

問 10 確率変数 X_1, \dots, X_n が互いに独立にそれぞれ平均 μ , 分散 $\sigma^2 (> 0)$ の正規分布に従うとする。標本平均を $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 不偏分散を $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

とおく。

(1) $\sigma^2 = 1$ のとき, 確率 $P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.5) \geq 0.95$ を満たす最小の標本サイズ n はいくらか。次の ① ~ ⑤ のうちから適切なものを一つ選べ。 20

- ① 4 ② 7 ③ 11 ④ 16 ⑤ 22

(2) $n = 20$ のとき, $\bar{X} = 10.50$, $S^2 = 5.41$ を得たとする。そのとき, μ の 95% 信頼区間として, 次の ① ~ ⑤ のうちから適切なものを一つ選べ。 21

- ① $10.50 \pm \frac{2.093 \times \sqrt{5.41}}{\sqrt{20}}$ ② $10.50 \pm \frac{2.093 \times \sqrt{5.41}}{\sqrt{19}}$
 ③ $10.50 \pm \frac{2.086 \times \sqrt{5.41}}{\sqrt{20}}$ ④ $10.50 \pm \frac{2.086 \times \sqrt{5.41}}{\sqrt{19}}$
 ⑤ $10.50 \pm 2.086 \times \sqrt{5.41}$

[1] 95%の信頼区間での
 サンプルの平均値の標準偏差(標準誤差)は

$$1.96 \cdot \sigma / \text{Sq}(n) \leq 0.5$$

$$1.96 / \text{Sq}(n) \leq 0.5 \quad (\sigma=1)$$

$$n \geq (1.96/0.5)^2 = 15.36$$

答え: 16(4番)

<https://toukeigaku-jouhou.info/2018/01/23/how-to-calculate-samplesize/>

<https://www.stat.go.jp/koukou/trivia/careers/career8.html>

[2] μ の95%の信頼区間

母平均の信頼区間(母分散既知)

$$\bar{x} - 1.96 \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1.96 \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

<https://bellcurve.jp/statistics/course/8888.html>

母平均の信頼区間(母分散未知)

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \times \sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \times \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

<https://bellcurve.jp/statistics/course/8972.html>

t分布表より

$$t_{\alpha/2}(n-1) \rightarrow t_{\alpha/2}(19) = 2.093$$

<https://bellcurve.jp/statistics/course/8970.html>

答え: 1番

正規分布表

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0	0.004	0.008	0.012	0.016	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.091	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.148	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.17	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.195	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.219	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.258	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.291	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.334	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.377	0.379	0.381	0.383
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.398	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.437	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.475	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.483	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.485	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.489
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.492	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.494	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.496	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.497	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.498	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.499	0.499

t分布表(危険率 α 、両側)

自由度 f	0.1	0.05	0.02	0.01	自由度 f	0.1	0.05	0.02	0.01
1	6.314	12.706	31.821	63.657	52	1.657	2.007	2.400	2.674
2	2.920	4.303	6.965	9.925	54	1.674	2.005	2.397	2.670
3	2.353	3.182	4.541	5.841	56	1.673	2.003	2.395	2.667
4	2.132	2.776	3.747	4.604	58	1.672	2.002	2.392	2.663
5	2.015	2.571	3.365	4.032	60	1.671	2.000	2.390	2.660
6	1.943	2.447	3.143	3.707	62	1.670	1.999	2.388	2.657
7	1.895	2.365	2.998	3.499	64	1.689	1.998	2.386	2.655
8	1.860	2.306	2.896	3.355	66	1.668	1.997	2.384	2.652
9	1.833	2.262	2.821	3.250	68	1.668	1.995	2.382	2.650
10	1.812	2.228	2.764	3.169	70	1.667	1.994	2.381	2.648
11	1.796	2.201	2.718	3.106	72	1.666	1.993	2.379	2.646
12	1.782	2.179	2.681	3.055	74	1.666	1.993	2.378	2.644
13	1.771	2.160	2.650	3.012	75	1.665	1.992	2.376	2.642
14	1.761	2.145	2.624	2.977	78	1.665	1.991	2.375	2.640
15	1.753	2.131	2.602	2.947	80	1.664	1.990	2.374	2.639
16	1.746	2.120	2.583	2.921	82	1.664	1.989	2.373	2.637
17	1.740	2.110	2.567	2.898	84	1.663	1.989	2.372	2.636
18	1.734	2.101	2.552	2.878	86	1.663	1.988	2.370	2.634
19	1.729	2.093	2.539	2.851	88	1.662	1.987	2.369	2.633
20	1.725	2.086	2.528	2.845	90	1.662	1.987	2.368	2.632
21	1.721	2.080	2.518	2.831	92	1.662	1.986	2.368	2.630
22	1.717	2.074	2.508	2.819	94	1.681	1.986	2.367	2.629
23	1.714	2.069	2.500	2.807	96	1.661	1.985	2.366	2.628
24	1.711	2.064	2.492	2.797	98	1.661	1.984	2.365	2.627
25	1.708	2.060	2.485	2.787	100	1.660	1.984	2.364	2.626
26	1.706	2.056	2.479	2.779	105	1.659	1.983	2.362	2.623
27	1.703	2.052	2.473	2.771	110	1.659	1.982	2.361	2.621
28	1.701	2.048	2.467	2.763	115	1.658	1.981	2.359	2.619
29	1.699	2.045	2.462	2.758	120	1.658	1.980	2.358	2.617
30	1.697	2.042	2.457	2.750	125	1.657	1.979	2.357	2.616
31	1.696	2.040	2.453	2.744	130	1.657	1.978	2.355	2.614
32	1.694	2.037	2.449	2.738	135	1.656	1.978	2.354	2.613
33	1.692	2.035	2.445	2.733	140	1.656	1.977	2.353	2.611
34	1.691	2.032	2.441	2.728	145	1.655	1.976	2.352	2.610
35	1.690	2.030	2.438	2.724	150	1.655	1.976	2.351	2.609
36	1.688	2.028	2.434	2.719	160	1.654	1.975	2.350	2.607
37	1.687	2.026	2.431	2.715	170	1.654	1.974	2.348	2.605
38	1.686	2.024	2.429	2.712	180	1.653	1.973	2.347	2.603
39	1.685	2.023	2.425	2.708	190	1.653	1.973	2.346	2.602
40	1.684	2.021	2.423	2.704	200	1.653	1.972	2.345	2.601
41	1.683	2.020	2.421	2.701	250	1.651	1.969	2.341	2.596
42	1.682	2.018	2.418	2.698	300	1.650	1.968	2.339	2.592
43	1.681	2.017	2.416	2.695	350	1.649	1.967	2.337	2.590
44	1.680	2.015	2.414	2.692	400	1.649	1.966	2.336	2.588
45	1.679	2.014	2.412	2.690	450	1.648	1.965	2.335	2.587
46	1.679	2.013	2.410	2.687	500	1.648	1.965	2.334	2.586
47	1.678	2.012	2.408	2.685	600	1.647	1.964	2.333	2.584
48	1.677	2.011	2.407	2.682	700	1.647	1.963	2.332	2.583
49	1.677	2.010	2.405	2.580	800	1.647	1.963	2.331	2.582
50	1.676	2.009	2.403	2.678	900	1.647	1.963	2.330	2.581
1000					1000	1.646	1.962	2.330	2.581
∞					∞	1.645	1.960	2.326	2.576

(ここで, sign は符号関数であり正の数には1, 0 には0, 負の数には-1 を返す関数。)
よって, 正解は ④ である。

問10

- [1] 20 正解 ④

\bar{X} は $N(\mu, 1/n)$ に従うので, 標準化した $(\bar{X} - \mu) / \sqrt{1/n}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従い,

$$P\left(-1.96 \leq \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \leq 1.96\right) \doteq 0.95 \text{ となる。} 1.96\sqrt{\frac{1}{n}} = 0.5 \text{ を } n \text{ について}$$

解くと 15.366。

よって, 正解は ④ である。

- [2] 21 正解 ①

$(\bar{X} - \mu) / \sqrt{S^2/n}$ は自由度 $n - 1$ の t 分布に従う。 t 分布のパーセント点の表から, 自由度 19 の上側 2.5 パーセント点は 2.093 であるので,

$$\begin{aligned} P\left(-2.093 \leq \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \leq 2.093\right) \\ = P\left(\bar{X} - 2.093\sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 2.093\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right) = 0.95 \end{aligned}$$

与えられた値より, $\bar{X} \pm \frac{2.093 \times \sqrt{S^2}}{\sqrt{n}} = 10.50 \pm \frac{2.093 \times \sqrt{5.41}}{\sqrt{20}}$ となる。

よって, 正解は ① である。