^*)^*=A$，$A^*=\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

(7)伴随矩阵的特征值：$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ $(\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\Rightarrow \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{X})$.

4.关于矩阵右上肩记号：T，k，-1，*

(1)任何两个的次序可交换，如 $(A^{\mathrm{T}})^*=(A^*)^{\mathrm{T}}$，$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\boldsymbol{T}}=(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{-1}$，$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$

(2) $(AB)^T=B^TA^T,(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，$(AB)^*=B^*A^*$　$\boxed{\text{但}(AB)^k=B^kA^k\text{不一定成立！}}$

2.线性表示关系有传递性

当 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\to r_1,r_2,\cdots,r_p$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\to r_1,r_2,\cdots,r_p$.

3. 等价关系：如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 互相可表示 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rightleftarrows\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，记作 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\cong\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$.

4.线性相关

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中有向量可以用其它的 $s-1$ 个向量线性表示，就说 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中每个向量都不可以用其它的 $s-1$ 个向量线性表示，就说 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

(1) $s=1$，单个向量 α，$x\alpha=0$，α 相关 $\Leftrightarrow\alpha=0$

(2) $s=2$，α_1,α_2 相关 $\Leftrightarrow$ 对应分量成比例　即　α_1,α_2 相关 $\Leftrightarrow a_1:b_1=a_2:b_2=\cdots=a_n:b_n$

(3)向量个数 s =维数 n，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相（无）关 $\Leftrightarrow \left|\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right| = (\neq) 0$

① $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$

②如果 $s>n$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 一定相关，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的方程个数 $n<$ 未知数个数 s

③如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关，则它的每一个部分组都无关

④如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 相关，则 $\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

⑤当 $\beta\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 时，表示方式唯一 $\Leftrightarrow \alpha_1\cdots\alpha_s$ 无关（表示方式不唯一 $\Leftrightarrow \alpha_1\cdots\alpha_s$ 相关）

⑥若 $\beta_1,\cdots,\beta_t\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，并且 $t>s$，则 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 一定线性相关

⑦$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ “线性相关还是无关”就是向量方程 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_sx_s=0$ “有没有非零解”.

5.各性质的逆否形式

(1)如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关，则 $s\le n$

(2)如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 有相关的部分组，则它自己一定也相关

(3)如果 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 无关，而 $\beta\nrightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 无关

(4)如果 $\beta_1\cdots\beta_t\to\alpha_1\cdots\alpha_s$，$\beta_1\cdots\beta_t$ 无关，则 $t\le s$

推论：若两个无关向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 与 $\beta_1\cdots\beta_t$ 等价，则 $s=t$

6.极大无关组

(1)设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维向量组，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是它的一个部分组. 如果

① $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，② $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 再扩大就线性相关. 就称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个最大无关组. 称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中所包含向量的个数为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩. 记作 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

(2)① $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关 $\Leftrightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$ ② $\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s \Leftrightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)=R(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$

另一种说法：取 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个最大无关组 $(*)$，$(*)$ 也是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 的最大无关组 $\Leftrightarrow (*),\beta$ 相关.

③ β 可用 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 唯一表示 $\Leftrightarrow R(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)=R(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=s$

④ $\beta_1,\cdots,\beta_t\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s \Leftrightarrow R(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)=R(\alpha_1,\cdots,\alpha_s) \Rightarrow R(\beta_1,\cdots,\beta_t)\le R(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$

⑤ $\alpha_1,\cdots,\alpha_s\cong\beta_1,\cdots,\beta_t \Leftrightarrow R(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=R(\alpha_1\cdots\alpha_s,\beta_1\cdots\beta_t)=R(\beta_1,\cdots,\beta_t)$

(3)矩阵与向量组的对比

矩阵的秩　如果矩阵 A 存在不为零的 r 阶子式，且任意 $r+1$ 阶子式均为零，则称矩阵 A 的秩为 r. 记作 $R(A)=r$

向量组的秩　向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的最大无关组所含向量的个数，称为这个向量组的秩. 记作 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

矩阵等价　A 经过有限次初等变换化为 B.　记作：$A\cong B$

向量组等价　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可以相互线性表示. 记作 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\cong(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

7. 矩阵的秩的简单性质

(1)① A 行满秩：$R(A)=m$，A 列满秩：$R(A)=n$　② $0\le R(A)\le\min\{m,n\}$，$R(A)=0\Leftrightarrow A=0$

③ n 阶矩阵 A 满秩：$R(A)=n$　A 满秩 $\Leftrightarrow A$ 的行（列）向量组线性无关

$\Leftrightarrow |A|\neq0 \Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解，$Ax=\beta$ 唯一解

(2) $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$　(3) $c\neq0$ 时，$R(cA)=R(A)$　(4)若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$

(5)若 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 可逆，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{PA})=R(\boldsymbol{AQ})=R(\boldsymbol{PAQ})$（可逆矩阵不影响矩阵的秩）

(6) $\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\le R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$　　(7) $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$

(8) $R(AB)\le\min\{R(A),R(B)\}$，$R(kA)=\begin{cases}R(A) & 若 k\neq0\\ 0 & 若 k=0\end{cases}$

(9)如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=0$，则：

① $\boldsymbol{B}$ 的列向量全部是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 解（转置运算后的结论）；② $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le\boldsymbol{n}$

⑽若 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，则 $R(\boldsymbol{AB}) \ge R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) - n$；

⑾ 若A可逆,则$R(AB)=R(B)$，若B可逆,则$R(AB)=R(A)$

⑿ $R\begin{bmatrix} A & o \\ o & B \end{bmatrix} = R(A)+R(B)$

六、线性方程组

1.解的性质

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \eta_1,\eta_2\text{是}Ax=0\text{的解},\eta_1+\eta_2\text{也是它的解} \\ (2)\ \eta\text{是}Ax=0\text{的解},\text{对任意}k,k\eta\text{也是它的解} \\ (3)\ \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k\text{是}Ax=0\text{的解},\text{对任意}k\text{个常数} \\ \quad \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k,\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k\text{也是它的解} \end{array}\right\}\text{齐次方程组}$$

(4) γ是$Ax=\beta$的解,η是其对应的其次线性方程组$Ax=0$的解,$\gamma+\eta$是$Ax=\beta$的解

(5) η_1,η_2是$Ax=\beta$的两个解,$\eta_1-\eta_2$是其对应的其次线性方程组$Ax=0$的解

(6) η_2是$Ax=\beta$的解,则η_1也是它的解$\Leftrightarrow \eta_1-\eta_2$是其对应的其次线性方程组$Ax=0$的解

(7) $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$是$Ax=\beta$的解,则 $\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k$也是$Ax=\beta$的解$\Leftrightarrow \lambda_1+\lambda_2+\lambda_k=1$

$\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k$是$Ax=0$的解$\Leftrightarrow \lambda_1+\lambda_2+\lambda_k=0$

2. 解的情况判别

方程：$Ax=\beta$，即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$，

$\boxed{\text{有解}} \Leftrightarrow \beta \to \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \Leftrightarrow R(A\vdots\beta)=R(A) \Leftrightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$\boxed{\text{无解}} \Leftrightarrow R(A\vdots\beta)>R(A)$ $\boxed{\text{唯一解}} \Leftrightarrow R(A\vdots\beta)=R(A)=n$ $\boxed{\text{无穷多解}} \Leftrightarrow R(A\vdots\beta)=R(A)<n$

3. 对于方程个数 m 有 $R(A\vdots\beta)\le m, R(A)\le m$，

①当$R(A)=m$时，$R(A\vdots\beta)=m$，方程组一定有解 ②当$m<n$时，$R(A)<n$，方程组不会是唯一解

4. 对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax=0}$，只有零解$\Leftrightarrow R(A)=n$（即 A 列满秩） 有非零解$\Leftrightarrow R(A)<n$

5. 矩阵方程的解法($|A|\ne 0$)：设法化成(I)$AX=B$ 或 (II)$XA=B$，

(I)的解法：构造$(A\vdots B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\vdots X)$

(II)的解法：将等式两边转置化为$A^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}$，用(I)的方法求出$X^{\mathrm{T}}$，再转置得$X$

七、特征值、特征向量 λ 是 A 的特征值$\Leftrightarrow \lambda$ 是 A 的特征多项式$|xE-A|$的根.

1.两种特殊情形：

（1） A 是上（下）三角矩阵，对角矩阵时，特征值即对角线上的元素.

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad |xE-A|=\begin{vmatrix} x-\lambda_1 & -* & -* \\ 0 & x-\lambda_2 & -* \\ 0 & 0 & x-\lambda_3 \end{vmatrix}=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$$

（2） $R(A)=1$时：A 的特征值为 $0,0,\cdots,0,\mathrm{tr}(A)$

2.特征值的性质

⑴命题：n 阶矩阵 A 的特征值 λ 的重数 $\ge n-r(\lambda E-A)$

⑵命题：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 ① $\boxed{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|}$ ② $\boxed{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=tr(A)}$

⑶命题：设 η 是 A 的特征向量，特征值为 λ，即 $A\eta=\lambda\eta$，则

①对于 A 的每个多项式 $f(A)$，$f(A)\eta=f(x)\eta$ ②当 A 可逆时，$A^{-1}\eta=\dfrac{1}{\lambda}\eta$，$A^*\eta=\dfrac{|A|}{\lambda}\eta$

⑷命题：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$f(x)$ 是多项式则

① $f(A)$的特征值为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$ ② A^T 的特征值也是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

③ A 可逆时，A^{-1} 的特征值为 $\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}$ A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_1},\dfrac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{|A|}{\lambda_n}$

⑸ λ是A的特征值,则：$\begin{cases} kA & & k\lambda \\ aA+bE & & a\lambda+b \\ A^{-1} & \text{分别有} & \frac{1}{\lambda} \\ A^2 & \text{特征值} & \lambda^2 \\ A^m & & \lambda^m \\ A^* & & \frac{|A|}{\lambda} \end{cases}$ ⑹ x是A关于λ的特征向量,则x也是 $\begin{cases} kA & & k\lambda \\ aA+bE & & a\lambda+b \\ A^{-1} & \text{关于} & \frac{1}{\lambda} \\ A^2 & & \lambda^2 \\ A^m & & \lambda^m \\ A^* & & \frac{|A|}{\lambda} \end{cases}$ 的特征向量.

3.计算特征值和特征向量的一般公式

⑴①λ是 A 的特征值$\Leftrightarrow (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\eta=0$，即$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})$不可逆.

②η是属于λ的特征向量$\Leftrightarrow\eta$是齐次方程组$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的非零解

规定 A 的特征多项式为$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$，则 A 的特征值就是它的特征多项式的根.

4.计算特征值和特征向量的具体步骤为：

①计算 A 的特征多项式.

②求出它的根，即 A 的特征值.

③然后对每个特征值λ_i，求齐次方程组$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的非零解，即属于$\lambda$的特征向量.

说明 (1) n 阶矩阵的特征多项式是一个 n 次多项式,一般来说求它的根是困难的,因此上述计算步骤②并不总是可行的,只能用在少数特殊矩阵上.例如用于对角矩阵和三角矩阵,得出它们的特征值就是对角线上的元素.

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}，\text{则}|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-\lambda_1 & -* & -* \\ 0 & \lambda-\lambda_2 & -* \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda_3\end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3),$$

⑵n 阶矩阵 A 的特征值共有 n 个(其中有的相同，有的是虚数) 规定特征值λ的**重数**：

即λ作为特征多项式的根的重数. A 的全体不同特征值的重数和等于 n.

⑶λ不是 A 的特征值$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|\neq 0\Leftrightarrow \boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$ 可逆. 0不是 A 的特征值$\Leftrightarrow A$ 可逆.

5. 特征值的计算

设 A 是 n 阶矩阵,记 A 的全体特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.则

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$

①令$\lambda=0$,左$=|-A|=(-1)^n|A|$,右$=(-1)^n|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n|$. ②比较两边$\lambda^{n-1}$的系数.

命题 2 设λ是 n 阶矩阵 A 的特征值，则它的重数$\geq n-R(A-\lambda E)$.

应用：如果 n 阶矩阵 A 的秩 $R(A)=1$, (n>1)则 0 是 A 的特征值，并且重数$\geq n-R(A)=n-1$.于是 A 的特征值为 $0,0,\cdots,0,\mathrm{tr}(A)$.

6.特征值的应用

①求行列式$|A|=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

②判别可逆性 λ是A的特征值$\Leftrightarrow|\lambda E-A|=0\Leftrightarrow A-\lambda E$不可逆

$A-\lambda E$可逆$\Leftrightarrow\lambda$不是A的特征值 当$f(A)=0$时，如果$f(c)\neq 0$，则$A-cE$可逆

若λ是A的特征值，则$f(\lambda)$是$f(A)$的特征值$\Rightarrow f(\lambda)=0$

$f(c)\neq 0\Rightarrow c$不是A的特征值$\Leftrightarrow AcE$可逆.

八、n阶矩阵的相似关系

当$AU=UA$时，$B=A$，而$AU\neq UA$时，$B\neq A$.

1.相似关系有 i）对称性：$A\sim B\Leftrightarrow B\sim A$ ii）有传递性：$A\sim B$，$B\sim C$，则$A\sim C$

命题　当 $A \sim B$ 时，A 和 B 有许多相同的性质

① $|A|=|\ \ |$　② $R(A)=R(B)$　③ A，B 的特征多项式相同；从而特征值完全一致

A 与 B 的特征向量的关系：η 是 A 的属于 λ 的特征向量 $\Leftrightarrow U^{-1}\eta$ 是 B 的属于 λ ：

九、*n* 阶矩阵的对角化问题

1.如果一个 n 阶矩阵相似与一个对角矩阵,就说它可以**对角化**.并不是每个矩阵都可以对角化的.

2.(1)判别法则 1　n 阶矩阵 A 可对角化⇔A 有 n 个线性无关的特征向量.

实现方法 1　以 A 的 n 个线性无关的特征向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为列向量,构造矩阵 $P=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 则 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

(2)判别法则 2　A 可对角化⇔对于 A 的每个特征值 λ_i,其重数 $k_i=n-r(A-\lambda_i E)$.

实现方法 2　对 A 的每个特征值 λ_i,求 $(A-\lambda_i E)X=0$ 的基础解系,合在一起,就是 A 的 n 个线性无关的特征向量. 用它们构造矩阵 P.　注意:当 $k_i=1$ 时, $k_i=n-r(A-\lambda_i E)$ 一定成立!

(3)推论　如果 A 的特征值两两不相同,则 A 可以对角化.

3.内积，正交矩阵和实对称矩阵的对角化

(1)内积的性质：①**正定性**：$(\alpha,\alpha)\ge 0$,并且 $(\alpha,\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$.$(\alpha,\alpha)=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$.

②**对称性**：$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$. ③**线性性质**：$(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)$；$(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)$.

$(c\alpha,\beta)=c(\alpha,\beta)=(\alpha,c\beta)$.(c为任意实数)

(2)正交矩阵

①n 阶矩阵 A 称为**正交矩阵**,如果它是实矩阵,并且 $AA^{\mathrm{T}}=E$　(即 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$).

②Q 是正交矩阵⇔Q 的列向量组是单位正交向量组 ⇔Q 的行向量组是单位正交向量组.

③正交矩阵的性质：（i） $A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$；　（ii）$AA^T=A^TA=E$；

（iii）A 是正交阵, 则 A^T （或 A^{-1} ）也是正交阵；

（iv）两个正交阵之积仍是正交阵；（v）正交阵的行列式等于 1 或-1.

(3)施密特正交化

这是把线性无关向量组改造为单位正交向量组的方法.

以 3 个线性无关向量 α_1，α_2，α_3 为例.

(i)令 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$,$\beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$.

此时 β_1，β_2，β_3 是和 α_1，α_2，α_3 等价的正交非零向量组.

(ii) 单位化：**作** $\eta_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$,$\eta_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$,$\eta_3=\dfrac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$,**则** η_1，η_2，η_3 **是和** α_1，α_2，α_3 **等价的单位正交向量组.**

(4) 实对称矩阵的对角化

如果 A 是实对称矩阵, A 的特征值和特征向量有以下特点:

①特征值都是实数.

②对每个特征值λ,其重数=n-r(A-λE).即实对称矩阵可对角化,

③属于不同特征值的特征向量互相正交.

可以用正交矩阵将实对称矩阵 A 对角化,构造正交矩阵 Q(使得 $Q^{-1}AQ$ 是对角矩阵)的步骤:

①求出 A 的特征值;

②对每个特征λ,求 $(A-\lambda E)X=0$ 的单位正交基础解系,合在一起得到 A 的 n 个单位正交的特征向量;

③用它们为列向量构造正交矩阵 Q.

十、正定二次型与正定矩阵性质与判别

1.可逆线性变换替换保持正定性，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 变为 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则它们同时正定或同时不正定.

2. $A\simeq B$，则 A，B 同时正定，同时不正定.

3.实对称矩阵 A 正定

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数为 n；$\Leftrightarrow$ A 的特征值全大于 0；$\Leftrightarrow$ A 的所有顺序主子式全大于 0；

$\Leftrightarrow$ A 合同于 E，即存在可逆矩阵 Q 使 $Q^TAQ=E$

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P，使 $A=P^TP$（从而 $|A|>0$）；

$\Leftrightarrow$ 存在正交矩阵，使 $C^{\mathrm{T}}AC=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$（$\lambda_i$ 大于 0）.

$\Rightarrow$ 成为正定矩阵的必要条件：$a_{ii}>0$；$|A|>0$.

4.判断 A 正定的三种方法：

①顺序主子式法。 ②特征值法。 ③定义法。

5. 用正交变换法化二次型为标准形:

① 求出 A 的特征值、特征向量；

② 对 n 个特征向量单位化、正交化；

③ 构造 C（正交矩阵），$C^{-1}AC=\Lambda$；

④ 作变换 $X=CY$，新的二次型为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_1^n d_i{y_i}^2$，$\Lambda$ 的主对角上的元素 d_i 即为 A