МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №1
по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»
Тема: Поиск с возвратом

Студент гр. 3343	____________________	Атоян М.А.
Преподаватель	____________________	Жангиров Т.Р.

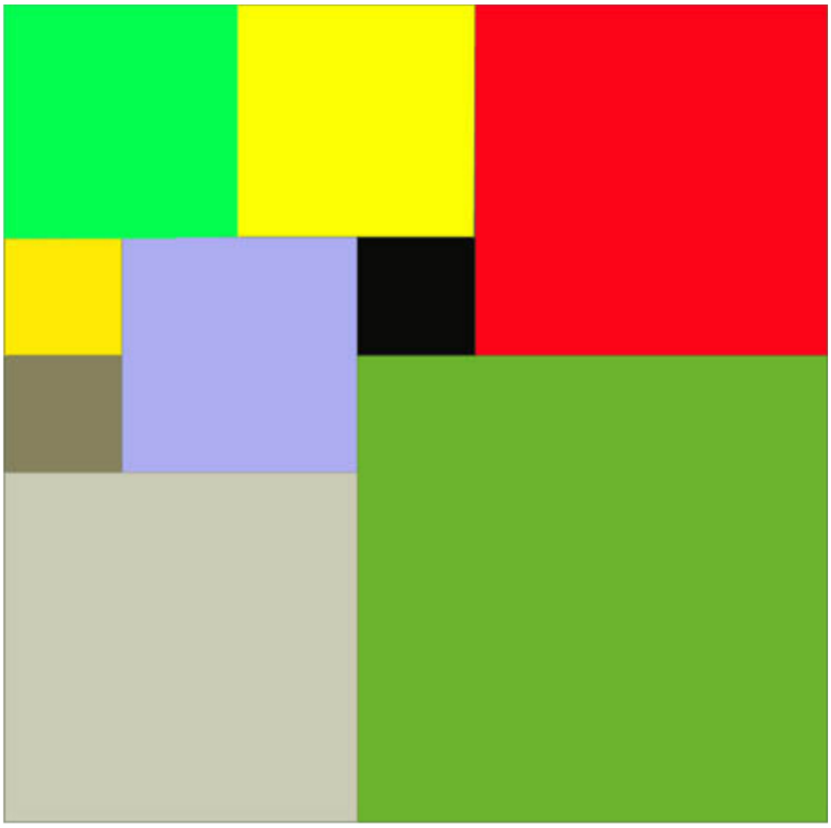
Санкт-Петербург
2025

Цель работы.

Решение классической задачи квадрирования квадрата (с заданными относительно размера ограничениями) посредством программы, основанной на алгоритме поиска с возвратом (англ. backtracking).

Задание.

У Вовы много квадратных обрезков доски. Их стороны (размер) изменяются от 1 до $N-1$, и у него есть неограниченное число обрезков любого размера. Но ему очень хочется получить большую столешницу - квадрат раз- мера N. Он может получить ее, собрав из уже имеющихся обрезков(квадра- тов). Например, столешница размера 7×7 может быть построена из 9 обрезков.



Внутри столешницы не должно быть пустот, обрезки не должны выходить за пределы столешницы и не должны перекрываться. Кроме того, Вова хочет использовать минимально возможное число обрезков.

Входные данные

Размер столешницы - одно целое число N ($2 \le N \le 40$).

Выходные данные

Одно число K, задающее минимальное количество обрезков(квадратов), из которых можно построить столешницу(квадрат) заданного размера N. Далее должны идти K строк, каждая из которых должна содержать три целых числа x, y и w..., задающие координаты левого верхнего угла ($1 \le x, y \le N$) и длину стороны соответствующего обрезка(квадрата).

Пример входных данных

7

Соответствующие выходные данные

9

1 1 2

1 3 2

3 1 1

4 1 1

3 2 2

5 1 3

4 4 4

1 5 3

3 4 1

Вариант 2р. Рекурсивный бэктрекинг. Исследование времени выполнения от размера квадрата

Описание функций и структур данных.

type Square struct – структура, задающая квадрат. Полями являются целочисленные значения. Поля структуры:

- *X, Y* – координаты левого верхнего угла квадрата.
- *Size* – длина стороны квадрата.

type Result struct - структура для хранения результата. Поля структуры:

- *Count* – количество квадратов в итоговом разбиении.
- *Squares* – массив квадратов, представляющих итоговое разбиение.

type Table struct - основная структура, представляющая таблицу и состояние решения. Поля структуры:

- *N* – размер исходного квадрата (таблицы), который нужно покрыть меньшими квадратами.
- *matrix* – двумерный массив (матрица), представляющий карту размещения квадратов. Каждая ячейка содержит размер квадрата, который её занимает, или 0, если ячейка свободна.
- *current* – массив квадратов, представляющий текущее промежуточное разбиение.
- *result* – массив квадратов, представляющий лучшее найденное разбиение.
- *bestCount* – минимальное количество квадратов в лучшем разбиении.
- *currentCount* – количество квадратов в текущем промежуточном разбиении.
- *maxSquareSize* – максимальный размер квадрата, который можно разместить на текущем этапе.

Методы структуры Table:

1. *New(n int) *Table:* Создает и возвращает новый объект Table для квадрата размера n x n. Инициализирует матрицу и устанавливает начальные значения для переменных.
2. *Place(x, y, size int) error:* Пытается разместить квадрат размером size с координатами (x, y) на таблице. Проверяет, что квадрат не выходит за

границы таблицы и не пересекается с другими квадратами. Если размещение возможно, заполняет соответствующие ячейки матрицы значением size. В случае ошибки возвращает сообщение.

3. *FindEmptyX(y int) int:* Ищет первую свободную ячейку в строке y. Возвращает координату x первой свободной ячейки или -1, если строка полностью заполнена.
4. *RemoveSquare(x, y, size int):* Удаляет квадрат размером size с координатами (x, y) из таблицы, освобождая соответствующие ячейки матрицы.
5. *Backtrack(y int):* Рекурсивная функция, реализующая алгоритм поиска с возвратом (backtracking). Начиная с строки y, пытается разместить квадраты, перебирая возможные размеры. Если текущее количество квадратов превышает лучшее найденное решение, прекращает дальнейший поиск. При успешном размещении всех квадратов обновляет лучшее решение.
6. *Optimize() error:* Пытается оптимизировать решение для таблиц с четным размером или с N = 2**r-1. Если N четное, таблица делится на 4 квадрата размером N/2 x N/2. Если N = 2**r-1 и притом простое, установлена закономеронсть, в оптимальном разбиении присутствуют: один квадрат длины 2**(r-1), два квадрата длины 2**r-1, три квадрата длины 2**(r-2), три квадрата длины 2**(r-3), и т.д. по тройкам квадратов. В заданных по условию границах n, оптимизация актуальна для n = 7. В таких случаях можем так же сразу получить ответ.
7. *Solve() Result:* Основная функция, которая запускает процесс решения задачи. Если оптимизация невозможна, использует backtracking для поиска минимального количества квадратов. Возвращает результат в виде структуры Result.

Оптимизации:

1. При четности длины стороны квадрата – оптимальным решением представляется разбиение на 4 равных квадрата. Разбиение всегда допустимо за счет наличия двойки среди делителей числа (площадь квадрата предполагает ее возведение в степень 2 и соответственно делимость на 4). В таком случае, сразу получаем ответ.
2. При простом n установлены расположение и размер трех входящих в оптимальное решение квадратов: Один длиной (n+1)/2 и два (n+1)/2-1. Соответствующая тройка сразу включается в оптимальное разбиение.
3. Если N = 2**r-1 и притом простое, установлена закономеронсть, в оптимальном разбиении присутствуют: один квадрат длины 2**(r-1), два квадрата длины 2**r-1, три квадрата длины 2**(r-2), три квадрата длины 2**(r-3), и т.д. по тройкам квадратов. В заданных по условию границах n, оптимизация актуальна для n = 7.
4. Если количество квадратов на текущем шаге больше или равно *t.bestCount*, то мы принудительно выходим из этой ветки рекурсии. В таком случае, мы избегаем излишних итераций по квадрату, если заведомо известно, что результат будет хуже имеющегося.

Описание программы.

Происходит считывание числа n – длины квадрата. Далее вызывается вышеописанная функция *Solve()*, проверяющая условия оптимизаций. *Solve()* влечет за собой вызов функции *Backtrack (y int)*.

Backtrack (y int) – рекурсивная функция поиска с возвратом (backtracking). Она принимает на вход номер строки y, с которой начинается поиск места для размещения квадрата. Основная цель функции – найти оптимальное разбиение таблицы на квадраты.

Шаги работы функции:

1. **Проверка завершения:**
   - Если текущая строка y превышает размер таблицы (y >= t.N), это означает, что все строки успешно заполнены. В этом случае:
     - Проверяется, является ли текущее количество квадратов *t.currentCount* меньше лучшего найденного решения *t.bestCount*.
     - Если да, то текущее решение сохраняется как лучшее:

       t.bestCount = t.currentCount

       t.result = make([]Square, t.bestCount)

       copy(t.result, t.current)
     - Функция завершает выполнение для данной ветви рекурсии.
2. **Поиск свободной ячейки:**
   - С помощью функции *FindEmptyX(y int)* находится первая свободная ячейка в строке y. Если строка полностью заполнена (x == -1), функция переходит к следующей строке, вызывая *Backtrack(y + 1)*.
3. **Проверка целесообразности продолжения:**
   - Если текущее количество квадратов *t.currentCount* уже превышает лучшее найденное решение *t.bestCount*, дальнейший поиск

прекращается. Это позволяет отсечь заведомо неоптимальные ветви.

4. **Определение максимального размера квадрата:**
   - Вычисляется максимальный размер квадрата, который можно разместить в текущей ячейке. Этот размер ограничен:
     - Размером таблицы *t.N - x* и *t.N - y*.
     - Максимальным допустимым размером квадрата *t.maxSquareSize*.
   - Переменная *size* принимает значение максимального допустимого размера.
5. **Перебор возможных размеров квадратов:**
   - В цикле перебираются все возможные размеры квадратов от size до 1:

for size := maxSize; size >= 1; size-- {

   - Для каждого размера:
     - Пытаемся разместить квадрат с помощью функции *Place(x, y, size int).* Если размещение успешно:
       - Квадрат добавляется в текущее решение *t.current*.
       - Увеличивается счетчик квадратов *t.currentCount*.
       - Вызывается *Backtrack(y)* для продолжения поиска в текущей строке.
     - Если размещение невозможно, переходим к следующему размеру.
6. **Возврат (Backtracking):**
   - После завершения рекурсивного вызова выполняется возврат:
     - Квадрат удаляется из текущего решения с помощью функции *RemoveSquare(x, y, size int)*.
     - Счетчик квадратов *t.currentCount* уменьшается .
     - Квадрат удаляется из массива текущих решений *t.current* =

t.current[:len(t.current)-1].

7. **Обновление максимального размера квадрата:**
    - Если произошел возврат до начального состояния (например, все квадраты удалены), максимальный размер квадрата снова устанавливается равным *t.N - 1*.

Сложность алгоритма по памяти составляет O(n^2)+O(log(n)) – затраты на матрицу-карту, хранящую решения и хранящие промежуточный и конечный ответ структуры.

Сложность алгоритма по операциям зависит от входных данных и варьируется от O(1) в случае четных чисел, O(log(N)) для N, которые можно представить как 2**r-1, до экспоненциальной сложности вхудшем случае, так как количество операций становится гораздо больше.

Исследование.

С помощью функции *BenchmarkSolve(b *testing.B)* замерено время выполнения программы для каждого размера ребра квадрата в диапазоне от 2 до 20.

Благодаря оптимизациям алгоритм крайне эффективно справляется с чётными числами и числом 7 = 2**3-1. В остальных случаях наблюдается повышенное время исполнения, так как приходится делать полный перебор по площади квадрата.

Тестирование.

Входные данные	Выходные данные	Комментарий
7	9 1 1 4 1 5 3 5 1 3 6 4 2 4 6 2 6 6 2 5 4 1 4 5 1 5 5 1	Оптимизация 3) Результат верный
15	12 1 1 8 1 9 7 9 1 7 12 8 4 8 12 4 12 12 4 10 8 2 8 10 2 10 10 2 9 8 1 8 9 1 9 9 1	Оптимизация 4) Результат верный
16	4 1 1 8 1 9 8 9 1 8 9 9 8	Оптимизация 1) Результат верный
19	13 1 1 10 1 11 9 11 1 9 11 10 3 14 10 6	Оптимизация 2) Результат верный

	10 11 1 10 12 1 10 13 4 14 16 1 15 16 1 16 16 4 10 17 3 13 17 3	

Выводы.

В соответствии с заданным условиям была написана программа, осуществляющая покрытие квадрата меньшими квадратами посредством поиска с возвратом. В ходе изучения поставленной задачи были выявлены и применены оптимизации, обеспечивающие значительное сокращение перебираемых решений.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

Файл main.go

```
package main

import (
	"fmt"
)

func main() {
	var n int
	fmt.Scan(&n)

	if n < 2 || n > 40 {
		panic("Invalid size")
	}

	t := New(n)
	r := t.Solve()

	fmt.Print(r)
}
```

Файл main_test.go

```
package main

import (
	"fmt"
	"testing"
)

func BenchmarkSolve(b *testing.B) {
	testCases := []struct {
		size int
	}{
		{2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}, {10},
		{11}, {12}, {13}, {14}, {15}, {16}, {17}, {18}, {19}, {20},
	}

	for _, tc := range testCases {
		b.Run(fmt.Sprintf("Size:%d", tc.size), func(b *testing.B) {
			b.StopTimer()
			t := New(tc.size)
			b.StartTimer()
```

```
				t.Solve()
			})
		}
	}
```

Файл table.go

```
package main

import (
	"fmt"
	"math"
	"time"
)

type Square struct {
	X, Y, Size int
}

type Table struct {
	N            int
	matrix       [][]int
	current      []Square
	result       []Square
	bestCount    int
	currentCount int
	maxSquareSize int
}

type Result struct {
	Count     int
	Squares   []Square
	TimeTaken time.Time
}

func (r Result) String() string {
	res := fmt.Sprintf("%d\n", r.Count)

	for _, sq := range r.Squares {
		res += fmt.Sprintf("%d %d %d\n", sq.X+1, sq.Y+1, sq.Size)
	}

	return res
}

func New(n int) *Table {
	t := &Table{
		N:             n,
		bestCount:     math.MaxInt32,
		maxSquareSize: n - 1,
	}
	t.matrix = make([][]int, n)
	for i := range t.matrix {
		t.matrix[i] = make([]int, n)
	}
	return t
```

```
}

func (t *Table) Place(x, y, size int) error {
	if x+size > t.N || y+size > t.N {
		return fmt.Errorf("Out of bounds placement")
	}

	for i := y; i < y+size; i++ {
		for j := x; j < x+size; j++ {
			if t.matrix[i][j] != 0 {
				return fmt.Errorf("Could not place square at
coordinates: x:%v y:%v", x, y)
			}
		}
	}

	for i := y; i < y+size; i++ {
		for j := x; j < x+size; j++ {
			t.matrix[i][j] = size
		}
	}
	return nil
}

func (t *Table) FindEmptyX(y int) int {
	for x := 0; x < t.N; x++ {
		if t.matrix[y][x] == 0 {
			return x
		}
	}
	return -1
}

func (t *Table) RemoveSquare(x, y, size int) {
	for i := y; i < y+size; i++ {
		for j := x; j < x+size; j++ {
			t.matrix[i][j] = 0
		}
	}
}

func (t *Table) Backtrack(y int) {
	if y >= t.N {
		if t.currentCount < t.bestCount {
			t.bestCount = t.currentCount
			t.result = make([]Square, t.bestCount)
			copy(t.result, t.current)
		}
		return
	}

	x := t.FindEmptyX(y)
	if x == -1 {
		t.Backtrack(y + 1)
		return
	}
```

```
		if t.currentCount >= t.bestCount {
			return
		}

		maxSize := min(t.maxSquareSize, t.N-x, t.N-y)
		for size := maxSize; size >= 1; size-- {
			if err := t.Place(x, y, size); err == nil {
				t.current = append(t.current, Square{x, y, size})
				t.currentCount++

				t.Backtrack(y)

				t.RemoveSquare(x, y, size)
				t.current = t.current[:len(t.current)-1]
				t.currentCount--
			}
		}
}

func (t *Table) Optimize() error {
    if t.N%2 == 0 {
        t.result = []Square{
            {0, 0, t.N / 2},
            {t.N / 2, 0, t.N / 2},
            {0, t.N / 2, t.N / 2},
            {t.N / 2, t.N / 2, t.N / 2},
        }
        t.bestCount = 4
        return nil
    }

    if isPowerOfTwoMinusOne(t.N) {
        base := (t.N + 1) / 2

        t.result = []Square{
            {0, 0, base},
            {0, base, base - 1},
            {base, 0, base - 1},
        }
        t.bestCount = 3

        squareSize := base / 2
           indentation := squareSize
        for squareSize > 0 {
            t.result = append(t.result,
                        Square{t.N - indentation, t.N - squareSize -
indentation, squareSize},
                  Square{t.N - squareSize - indentation, t.N -
indentation, squareSize},
                  Square{t.N - indentation, t.N - indentation,
squareSize},
            )
            t.bestCount += 3
            squareSize /= 2
                indentation += squareSize
```

```
        }

        return nil
    }

    return fmt.Errorf("Could not optimize calculations")
}

func (t *Table) Solve() Result {
	if err := t.Optimize(); err == nil {
		result := Result{
			Count:   t.bestCount,
			Squares: t.result,
		}

		return result
	}

	if isPrime(t.N) {
		base := (t.N + 1) / 2
		t.Place(0, 0, base)
		t.Place(0, base, base-1)
		t.Place(base, 0, base-1)
		t.current = []Square{
			{0, 0, base},
			{0, base, base - 1},
			{base, 0, base - 1},
		}
		t.currentCount = 3
		t.maxSquareSize = base - 1
	}

	t.Backtrack(0)

	result := Result{
		Count:   t.bestCount,
		Squares: t.result,
	}

	return result
}
```

Файл utils.go

```
package main

func isPrime(n int) bool {
   if n <= 1 {
      return false
   }
   for i := 2; i*i <= n; i++ {
      if n%i == 0 {
         return false
      }
   }
```

```
   return true
}

func min(values ...int) int {
   m := values[0]
   for _, v := range values[1:] {
      if v < m {
         m = v
      }
   }
   return m
}

func isPowerOfTwoMinusOne(n int) bool {
   return (n+1)&n == 0
}

func getExponent(n int) int {
   r := 0
   for n > 1 {
      n >>= 1
      r++
   }
   return r
}
```