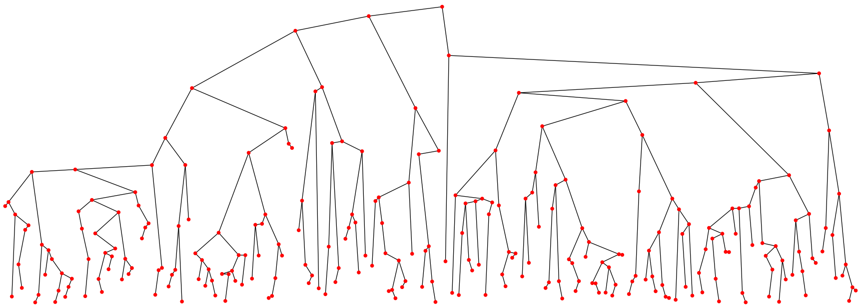


Open Data Structures (in C++) 日本語版

Edition 0.1Gβ

Pat Morin

堀江 慧、陣内 デイビッド 佑、田中 康隆　共訳

目次

この本の読み方（翻訳者まえがき）

実用上極めて重要で息をするように取り出せるようにしておくべきものと、そうではないものとを明確に区別しておくことは有益だと我々は考えた。以下に列挙するデータ構造（とそれらの上に成り立つアルゴリズム）は学術研究やプログラマーの実務で頻繁に登場し、全ての学習者が深く理解しておくことが望ましいと訳者３人の意見が一致した。これらは、この本を教科書として指定した約４ヶ月の講義 [*1] で扱われる事項の部分集合になっている。

- 第１章：（数学的基礎の確認の章のため、該当なし）
- 第２章：ArrayStack, ArrayQueue, ArrayDeque
- 第３章：SLList, DLList
- 第４章：（該当なし）
- 第５章：ChainedHashTable
- 第６章：BinaryTree, BinarySearchTree
- 第７章：（該当なし）
- 第８章：（該当なし）
- 第９章：RedBlackTree（複雑なため、9.2.2 節から 9.2.4 節は飛ばしてよい）
- 第 10 章：BinaryHeap
- 第 11 章：MergeSort, QuickSort
- 第 12 章：幅優先探索, 深さ優先探索

ここに並べなかったややマイナーなデータ構造にも別の点で学ぶ価値がある。それは、新しいデータ構造に用いられるアイデアを知ること、そしてそのデータ構造を解析する道具立てを学ぶことである。マイナーかは必ずしも重

[*1] 2017 年度の東京大学学際科学科総合情報学コースにおける学部生向け講義「情報数理科学２」。正確には、幅優先探索と深さ優先探索については別の授業で扱われる。https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/ ktanaka/mis2-2017/index.html

要ではない。どの章を重点的に読むか、興味に応じて適宜調整して頂ければ幸いである。

翻訳者謝辞

クラウドファンディングに参加して頂いた皆様に感謝を捧げたい。皆様のおかげで本書のソースコードを原著と同様に Creative Commons Attribution ライセンスで公開することが出来た。本書のプロジェクトページ [*2] には他言語版やプロジェクトに関する情報がある。本書のソースコードは Github [*3] にある。

[*2] https://sites.google.com/view/open-data-structures-ja
[*3] https://github.com/spinute/ods

謝辞

次の方々に感謝を捧げたい。夏に多くの章を勤勉に校正してくれた Nima Hoda、この本の初稿を読んで誤字や誤りをたくさん指摘してくれた 2011 年秋の COMP2402/2002 の受講生達、完成に近づいた頃の数稿を根気強く校閲してくれた Athabasca University Press の Morgan Tunzelmann である。

なぜこの本を書いたのか

いろいろなデータ構造の入門書がある。できの良いものもある。ほとんどはタダではないので、コンピュータサイエンスを学ぶ学部生はデータ構造の本にお金を払うだろう。

オンラインで公開されているデータ構造の本もある。名作もあるのだが古くなってきているものが多い。ほとんどは著者や出版社が更新をやめるときに無料になったものである。これらの本は次の理由からふつうは内容を更新できない。（1）著者または出版社が著作権を持っていて、いずれかの許可を得られないため。（2）書籍の**ソースコード**が提供されていないため。つまり、本の Word、WordPerfect、FrameMaker、または LaTeX ソースコードが手に入らない、またはそれを扱えるソフトウェアのバージョンが手に入らないため。

このプロジェクトの目標は、コンピュータサイエンスを専攻する学部生が負担するデータ構造の入門書代をゼロにすることだ。そのため、オープンソースのソフトウェアプロジェクトのようにこの本を作ることにした。この本の LaTeX ソース、C++ ソース、およびビルドスクリプトを、著者の Web サイト [*4] あるいは信頼できるソースコード管理サイト [*5] からダウンロードできる。[*6] である。また、日本語版のソースコードは https://github.com/spinute/ods にある。

ソースコードは Creative Commons Attribution ライセンスで公開されている。つまり誰でも自由にコピー、配布、送信してよい。内容を取り入れて別の何かを作ってもよい。そしてそれを商業的に利用してもよい。唯一の条件は attribution である。つまり派生した作品が opendatastructures.org のコードやテキストを含むことを明記しなければならない。

[*4] http://opendatastructures.org

[*5] https://github.com/patmorin/ods

[*6] 訳注：日本語版の Web サイトは https://sites.google.com/view/open-data-structures-ja

ソースコード管理システム git を使って、誰でも本書の修正案を送れる。本のソースをフォークして別バージョンを作ることもできる。（例えば別のプログラミング言語を使う版を作れる。）こうしたやり方で、私のやる気や興味が衰えた後でもこの本が役立つものであり続けることを望んでいる。

第 1

Introduction

データ構造とアルゴリズムに関する授業は全世界でコンピュータサイエンスの課程に含まれている。データ構造はそれほど重要だ。生活の質を上げるだけでなく、毎日のように人の命さえ救っている。データ構造によって数百万ドル、数十億ドルの規模にまでなった企業も多い。

なぜデータ構造はこんなにも重要なのだろう？考えてみれば私たちは普段からさまざまなデータ構造と接している。

- ファイルを開く：ファイルシステムのデータ構造を使って、ファイルをハードディスクなどの上に配置し、検索できる。ハードディスクには数億ものブロックがあり、ファイルの内容はどのブロックに保存されていてもおかしくないので、これは簡単なことではない。
- 電話番号を検索する：入力の途中で連絡先リストから電話番号を検索するためにデータ構造が使われている。連絡先リストには膨大な情報（過去に電話や電子メールをやり取りした全員）が含まれている可能性があること、電話端末には高速なプロセッサや潤沢なメモリは搭載されていないことを考えると、これは簡単なことではない。
- SNS にログインする：ネットワークサーバーではログイン情報からアカウント情報を検索する。利用者が多い SNS には何億人ものアクティブなユーザーがいるので、これは簡単ではない。
- Web ページを検索する：検索エンジンは検索語から Web ページを見つけるためにデータ構造を使う。インターネットには 85 億以上の Web ページがあり、それぞれのページに検索対象になりうる語句が大量に含まれているので、これは簡単なことではない。
- 緊急通報用番号（9-1-1）に電話する：緊急通報電話では、パトカー、救

急車、消防車を速やかに現場に手配できるよう、電話番号と住所を対応づけるためにデータ構造を使う。電話をかけた人は正確な住所を伝えられないかもしれず、この場面での遅れは生死を分かつこともあるので、これは重要な問題だ。

1.1 効率の必要性

次節では、よく使うデータ構造に対してどんな操作ができるのかを見ていく。ちょっとしたプログラミング経験があれば、正しい結果を返す操作を実装するのは難しくないだろう。データを配列や連結リストに入れ、すべての要素について順番に処理し、必要なら要素を追加したり削除したりするという実装にすればよい。

この実装は簡単だが、効率がよくない。とはいえ、効率について考える価値はあるだろうか？コンピュータはどんどん速くなっている。簡単な実装で十分かもしれない。それを確認するためにざっくりと計算をしてみよう。

操作の数： まあまあの大きさのデータセット、例えば 100 万（10^6）個の要素を持つアプリケーションがあるとする。各要素を少なくとも一回は見たくなるというのは、それなりに妥当な仮定だろう。この場合、少なくとも 100 万（10^6）回、このデータセットから要素を探すことになる。100 万回にわたって 100 万個の要素をすべて確認すると、データを読み出す回数は合計で 1 兆（$10^6 \times 10^6 = 10^{12}$）回になる。

プロセッサの速度： 本書執筆時点では、かなり高速なデスクトップコンピュータでも、毎秒 10 億（10^9）回以上の操作は実行できない[*1]。よって、このアプリケーションの完了には、少なくとも $10^{12}/10^9 = 1000$ 秒、すなわち約 16 分 40 秒かかる。コンピュータにとって 16 分は非常に長い時間だが、人間ならコーヒーブレイクを挟んでそれくらいの時間は待っていられるだろう。

大きなデータセット： Google について考えてみよう。Google では 85 億もの Web ページを対象にした検索を扱っている。先ほどの計算では、このデータに対する問い合わせには少なくとも 8.5 秒かかる。これは私たちが知っている Google とは違う。Google の Web 検索には 8.5 秒もかからないし、

[*1] コンピュータの速度はせいぜい数ギガヘルツ（数十億回/秒）であり、各操作に普通は数サイクルが必要だ。

Google では特定のページがインデックスに含まれているか以上に複雑な問い合わせを実行している。本書執筆時点で、Google は 1 秒間に約 4,500 クエリを受け付ける。つまり、少なくとも $4,500 \times 8.5 = 38,250$ ものサーバーが必要だ。

解決策： 以上の例からは、安直な実装のデータ構造だと、要素数 n とデータ構造に対する操作数 m が共に大きくなったときに性能が追いつかなくなることがわかる。これらの例の実行にかかる時間は、機械命令の数にしておよそ $\mathtt{n} \times m$ だ。

解決策はもちろん、データ構造内のデータを上手に並べ、各操作のたびに全要素を扱わないようにすることだ。一見すると不可能に思えるかもしれないが、要素がどれだけ多くても平均して 2 つの要素だけを参照すれば探していたデータが見つかるというデータ構造をのちに紹介する。毎秒 10 億回の命令を実行できるとして、10 億個の要素、あるいは兆、京、垓におよぶ数の要素が含まれていても、検索にわずか 0.000000002 秒しかかからないのだ。

要素を整列して保持するデータ構造についても紹介する。このデータ構造では、何らかの操作の実行中に参照される要素の数が、データ構造に格納されている要素数に対する関数として見たときに非常にゆっくりとしか増えない。例えば、どんな操作であれ実行中に最大で 60 個のアイテムしか参照しないですむように、このデータ構造を整列された状態に維持できる。毎秒 10 億回の命令を実行できるコンピュータであれば、このデータ構造に対する操作がほんの 0.00000006 秒のうちに実行できることになる。

この章の残りの部分では、この本を通して使う主な概念の一部を簡単に解説する。1.2 節については、この本で説明するデータ構造で実装するインターフェースをすべて説明するので、必ず読んでほしい。残りの節では以下の内容を説明する。

- 指数・対数・階乗関数や漸近（ビッグオー）記法・確率・ランダム化などの数学の復習
- 計算のモデル
- 正しさと実行時間、メモリ使用量
- 残りの章の概要
- サンプルコードと組版の規則

これらの内容については、背景知識がある人もない人も、いったん読み飛ばしてから必要に応じて読み直してもらえばよい。

1.2 インターフェース

データ構造について議論するときは、データ構造のインターフェースとその実装との違いを理解することが重要だ。インターフェースはデータ構造が何をするかを、実装はデータ構造がそれをどのようにやるかを表現する。

インターフェースは、**抽象データ型**とも呼ばれ、あるデータ構造がサポートしている操作一式と、それらの操作の意味（セマンティクス）を定義するものである。インターフェースを見ても、データ構造がサポートしている操作がどう実装されているかはわからない。インターフェースからわかるのは、そのデータ構造がサポートしている操作の一覧と、それらの操作に対する引数および返り値の特徴だけである。

一方、データ構造の**実装**には、データ構造の内部表現と、実際に操作を行うアルゴリズムの定義が含まれる。そのため、ひとつのインターフェースに対して複数の実装がありうる。例えば本書では、2 章では配列を使って List インターフェースを実装し、3 章ではポインタを使って List インターフェースを実装する。どちらも同じ List インターフェースだが、実装の方法が異なるというわけだ。

1.2.1 Queue、Stack、Deque インターフェース

Queue インターフェースは、要素の集まりを表しており、その集まりに対して要素の追加および特定のルールに従った削除ができる。より正確にいうと、Queue インターフェースには次の操作が実行できる。

- add(x)：値 x を Queue に追加する
- remove()：（以前に追加された）「次の値」y を Queue から削除し、y を返す

remove() は引数をとらない。Queue では、さまざまな**取り出し規則**に従って削除する要素が決まる。代表的な取り出し規則としては、FIFO、優先度付き、LIFO、といったものがある。

図 1.1 に FIFO **キュー** を示す。FIFO は first-in-first-out（先入れ先出し）を意味し、追加したのと同じ順番で要素を削除する。これはコンビニのレジに並ぶ列と同じように動作する。最も一般的な Queue なので、FIFO を付けずに単に「キュー」といえば、ふつうはこのデータ構造のことを指す。FIFO キューにおける add(x)、remove() を、それぞれ enqueue(x)、dequeue() と呼

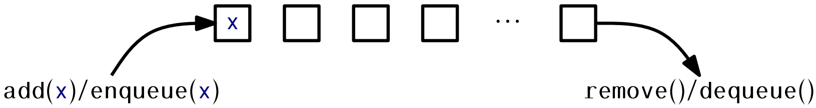


図 1.1: FIFO キュー

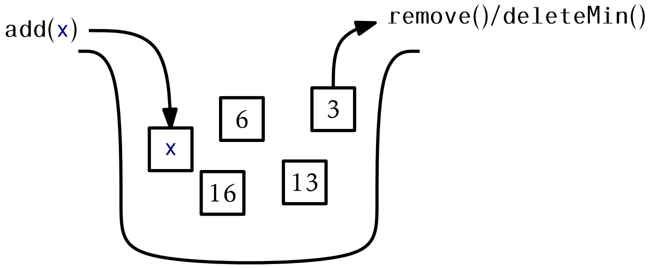


図 1.2: 優先度付きキュー

ぶ流儀の教科書もある。

図 1.2 に**優先度付きキュー**を示す。優先度付きキューでは、Queue から要素を削除するとき、最小のものを削除する。同じ優先度を持つ要素が複数あるときは、そのうちのどれを削除してもよい。優先度付きキューの動作は、病院の救急室で重症患者を優先的に治療する場面に似ている。患者が到着したらまず症状の深刻さを見定め、待合室で待機してもらい、医師の手が空いたら最も重篤な患者から治療するという具合だ。優先度付きキューにおける remove() 操作を deleteMin() 呼ぶ流儀の教科書もある。

キューに対する取り出し規則でもうひとつよく使うのは、図 1.3 に示す LIFO（last-in-first-out、後入れ先出し）だ。この **LIFO キュー**では、最後に追加された要素が次に削除される。LILO キューの動作は、皿を積んだ状態として視覚化できる。積み上げられた皿をひとつずつ取るとき、皿は上から順に持っていく。この構造はとてもよく見かけるので、Stack（スタック）という特別な名前が付いている。Stack と呼ぶ場合は、add(x) と remove() のことを、それぞれ push(x) および pop() と呼ぶ。これにより LIFO と FIFO の取り出し規則を区別できる。

FIFO キューと LIFO キュー（スタック）を一般化した Deque というインターフェースもある。Deque は双方向キューと呼ばれ、先頭と末尾をもった要素の列を表しており、先頭または末尾に要素を追加できる。Deque における操作には、addFirst(x)、removeFirst()、addLast(x)、 removeLast()

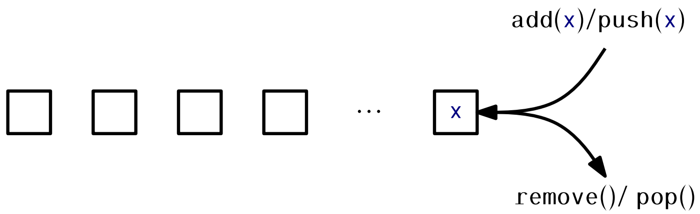


図 1.3: LIFO キュー（スタック）

というわかりやすい名前がついている。addFirst() および removeFirst() だけを使ってスタックを実装できることは覚えておくとよいだろう。一方、addLast(x) および removeFirst() だけを使えば FIFO キューを実装できる。

1.2.2 List インターフェース：線形シーケンス

この本には Queue（FIFO キュー）や Stack（LIFO キュー）、Deque といったインターフェースの話はあまり出てこない。なぜなら、これらのインターフェースは List インターフェースとしてまとめられるからだ。図 1.4 に List インタフェースを示す。List インタフェースは、値の列 $x_0, \ldots, x_{n-1}$ と、その列に対する以下のような操作からなる。

1. size(): リストの長さ n を返す
2. get(i): x_i の値を返す
3. set(i,x): x_i の値を x にする
4. add(i,x): x を i 番め [*2] として追加し、$x_i, \ldots, x_{n-1}$ を後ろにずらす。
   すなわち、$j \in \{i, \ldots, n-1\}$ について $x_{j+1} = x_j$ とし、n をひとつ増やし、$x_i = x$ とする
5. remove(i): x_i を削除し、$x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}$ を前にずらす。
   すなわち、$j \in \{i, \ldots, n-2\}$ について $x_j = x_{j+1}$ とし、n をひとつ減らす

これらの操作を使って Deque インターフェースを実装できる。

$$\texttt{addFirst}(x) \Rightarrow \texttt{add}(0, x)$$
$$\texttt{removeFirst}() \Rightarrow \texttt{remove}(0)$$

[*2] コンピュータサイエンスでは序数を 0 から始めることがある。例えば、ここで配列の i 番目の要素とは、先頭から数えて $i+1$ 個目の要素のことである。

0	1	2	3	4	5	6	7	⋯	$\mathtt{n}-1$
a	b	c	d	e	f	b	k	⋯	c

図 1.4: List は 0,1,2,...,$\mathtt{n}-1$ で添字づけられた列を表現する。この List で get(2) を実行すると値 c が返ってくる。

$$\mathtt{addLast}(\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{add}(\mathtt{size}(),\mathtt{x})$$
$$\mathtt{removeLast}() \Rightarrow \mathtt{remove}(\mathtt{size}()-1)$$

以降の章では、Queue（FIFO キュー)、Stack（LIFO キュー)、Deque の各インターフェースについての話はほぼ出てこない。しかし、Stack と Deque という用語を「List インターフェースを実装したデータ構造」の名前として後の章で使うことがある。その場合は、Stack と Deque という名前で呼ぶデータ構造を使うことで、それぞれ Stack と Deque のインターフェースを非常に効率良く実装できるという事実を強調している。例えば、ArrayDeque は List インターフェースの実装であると同時に Deque の実装でもあり、Deque の操作をいずれも定数時間で実行できる [*3]。

1.2.3 USet インターフェース：順序付けられていない要素の集まり

USet インターフェースは、重複がなく順序付けられていない要素の集まりを表現する（USet の U は unordered の意味)。USet インタフェースは数学における**集合**のようなものだ。USet には、n 個の**互いに相異なる**要素が含まれる。つまり、同じ要素が複数入っていることはない。また、USet では要素の並び順は決まっていない。USet には以下の操作を実行できる。

1. size()：集合の要素数 n を返す
2. add(x)：要素 x が集合に入っていなければ集合に追加する。
   $\mathtt{x} = \mathtt{y}$ を満たす集合の要素 y が存在しないなら、集合に x を加える。x が集合に追加されたら true を返し、そうでなければ false を返す
3. remove(x)：集合から x を削除する。
   $\mathtt{x} = \mathtt{y}$ を満たす集合の要素 y を探し、集合から取り除く。そのような要素が見つかれば y を、見つからなければ null[*4] を返す

[*3] 実行時間についてはこの章の後半で説明する。「定数時間で実行できる」とは、要素がいくつあっても一定の時間で実行できるということであり、非常に効率が良いことを表す。
[*4] 訳注：null とは何もないことを示す記号である。

4. $\mathtt{find}(\mathtt{x})$：集合に $\mathtt{x}$ が入っていればそれを見つける。
   $\mathtt{x} = \mathtt{y}$ を満たす集合の要素 $\mathtt{y}$ を見つける。そのような要素が見つかれば $\mathtt{y}$ を、見つからなければ null を返す

上の定義で、探したい $\mathtt{x}$ と見つかる（かもしれない）要素 $\mathtt{y}$ とをわざわざ区別する必要はないように感じるかもしれない。これらを区別する理由は、別のもの（オブジェクト）である $\mathtt{x}$ と $\mathtt{y}$ とを何らかの基準で等しいと判定したくなる場合があるからだ。そのような判定ができると、キーを値に対応づけるインターフェースである**辞書**（**マップ**）を実装するのに都合がいい。

辞書（マップ）を作るために、まずは Pair という、**キー**と**値**が対になったオブジェクトを作る。2 つの Pair は、キーが等しければ（その値が等しいかどうかに関わらず）等しいとみなす。Pair である $(\mathtt{k},\mathtt{v})$ を USet に入れてから、$\mathtt{x} = (\mathtt{k},\mathtt{null})$ として $\mathtt{find}(\mathtt{x})$ を実行すると、$\mathtt{y} = (\mathtt{k},\mathtt{v})$ が返ってくる。すなわち、キー $\mathtt{k}$ だけから値 $\mathtt{v}$ が手に入る。

1.2.4 SSet インターフェース：ソートされた要素の集まり

SSet インターフェースは順序づけされた要素の集まりを表現する（SSet の S は sorted の意味）。SSet には全順序集合の要素が入る。全順序集合とは、任意の 2 つの要素 $\mathtt{x}$ と $\mathtt{y}$ について大小を比較できるような集合をいう。本書のサンプルコードでは、以下のように定義される $\mathtt{compare}(\mathtt{x},\mathtt{y})$ メソッドで比較を行うものとする。

$$\mathtt{compare}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \begin{cases} < 0 & \text{if } \mathtt{x} < \mathtt{y} \\ > 0 & \text{if } \mathtt{x} > \mathtt{y} \\ = 0 & \text{if } \mathtt{x} = \mathtt{y} \end{cases}$$

SSet は、USet とまったく同じセマンティクスを持つ操作 $\mathtt{size}()$、$\mathtt{add}(\mathtt{x})$、$\mathtt{remove}(\mathtt{x})$ をサポートする。USet と SSet の違いは $\mathtt{find}(\mathtt{x})$ にある。

4. $\mathtt{find}(\mathtt{x})$: 順序づけられた集合から $\mathtt{x}$ の位置を特定する。
   すなわち $\mathtt{y} \geq \mathtt{x}$ を満たす最小の要素 $\mathtt{y}$ を見つける。もしそのような $\mathtt{y}$ が存在すればそれを返し、存在しないなら null を返す

SSet の $\mathtt{find}(\mathtt{x})$ は**後継探索** (XXX:**訳語**) と呼ばれることがある。$\mathtt{x}$ に等しい要素がなくても意味のある結果を返すという点で、USet の $\mathtt{find}(\mathtt{x})$ とは異なる。

USet、SSet における find(x) の区別は、重要だが見落とされることが多い。SSet は、USet より機能が多いが、それだけ実装が複雑で実行時間が長くなりがちだ。例えば、この本で述べる SSet の find(x) の実装は、いずれも集合に含まれる要素数の対数オーダーの時間がかかる。一方、5 章の ChainedHashTable による USet の実装では、find(x) の実行時間の期待値は定数オーダーである。USet にはない SSet の機能が必要でない限り、SSet ではなく USet を使うほうがよいだろう。

1.3 数学的背景

この節では本書で使う数学の記法や基礎知識を復習する。例えば対数やビッグオー記法、確率論などについて説明する。知っておいてほしい項目をまとめるに留め、丁寧な手ほどきはしない。背景知識が足りないと感じた読者はコンピュータサイエンスで使う数学の良い（無料の）教科書を読んでほしい。必要に応じて適切な箇所を読み、練習問題を解いてみるとよいだろう。[50].

1.3.1 指数と対数

b^x と書いて b の x 乗を表す。x が正の整数なら、b にそれ自身を $x-1$ 回掛けた値になる。

$$b^x = \underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{x}$$

x が負の整数なら、$b^x = 1/b^{-x}$ である。$x = 0$ なら、$b^x = 1$ である。b が整数でないときも、指数関数 e^x を使って冪乗を定義できる（e については後述する）。この e^x の定義は、指数級数による。こういう話をもっと知りたい人は微分積分学の教科書を読んでほしい。

この本では、$\log_b k$ と書いて **b を底とする対数**を表す。これは次の式を満たす x として一意に決まる。

$$b^x = k$$

底が 2 の対数を**二進対数**という。この本に出てくる対数のほとんどは二進対数なので、底になにも書かずに $\log k$ とある場合は、$\log_2 k$ の省略記法とする。

対数の大雑把だがわかりやすいイメージを紹介しよう。$\log_b k$ とは、k を何回 b で割ると 1 以下になるかを表す数だと考えればよい。例えば、1 回の比

較で答えの候補を半分に絞り、最終的に答えの候補が 1 つに絞られるまでこれを繰り返すとして、最終的に何回の比較が必要になるかを見積もりたいとする。1 回の比較で候補の数を 2 で割ることになるので、最初に $n+1$ 個の答えの候補があるなら、比較の回数は $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ 以下だ（なお、このような手法を二分探索という）[*5]。

次のように定義される**オイラーの定数** e を底とする対数もよく使う [*6]。そこで、$\log_e k$ のことを $\ln k$ と書き、**自然対数**と呼ぶ。

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828$$

自然対数は、次の一般的な積分の値が e になることから、よく登場する。

$$\int_1^k 1/x \, \mathrm{d}x = \ln k$$

対数に関してよく使う操作は 2 つある。1 つめは冪指数にある対数の除去だ。

$$b^{\log_b k} = k$$

もう 1 つは底の変換操作だ。

$$\log_b k = \frac{\log_a k}{\log_a b}$$

これら 2 つの操作を使うと、例えば自然対数と二進対数とを比較できる。

$$\ln k = \frac{\log k}{\log e} = \frac{\log k}{(\ln e)/(\ln 2)} = (\ln 2)(\log k) \approx 0.693147 \log k$$

1.3.2　階乗

この本には**階乗関数**を使う場面がいくつかある。n が非負整数のとき、n の階乗 $n!$ は次のように定義される。

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$$

$n!$ は、相異なる n 要素の置換の総数である。つまり、n 個の要素を並べ変えたときの順列の総数が階乗になる。なお、$n = 0$ のとき、$0!$ は 1 と定義される。

[*5] 訳注：x を実数とするとき、$\lceil x \rceil$ は x 以上の最小の整数を表す。$\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数である。

[*6] 訳注：日本では e のことをネイピア数ということも多い。

$n!$ の大きさは**スターリングの近似**を使って見積もれる。[*7]

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha(n)}$$

ここで $\alpha(n)$ は次の条件を満たす。

$$\frac{1}{12n+1} < \alpha(n) < \frac{1}{12n}$$

スターリングの近似を使って $\ln(n!)$ の近似値も計算できる。

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \alpha(n)$$

（実際、$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$ を $\int_1^n \ln n \, \mathrm{d}n = n\ln n - n + 1$ で近似するというのが、スターリングの近似の簡単な証明方法でもある。）

階乗関数に関連して、ここで**二項係数**について説明する。n を非負整数、k を $\{0,\ldots,n\}$ の要素とするとき、二項係数 $\binom{n}{k}$ は次のように定義される。

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

二項係数 $\binom{n}{k}$ は、大きさ n の集合における大きさ k の部分集合の個数である。言い換えると、集合 $\{1,\ldots,n\}$ から相異なる k 個の整数を取り出すときの場合の数を表す値と解釈できる。

1.3.3 漸近記法

データ構造を分析するときは、さまざまな操作の実行時間について考察したい。しかし、正確な実行時間はコンピュータによって異なる。同じコンピュータ上でさえ実行のたびに異なるだろう。この本で操作の実行時間といったら、操作に際してコンピュータが実行する命令の数とする。この数を正確に計算するのは、単純なコードであっても困難な場合がある。そのため、正確な実行時間を求めるのではなく、**漸近記法**（**ビッグオー記法**）と呼ばれる方法で実行時間を見積もる。この方法では、ある関数 $f(n)$ について、次のように定義される関数の集合 $O(f(n))$ を考える。

$$O(f(n)) = \left\{ \begin{array}{l} g(n) : \text{ある } c > 0 \text{ と } n_0 \text{ が存在し、} \\ \quad \text{任意の } n \geq n_0 \text{ について } g(n) \leq c \cdot f(n) \text{ を満たす} \end{array} \right\}$$

[*7] 訳注：以下、スターリングの近似に関する議論は、初学者は飛ばしても良いと思われる。

イメージとしては、n が十分に大きいとき（つまりグラフの右のほうを見たとき）に $c \cdot f(n)$ のほうが上にくるような関数 $g(n)$ を集めたものが集合 $O(f(n))$ だ。

漸近記法は、関数を単純な形にするのに使う。たとえば、$5n\log n + 8n - 200$ の代わりに $O(n\log n)$ と書ける。これは次のように証明できる。

$$
\begin{aligned}
5n\log n + 8n - 200 &\le 5n\log n + 8n \\
&\le 5n\log n + 8n\log n \quad n \ge 2 \text{ のとき（このとき } \log n \ge 1\text{）} \\
&\le 13n\log n
\end{aligned}
$$

$c = 13$ および $n_0 = 2$ とすれば、関数 $f(n) = 5n\log n + 8n - 200$ が集合 $O(n\log n)$ に含まれることがわかる。

漸近記法の便利な性質をいくつか挙げる。まずは、任意の定数 $c_1 < c_2$ について以下が成り立つ。

$$O(n^{c_1}) \subset O(n^{c_2})$$

つづいて、任意の定数 $a, b, c > 0$ について以下が成り立つ。

$$O(a) \subset O(\log n) \subset O(n^b) \subset O(c^n)$$

これらの包含関係は、それぞれに正の値を掛けても保たれる。たとえば n を掛けると次のようになる。

$$O(n) \subset O(n\log n) \subset O(n^{1+b}) \subset O(nc^n)$$

一般的な慣習に従って、本書でもビッグオー記法を濫用する。すなわち、$f_1(n) = O(f(n))$ と書いて $f_1(n) \in O(f(n))$ であることを表す。そして、「この操作の実行時間は集合 $O(f(n))$ に**含まれる**」ことを、単に「この操作の実行時間は $O(f(n))$ だ」と言う。これらの表現を認めると、冗長な記述が不要になるし、一連の等式で漸近記法を使えるようになる。

ビッグオー記法を濫用することで、たとえば次のような不思議な書き方ができる。

$$T(n) = 2\log n + O(1)$$

これは正確に書くとこうなる。

$$T(n) \le 2\log n + [O(1) \text{ のある要素}]$$

$O(1)$ という記法には別の問題もある。この記法には変数が入ってないので、どの変数が大きくなるのかわからないのだ。これは文脈から読み取る必要があ

る。上の例では、方程式の中に変数は n しかないので、$T(n) = 2\log n + O(f(n))$ のうちで $f(n) = 1$ の場合であると読み取ることになる。

ビッグオー記法は、新しい記法でもコンピュータサイエンス独自の記法でもない。1894 年には数学者の Paul Bachmann がこの記法を使っていた。その後しばらくして、コンピュータサイエンスにおいてアルゴリズムの実行時間を論ずる際に、この記法が非常に便利なことがわかったのだ。次のコードを考えてみよう。

Simple

```
void  snippet() {
  for (int i = 0; i < n; i++)
    a[i] = i;
}
```

この関数を 1 回実行すると以下の処理が行われる。

- 代入 1 回（int i = 0）
- 比較 n + 1 回（i < n）
- インクリメント n 回（i++）
- 配列のオフセット計算 n 回（a[i]）
- 間接代入 n 回（a[i] = i）

よって実行時間は以下のようになる。

$$T(\mathtt{n}) = a + b(\mathtt{n}+1) + c\mathtt{n} + d\mathtt{n} + e\mathtt{n}$$

a、b、c、d、e はプログラムを実行するマシンに依存する定数で、それぞれ代入、比較、インクリメント、配列のオフセット計算、間接代入にかかる実行時間を表す。たった 2 行のコードについて実行時間を表すのに、こうも複雑な式がいるようでは、さらに複雑なコードやアルゴリズムは到底扱えないだろう。ビッグオー記法を使えば、実行時間を次のように簡潔に表せる。

$$T(\mathtt{n}) = O(\mathtt{n})$$

この式は、簡潔な表現にもかかわらず、最初の式と同じくらいの内容を表している。正確な実行時間は定数 a、b、c、d、e に依存しており、これらの値がすべて判明しないと知りようがないからだ。がんばって値を実測してみても、得られる結論はそのマシンでしか有効でない。

ビッグオー記法を使えば、より抽象的な分析ができ、より複雑な関数も扱える。2 つのアルゴリズムの実行時間がビッグオー記法で同じなら、どちらが速いか優劣はつけられない。一方のアルゴリズムが速いマシンもあれば、もう一方のアルゴリズムが速いマシンもあるだろう。しかし、2 つのアルゴリズムの実行時間がビッグオー記法で異なるなら、**n が十分大きい場合**、実行時間が小さいアルゴリズムのほうがどのようなマシンにおいても速いといえる。

ビッグオー記法を使って 2 つの異なる関数を比べる例を図 1.5 に示す。これは $f_1(\mathtt{n}) = 15\mathtt{n}$ と $f_2(n) = 2\mathtt{n}\log\mathtt{n}$ のグラフである。$f_1(\mathtt{n})$ は複雑な線形時間アルゴリズムの実行時間を表し、$f_2(\mathtt{n})$ は分割統治に基づくシンプルなアルゴリズムの実行時間を表している。これを見ると、n が小さいうちは $f_1(\mathtt{n})$ のほうが $f_2(\mathtt{n})$ より大きいが、n が大きくなると大小関係が逆転することがわかる。つまり、n が十分大きいなら、実行時間が $f_1(\mathtt{n})$ であるアルゴリズムのほうが圧倒的に性能がよい。ビッグオー記法の式 $O(\mathtt{n}) \subset O(\mathtt{n}\log\mathtt{n})$ は、この事実を示している。

多変数関数に対して漸近記法を使うこともある。標準的な定義はないようだが、この本では次の定義を用いる。

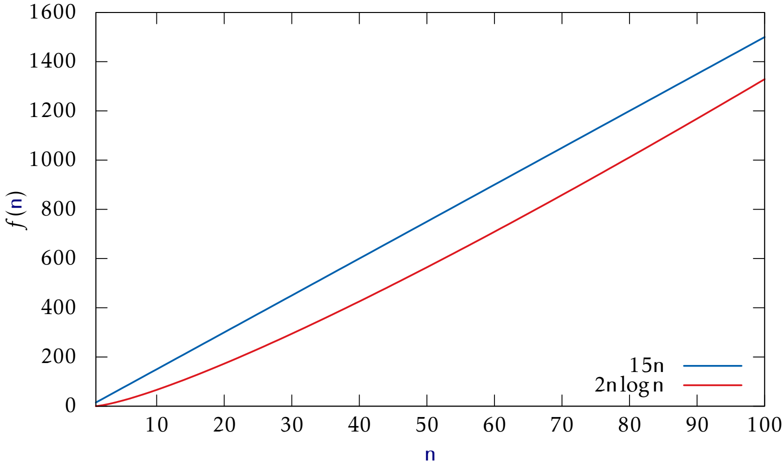
$$O(f(n_1,\ldots,n_k)) = \left\{\begin{array}{l} g(n_1,\ldots,n_k) : \text{ある } c>0 \text{ と } z \text{ が存在し、} \\ \qquad g(n_1,\ldots,n_k) \geq z \text{ を満たす任意の } n_1,\ldots,n_k \text{ について、} \\ \qquad g(n_1,\ldots,n_k) \leq c\cdot f(n_1,\ldots,n_k) \text{ が成り立つ} \end{array}\right\}$$

興味があるのは引数 $n_1,\ldots,n_k$ によって g が大きくなるときの状況であり、その状況はこの定義で把握できる。$f(n)$ が n に関する増加関数なら、この定義は 1 変数の場合の $O(f(n))$ の定義とも合致する。この本ではこれ程度の考察で十分だが、教科書によっては多変数関数と漸近記法に別の定義を与えている可能性もあるので注意してほしい。

1.3.4 ランダム性と確率

この本で扱うデータ構造には**ランダム性**を利用するものがある。格納されているデータや実行する操作に加えて、サイコロの出目もふまえて実際の処理を決めるのだ。そのため同じことをしても実行時間が毎回同じとは限らない。こういうデータ構造を分析するときは**期待実行時間**を考えるのがよい。

形式的には、ランダム性を利用するデータ構造における操作の実行時間は確率変数である。そしてその**期待値**を知りたい。全事象 U の値をとる離散確率



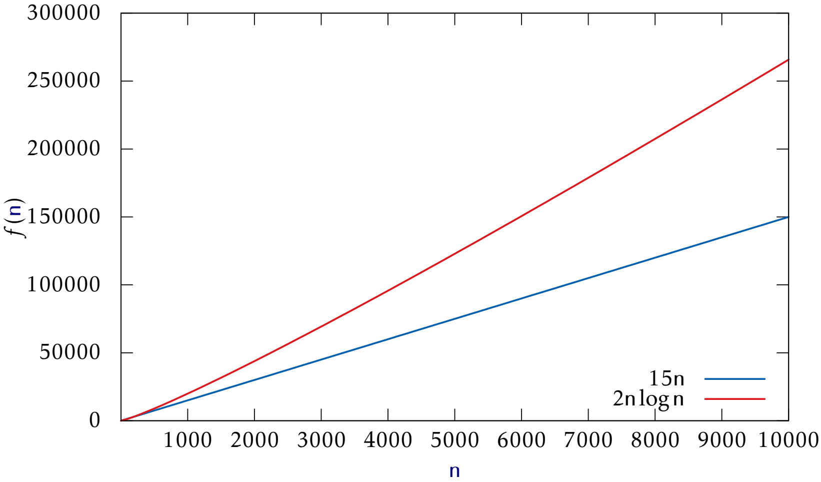


図 1.5: $15n$ と $2n\log n$ の比較

変数を X とするとき、X の期待値 $E[X]$ は次のように定義される。

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{x \in U} x \cdot \Pr\{X = x\}$$

ここで、$\Pr\{\mathcal{E}\}$ は事象 $\mathcal{E}$ の発生確率とする。この本の例では、データ構造の内部で発生するランダム性のみを考慮して確率を定める。データ構造に入ってくるデータや実行される操作列がランダムだとは仮定しないことには注意する。

期待値の最も重要な性質のひとつは**期待値の線形性**である。任意のふたつの確率変数 X と Y について次の式が成り立つ。

$$\mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$$

より一般的には、任意の確率変数 $X_1, \ldots, X_k$ について次の関係が成り立つ。

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{k} X_i\right] = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}[X_i]$$

期待値の線形性によって、（上の式の左辺のように）複雑な確率変数の期待値を、（右辺のような）より単純な確率変数の期待値に分解できる。

インジケータ確率変数はよく使う便利なトリックだ。この二値変数はなにかを数えるときに役立つ。例を見るとよくわかるだろう。表と裏が等しい確率で出るコインを k 回投げたとき、表が出る回数の期待値を知りたいとする。直感的な答えは $k/2$ だが、これを期待値の定義を使って証明すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{i=0}^{k} i \cdot \Pr\{X = i\} \\
&= \sum_{i=0}^{k} i \cdot \binom{k}{i} / 2^k \\
&= k \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} / 2^k \\
&= k/2
\end{aligned}$$

この計算をするには、$\Pr\{X = i\} = \binom{k}{i}/2^k$ および 2 項係数の性質 $i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$ や $\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} = 2^k$ を知っている必要がある。インジケータ変数と期待値の線形

性を使えばはるかに簡単になる。$\{1,\ldots,k\}$ の各 i に対し以下のインジケータの確率変数を定義する。

$$I_i = \begin{cases} 1 & i \text{ 番目のコイントスの結果が表のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

そして、I_i の期待値を計算する。

$$\mathrm{E}[I_i] = (1/2)1 + (1/2)0 = 1/2$$

ここで、$X = \sum_{i=1}^{k} I_i$ なので次のように所望の値が得られる。

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{k} I_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}[I_i] \\ &= \sum_{i=1}^{k} 1/2 \\ &= k/2 \end{aligned}$$

この計算は少し長いものの確率の不思議な等式は使っていない。また各コイントスは 1/2 の確率で表が出るので、表は試行回数の半分くらい出るだろうという直感の説明にもなっている。

1.4 計算モデル

本書ではデータ構造における操作の実行時間を理論的に分析する。これを正確に行うための計算の数学的なモデルが必要だ。そのために `w` **ビットのワード** RAM モデルを使うことにする。RAM はランダムアクセスマシン (Random Access Machine) の頭字語である。このモデルではランダムアクセスメモリを使える。ランダムアクセスメモリはセルの集まりで、これはそれぞれ `w` ビットのワードを格納できる。つまり、各セルは w 桁の 2 進数の集合 $\{0,\ldots,2^{\mathtt{w}}-1\}$ のうちのいずれかひとつを表せる。ワード RAM モデルではワードの基本的な操作に一定の時間が必要である。基本的な操作とは算術演算（$+, -, *, /, \%$）や比較（$<, >, =, \leq, \geq$）、ビット単位の論理演算（ビット単位の論理積 AND や論理和 OR、排他的論理和 XOR）である。

どのセルも一定の時間で読み書きできる。コンピュータのメモリはメモリ管理システムによって管理される。メモリ管理システムは必要に応じてメモリブロックを割り当てる、またメモリブロックの割り当てを解除する。サイズ k のメモリブロックの割当てには $O(k)$ の時間がかかり、新しく割り当てられたメモリブロックへの参照（ポインタ）が返される。この参照はひとつのワードに収まるビットで表現できるとする。

ワード幅 `w` はこのモデルの重要なパラメータである。この本で `w` に置く仮定は、`n` をデータ構造に格納されうる要素数とするとき、$\mathtt{w} > \log \mathtt{n}$ であるということだけだ。これは控えめな仮定である。なぜならこれが成り立たないとひとつのワードではデータ構造の要素数を表すことすらできないためである。

メモリ使用量はワード単位で測るので、データ構造のメモリ使用量とはデータ構造の使うワード数である。我々のデータ構造はみなある型 `T` の値を格納し、`T` 型の要素は 1 ワードのメモリで表現できると仮定する。

`w` ビットのワード RAM モデルは、$\mathtt{w} = 32$ または $\mathtt{w} = 64$ とすると、現代のデスクトップコンピュータ環境によく似ている。すなわちこの本に載っているデータ構造はいずれも一般的なコンピュータ上で動作するように実装できる。

1.5 正しさ、時間複雑性、空間複雑性

データ構造の性能を考えるとき重要な項目が 3 つある。

正しさ： データ構造はそのインタフェースを正しく実装しなければならない。

時間複雑性： データ構造における操作の実行時間は短いほどよい。

空間複雑性： データ構造のメモリ使用量は小さいほどよい。

この本は入門書なので正しいデータ構造のみを扱う。つまり、不正確な出力が得られることがあったり、更新をちゃんとしなかったりするデータ構造のことは考えない。一方で、メモリ使用量を小さくに抑える工夫をするデータ構造は紹介する。紹介する工夫の多くは操作の（漸近的な）実行時間には影響しないが、実際にはデータ構造を少し遅くするかもしれない。

データ構造の実行時間は次の三種類のいずれかを考えることが多い。

最悪実行時間： これは最も強力な実行時間の保証である。操作の最悪実行時間が $f(\mathtt{n})$ ならば、操作の実行時間は**決して** $f(\mathtt{n})$ よりも長いことは

ない。

償却実行時間： 償却実行時間が $f(\mathsf{n})$ であるとは、典型的な操作のコストが $f(\mathsf{n})$ であることを意味する。より正確には、m 個の操作の列の実行時間の合計が $mf(\mathsf{n})$ であることを意味する。いくつかの操作には $f(\mathsf{n})$ より長い時間がかかるかもしれないが、操作の列全体として考えればひとつあたりの実行時間は $f(\mathsf{n})$ なのである。

期待実行時間： 期待実行時間が $f(\mathsf{n})$ ならば、実行時間は確率変数（1.3.4 節を参照）であり、この確率変数の期待値は $f(\mathsf{n})$ である。なお期待値を計算する際に考えるランダム性は、データ構造の内部で行う選択のランダム性である。

最悪、償却、期待実行時間の違いを理解するのには、お金の例え話が役に立つ。家を買う費用のことを考えてみよう。

最悪コストと償却コスト 家の価格が 12 万ドルだとする。毎月 1200 ドルの 120 ヶ月（10 年）の住宅ローンでこの家が手に入るかもしれない。この場合、月額費用は最悪でも月 1200 ドルだ。

十分な現金を持っていれば 12 万ドルの一括払いで家を買うこともできる。こうするとこの家を購入代金を 10 年で償却した月額費用は以下のようになる。

$$\$120\,000/120 \text{ ヶ月} = \$1\,000 \text{ 月あたり}$$

これはローンの場合に支払う月額 1200 ドルよりだいぶ少ない。

最悪コストと期待コスト 次に、12 万ドルの家における火災保険を考えてみよう。保険会社が何十万件もの事例を調べた結果、大多数の家では火事を起こさず、わずかな数の家では煙による被害程度で済むボヤを起こり、ごく少数の家では全焼被害になることがわかった。保険会社はこの情報に基づき、12 万ドルの家における火災被害額の期待値は月額 10 ドル相当であると判断し、儲けるために火災保険としては月額 15 ドルの料金設定を行なった。

決断のときだ。15 ドルを最悪支払月額（かつ期待支払月額）とするその会社の火災保険に入るべきだろうか？それとも、いちかばちか、期待支払月額である月額 10 ドルを自分で貯める自家保険を行うことにして [*8]、月額 5 ドルの節約を選ぶべきだろうか？期待支払月額としては明らかに自家保険の方が安

[*8] 訳注：なぜ被保険者側が、保険会社しか知らないはずのその額を知っているのかは不問とする。この例の目的は現実の近似ではなく、異なる種類のコストに対する感覚を掴むことである。

いが、実際支払月額が遥かに高くなる可能性を考慮しなければならない。すなわち自家保険では、低い確率ではあるが、家が全焼して実際支払月額が最悪支払月額である 12 万ドルになる可能性があるのだ。

この例は、我々がどちらを選ぶかは場合によって変わるのだ、と教えてくれる [*9]。償却・期待実行時間は最悪実行時間よりも小さいことが多い。最悪実行時間の長さに目をつむり、償却・期待実行時間でいえば短いからと妥協することにすれば、はるかに単純なデータ構造を採用できる場合がよくあるのだ。

1.6 コードサンプル

この本のコードサンプルは C++ で書いた。しかし、C++ に親しみのない人も読めるようシンプルに書いたつもりだ。例えば `public` や `private` は出てこない。オブジェクト指向を前面に押し出すこともない。

B、C、C++、C#、Objective-C、D、Java、JavaScript などを ALGOL 系の言語を書いたことのある人なら本書のコードの意味はわかるだろう。完全な実装に興味のある読者はこの本に付属の C++ ソースコードを見てほしい。

この本は数学的な実行時間の解析と、対象のアルゴリズムを実装した C++ のコードとを共に含む。そのためソースコードと数式で同じ変数が出てくる。このような変数は同じ書式で書く。一番よく出てくるのは変数 n である。n は常にデータ構造に格納されている要素の個数を表す。

1.7 データ構造の一覧

表 1.1 と表 1.2 は本書で扱うデータ構造における性能の要約である。これらは 1.2 節で説明した `List` や `USet`、`SSet` を実装する。図 1.6 はこの本の各章の依存関係を示している。破線の矢印は弱い依存関係を示している。これは章のごく一部の内容や結果のみに依存することを示す。

[*9] 訳注：この例では、最悪支払月額の上限が大幅に低くなること、また支払月額の差が 5 ドルと比較的少額であることを考慮して、火災保険に入ることを選ぶ人が多いかもしれない。しかし驚くべきことに**データ構造の世界では、最悪実行時間よりも償却・期待実行時間が低いことを優先する**ことの方が遥かに多い。というのも、最悪実行時間だけかかったときの損害が全焼ほど大きくはなく、またその確率も全焼よりはるかに小さく制御できることが多いからだ。

List の実装			
	get(i)/set(i,x)	add(i,x)/remove(i)	
ArrayStack	$O(1)$	$O(1+\mathtt{n}-\mathtt{i})^{\mathrm{A}}$	§ 2.1
ArrayDeque	$O(1)$	$O(1+\min\{\mathtt{i},\mathtt{n}-\mathtt{i}\})^{\mathrm{A}}$	§ 2.4
DualArrayDeque	$O(1)$	$O(1+\min\{\mathtt{i},\mathtt{n}-\mathtt{i}\})^{\mathrm{A}}$	§ 2.5
RootishArrayStack	$O(1)$	$O(1+\mathtt{n}-\mathtt{i})^{\mathrm{A}}$	§ 2.6
DLList	$O(1+\min\{\mathtt{i},\mathtt{n}-\mathtt{i}\})$	$O(1+\min\{\mathtt{i},\mathtt{n}-\mathtt{i}\})$	§ 3.2
SEList	$O(1+\min\{\mathtt{i},\mathtt{n}-\mathtt{i}\}/\mathtt{b})$	$O(\mathtt{b}+\min\{\mathtt{i},\mathtt{n}-\mathtt{i}\}/\mathtt{b})^{\mathrm{A}}$	§ 3.3
SkiplistList	$O(\log\mathtt{n})^{\mathrm{E}}$	$O(\log\mathtt{n})^{\mathrm{E}}$	§ 4.3

USet の実装			
	find(x)	add(x)/remove(x)	
ChainedHashTable	$O(1)^{\mathrm{E}}$	$O(1)^{\mathrm{A,E}}$	§ 5.1
LinearHashTable	$O(1)^{\mathrm{E}}$	$O(1)^{\mathrm{A,E}}$	§ 5.2

[A] **償却**実行時間を表す。

[E] **期待**実行時間を表す。

表 1.1: List・USet の実装の要約

1.8 ディスカッションと練習問題

1.2 節で説明した List・USet・SSet インターフェースは、Java Collections Framework[54] の影響を受けている。これらは Java Collections Framework の List・Set・Map・SortedSet・SortedMap をシンプルにしたものである。

この章で扱った漸近記法・対数・階乗・スターリングの近似・確率論の基礎などは、Leyman, Leighton, and Meyer[50] の素晴らしい（そして無料の）本が扱っている。分かりやすい微積分の教科書としては、無料で手に入る Thompson[71] の古典的な教科書がある。この本には指数や対数の形式的な

SSet の実装			
	find(x)	add(x)/remove(x)	
SkiplistSSet	$O(\log n)^{E}$	$O(\log n)^{E}$	§ 4.2
Treap	$O(\log n)^{E}$	$O(\log n)^{E}$	§ 7.2
ScapegoatTree	$O(\log n)$	$O(\log n)^{A}$	§ 8.1
RedBlackTree	$O(\log n)$	$O(\log n)$	§ 9.2
BinaryTrie^I	$O(w)$	$O(w)$	§ 13.1
XFastTrie^I	$O(\log w)^{A,E}$	$O(w)^{A,E}$	§ 13.2
YFastTrie^I	$O(\log w)^{A,E}$	$O(\log w)^{A,E}$	§ 13.3

(Priority) Queue の実装			
	findMin()	add(x)/remove()	
BinaryHeap	$O(1)$	$O(\log n)^{A}$	§ 10.1
MeldableHeap	$O(1)$	$O(\log n)^{E}$	§ 10.2

I このデータ構造は w ビット整数のみを格納できる

表 1.2: SSet・優先度付き Queue の実装の要約

定義が書かれている。

基礎的な確率論については、特にコンピュータ・サイエンスに関連するものとして Ross[63] の教科書がおすすめである。漸近記法や確率論などを含む Graham, Knuth, and Patashnik[37] の教科書も参考になるだろう。

問 **1.1.** 練習問題は読者が問題に対する正しいデータ構造を選ぶ練習をするためのものだ。利用可能な実装やインターフェースがあれば、それを使って解いてみてほしい。(Java ならば Java Collections Framework が、C++ ならば Standard Template Library がある。)

以下の問題はテキストの入力を一行ずつ読み、各行で適切なデータ構造の操作を実行することで解いてほしい。ただしファイルが百万行であっても数秒以内に処理できる程度に効率的な実装でなければならないものとする。

1. 入力を一行ずつ読み、その逆順で出力せよ。すなわち最後の入力行を最初に書き出し、最後から二番目の入力行を二番目に書き出す、というよ

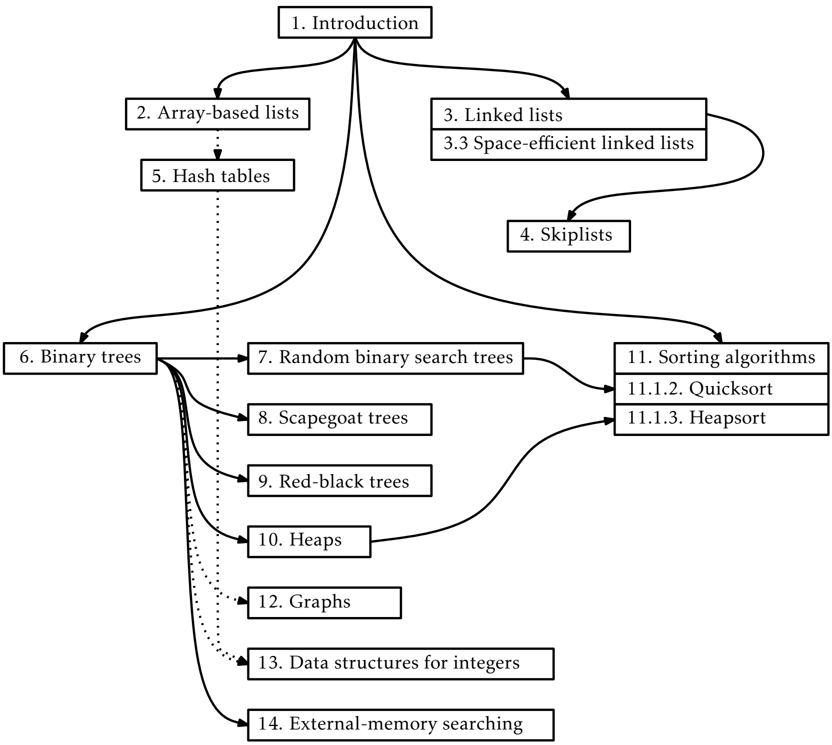


図 1.6: この本の内容の依存関係

うに出力せよ。

2. 最初の 50 行入力を読み、それを逆順で出力せよ。その後続く 50 行を読み、それを逆順で出力せよ。これを読み取る行が無くなるまで繰り返し、最後に残っていた行（50 行未満かもしれない）もやはり逆順で出力せよ。
   つまり、出力は 50 番目の行からはじまり、49、48、...、1 番目の行が続く。この次は 100 番目の行で、99、...、51 番目の行が続く。
   またプログラム実行中に 50 より多くの行を保持してはならない。
3. 入力を一行ずつ読み取り、42 行目以降で空行を見つけたら、その 42 行前の行を出力せよ。例えば、242 行目が空行であれば、200 行目を出力せよ。またプログラム実行中に 43 行以上の行を保持してはならない。
4. 入力を一行ずつ読み取り、もしこれまでと重複のない行を見つけたら出

力せよ。重複がたくさんあるファイルを読む場合にも、重複なく行を保持するのに必要なメモリより多くメモリを使わないように注意せよ。

5. 入力を一行ずつ読み取り、それがこれまでに読んだことのある行と同じなら出力せよ。（最終的には、入力ファイルからある行がはじめて現れた箇所をそれぞれ除いたものが出力である。）ファイルが多くの重複行を含む場合でも、行を重複なく保持するのに必要なメモリよりは多くメモリを使わないように注意せよ。
6. 入力を全て読み取り、短い順に並び替えて出力せよ。同じ長さの行があるときは、それらの行の順序は辞書順に並べるものとする。また、重複する行は一度だけ出力するものとする。
7. 直前の問題で、重複する行は現れた回数だけ出力するように変更した問題を解け。
8. 入力をすべて読み、全ての偶数番目の行を出力した後に全ての奇数番目の行を出力せよ。（なお、最初の行を 0 行目と数える。）
9. 入力をすべて読み、ランダムに並び替えて出力せよ。どの行の内容も書き換えてはならない。また、入力とくらべて行を減らしたり増やしたりしてもいけない。

問 **1.2.** Dyck word とは +1, -1 からなる列で、先頭から任意の k 番目の値までの部分列（プレフィックス）の和がいずれも非負であるものである。例えば、$+1,-1,+1,-1$ は Dyck word だが、$+1,-1,-1,+1$ は $+1-1-1<0$ なので Dyck word ではない。Dyck word と Stack の push(x)・pop() 操作の関係を説明せよ。

問 **1.3.** **マッチした文字列**とは {, }, (,), [,] のからなる列で、すべての括弧が適切に対応しているものである。例えば、「{{()[]}}」はマッチした文字列だが、「{{()]}」はふたつめの { に対応する括弧が] であるためマッチした文字列ではない。長さ n の文字列が与えられたとき、この文字列がマッチしているかを $O(n)$ で判定するにはスタックをどう使えばよいかを説明せよ。

問 **1.4.** push(x)・pop() 操作のみが可能なスタック s が与えられる。FIFO キュー q だけを使って s の要素を逆順にする方法を説明せよ。

問 **1.5.** USet を使って Bag を実装せよ。Bag は USet によく似たインターフェースである。Bag は add(x)・remove(x)・find(x) 操作をサポートするが、重複する要素も格納するところが異なる。Bag の find(x) 操作は x に等しい要素が 1 つ以上含まれているときそのうちのひとつを返す。さらに Bag

は findAll(x) 操作もサポートする。これは Bag に含まれる x に等しいすべての要素のリストを返す。

問 **1.6.** List・USet・SSet インターフェースを実装せよ。ただし効率的な実装でなくてもよい。ここで実装するものは、後の章で出てくるより効率的な実装の正しさや性能をテストするために役立つ。(最も簡単な方法は要素を配列に入れておく方法だ。)

問 **1.7.** 直前の問題の実装の性能をアップするための思いつく工夫をいくつか試みよ。実験してみて、List の add(i,x)・remove(i) の性能がどう向上したか考察せよ。USet・SSet の find(x) の性能はどうすれば向上しそうか考えてみよ。この問題はインターフェースの効率的な実装がどのくらい難しいかを実感するためのものである。

第 2 配列を使ったリスト

この章では backing array と呼ばれる配列にデータを入れて、List・Queue インターフェースを実装する方法を解説する [*1]。次の表は、この章で説明するデータ構造の操作時間を要約したものだ。

	get(i)/set(i,x)	add(i,x)/remove(i)
ArrayStack	$O(1)$	$O(n-i)$
ArrayDeque	$O(1)$	$O(\min\{i,n-i\})$
DualArrayDeque	$O(1)$	$O(\min\{i,n-i\})$
RootishArrayStack	$O(1)$	$O(n-i)$

データをひとつの配列に入れるデータ構造には以下のような利点・欠点がある。

- 配列の任意の要素に一定の時間でアクセスできる。そのため get(i)・set(i,x) を定数時間で実行できる。
- 配列は動的ではない。リストの真ん中付近に要素を追加・削除するためには、隙間を作ったり埋めたりするために多くの要素が移動してしまう。add(i,x)・remove(i) の実行時間が n と i に依存するのはこのためだ。
- 配列は伸び縮みしない。backing array のサイズより多くの要素をデータ構造に入れるときには、新しい配列を割当て古い配列の要素をそちら

[*1] 訳注：管見によれば backing array の一般的な訳語は存在しない。意訳するならば「裏でも要素が一並びになっている配列」だろうか。頻出用語ではなく、単に配列 (array) と読み替えて問題ないだろう。重要なことは、裏でも要素が一並びになっているため、この章で述べる利点・欠点が生じていることである。

にコピーしなければならず、この操作のコストは大きい。

3 つめは特に重要だ。上記の表に記載された実行時間は backing array の拡大・縮小にかかるコストを含んでいない。後述するように、注意深く設計すれば、backing array の拡大・縮小のコストを加味しても**平均的な**実行時間にはほぼ影響しない。より正確に言うと、空のデータ構造からはじめて、add(i,x)・remove(i) を m 回実行するときの、backing array を拡大・縮小するのにかかる時間の合計は $O(m)$ である。コストの大きい操作もあるが、m 個の操作にわたって均せば、ひとつの操作あたりのコストは $O(1)$ なのだ。

この章およびこの本を通じて配列の要素数を保持すると便利である。C++ のふつうの配列は要素数を保持していないため、要素数を保持する配列クラス array を定義する。このクラスは標準的な C++ の配列 a と整数 length により簡単に実装できる。

array
```
T *a;
int length;
```

array の大きさは作成時に指定する。

array
```
array(int len) {
  length = len;
  a = new T[length];
}
```

配列の要素を添え字により指定できる。

array
```
T& operator[](int i) {
  assert(i >= 0 && i < length);
  return a[i];
}
```

また、ある配列を他の配列に割り当てる操作は、ポインタの操作により定数時間で実行できる。

array
```
array<T>& operator=(array<T> &b) {
  if (a != NULL) delete[] a;
  a = b.a;
  b.a = NULL;
  length = b.length;
  return *this;
}
```

2.1 ArrayStack：配列を使った高速なスタック操作

ArrayStack は backing array（配列 a と呼ぶことにする）を使った List インターフェースの実装だ。リストの i 番目の要素を a[i] とする。ほとんどの場合、配列 a は実際に必要な要素数よりも多くの要素を格納できる。そのため整数 n によって実際に a に入っている要素数を表す。つまり、リストの要素は a[0],...,a[n−1] に格納されている。また、関係 a.length ≥ n が常に成り立つ。

ArrayStack
```
array<T> a;
int n;
int size() {
  return n;
}
```

2.1.1 基本

get(i) や set(i,x) を使って ArrayStack の要素を読み書きする方法は簡単である。必要に応じて境界チェック [*2] をしたあと単に a[i] を返すか、a[i] を

[*2] 訳注：get(i) や set(i,x) における境界チェック (bounds-checking) とは、添字 i が、最初の要素の添字である 0 以上であり、かつ、最後の要素の添字である a.length − 1 以下だと確認することである。

書き換えるかすればよいのだ。

ArrayStack
```
T get(int i) {
  return a[i];
}
T set(int i, T x) {
  T y = a[i];
  a[i] = x;
  return y;
}
```

ArrayStack に要素を追加・削除するための実装を図 2.1 に示す。add(i,x) ではまず a が既に一杯かどうかを調べる。もしそうなら resize() を呼び出して a を大きくする。resize() の実装方法については後述する。resize() を終えた直後には $\mathtt{a.length} > \mathtt{n}$ になっていることを知っていれば今は十分である。あとは x が入れるために $\mathtt{a}[\mathtt{i}],\ldots,\mathtt{a}[\mathtt{n}-1]$ をひとつずつ右に移動させ、a[i] を x にして、n を 1 増やせばよい。

ArrayStack
```
void add(int i, T x) {
  if (n + 1 > a.length) resize();
  for (int j = n; j > i; j--)
    a[j] = a[j - 1];
  a[i] = x;
  n++;
}
```

resize() のコストを無視すれば、add(i,x) のコストは x を入れる場所を作るためにシフトする要素数に比例する。つまり（resize のことを無視した）この操作の実行時間は $O(\mathtt{n}-\mathtt{i})$ である。

remove(i) も同様に実装できる。$\mathtt{a}[\mathtt{i}+1],\ldots,\mathtt{a}[\mathtt{n}-1]$ を左にひとつシフトし、n の値をひとつ小さくする。（a[i] は書き換えられる前に控えておく。）そして、配列の長さに対して要素数が少なすぎないか、具体的には $\mathtt{a.length} \geq 3\mathtt{n}$

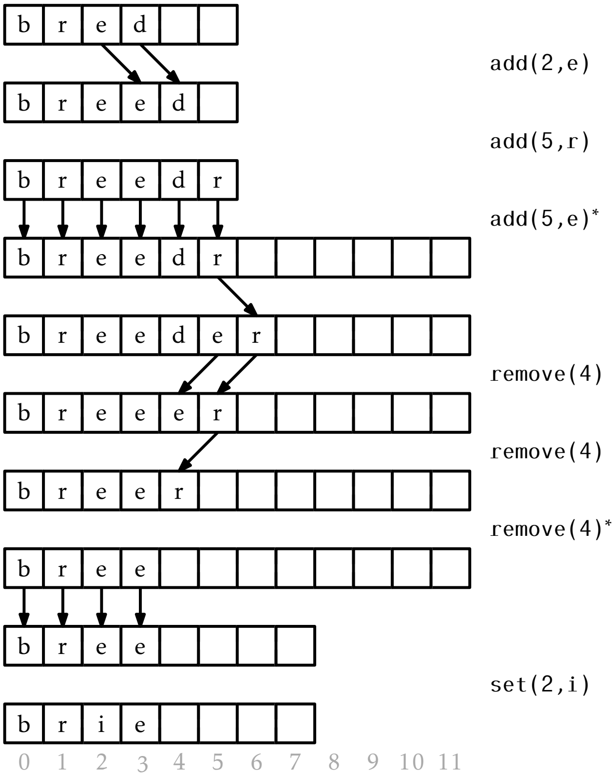


図 2.1: ArrayStack に対する add(i,x)・remove(i) の実行例。矢印は要素のコピーを表す。resize() を呼ぶ操作にはアスタリスクを付した。

かどうかを確認する。もしそうなら resize() を呼んで a を小さくする。

ArrayStack
```
T remove(int i) {
  T x = a[i];
  for (int j = i; j < n - 1; j++)
    a[j] = a[j + 1];
  n--;
  if (a.length >= 3 * n) resize();
  return x;
```

```
}
```

resize() が呼ばれるかもしれないが、そのコストを無視すれば remove(i) のコストはシフトする要素数に比例し、$O(\mathtt{n}-\mathtt{i})$ である。

2.1.2 拡張と収縮

resize() の実装は単純だ。大きさ $2\mathtt{n}$ の新しい配列 b を割当て、n 個の a の要素を b のはじめの n 個としてコピーする。そして a を b に置き換える。よって resize() の呼び出し後は $\mathtt{a.length} = 2\mathtt{n}$ が成り立つ。[*3]

ArrayStack
```
void resize() {
  array<T> b(max(2 * n, 1));
  for (int i = 0; i < n; i++)
    b[i] = a[i];
  a = b;
}
```

resize() の実際のコストの計算も簡単だ。大きさ $2\mathtt{n}$ の配列 b を割当て、n 個の要素をコピーする。これは $O(\mathtt{n})$ の時間がかかる。

前節からの実行時間分析は resize() のコストを無視していた。この節では**償却解析**と呼ばれる手法でこれを解決する。この手法は個々の add(i,x)・remove(i) における resize() のコストを求めるわけではない。代わりに、add(i,x)・remove(i) からなる m 個の一連の操作の間に呼ばれる resize() の実行時間の合計を考える。特に、次の補題を示す。

補題 **2.1.** 空の *ArrayStack* が作られたあと、$m \geq 1$ 回の add(i,x)・remove(i) からなる操作の列が順に実行されるとき、resize() の実行時間は合計 $O(\mathtt{m})$ である。

証明. resize() が呼ばれるとき、その前の resize() 呼び出しから add・remove が実行された回数は $\mathtt{n}/2-1$ 回以上であることを後半で示す。

[*3] 訳注：補題 2.1 の証明でも言及されているが、$\mathtt{n}=0$ かつ $\mathtt{a.length}=1$ のときに限ってこの式は成り立たないことがある。

このとき、i 回目の resize() 呼び出しの際の n を $\mathtt{n}_i$、r を resize() の呼び出し回数とすれば、add(i,x) と remove(i) の合計呼び出し回数は次の関係を満たす。

$$\sum_{i=1}^{r} (\mathtt{n}_i/2 - 1) \le m$$

これを変形すると次の式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{r} \mathtt{n}_i \le 2m + 2r$$

$r \le m$ より resize() 呼び出しのための実行時間の合計は次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{r} O(\mathtt{n}_i) \le O(m+r) = O(m)$$

あとは $(i-1)$ 回目の resize() から i 回目の resize() の間に、add(i,x) か remove(i) が呼ばれる回数の合計が $\mathtt{n}_i/2-1$ 以上であることを示せばよい。

ふたつの場合が考えられる。ひとつは resize() が add(i,x) の中で呼ばれる場合で、これは backing array が一杯になるとき、つまり $\mathtt{a.length} = \mathtt{n} = \mathtt{n}_i$ が成り立つときだ。この一つ前に行った resize() 操作について考えよう。この resize() の直後、a の大きさは a.length だが a の要素数は $\mathtt{a.length}/2 = \mathtt{n}_i/2$ 以下であった。しかし a の要素数は今では $\mathtt{n}_i = \mathtt{a.length}$ なのだから、前の resize() から $\mathtt{n}_i/2$ 回以上は add(i,x) が呼ばれたことがわかる。

もうひとつ考えられるのは resize() が remove(i) の中で呼ばれる場合で、このとき $\mathtt{a.length} \ge 3\mathtt{n} = 3\mathtt{n}_i$ である。ひとつ前の（つまり、i-1 回目の）resize() の直後では a の要素数は $\mathtt{a.length}/2-1$ 以上であった[*4]。今 a には $\mathtt{n}_i \le \mathtt{a.length}/3$ 個の要素が入っている。よって、直前の resize() 以降に実行された remove(i) の回数の下界は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} R &\ge \mathtt{a.length}/2 - 1 - \mathtt{a.length}/3 \\ &= \mathtt{a.length}/6 - 1 \\ &= (\mathtt{a.length}/3)/2 - 1 \\ &\ge \mathtt{n}_i/2 - 1 \end{aligned}$$

いずれの場合でも、$(i-1)$ から i 回目の resize() の間に add(i,x) か remove(i) が呼ばれる回数の合計は $\mathtt{n}_i/2-1$ 以上である。 □

[*4] この数式における -1 は、特別なケース $\mathtt{n}=0$ かつ $\mathtt{a.length}=1$ を考慮したものだ。

2.1.3 要約

次の定理は ArrayStack の性能を整理するものだ。

定理 **2.1.** *ArrayStack* は *List* インターフェースを実装する。resize() にかかる時間を無視した場合の *ArrayStack* における各操作の実行時間をまとめる。

- get(i)・set(i,x) の実行時間は $O(1)$ である。
- add(i,x)・remove(i) の実行時間は $O(1+\mathtt{n}-\mathtt{i})$ である [*5]。

空の *ArrayStack* に対して任意の m 個の add(i,x)・remove(i) からなる操作の列を実行する。このとき resize() にかかる時間の合計は $O(m)$ である。

ArrayStack というデータ構造は Stack インターフェースを実装する効率的な方法である。特に push(x) は add(n,x)、pop() は remove(n − 1) である。またこのいずれの操作の償却実行時間も $O(1)$ である。

2.2 FastArrayStack：最適化された ArrayStack

ArrayStack が主にやっていることは、データの（add(i,x) と remove(i) のための）シフトと（resize() のための）コピーである。素朴な実装では for ループを使うだろう。しかしデータのシフトやコピーに特化したより効率的な機能が使えるかもしれない。C 言語には memmove(d,s,n) と memcpy(d,s,n) 関数がある [*6]。C++ 言語には std :: copy(a0,a1,b) アルゴリズムがある。Java には System.arraycopy(s,i,d,j,n) メソッドがある。

FastArrayStack
```
void resize() {
  array<T> b(max(1, 2*n));
  std::copy(a+0, a+n, b+0);
```

[*5] 訳注：n=i=0 のときであってもビッグオー記法で書けるように、1 が足されていることに注意。

[*6] 訳注：memmove(d,s,n) は destination（移動先）に source（移動元）から n バイトをコピーする関数である。memcpy(d,s,n) との違いは移動元と移動先の領域が重なっていてもよいことである。

```
  a = b;
}
void add(int i, T x) {
  if (n + 1 > a.length) resize();
  std::copy_backward(a+i, a+n, a+n+1);
  a[i] = x;
  n++;
}
```

これらの関数は最適化されており、for ループを使う場合と比べてかなり高速な機械語の命令を使うかもしれない。これらの関数を使っても漸近的な実行時間は小さくならないのだが、試してみる価値のある最適化ではある。

C++ や Java の実装でこれらの関数を使って 2〜3 倍の高速化を実現したこともある。実際どのくらい速くなるのかは環境によるので是非試してみてほしい。

2.3 ArrayQueue：配列を使ったキュー

この節では FIFO（先入れ先出し）キューを実装するデータ構造 ArrayQueue を紹介する。このデータ構造では（add(x) によって）要素は追加されたのと同じ順番で（remove() によって）削除される。

FIFO キューの実装に ArrayStack を使うのはよくない。一方の端から要素を追加し他方から要素を削除するので、賢明な選択ではないのだ。ふたつの操作のいずれかはリストの先頭を変更することになる。すなわち $i = 0$ で add(i,x) か remove(i) を呼びだす。このとき n に比例する実行時間がかかってしまうのである。

配列を使ったキューの効率的な実装は、もし無限長の配列 a があれば簡単だろう。次に削除する要素を追跡するインデックス j と、キューの要素数 n を記録しておけばよい。そうすればキューの要素は以下の場所に入っている。

$$a[j], a[j+1], \ldots, a[j+n-1]$$

まず j, n を 0 に初期化する。要素を追加するときは、$a[j+n]$ に要素を入れて、n をひとつ増やす。要素を削除するときは、$a[j]$ から要素を取り出し、j をひとつ増やし、n をひとつ減らす。

この方法の明らかな問題点は無限長の配列が必要なことだ。ArrayQueue は有限長の配列 a と**剰余算術**で無限長の配列を模倣する。剰余算術とは例えば時間の計算をするときに使っているものだ。例えば 10:00 に 5 時間を足すと 3:00 になる。形式的に書けば次のようになる。

$$10+5=15\equiv 3 \pmod{12}$$

数式の後半は「12 を法として 15 と 3 は合同である」と読む。mod は次のように二項演算と考えてもよい。

$$15 \bmod 12 = 3$$

整数 a と正整数 m について、ある整数 k が存在し $a=km+r$ をみたす整数 r $\in \{0,\ldots,m-1\}$ を $a \bmod m$ と書く。簡単に言うと、r とは a を m で割った余りである。C や C++、Ruby、Java など多くのプログラミング言語では mod 演算子は % で表される。

剰余算術は無限長の配列を模倣するのに便利である。i mod a.length は常に $0,\ldots,$a.length -1 の値を取ることを利用して、配列の中にキューの要素をうまく入れられるのだ。

$$\mathtt{a}[\mathtt{j}\%\mathtt{a.length}],\mathtt{a}[(\mathtt{j}+1)\%\mathtt{a.length}],\ldots,\mathtt{a}[(\mathtt{j}+\mathtt{n}-1)\%\mathtt{a.length}]$$

これは a を**循環配列**として使っている。配列の添字が a.length -1 を超えると、配列の先頭に戻ってくるのである。

残りの問題は ArrayQueue の要素数が a の大きさを超えてはならないことだ。

ArrayQueue
```
array<T> a;
int j;
int n;
```

ArrayQueue に対して add(x)・remove() からなる操作の列を実行する様子を図 2.2 に示す。add(x) はまず a が一杯かどうかを確認し、必要に応じて resize() を呼んで a の容量を増やす。続いて x を a[(j+n)%a.length] に入れて、n をひとつ増やせばよい。

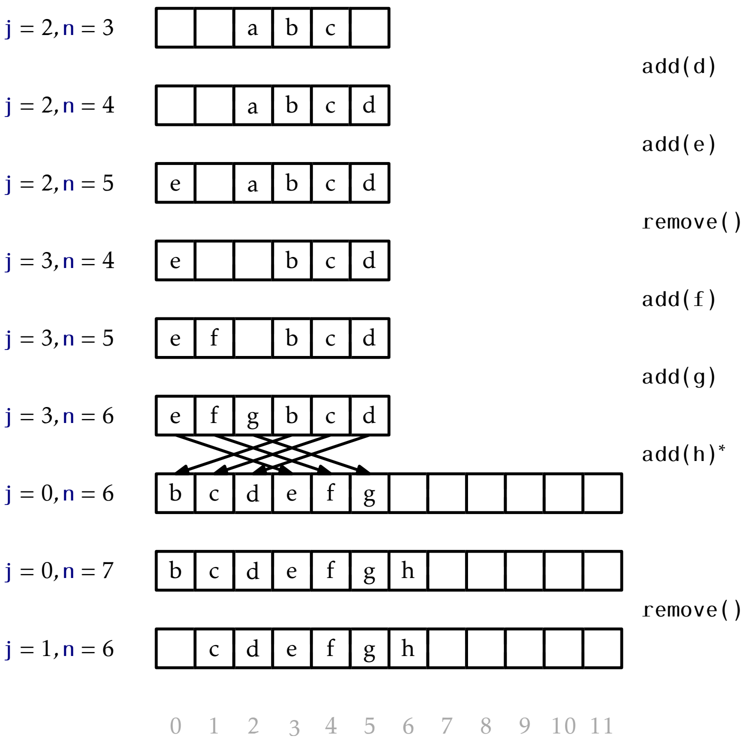


図 2.2: ArrayQueue に対する add(x)・remove() の実行例。矢印は要素のコピーを表す。resize() の発生する呼び出しにはアスタリスクを付した。

ArrayQueue
```
bool add(T x) {
  if (n + 1 > a.length) resize();
  a[(j+n) % a.length] = x;
  n++;
  return true;
}
```

remove() の実装では、まず a[j] をあとで返せるように保存しておく。つづいて n を 1 減らし、j を 1 増やし ia.length で剰余を取る。最後に保存して

おいた a[j] を返す。もし必要なら resize() を読んで a を小さくする。

ArrayQueue
```
T remove() {
  T x = a[j];
  j = (j + 1) % a.length;
  n--;
  if (a.length >= 3*n) resize();
  return x;
}
```

最後になるが、resize() 操作は ArrayStack のものとよく似ている。大きさ 2n の新しい配列 b を割当て、

$$a[j], a[(j+1)\%a.\mathtt{length}], \ldots, a[(j+n-1)\%a.\mathtt{length}]$$

を

$$b[0], b[1], \ldots, b[n-1]$$

にコピーし、$j = 0$ とする。

ArrayQueue
```
void resize() {
  array<T> b(max(1, 2*n));
  for (int k = 0; k < n; k++)
    b[k] = a[(j+k)%a.length];
  a = b;
  j = 0;
}
```

2.3.1 要約

次の定理は ArrayQueue の性能を整理するものだ。

定理 2.2. *ArrayQueue* は *(FIFO)Queue* インターフェースの実装である。resize() のコストを無視すると、*ArrayStack* は add(x)・remove() の実行

時間は $O(1)$ である。さらに、空の *ArrayStack* に対して長さ m の任意の add(i,x)・remove(i) からなる操作の列を実行するとき、resize() にかかる時間の合計は $O(m)$ である。

2.4 ArrayDeque：配列を使った高速な双方向キュー

前節の ArrayQueue は、一方の端からは追加だけを他方の端からは削除だけを効率的に実行できる、一列に並んだデータを表すデータ構造であった。つづいて紹介する ArrayDeque は両端に追加・削除を効率的に実行できるデータ構造である。ArrayQueue の実装に使った循環配列をここでも使って、ArrayDeque の List インタフェースを実装する。[*7]

ArrayDeque
```
array<T> a;
int j;
int n;
```

ArrayDeque における get(i) と set(i,x) の実装は簡単だ。配列の要素 a[(j + i) mod a.length] を読み書きすればよいのだ。

ArrayDeque
```
T get(int i) {
  return a[(j + i) % a.length];
}
T set(int i, T x) {
  T y = a[(j + i) % a.length];
  a[(j + i) % a.length] = x;
  return y;
}
```

[*7] 訳注：第一章で言及したように、ArrayDeque は List インターフェースを実装するデータ構造である。ArrayDeque という名称は、Deque インターフェイスの全ての操作の実行時間が O(1) であることを強調するために付けられている。

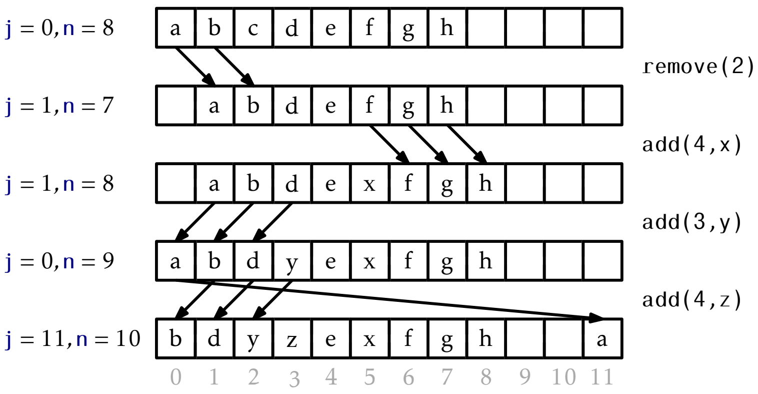


図 2.3: ArrayDeque に対する add(i,x)・remove(i) の実行例。矢印は要素のコピーを表す。

add(i,x) の実装はひと工夫必要だ。まず、a が一杯かどうかを確認し、必要に応じて resize() を呼ぶ。ここで、i が小さいとき（0 に近いとき）と大きいとき（n に近いとき）に、特に効率的に操作したいのだということを覚えておいてほしい。続いて $i < n/2$ かどうかを確認する。もしそうなら左から i 個の要素をいずれもひとつずつ左にずらす。そうでないなら右から $n-i$ 個の要素をいずれもひとつずつ右にずらす。add(i,x) と remove(x) の説明として図 2.3 を見てほしい。

ArrayDeque
```
void add(int i, T x) {
  if (n + 1 > a.length)  resize();
  if (i < n/2) { // shift a[0],..,a[i-1] left one position
    j = (j == 0) ? a.length - 1 : j - 1;
    for (int k = 0; k <= i-1; k++)
      a[(j+k)%a.length] = a[(j+k+1)%a.length];
  } else { // shift a[i],..,a[n-1] right one position
    for (int k = n; k > i; k--)
      a[(j+k)%a.length] = a[(j+k-1)%a.length];
  }
```

```
    a[(j+i)%a.length] = x;
    n++;
}
```

このように要素をずらすと add(i,x) は高々 $\min\{\mathtt{i},\mathtt{n}-\mathtt{i}\}$ 個の要素を移動する。以上より add(i,x) の（resize() のことを無視した）実行時間は $O(1+\min\{\mathtt{i},\mathtt{n}-\mathtt{i}\})$ である。

remove(i) も同様に実装できる。左から i 個の要素をいずれもひとつずつ右にシフトするか、右から $n-i-1$ 個の要素をいずれもひとつずつ左にシフトするか、$\mathtt{i}<\mathtt{n}/2$ かどうかに応じていずれかを行う。よって remove(i) の実行時間も $O(1+\min\{\mathtt{i},\mathtt{n}-\mathtt{i}\})$ である。

ArrayDeque
```
T remove(int i) {
  T x = a[(j+i)%a.length];
  if (i < n/2) { // shift a[0],..,[i-1] right one position
    for (int k = i; k > 0; k--)
      a[(j+k)%a.length] = a[(j+k-1)%a.length];
    j = (j + 1) % a.length;
  } else { // shift a[i+1],..,a[n-1] left one position
    for (int k = i; k < n-1; k++)
      a[(j+k)%a.length] = a[(j+k+1)%a.length];
  }
  n--;
  if (3*n < a.length) resize();
  return x;
}
```

2.4.1 要約

次の定理は ArrayDeque の性能を整理するものだ。ArrayDeque は List インターフェースを実装する。resize() のコストを無視すると、ArrayDeque における各操作の実行時間は、

- get(i)・set(i,x) の実行時間は $O(1)$ である。
- add(i,x)・remove(i) の実行時間は $O(1+\min\{i,n-i\})$ である。[*8]

さらに、空の ArrayDeque に対して長さ m の任意の add(i,x)・remove(i) からなる操作の列を実行するとき、resize() にかかる時間の合計は $O(m)$ である。

2.5 DualArrayDeque：2 つのスタックから作った双方向キュー

次はふたつの ArrayStack を使って ArrayDeque に近い性能を示すデータ構造 DualArrayDeque を紹介する。DualArrayDeque は漸近的な性能が ArrayDeque より良いわけではないのだが、ふたつのシンプルなデータ構造を組み合わせてより高度なデータ構造を作る例としてここで紹介する。

DualArrayDeque は、ふたつの ArrayStack を使ってリストを表現する。ArrayStack の終端付近の要素を高速に操作できることを思い出してほしい。DualArrayDeque は front と back という名前のふたつの ArrayStack を背中合わせに配置する。そのため両端が終端になり、両端を高速に操作できる。

DualArrayDeque
```
ArrayStack<T> front;
ArrayStack<T> back;
```

DualArrayDeque は要素数 n を明示的に保持しない。要素数は n = front.size() + back.size() と求められるからだ。ただし DualArrayDeque の解析では相変わらず n で要素数を表すことにする。

DualArrayDeque
```
int size() {
  return front.size() + back.size();
}
```

*8 訳注：これらの結果から、ArrayDeque が確かに Deque インターフェースの全ての操作を $O(1)$ で実現していることを確認できる。つまり、両端に対する add(i,x)・remove(i) の実行時間は、$O(1)$ で済む。

ひとつめの ArrayStack である front には $0,\ldots,$front.size() -1 番目の要素を、逆順に入れる。もうひとつの ArrayStack である back には front.size(),...,size()−1 番目の要素を普通の順番で入れる。あとは front か back に対して get(i) か set(i,x) を適切に呼べば get(i)・set(i,x) を $O(1)$ の時間で実行できる。

DualArrayDeque
```
T get(int i) {
  if (i < front.size()) {
    return front.get(front.size() - i - 1);
  } else {
    return back.get(i - front.size());
  }
}
T set(int i, T x) {
  if (i < front.size()) {
    return front.set(front.size() - i - 1, x);
  } else {
    return back.set(i - front.size(), x);
  }
}
```

front には逆順に要素が入っているので、インデックス i < front.size() は front の front.size() − i − 1 番目の要素である。

DualArrayDeque における要素の追加・削除は図 2.4 を見てほしい。add(i,x) は front か back を必要に応じて操作する。

DualArrayDeque
```
void add(int i, T x) {
  if (i < front.size()) {
    front.add(front.size() - i, x);
  } else {
    back.add(i - front.size(), x);
```

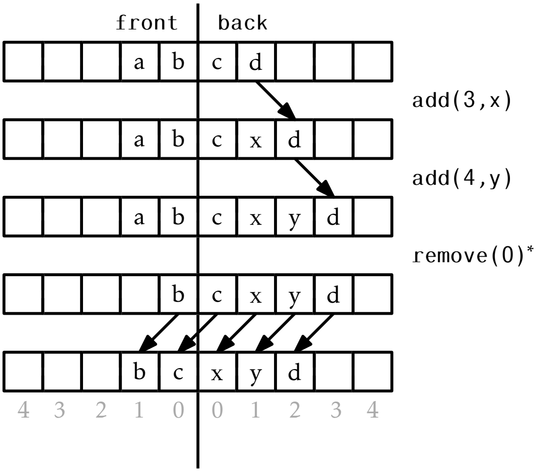


図 2.4: DualArrayDeque に対する add(i,x)・remove(i) の実行例。矢印は要素のコピーを表す。balance() の発生する呼び出しにはアスタリスクを付した。

```
  }
  balance();
}
```

add(i,x) は front と back の要素数を均すために balance() を呼び出す。balance() の実装は後述するが、size() <2 でなければ front.size() と back.size() は三倍よりも離れないようにするとだけ今は知っていればよい。具体的には balance() は常に $3\cdot$front.size() $\geq$ back.size() かつ $3\cdot$back.size() $\geq$ front.size() であることを保証する。

つづいて add(i,x) のうち balance() のコストを無視した実行時間を求める。i $<$ front.size() のとき add(i,x) は front.add(front.size() $-$ i,x) を実行するだけである。front は ArrayStack なのでこの実行時間は次のようである。

$$O(\texttt{front.size()} - (\texttt{front.size()} - \texttt{i}) + 1) = O(1 + \texttt{i}) \tag{2.1}$$

一方 i $\geq$ front.size() のとき add(i,x) は back.add(i $-$ front.size(),x) を実行するだけである。このときの実行時間は次のようである。

$$O(\texttt{back.size()} - (\texttt{i} - \texttt{front.size()}) + 1) = O(1 + \texttt{n} - \texttt{i}) \tag{2.2}$$

$i < n/4$ のときはひとつめのケース (2.1) に該当する。$i \geq 3n/4$ のときはふたつめのケース (2.2) に該当する [*9]。$n/4 \leq i < 3n/4$ のときは、front と back のどちらを操作するかわからない。しかしいずれの場合も高々 n 個の要素をずらして新たな要素を配列に入れるので、実行時間は $O(n)$ である。以上をまとめると次のようになる。

$$\text{Running time of add}(i,x) \leq \begin{cases} O(1+i) & \text{if } i < n/4 \\ O(n) & \text{if } n/4 \leq i < 3n/4 \\ O(1+n-i) & \text{if } i \geq 3n/4 \end{cases}$$

ゆえに add(i,x) の実行時間は balance() のコストを無視すれば $O(1+\min\{i,n-i\})$ である。

remove(i) の実行時間の解析は add(i,x) のものと同様なので省略する。

DualArrayDeque
```
T remove(int i) {
    T x;
    if (i < front.size()) {
            x = front.remove(front.size()-i-1);
    } else {
            x = back.remove(i-front.size());
    }
    balance();
    return x;
}
```

2.5.1　バランスの調整

最後に add(i,x) と remove(i) が実行する balance() の説明をする。この操作は front・back の要素数が極端には偏らないよう保つ。要素数が 2 以上のとき、front も back も $n/4$ 以上の要素を含むようにするのだ。そうでないときは要素を動かして、front・back がそれぞれちょうど $\lfloor n/2 \rfloor$・$\lceil n/2 \rceil$ 個の要素を持つようにする。

[*9] 訳注：たとえば i=0 かつ n=0 の場合は (2.2) に該当する。

DualArrayDeque
```
void balance() {
  if (3*front.size() < back.size()
      || 3*back.size() < front.size()) {
    int n = front.size() + back.size();
    int nf = n/2;
    array<T> af(max(2*nf, 1));
    for (int i = 0; i < nf; i++) {
      af[nf-i-1] = get(i);
    }
    int nb = n - nf;
    array<T> ab(max(2*nb, 1));
    for (int i = 0; i < nb; i++) {
      ab[i] = get(nf+i);
    }
    front.a = af;
    front.n = nf;
    back.a = ab;
    back.n = nb;
  }
}
```

balance() の解析は簡単である。balance() がバランス調整をするとき $O(\mathtt{n})$ 個の要素を動かすので実行時間は $O(\mathtt{n})$ である。balance() は add(i,x)・remove(i) で毎回呼ばれるのでこれは一見すると好ましくない。しかし次の補題より balance() の実行時間は平均的には定数であることがわかる。

補題 2.2. 空の *DualArrayDeque* に対して長さ m の任意の add(i,x)・remove(i) からなる操作の列を実行する。このとき resize() にかかる時間の合計は $O(m)$ である。

証明. 前に balance() が要素を動かしたときから、次に balance() が要素を動かすときまでに add(i,x)・remove(i) が実行された回数は $\mathtt{n}/2-1$ 以上であることを示す。補題 2.1 の証明と同様に、これを示せば balance() の合計実

行時間が $O(m)$ であることを示したことになる。

ここでは**ポテンシャル法**という技法を使う。DualArrayDeque の**ポテンシャル** Φ を front と back の要素数の差と定義する。

$$\Phi = |\mathtt{front.size()} - \mathtt{back.size()}|$$

バランス調整を行わない add(i,x)・remove(i) の処理では、ポテンシャルは高々 1 しか増えないことに注目しよう。

次の式が成り立つので、balance() が要素を動かした直後のポテンシャル Φ_0 は 1 以下である。

$$\Phi_0 = |\lfloor \mathtt{n}/2 \rfloor - \lceil \mathtt{n}/2 \rceil| \le 1$$

balance() が要素を動かす直前には $3\mathtt{front.size()} < \mathtt{back.size()}$ であったと仮定しても一般性を失わない。次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\mathtt{n} &= \mathtt{front.size()} + \mathtt{back.size()} \\
&< \mathtt{back.size()}/3 + \mathtt{back.size()} \\
&= \frac{4}{3}\mathtt{back.size()}
\end{aligned}$$

このときのポテンシャル Φ_1 は次のように評価できる。

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \mathtt{back.size()} - \mathtt{front.size()} \\
&> \mathtt{back.size()} - \mathtt{back.size()}/3 \\
&= \frac{2}{3}\mathtt{back.size()} \\
&> \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\mathtt{n} \\
&= \mathtt{n}/2
\end{aligned}$$

以上より、前に balance() が要素を動かしてから、add(i,x)・remove(i) が呼ばれた回数は $\Phi_1 - \Phi_0 > \mathtt{n}/2 - 1$ 以上である。 □

2.5.2 要約

次の定理は DualArrayDeque の性質をまとめたものだ。

定理 **2.3.** *DualArrayDeque* は *List* インターフェースを実装する。resize() と balance() のコストを無視すると、*DualArrayDeque* における各操作の実行時間は、

- `get(i)`・`set(i,x)` の実行時間は $O(1)$ である。
- `add(i,x)`・`remove(i)` の実行時間は $O(1+\min\{i,n-i\})$ である。

また、空の *DualArrayDeque* に対して長さ m の任意の `add(i,x)`・`remove(i)` からなる操作の列を実行する。このとき `resize()` にかかる時間の合計は $O(m)$ である。

2.6 RootishArrayStack：メモリ効率に優れた配列スタック

ここまで紹介したデータ構造には共通の欠点がある。1 つか 2 つの配列だけを使い、配列のサイズを頻繁には変更するのを避けているので、配列の中に空きがしばしばある点だ。例えば `resize()` 直後の ArrayStack では配列は半分しか埋まっていない。3 分の 1 しか埋まっていないことさえある。

この節では無駄なスペースの少ない RootishArrayStack というデータ構造を紹介する [*10]。RootishArrayStack は n 個の要素を $O(\sqrt{n})$ 個の配列に入れる。常に空きは合わせて $O(\sqrt{n})$ 箇所である。 残りのすべての場所にはデータが入っているのだ。つまり n 個の要素を入れるとき無駄になるスペースは $O(\sqrt{n})$ 以下である。

RootishArrayStack は**ブロック**と呼ぶ r 個の配列に要素を入れる。この配列は $0,1,\ldots,r-1$ と添字付けられる。参考のために図 2.5 を見てほしい。ブロック b は $b+1$ 個の要素を含む。すなわち r 個のブロックが含む要素数の合計は次のように計算できる。

$$1+2+3+\cdots+r = r(r+1)/2$$

この等式が成り立つのは図 2.6 を見ればわかるだろう。

RootishArrayStack
```
ArrayStack<T*> blocks;
int n;
```

リストの要素はブロックに順番に入れる。0 番目の要素はブロック 0 に、1・2 番目の要素はブロック 1 に、3・4・5 番目の要素はブロック 2 に格納さ

[*10] 訳注：RootishArrayStack は前節までのデータ構造と比べると日常での遭遇頻度が極端に落ちる印象を受けるので、初学者は飛ばしてもよい。ただし課題設定と設計アイデアは興味深い。

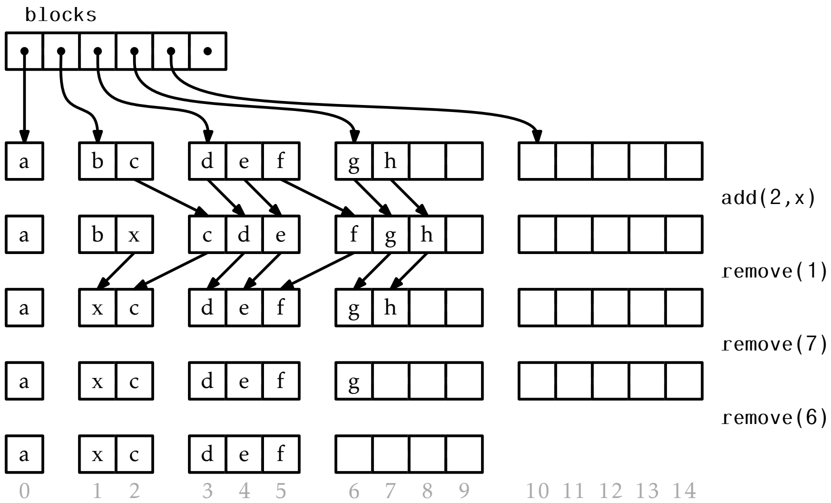


図 2.5: RootishArrayStack に対する add(i,x)・remove(i) の実行例。矢印は要素のコピーを表す。

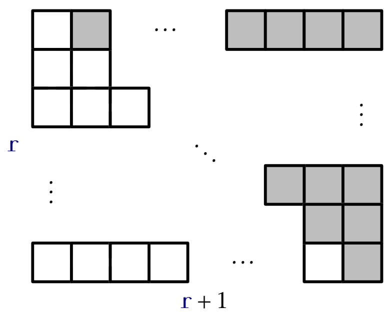


図 2.6: 白い正方形の数は合わせて $1+2+3+\cdots+r$ である。斜線を引いた正方形の数も同じである。白い正方形と斜線を引いた正方形を合わせてできる、正方形全体は、$r(r+1)$ 個の正方形からなる。

れる。全体で $\mathtt{i}$ 番目の要素がどのブロックのどの位置に入っているかわかるだろうか？

$\mathtt{i}$ 番目の要素がどのブロックに入っているかさえ分かれば、ブロック内での位置は簡単に計算できる。インデックス $\mathtt{i}$ の要素が $\mathtt{b}$ 番目のブロックに入っているなら、$0,\ldots,\mathtt{b}-1$ 番目のブロックにおける要素数の合計は $\mathtt{b}(\mathtt{b}+1)/2$ である。そのため $\mathtt{i}$ は

$$\mathtt{j} = \mathtt{i} - \mathtt{b}(\mathtt{b}+1)/2$$

として $\mathtt{b}$ 番目のブロックの $\mathtt{j}$ 番目の位置に入っている [*11]。$\mathtt{i}$ から $\mathtt{b}$、つまりどのブロックに入っているのかを計算する方法はもう少しややこしい。$\mathtt{i}$ 以下のインデックスを持つ要素は $\mathtt{i}+1$ 個ある。一方 $0,\ldots,b$ 番目のブロックに入っている要素数の合計は $(\mathtt{b}+1)(\mathtt{b}+2)/2$ である。よって $\mathtt{b}$ は次の式を満たす最小の整数である。

$$(\mathtt{b}+1)(\mathtt{b}+2)/2 \geq \mathtt{i}+1$$

この式は次のように変形できる。

$$\mathtt{b}^2 + 3\mathtt{b} - 2\mathtt{i} \geq 0$$

2 次方程式 $\mathtt{b}^2 + 3\mathtt{b} - 2\mathtt{i} = 0$ はふたつの解 $\mathtt{b} = (-3+\sqrt{9+8\mathtt{i}})/2$ と $\mathtt{b} = (-3-\sqrt{9+8\mathtt{i}})/2$ を持つ。ふたつめの解は常に負の値なので捨ててよい。よって、解は $\mathtt{b} = (-3+\sqrt{9+8\mathtt{i}})/2$ である。この解は一般に整数とは限らない。しかし元の不等式に戻ると $\mathtt{b} \geq (-3+\sqrt{9+8i})/2$ を満たす最小の $\mathtt{b}$ が欲しかったのであった。これは次のように書ける。

$$\mathtt{b} = \left\lceil (-3+\sqrt{9+8i})/2 \right\rceil$$

RootishArrayStack

```
int i2b(int i) {
  double db = (-3.0 + sqrt(9 + 8*i)) / 2.0;
  int b = (int)ceil(db);
  return b;
}
```

*11 訳注：たとえば b=2 かつ i=3 のとき、j=3-3=0 となり、i に対応するのは 2 番目のブロックの 0 番目の要素である。

このインデックス i からブロック番号 b への変換関数 i2b を用いれば、get(i) と set(i,x) を実装するのは簡単だ。まず b を計算し、そのブロック内のインデックス j を求め、適切な操作を実行すればよい。

RootishArrayStack
```
T get(int i) {
  int b = i2b(i);
  int j = i - b*(b+1)/2;
  return blocks.get(b)[j];
}
T set(int i, T x) {
  int b = i2b(i);
  int j = i - b*(b+1)/2;
  T y = blocks.get(b)[j];
  blocks.get(b)[j] = x;
  return y;
}
```

この章のデータ構造のどれかを使って blocks リストを表現すれば、get(i) も set(i,x) も実行時間は定数である。

add(i,x) はもう手慣れたものだろう。まずデータ構造が一杯かどうか、つまり $r(r+1)/2 = n$ かどうかを確認する。もしそうなら grow() を呼び出し新たなブロックを追加する。その後 $i,\ldots,n-1$ 番目の要素をそれぞれ右にひとつずらし、新たな i 番目の要素を入れるための隙間を作る。

RootishArrayStack
```
void add(int i, T x) {
  int r = blocks.size();
  if (r*(r+1)/2 < n + 1) grow();
  n++;
  for (int j = n-1; j > i; j--)
    set(j, get(j-1));
  set(i, x);
```

```
}
```

grow() メソッドはやってほしいことをしてくれる、つまり新しいブロックを追加してくれる。

RootishArrayStack
```
void grow() {
  blocks.add(blocks.size(), new T[blocks.size()+1]);
}
```

grow() のコストを無視すれば、add(i,x) の実行時間はシフト操作の回数を数えれば十分で、これは $O(1+\mathtt{n}-\mathtt{i})$、すなわち ArrayStack と同じである。

remove(i) は add(i,x) に似ている。$\mathtt{i}+1,\ldots,\mathtt{n}$ 番目の要素をそれぞれ左にひとつずつシフトし、ふたつ以上の空のブロックがあれば shrink() を呼び出し、使われていないブロックをひとつだけ残して削除する。

RootishArrayStack
```
T remove(int i) {
  T x = get(i);
  for (int j = i; j < n-1; j++)
    set(j, get(j+1));
  n--;
  int r = blocks.size();
  if ((r-2)*(r-1)/2 >= n) shrink();
  return x;
}
```

RootishArrayStack
```
void shrink() {
    int r = blocks.size();
    while (r > 0 && (r-2)*(r-1)/2 >= n) {
            delete [] blocks.remove(blocks.size()-1);
            r--;
```

```
    }
}
```

ここでもまた shrink() のコストを無視すれば、remove(i) の実行時間はシフト操作の回数を数えれば十分で、これは $O(n-i)$ である[*12]。

2.6.1 拡張・収縮の分析

上の add(i,x)・remove(i) の解析では grow()・shrink() のことを考慮していなかった。まず、ArrayStack.resize() とは違い、grow() と shrink() は要素をコピーしないことに注意する。つまり大きさ r の配列を割り当て・解放するだけである。環境によって、これは定数時間で実行できたり、r に比例する時間がかかったりする。

grow()・shrink() を呼んだ直後の状況はわかりやすい。最後のブロックは空で、その他のブロックは一杯である。そのため、次の grow()・shrink() が呼ばれるのは、少なくとも $r-1$ 回要素が追加・削除された後である。よって、grow()・shrink() に $O(r)$ だけ時間がかかっても、そのコストは $r-1$ 回の add(i,x)・remove(i) で償却され、grow()・shrink() の償却コストは $O(1)$ である。

2.6.2 領域使用量

つづいて RootishArrayStack が使う無駄な領域の量を解析する。RootishArrayStack が確保している配列の中でデータが入っていない箇所の数を数えたい。これを**無駄な領域**ということにする。

remove(i) は RootishArrayStack が空きのあるブロックを高々 2 つしか持たないことを保証する。よって n 個の要素を含む RootishArrayStack のブロック数を r とすれば次の関係が成り立つ。

$$(r-2)(r-1)/2 \leq n$$

ここでまた二次式の解を考えれば次の式が成り立つ。

$$r \leq (3+\sqrt{1+8n})/2 = O(\sqrt{n})$$

[*12] 訳注：remove(i) の場合は常に $i < n$ すなわち $n-i > 0$ が成り立つため、add(i,x) の計算量のように 1 を足す必要がない。

末尾のブロックふたつの大きさは r と $r-1$ なので、これらのブロックによる無駄な領域の量は $2r-1 = O(\sqrt{n})$ である。もしこれらのブロックを（例えば）ArrayStack に入れれば、r 個のブロックを入れる List による無駄な領域の量も $O(r) = O(\sqrt{n})$ である。n の値やその他の情報を保持するのに使うその他の領域は $O(1)$ である。以上より、RootishArrayStack の無駄な領域の量は合計 $O(\sqrt{n})$ である。

この空間領域量は、空からはじまり要素をひとつずつ追加できるデータ構造の中で最適であることを示す。正確にいうと、n 個の要素を追加する際にはどこかのタイミングで（ほんの一瞬かもしれないが）$\sqrt{n}$ 以上の無駄な領域が生じることを示す。

空のデータ構造に n 個の要素をひとつずつ追加していくとする。完了したときには、r 個のブロックに分散して n 個のアイテムがデータ構造に入っている。$r \geq \sqrt{n}$ なら、r 個のブロックを追跡するために r 個のポインタ（参照）を使い、ポインタは無駄な領域である [*13]。一方で $r < \sqrt{n}$ なら鳩の巣原理より大きさ $n/r > \sqrt{n}$ 以上のブロックが存在する。このブロックがはじめて割当てられた瞬間を考える。このブロックは割当てられたとき空なので、$\sqrt{n}$ の無駄な領域が生じている。以上より、n 個の要素を挿入するまでのあるタイミングでデータ構造は $\sqrt{n}$ の無駄な領域を生じる。

2.6.3 要約

次の定理は RootishArrayStack についての議論をまとめたものだ。

定理 **2.4.** *RootishArrayStack* は *List* インターフェースを実装する。grow()・shrink() のコストを無視すると、*RootishArrayStack* における各操作の実行時間は、

- get(i)・set(i,x) の実行時間は $O(1)$ である。
- add(i,x)・remove(i) の実行時間は $O(1+n-i)$ である。

空の *RootishArrayStack* に対して長さ m の任意の add(i,x)・remove(i) からなる操作の列を実行するとき、grow()・shrink() にかかる時間の合計は $O(m)$ である。

要素数 n の *RootishArrayStack* が使う（ワード単位で測った）使用領域

[*13] 訳注：たとえば続く第 3 章では、この考えを更に進めて r=n 個のブロックを追跡するために n 個のポインタを用いる、連結リストと呼ばれるデータ構造を紹介する。

量 [*14] は $\mathtt{n}+O(\sqrt{\mathtt{n}})$ である。

2.6.4 平方根の計算方法

第一章の計算モデルの説明を覚えていれば、`RootishArrayStack` は平方根を計算しているため、これまで使ってきたワード RAM モデル（1.4 節）に基づけばまだ平方根の計算方法について検討する必要があるとに気づいたかもしれない。[*15]。平方根の算出は基本的な操作とは一般的にみなされておらず、ワード RAM モデルに含まれていない。

この節では、平方根の算出が効率的に実装できることを示す。特に「長さが $O(\sqrt{\mathtt{n}})$ の 2 つの配列 `sqrttab` と `logtab` を作り、実行時間が $O(\sqrt{\mathtt{n}})$ である前処理」のあとで、どんな自然数 $\mathtt{x}\in\{0,\ldots,\mathtt{n}\}$ についても定数時間で $\lfloor\sqrt{\mathtt{x}}\rfloor$ を計算できることを示す。

次の補題は $\mathtt{x}$ の平方根の計算を $\mathtt{x}'$ の平方根の計算に帰着できることを示すものだ。

補題 2.3. 二つの数 $\mathtt{x}\ge 1$ と $\mathtt{x}'=\mathtt{x}-a$ について、$0\le a\le\sqrt{\mathtt{x}}$ だと仮定する。このとき、$\sqrt{x'}\ge\sqrt{\mathtt{x}}-1$ である。

証明. 以下を示せばよい。

$$\sqrt{\mathtt{x}-\sqrt{\mathtt{x}}}\ge\sqrt{\mathtt{x}}-1\ .$$

両辺の二乗を取ると、

$$\mathtt{x}-\sqrt{\mathtt{x}}\ge\mathtt{x}-2\sqrt{\mathtt{x}}+1$$

となり、整理すると

$$\sqrt{\mathtt{x}}\ge 1$$

となる。これはどんな $\mathtt{x}\ge 1$ についても成り立つ。 □

あらゆる自然数 $\mathtt{x}\in\{0,\ldots,\mathtt{n}\}$ の前に、まずは一部の x の平方根を計算する方法から始めよう。自然数 x が $2^{\mathtt{r}}\le\mathtt{x}<2^{\mathtt{r}+1}$ を満たす、すなわち $\lfloor\log\mathtt{x}\rfloor=\mathtt{r}$

[*14] 1.4 節で説明した、どのようにメモリ量を測るかという話を思い出してほしい。

[*15] 訳注：計算モデルとは計算を理論的に調べるための道具である。我々はここまで w ビットのワード RAM モデルに基づいて操作の実行時間やデータ構造のメモリ使用量を調べてきた。1.4 節で言及したように、ワード RAM モデルの基本的な操作は算術演算、比較、ビット単位の論理演算であり、平方根の算出は含まない。すなわち我々は平方根の算出の実行時間をまだ知らない。

である場合を考える。このとき自然数 x は 2 進数 $r+1$ ビットで表せる [*16]。ここで、$x' = x - (x \bmod 2^{\lfloor r/2 \rfloor})$ について考えると、この x' は補題 2.3 を満たすため $\sqrt{x} - \sqrt{x'} \le 1$ が成り立つ。更に、x' の下位 $\lfloor r/2 \rfloor$ ビットは 0 である。すると残りのビット数から考えて、x' は

$$2^{r+1-\lfloor r/2 \rfloor} \le 4 \cdot 2^{r/2} \le 4\sqrt{x}$$

通りの値しか取れない [*17]。これは $\lfloor \sqrt{x'} \rfloor$ の値を入れておく配列 sqrttab を [*18]。もう少し正確に言えば、配列 sqrttab の各要素の値は

$$\mathtt{sqrttab}[i] = \left\lfloor \sqrt{i 2^{\lfloor r/2 \rfloor}} \right\rfloor .$$

である。こうすることで、各要素 sqrttab[i] はあらゆる $x \in \{i 2^{\lfloor r/2 \rfloor}, \ldots, (i+1)2^{\lfloor r/2 \rfloor} - 1\}$ について、$\sqrt{x}$ の値からおよそ 2 しか離れていない。言い換えれば、配列要素 $s = \mathtt{sqrttab}[x{>>}\lfloor r/2 \rfloor]$ について、s は $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ か、$\lfloor \sqrt{x} \rfloor - 1$ か、$\lfloor \sqrt{x} \rfloor - 2$ のいずれかの値を取る [*19]。$(s+1)^2 > x$ となるまで s をインクリメントすることで、x の平方根を下に丸めた自然数 $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ の値を特定できる。

FastSqrt
```
int sqrt(int x, int r) {
  int s = sqrtab[x>>r/2];
  while ((s+1)*(s+1) <= x) s++; // executes at most twice
```

[*16] 訳注：2 進数表記とは 0 と 1 というふたつの数字を用いて整数を表す表記法である。10 進法表記の 0, 1, 2, 3, 4 は、2 進法表記で 3 ビットを用いると 000, 001, 010, 011, 100 と表記される。コンピュータは 0 と 1 のふたつの状態を取れる部品を用いて数を表現するため、ある数を 2 進数表記する際に何ビット必要なのかは重要である。

[*17] 訳注：中辺は単に左辺に 2 をかけて導出し、中辺から右辺にかけては $2^r \le x < 2^{r+1}$ から導出される $2^{r/2} \le \sqrt{x}$ を用いた。右辺から、x' の可能な値の数が $O(\sqrt{n})$ でバウンドされていると分かる。

[*18] 訳注：つまり、平方根はプログラム中で何千回も使いまわされる処理でありうるのだから、その処理を高速化できるように、空間計算量を少し犠牲にして中間結果を配列 sqrttab に入れることで、時間計算量を改善しようという算段である。x' の数が高々 $2^{r+1-\lfloor r/2 \rfloor}$ 通り（たとえば一般的なコンピュータにおける r=32 の場合は 10 万通り程度）しかない、ビッグオー記法で表記すれば $2^{r+1-\lfloor r/2 \rfloor} \le 4\sqrt{x}$ という結果から $O(\sqrt{n})$ 通りしかないのだから、この工夫は実を結ぶ。

[*19] x >> n は右シフト演算と呼ばれ、x を表すビットそれぞれを n ビットずつ右にずらす。算術上は、x から $x mod 2^n$ を引いた（すなわち、下位 n ビットを全て 0 にした）あとに 2^n で割った場合と同じ効果を持つ。

```
  return s;
}
```

ここまでは $x \in \{2^r,\ldots,2^{r+1}-1\}$ の場合についてのみ考えてきた。また、sqrttab は $r = \lfloor \log x \rfloor$ についてのみ使えるものであった。これを一般化するには $\lfloor \log n \rfloor$ 個の sqrttab を $\lfloor \log x \rfloor$ の各値に対して準備すればよさそうだ。各 sqrttab の大きさは等比数列で、最大のものの大きさは高々 $4\sqrt{n}$ である。そのため、すべての sqrttab の大きさを合計すると $O(\sqrt{n})$ である。

しかし実は sqrttab はひとつだけで十分なのである。$r = \lfloor \log n \rfloor$ の場合の sqrttab だけがあればよいのだ。

$\log x = r' < r$ である x については $2^{r-r'}$ をかけて**アップグレード**し、次の等式を使えばよい。

$$\sqrt{2^{r-r'}x} = 2^{(r-r')/2}\sqrt{x} \ .$$

$2^{r-r'}x$ は $\{2^r,\ldots,2^{r+1}-1\}$ に含まれるので、上の値は sqrttab に入っている。次のコードは $\{0,\ldots,2^{30}-1\}$ の任意の要素 x について、大きさ 2^{16} の配列 sqrttab を使って $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ を計算するものである。

FastSqrt
```
int sqrt(int x) {
  int rp = log(x);
  int upgrade = ((r-rp)/2) * 2;
  int xp = x << upgrade;  // xp has r or r-1 bits
  int s = sqrtab[xp>>(r/2)] >> (upgrade/2);
  while ((s+1)*(s+1) <= x) s++;  // executes at most twice
  return s;
}
```

$r' = \lfloor \log x \rfloor$ の計算方法も説明しておく。平方根の場合と同様に大きさ $2^{r/2}$ の配列 logtab を使う。$\lfloor \log x \rfloor$ は x を二進法で表記したとき 1 である最大の桁の添え字であることさえわかれば、実装は難しくない。すなわち $x > 2^{r/2}$ のとき x を $r/2$ ビットだけ右にシフトし、logtab の添え字とする。次のコードは $\{0,\ldots,2^{32}-1\}$ の任意の要素 x について、大きさ 2^{16} の配列 logtab を使って $\lfloor \log x \rfloor$ を計算するものである。

FastSqrt
```
int log(int x) {
```

```
  if (x >= halfint)
    return 16 + logtab[x>>16];
  return logtab[x];
}
```

最後になるが、logtab および sqrttab を初期化するコードも掲載しておく。

FastSqrt
```
void inittabs() {
  sqrtab = new int[1<<(r/2)];
  logtab = new int[1<<(r/2)];
  for (int d = 0; d < r/2; d++)
    for (int k = 0; k < 1<<d; k++)
      logtab[1<<d+k] = d;
  int s = 1<<(r/4);                    // sqrt(2^(r/2))
  for (int i = 0; i < 1<<(r/2); i++) {
    if ((s+1)*(s+1) <= i << (r/2)) s++; // sqrt increases
    sqrtab[i] = s;
  }
}
```

まとめると、ワード RAM では $O(\sqrt{n})$ だけのメモリを使って配列（sqrttab や logtab）を作れば、i2b(i) で使う各操作は実行時間で実行できる。この配列は n が二倍または二分の一の大きさになるたび拡大・縮小してもよい。この場合実行時間は ArrayStack のときと同様に add(i,x)・remove(i) の実行回数にわたって償却できる。

2.7 ディスカッションと練習問題

この章で説明したデータ構造は古くから知られているもので多くの議論がなされてきた。30 年以上前の実装さえ見つかる。例えば Knuth [46, Section 2.2.2] では、一般化すると ArrayStack・ArrayQueue・ArrayDeque になるスタック・キュー・双方向キューの実装を述べている。

RootishArrayStack を記述し 2.6.2 節で述べた下界 $\sqrt{n}$ を示した最初の文献はおそらく Brodnik et al. [13] である。彼らはこの章で説明したものとは別の巧みなブロックサイズの選び方も示しており、このやり方では i2b(i) の中で平衡根の計算をせずに済む。このやり方では i 番目の要素を含むブロックは $\lfloor \log(i+1) \rfloor$ 番目のもので、これは $i+1$ の二進表現における最高位の桁である。コンピュータ・アーキテクチャによってはこの計算を行うための命令があり、これは効率的に計算できる。

RootishArrayStack に関連するデータ構造として、Goodrich and Kloss [35] の二段階の**階層ベクトル**がある。このデータ構造では get(i,x)・set(i,x) の実行時間は定数である。add(i,x)・remove(i) の実行時間は $O(\sqrt{n})$ である。問 2.10 で扱う RootishArrayStack をさらに改良した実装ではこれに近い実行時間を達成する。

問 **2.1.** List の addAll(i,c) 操作は Collection c の要素をすべてリストの i 番目の位置に順に挿入する。（add(i,x) は $c = \{x\}$ とした特殊な場合である。）この章で説明したデータ構造において addAll(i,c) を add(i,x) 繰り返し実行して実装するのはなぜ効率がよくないのかを説明せよ。またより効率的な実装を考え、実装せよ。

問 **2.2.** RandomQueue を設計・実装せよ。これは Queue インターフェースの実装で、remove() 操作はそのときキューに入っている要素から一様な確率でひとつ選んで取り出すものである。（RandomQueue はカバンに要素を入れておき、中を見ずに適当に要素を取り出すようなものだと考えればよい。）

ただし RandomQueue における add(x)・remove() の償却実行時間は定数でなければならないとする。

問 **2.3.** Treque (triple-ended queue) を設計・実装せよ。Treque は List の実装であって、get(i)・set(i,x) は定数時間で実行でき、add(i,x)・remove(i) の実行時間は次のように表せるものだ。

$$O(1 + \min\{i, n - i, |n/2 - i|\})$$

つまり、両端あるいは中央に近い位置の修正が高速なデータ構造である。

問 **2.4.** rotate(a,r) 操作を実装せよ。配列 a を「回転」する、すなわち $i \in \{0,\ldots,a.\mathtt{length}\}$ のすべてについて a[i] を $a[(i+r) \bmod a.\mathtt{length}]$ に動かすものだ。

問 **2.5.** List の回転操作 rotate(r) を実装せよ。これはリストの i 番目の要

素を $(\mathtt{i}+\mathtt{r}) \bmod \mathtt{n}$ 番目に移す。ただし ArrayDeque や DualArrayDeque に対しての rotate(r) の実行時間は $O(1+\min\{\mathtt{r},\mathtt{n}-\mathtt{r}\})$ でなければならないとする。

問 **2.6.** ArrayDeque を実装せよ。ただし、add(i, x)・remove(i)・resize() におけるシフト処理は高速な System.arraycopy(s, i, d, j, n) を利用して実現すること。

問 **2.7.** % 演算を用いずに ArrayDeque を実装せよ。（この演算に多くの時間がかかる環境があるのだ。）a.length が 2 の冪なら次の式が成り立つことを利用してよい。

$$\mathtt{k}\%\mathtt{a.length} = \mathtt{k}\&(\mathtt{a.length}-1)$$

なお & はビット単位の and 演算オペレータである。

問 **2.8.** 剰余演算を一切使わない ArrayDeque の実装を考えよ。すべてのデータは配列内の連続した領域に順番に並んでいることを利用してよい。データがこの配列の先頭・末尾の外にはみ出たときは、rebuild() 操作を実行する。全ての操作の償却実行時間は ArrayDeque と同じになるように注意すること。ヒント：rebuild() の実装方法がポイントだ。データがどちらの端からもハミ出ない状態に $\mathtt{n}/2$ 回以下の操作で辿りつかなければならない。

実装したプログラムの性能を元の ArrayDeque と比較せよ。実装を（System.arraycopy(a, i, b, i, n) を使って）最適化し、ArrayDeque の性能を上回るかどうか確認せよ。

問 **2.9.** RootishArrayStack を修正し、無駄な領域量は $O(\sqrt{\mathtt{n}})$ だが、add(i, x)・remove(i, x) の実行時間が $O(1+\min\{\mathtt{i},\mathtt{n}-\mathtt{i}\})$ であるデータ構造を設計・実装せよ。

問 **2.10.** RootishArrayStack を修正し、無駄な領域量は $O(\sqrt{\mathtt{n}})$ だが、add(i, x)・remove(i, x) の実行時間が $O(1+\min\{\sqrt{\mathtt{n}},\mathtt{n}-\mathtt{i}\})$ であるデータ構造を設計・実装せよ。（3.3 節が参考になるだろう。）

問 **2.11.** RootishArrayStack を修正し、無駄な領域量は $O(\sqrt{\mathtt{n}})$ だが、add(i, x)・remove(i, x) の実行時間が $O(1+\min\{\mathtt{i},\sqrt{\mathtt{n}},\mathtt{n}-\mathtt{i}\})$ であるデータ構造を設計・実装せよ。（3.3 節が参考になるだろう。）

問 **2.12.** CubishArrayStack を設計・実装せよ。CubishArrayStack は List インターフェースを実装する三段階のデータ構造であって、無駄な領域量が

$O(\mathtt{n}^{2/3})$ であるものだ。get(i)・set(i,x) は定数時間で実行できる。add(i,x)・remove(i) の償却実行時間は $O(\mathtt{n}^{1/3})$ である。

第 3 章 連結リスト

この章でも List インターフェースの実装を扱う。ただし今度は配列ではなくポインタを使う方法である。この章のデータ構造は、リストの要素を収めたノードの集まりである。参照（ポインタ）を使ってノードを繋げ列を作る。まずは単方向連結リストを紹介する。これを使うと Stack・(FIFO)Queue の操作を定数時間で実行できる。次に双方向連結リストを紹介する。これを使うと Deque の操作を定数時間で実行できる。

List インターフェースを実装するために、連結リスト・配列のいずれを使うのがよいかは場合による。連結リストの短所はどんな要素の get(i)・set(i,x) も定数時間で行えるわけではないことだ。配列とは違って i 番目の要素を読み書きする際にリストをひとつずつ辿らなければならないのである。連結リストの長所は動的な操作がしやすいことだ。ノードの参照 u があれば、u を削除したり、u の隣にノードを挿入したりするのにかかる時間は定数である。このとき u がリストの中のどのノードであってもよいのだ [*1]。

3.1 SLList：単方向連結リスト

SLList（singly-linked list、単方向連結リスト）は Node の列である。各ノード u はデータ u.x と参照 u.next を保持している。参照は列における次のノードを指している。列の末尾のノード w においては w.next = null である。

[*1] 訳注：第 2 章で紹介された backing array を用いたデータ構造とは対照的である。削除と挿入をどれだけ高速に実行できるかは、どのデータ構造も添字 i に依存していた。

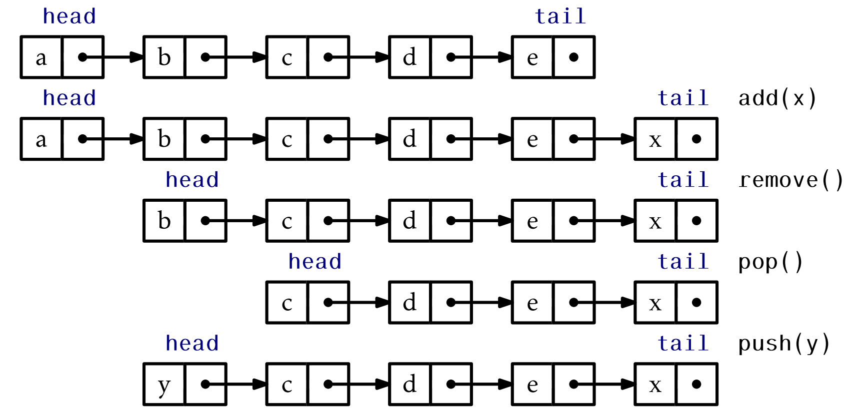


図 3.1: SLList における、Queue 操作（add(x)・remove()）と、Stack 操作（push(x)・pop()）

SLList
```
class Node {
public:
  T x;
  Node *next;
  Node(T x0) {
    x = 0;
    next = NULL;
  }
};
```

効率のため SLList は変数 head・tail で列の先頭・末尾のノードへの参照を保持している。また n は列の長さを表している。

SLList
```
Node *head;
Node *tail;
int n;
```

SLList における Stack・Queue 操作を図 3.1 に示した。

SLList を使って Stack の push(x)・pop() を効率的に実装できる。列の先頭に追加・削除すればよいのである。push(x) は新しいノード u を作り、データ値に x を設定し、u.next を古い先頭とし、u を新しい先頭にする。最後に SLList の要素がひとつ増えたので、n を 1 だけ大きくする。

SLList
```
T push(T x) {
  Node *u = new Node(x);
  u->next = head;
  head = u;
  if (n == 0)
    tail = u;
  n++;
  return x;
}
```

pop() では、SLList が空でないことを確認し、head = head.next として先頭を削除し、n を 1 だけ小さくする。最後の要素が削除される場合は特別で、tail を null に設定する必要がある。

SLList
```
T pop() {
  if (n == 0)  return null;
  T x = head->x;
  Node *u = head;
  head = head->next;
  delete u;
  if (--n == 0) tail = NULL;
  return x;
}
```

明らかに push(x)・pop() の実行時間はいずれも $O(1)$ である。

3.1.1 キュー操作

SLList を使って FIFO キューの操作 add(x)・remove() を定数時間で実行することもできる。削除はリストの先頭から行われるので、pop() と同じである。

SLList
```
T remove() {
  if (n == 0)  return null;
  T x = head->x;
  Node *u = head;
  head = head->next;
  delete u;
  if (--n == 0) tail = NULL;
  return x;
}
```

一方で要素の追加はリストの末尾に対して行う。u を新たに加えるノードとすると、ほとんどの場合は tail.next = u とすればよい。しかし n = 0 の場合は特別で、tail = head = null となっている[*2]。この場合、tail も head も u になる。

SLList
```
bool add(T x) {
  Node *u = new Node(x);
  if (n == 0) {
    head = u;
  } else {
    tail->next = u;
  }
  tail = u;
  n++;
```

[*2] 訳注：つまり tail が null で tail.next にアクセスするとエラーとなるため、別の対応が必要となる。

```
  return true;
}
```

明らかに add(x)・remove() はいずれも定数時間で実行できる。

3.1.2 要約

次の定理は SLList の性能を整理したものである。

定理 **3.1.** *SLList* は *Stack*・*(FIFO) Queue* インターフェースの実装である。push(x)・pop()・add(x)・remove() の実行時間はいずれも $O(1)$ である。

SLList は Deque の操作をほぼすべて実装している。足りないのは SLList の末尾を削除する操作だ。SLList の末尾を削除するのは難しいが、これは新しい末尾を現在の末尾のひとつ前のノードに設定しなければならないためである。末尾のひとつ前のノード w とは w.next = tail であるもののことだ。困ったことに w を見つけるには SLList を head から順に n − 2 個のノードだけ辿っていかなければならないのである。

3.2 DLList: 双方向連結リスト

DLList（doubly-linked list、双方向連結リスト）は SLList に似ている。違いはノード u が直後のノード u.next への参照と直前のノード u.prev への参照との両方を持っている点だ。

DLList
```
struct Node {
  T x;
  Node *prev, *next;
};
```

SLList を実装には特別扱いしなければならない場合がいくつかあった。例えば SLList の最後のノードを削除するときや、空の SLList にノードを追加するときには head・tail をふつうと違うやり方で更新する必要があった。DLList ではこういう特別な場合がより多い。ダミーノードを使うと DLList

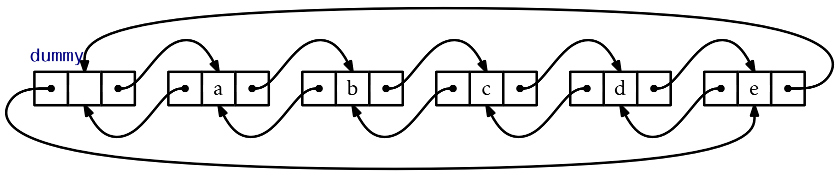


図 3.2: a,b,c,d,e からなる DLList

のこれら特別な場合をシンプルに書ける。ダミーノードはデータを含まずただ場所だけを占める空のノードで、これを置くと特別扱いする必要のあるノードがなくなるのだ。すべてのノードには next と prev がある。dummy はリストの最後のノードの直後にあり、かつ最初のノードの直前にあると見なす。こうすると双方向連結リストのノードは図 3.2 に示すように循環する。

DLList
```
Node dummy;
int n;
DLList() {
  dummy.next = &dummy;
  dummy.prev = &dummy;
  n = 0;
}
```

DLList から添え字を指定してノードを見つけるのは簡単だ。先頭（dummy.next）から順方向に列を辿るか、末尾（dummy.prev）から逆方向に列を辿ればよい。こうして i 番目のノードを見つけるのにかかる時間は $O(1+\min\{i,n-i\})$ である。

DLList
```
Node* getNode(int i) {
  Node* p;
  if (i < n / 2) {
    p = dummy.next;
    for (int j = 0; j < i; j++)
```

```
      p = p->next;
  } else {
    p = &dummy;
    for (int j = n; j > i; j--)
      p = p->prev;
  }
  return (p);
}
```

get(i)・set(i,x) もまた簡単である。i 番目の頂点を見つけ、その値を読み書きすればよい。

DLList
```
T get(int i) {
    return getNode(i)->x;
}
T set(int i, T x) {
  Node* u = getNode(i);
  T y = u->x;
  u->x = x;
  return y;
}
```

これらの操作の実行時間のうち支配的なのは i 番目のノードを見つける時間なので、実行時間は $O(1+\min\{i,n-i\})$ である。

3.2.1 追加と削除

DLList におけるノード w の参照を持っていて、ノード u を w の直前に追加したいときは、u.next = w、u.prev = w.prev とし、u.prev.next・u.next.prev を適切に調整すればよい。（図 3.3 を参照せよ。）ダミーノードがあるので w.prev や w.next がない場合を特別扱いせずにすむ。

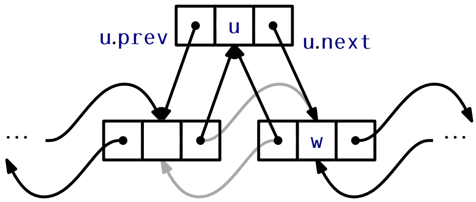


図 3.3: DLList において、u をノード w の直前に挿入する。

DLList
```
Node* addBefore(Node *w, T x) {
  Node *u = new Node;
  u->x = x;
  u->prev = w->prev;
  u->next = w;
  u->next->prev = u;
  u->prev->next = u;
  n++;
  return u;
}
```

add(i,x) 操作の実装は自明だ。DLList の i 番目のノードを見つけ、データ x を持つ新しいノード u をその直前に挿入すればよい。

DLList
```
void add(int i, T x) {
  addBefore(getNode(i), x);
}
```

add(i,x) の処理のうち実行時間が定数でないのは（getNode(i) を使って）i 番目のノードを見つける処理だけだ。よって add(i,x) の実行時間は $O(1+\min\{i,n-i\})$ である。

DLList からノード w を削除するのは簡単である。w.next・w.prev のポインタを w をスキップするように調整すればよいのだ。ここでもまたダミー

ノードのおかげで複雑な場合分けの必要がなくなっている。

DLList
```
void remove(Node *w) {
  w->prev->next = w->next;
  w->next->prev = w->prev;
  delete w;
  n--;
}
```

ここまでくると remove(i) も自明だ。i 番目のノードを見つけ、これを削除すればよい。

DLList
```
T remove(int i) {
  Node *w = getNode(i);
  T x = w->x;
  remove(w);
  return x;
}
```

getNode(i) によって i 番目のノードを見つける処理が支配的なので、remove(i) の実行時間は $O(1+\min\{i,n-i\})$ である。

3.2.2 要約

次の定理は DLList の性能をまとめたものである。

定理 **3.2.** *DLList* は *List* インターフェースを実装する。get(i)・set(i,x)・add(i,x)・remove(i) の実行時間はいずれも $O(1+\min\{i,n-i\})$ である。

もし getNode(i) のコストを無視すると、DLList の操作の実行時間はいずれも定数であることは注目に値する。つまり DLList の操作における時間のかかる部分は、興味のあるノードを見つける処理だけなのである。興味のあるノードさえ見つかれば、追加・削除・データの読み書きはいずれも定数時間で

実行できる。

これは 2 章で説明した配列を使った List の実装とは対照的である。そのときは興味のあるノードは定数時間で見つかるのだが、要素を追加したり削除したりするために、配列内の要素をシフトする必要があり、その結果として各処理は非定数時間であった。

このことから連結リストは何か別の方法でノードの参照が得られるアプリケーションに適している。 例えば連結リストのノードを USet に格納しておく。すると、要素 x のノードは USet から効率よく見つけられ、このノードはリストから定数時間で削除できる。

3.3 SEList：空間効率のよい連結リスト

連結リストの欠点はそのメモリ使用量である。（リストの真ん中に近い要素へのアクセスに時間がかかるのも欠点だが。）DLList のノードはみな前後合わせてふたつの参照を持つ。Node のフィールドのうちふたつはリストを維持するために占められ、残りのひとつだけがデータを入れるのに使われるのである。

SEList(space-efficient list) はシンプルなアイデアでこの無駄な領域を削減する。DLList のように一個ずつ要素を入れるのではなく、複数の要素を含むブロック（配列）をデータとして入れるのである。もう少し正確に説明する。SEList のパラメータとして**ブロックサイズ** b がある。SEList の個々のノードは $b+1$ 個の要素を収容できる配列をデータとして持つ。

後で詳しく説明するが、個々のブロックには Deque の操作を実行できると便利だ。このために BDeque (bounded deque) というデータ構造を使うことにする。これは 2.4 節で説明した ArrayDeque みたいなものだ。BDeque は ArrayDeque と少しだけ違う。新しい BDeque を作るときに用意する配列 a の大きさは $b+1$ であり、その後拡大も縮小もされない。BDeque の重要な特徴は先頭・末尾の要素を追加・削除する操作を定数時間で実行できることだ。これは要素を他のブロックから移動するのに役立つ。

SEList
```
class BDeque : public ArrayDeque<T> {
public:
  BDeque(int b) {
```

```
    n = 0;
    j = 0;
    array<int> z(b+1);
    a = z;
  }
  ~BDeque() { }
  // C++ Question: Why is this necessary?
  void add(int i, T x) {
    ArrayDeque<T>::add(i, x);
  }
  bool add(T x) {
    ArrayDeque<T>::add(size(), x);
    return true;
  }
  void resize() {}
};
```

SEList はブロックの双方向連結リストである。

SEList

```
class Node {
public:
  BDeque d;
  Node *prev, *next;
  Node(int b) : d(b) { }
};
```

SEList

```
int n;
Node dummy;
```

3.3.1 必要なメモリ量

SEList はブロックに含む要素数に次のような強い制限がある。末尾でないブロックはみな $b-1$ 個以上 $b+1$ 個以下の要素を含む。これはつまり SEList が n 要素を含むならブロック数は次の値以下である[*3]。

$$n/(b-1)+1 = O(n/b)$$

末尾以外の各ブロックの BDeque は $b-1$ 個以上の要素を含むので各ブロック内の無駄な領域は高々定数である。ブロックが使う余分なメモリも定数である。よって SEList の無駄な領域は $O(b+n/b)$ である[*4]。b を $\sqrt{n}$ の定数倍にすれば、SEList の無駄な領域を 2.6.2 節で導出した下界に等しくすることができる。

3.3.2 要素を検索

SEList の最初の課題はリストの i 番目の要素を見つけることである。要素の位置は次のふたつから決まる。

1. i 番目の要素を含むブロックをデータとして持つノード u
2. そのブロックの中の要素の添字 j

SEList
```
class Location {
public:
  Node *u;
  int j;
  Location() { }
  Location(Node *u, int j) {
    this->u = u;
    this->j = j;
  }
```

*3 訳注：1 が足されているのは n=0 のような特殊な場合への対応かと思われる。
*4 訳注：最初の項 b は末尾のブロック内の無駄な領域から来ている。

```
};
```

ある要素を含むブロックを見つけるために DLList のときと同じ方法を使う。目的のノードを、先頭から順方向にあるいは末尾から逆方向に探すのだ。唯一の違いはノードからノードに移る度にブロックをまるごとスキップすることになる点である。

SEList
```
void getLocation(int i, Location &ell) {
  if (i < n / 2) {
    Node *u = dummy.next;
    while (i >= u->d.size()) {
      i -= u->d.size();
      u = u->next;
    }
    ell.u = u;
    ell.j = i;
  } else {
    Node *u = &dummy;
    int idx = n;
    while (i < idx) {
      u = u->prev;
      idx -= u->d.size();
    }
    ell.u = u;
    ell.j = i - idx;
  }
}
```

ひとつ以下のブロックを除いて、すべてのブロックの要素数は $b-1$ 個以上であることを思い出してほしい。そのため全てのステップで探している要素に最低 $b-1$ 個の要素ずつ近づいていく。よって、順方向に探索するときは目的のノードに $O(1+i/b)$ ステップで到達する。一方逆方向では

$O(1+(\mathtt{n}-\mathtt{i})/\mathtt{b})$ ステップである。このふたつの値の小さい方がこのアルゴリズムの実行時間を決める。つまり、i 番目の要素を特定するのに要する時間は $O(1+\min\{\mathtt{i},\mathtt{n}-\mathtt{i}\}/\mathtt{b})$ である。

i 番目の要素を含むブロックを特定できたので、get(i)・set(i,x) はあとは目的のブロックの中の添え字を計算すればよい。

SEList
```
T get(int i) {
  Location l;
  getLocation(i, l);
  return l.u->d.get(l.j);
}
T set(int i, T x) {
  Location l;
  getLocation(i, l);
  T y = l.u->d.get(l.j);
  l.u->d.set(l.j, x);
  return y;
}
```

これらの操作の実行時間のうち i 番目の要素を含むブロックを探す時間が支配的なので、get(i) と set(i,x) の実行時間は $O(1+\min\{\mathtt{i},\mathtt{n}-\mathtt{i}\}/\mathtt{b})$ である。

3.3.3 要素の追加

SEList への要素の追加はもう少し複雑だ。一般的な場合を考える前に、より簡単な操作、末尾に要素を追加する操作 add(x) を考えよう。末尾のブロックが一杯（あるいはそもそもブロックがひとつも無い）ときは、新しいブロックを割当ててリストの末尾に追加する。すると末尾のブロックは一杯でないことが保証されるので、x をその末尾のブロックに追加できる。

SEList
```
void add(T x) {
```

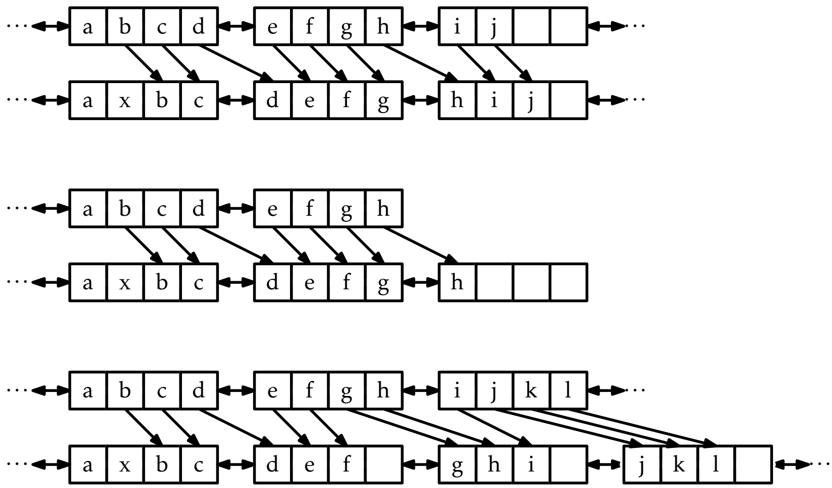


図 3.4: SEList において、要素 x を追加する際に起きる 3 つの場合。（この SEList ではブロックの大きさ b は 3 である。）

```
  Node *last = dummy.prev;
  if (last == &dummy || last->d.size() == b+1) {
    last = addBefore(&dummy);
  }
  last->d.add(x);
  n++;
}
```

add(i,x) でリストの中に要素を追加するのはより複雑だ。まず i 番目の要素を入れるべきノード u を特定する。ここで問題になるのは、u のブロックが既に $b+1$ 個の要素を含んでおり、x を入れる隙間が無い場合である。

$u_0,u_1,u_2,\ldots$ がそれぞれ u, u.next, u.next.next... を表すとする。u_0 に x を入れるスペースを提供してくれるブロックを求めて、$u_0,u_1,u_2,\ldots$ を探索する。この探索の過程で 3 つの場合が考えられる。（図 3.4 を参照せよ。）

1. すぐに（$r+1 \le b$ ステップ以内に）一杯でないブロックを持つノード

$\mathtt{u}_r$ が見つかる。この場合、r 回のシフトによって要素を次のブロックに移し、$\mathtt{u}_r$ の空いたスペースを $\mathtt{u}_0$ に持ってくる。すると $\mathtt{x}$ を $\mathtt{u}_0$ のブロックに挿入できるようになる。

2. すぐに（$r+1 \le \mathtt{b}$ ステップ以内に）ブロックのリストの末尾に到達する。この場合、新しい空のブロックをリストの末尾に追加し、最初のケースと同様の処理を行う。
3. $\mathtt{b}$ ステップ探しても空きがあるブロックが見つからない。この場合、$\mathtt{u}_0,\ldots,\mathtt{u}_{\mathtt{b}-1}$ はいずれも $\mathtt{b}+1$ 個の要素を含むブロックの列である。新しいブロック $\mathtt{u}_\mathtt{b}$ をこの列の直後に追加し、元々あった $\mathtt{b}(\mathtt{b}+1)$ 個の要素を、$\mathtt{u}_0,\ldots,\mathtt{u}_\mathtt{b}$ がいずれも $\mathtt{b}$ 個の要素を含むように分配する。すると $\mathtt{u}_0$ のブロックは $\mathtt{b}$ 個の要素しか含まないため、ここに $\mathtt{x}$ を挿入できる。

SEList
```
void add(int i, T x) {
  if (i == n) {
    add(x);
    return;
  }
  Location l; getLocation(i, l);
  Node *u = l.u;
  int r = 0;
  while (r < b && u != &dummy && u->d.size() == b+1) {
    u = u->next;
    r++;
  }
  if (r == b) {// b blocks each with b+1 elements
    spread(l.u);
    u = l.u;
  }
  if (u == &dummy) { // ran off the end - add new node
    u = addBefore(u);
  }
  while (u != l.u) { // work backwards, shifting elements
```

```
    u->d.add(0, u->prev->d.remove(u->prev->d.size()-1));
    u = u->prev;
  }
  u->d.add(l.j, x);
  n++;
}
```

add(i,x) の実行時間は上の 3 つの場合のどれが起きるかによって決まる。最初のふたつの場合は最大 b ブロックにわたって要素を探しシフトするので、実行時間は $O(\mathtt{b})$ である。3 つめの場合では、spread(u) を呼び出し $\mathtt{b}(\mathtt{b}+1)$ 個の要素を動かすので、実行時間は $O(\mathtt{b}^2)$ である。3 つめの場合のコストを無視すれば、i 番目の位置に要素 x を挿入するときの実行時間は $O(\mathtt{b}+\min\{\mathtt{i},\mathtt{n}-\mathtt{i}\}/\mathtt{b})$ である。(3 つめの場合のコストはあとで償却法で説明する。)

3.3.4 要素の削除

SEList から要素を削除する操作は要素を追加する操作に似ている。まずは i 番目の要素を含むノード u を特定する。そして u から要素を削除すると u のブロックの要素数が $\mathtt{b}-1$ より小さくなってしまう場合の対策が必要だ。

ここでもまた $\mathtt{u}_0,\mathtt{u}_1,\mathtt{u}_2,\ldots$ は u, u.next, u.next.next, ... を表すとする $\mathtt{u}_0,\mathtt{u}_1,\mathtt{u}_2,\ldots$ を順に $\mathtt{u}_0$ のブロックの要素数を $\mathtt{b}-1$ 以上にするために要素をもらえるノードを探す。ここでも考えられる 3 つの可能性がある。（図 3.5 を参照せよ。）

1. すぐに（$r+1\le \mathtt{b}$ ステップ以内に）$\mathtt{b}-1$ より多くの要素を含むノードが見つかる。この場合、r 回のシフトで要素をあるブロックから後方のブロックに送り、$\mathtt{u}_r$ の余剰の要素を $\mathtt{u}_0$ に持ってくる。すると $\mathtt{u}_0$ のブロックから目的の要素を削除できるようになる。
2. すぐに（$r+1\le \mathtt{b}$ ステップ以内に）リストの末尾に到達する。この場合、$\mathtt{u}_r$ は末尾のノードなので $\mathtt{u}_r$ のブロックには $\mathtt{b}-1$ 個以上の要素を含むという制約がない。そのためひとつめの場合と同様に $\mathtt{u}_r$ から要素を借りてきて $\mathtt{u}_0$ に足してよい。この結果 $\mathtt{u}_r$ のブロックが空になったら削除する。
3. b ステップの間に $\mathtt{b}-1$ 個より多くの要素を含むブロックが見つからな

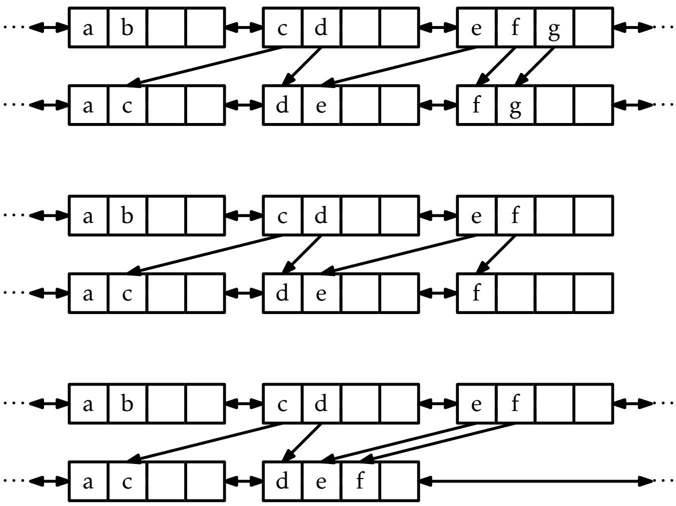


図 3.5: SEList において、要素 x を削除する際に起きる 3 つの場合。（この SEList ではブロックの大きさ b は 3 である。）

い。この場合 $u_0,\ldots,u_{b-1}$ はいずれも要素数 $b-1$ のブロックの列である。gather を呼び、$b(b-1)$ 要素を $u_0,\ldots,u_{b-2}$ に集める。これらの $b-1$ 個のブロックはいずれもちょうど b 要素を含むようになる。そして空になった u_{b-1} を削除する。すると、u_0 のブロックは b 要素を含むようになったので、ここから適当な要素を削除できる。

SEList
```
T remove(int i) {
  Location l; getLocation(i, l);
  T y = l.u->d.get(l.j);
  Node *u = l.u;
  int r = 0;
  while (r < b && u != &dummy && u->d.size() == b - 1) {
    u = u->next;
    r++;
```

```
  }
  if (r == b) { // found b blocks each with b-1 elements
    gather(l.u);
  }
  u = l.u;
  u->d.remove(l.j);
  while (u->d.size() < b - 1 && u->next != &dummy) {
    u->d.add(u->next->d.remove(0));
    u = u->next;
  }
  if (u->d.size() == 0)
    remove(u);
  n--;
  return y;
}
```

add(i,x) と同様に、3 つめの場合での gather(u) を無視すれば、remove(i) の実行時間は $O(\mathtt{b}+\min\{\mathtt{i},\mathtt{n}-\mathtt{i}\}/\mathtt{b})$ である。

3.3.5 spread と gather の償却解析

続いて、add(i,x)・remove(i) で実行されるかもしれない gather(u)・spread(u) のコストを考える。はじめにコードを示す。

SEList
```
void spread(Node *u) {
  Node *w = u;
  for (int j = 0; j < b; j++) {
    w = w->next;
  }
  w = addBefore(w);
  while (w != u) {
    while (w->d.size() < b)
```

```
      w->d.add(0, w->prev->d.remove(w->prev->d.size()-1));
    w = w->prev;
  }
}
```

SEList

```
void gather(Node *u) {
  Node *w = u;
  for (int j = 0; j < b-1; j++) {
    while (w->d.size() < b)
      w->d.add(w->next->d.remove(0));
    w = w->next;
  }
  remove(w);
}
```

いずれの実行時間においても支配的なのは二段階ネストしたループである。内側・外側いずれのループも最大 $\mathtt{b}+1$ 回実行されるのでいずれの操作の実行時間も $O((\mathtt{b}+1)^2) = O(\mathtt{b}^2)$ である。しかし、次の補題によってこれらのメソッドは、add(i,x)・remove(i) の呼び出し b 回につき多くとも 1 回しか呼ばれないことがわかる。

補題 3.1. 空の *SEList* が作られ、$m \geq 1$ 回 add(i,x)・remove(i) が実行されるこのとき spread()・gather() に要する時間の合計は $O(\mathtt{b}m)$ である。

証明. ここでは償却解析のためのポテンシャル法を使う。ノード u のブロックの要素数が b でないとき、u は**不安定**であるという。（すなわち、u は末尾のノードか、要素数が $\mathtt{b}-1$ または $\mathtt{b}+1$ である。）ブロックの要素数がちょうど b であるノードは**安定**であるという。SEList の**ポテンシャル**を不安定なノードの数で定義する。ここでは add(i,x) と spread(u) の呼び出し回数の関係だけを議論する。しかし remove(i)・gather(u) の解析も同様である。

add(i,x) のひとつめの場合分けでは、ブロックの大きさが変化するノードは $\mathtt{u}_r$ ひとつだけである。よって高々一つのノードだけが安定から不安定になる。ふたつめの場合わけでは新しいノードが作られ、そのノードは不安定であ

る。一方、他のノードの大きさは変わらず不安定なノードの数はひとつだけ増える。以上よりひとつめふたつめいずれの場合でも、SEList のポテンシャルの増加は高々 1 である。

最後に 3 つめの場合わけでは $u_0, \ldots, u_{b-1}$ はいずれも不安定である。spread(u_0) が呼ばれると、これらの b 個の不安定なノードは $b+1$ 個の安定なノードに置き換えられる。そして x が u_0 のブロックに追加され、u_0 は不安定になる。合わせてポテンシャルは $b-1$ 減少する。

まとめると、ポテンシャルは 0 からはじまる。（リストに一つもノードがない状態である。）ケース 1・2 では、ポテンシャルは高々 1 増える。ケース 3 ではポテンシャルは $b-1$ 減る。不安定なノードの数であるポテンシャルは、0 より小さくなることはない。つまり、ケース 3 が起きるたびに、少なくとも $b-1$ 回のケース 1・2 が起きる。以上より spread(u) が呼ばれる毎に、少なくとも b 回 add(i, x) が呼ばれていることが示された。 □

3.3.6 要約

次の定理は SEList の性能をまとめたものだ。

定理 3.3. *SEList* は *List* インターフェースを実装する。spread(u)・gather(u) のコストを無視すると b 個のブロックを持つ *SEList* の操作について次が成り立つ。

- get(i)・set(i, x) の実行時間は $O(1+\min\{i, n-i\}/b)$ である。
- add(i, x)・remove(i) の実行時間は $O(b+\min\{i, n-i\}/b)$ である。

さらに、空の *SEList* からはじめて、add(i, x)・remove(i) からなる m 個の操作の列における、spread(u)・gather(u) の実行時間は合わせて $O(bm)$ である。

要素数 n の *SEList* における（ワード単位で測った）[*5] 領域使用量は $n+O(b+n/b)$ である。

SEList により ArrayList と DLList の間のトレードオフを調整できる。ブロックの大きさ b によって、ふたつのデータ構造のどちらに寄せるかを調整できるのである。極端な場合として $b=2$ のとき、SEList のノードは最大 3 つの値を持ち、これは DLList と同じである。もう一方の極端な場合として

[*5] 1.4 節で説明したメモリの図り方の議論を思い出すこと。

b > n のとき、すべての要素は一つの配列に格納され、これは ArrayList みたいなものだ。これらの間の調整は、リストへの要素の追加・削除の時間と、特定の要素を見つける時間のトレードオフでもある。

3.4 ディスカッションと練習問題

単方向連結リストも双方向連結リストも 40 年以上前からプログラムで使われており、研究され尽くしているテクニックである。例えば Knuth の [46, Sections 2.2.3–2.2.5] で議論されている。SEList もデータ構造の有名な練習問題である。SEList は unrolled linked list[67] と呼ばれることもある。

双方向連結リストの領域使用量を減らすための別の手法として XOR-lists と呼ばれるものもある。XOR-list では各ノード u はひとつだけのポインタ u.nextprev を持つ。このポインタは u.prev と u.next の XOR を取ったものである。リストは、dummy を指すポインタと dummy.next を指すポインタの二つを持つ必要がある。（dummy.next はリストが空なら dummy を、そうでないなら先頭のノードを指す。）このテクニックは u と u.prev があれば u.next を次の関係式から計算できることを利用している。

$$\mathtt{u.next} = \mathtt{u.prev} \hat{} \mathtt{u.nextprev}$$

（ここで^はふたつの引数の排他的論理和を計算する。) このテクニックはコードを少し複雑すること、Java や Python などガーベッジコレクションのある言語では使えないことは欠点である。 XOR-list のもっと踏み込んだ議論は Sinha の雑誌記事 [68] を参照してほしい。

問 **3.1.** SLList においてダミーノードを使って push(x)・pop()・add(x)・remove() の全ての特殊なケースを避けることができないのは何故か説明せよ。

問 **3.2.** SLList のメソッド secondLast() を設計・実装せよ。これは SLList の末尾の一つ前の要素を返すものだ。この実装の際にリストの要素数 n を使わずに実装してみよ。

問 **3.3.** SLList の get(i)・set(i,x)・add(i,x)・remove(i) を実装せよ。いずれの操作の実行時間も $O(1+\mathtt{i})$ であること。

問 **3.4.** SLList の reverse() 操作を設計・実装せよ。これは SLList の要素の順番を逆にする操作である。この操作の実行時間は $O(\mathtt{n})$ でなければなら

ず、再帰は使ってはならない。また他のデータ構造を補助的に使ったり、新しいノードを作ってもいけない。

問 **3.5.** SLList および DLList の checkSize() を設計・実装せよ。これはリストを辿り、n の値がリストに入っている要素の数と一致するかを確認する操作だ。このメソッドはなにも返さないが、もし要素数が n と一致しなければ例外を投げる。

問 **3.6.** addBefore(w) を再実装せよ。これはノード u を作り、これをノード w の直前に追加する操作だ。この章を確認しながら実装してはならない。もしこの本のコードと完全に一致しなくともあなたの書くコードは正しいかもしれない。そのコードをテストし、正しく動くかどうかを確認せよ。

続くいくつかの問題は DLList の操作に関連するものだ。これらの問題では、新しいノードや一時的な配列を割当ててはいけない。これらの問題はいずれもノードの prev・next を書き換えるだけで解くことができる。

問 **3.7.** DLList の操作 isPalindrome() を実装せよ。これはリストが**回文**であるとき true を返す。すなわち、$i \in \{0,\ldots,n-1\}$ のいずれの場合も i 番目の要素が $n-i-1$ 番目の要素と等しいかどうかを確認する操作である。実行時間は $O(n)$ である必要がある。

問 **3.8.** rotate(r) を実装せよ。これは DLList の要素を回転する操作で、i 番目の要素を $(i+r) \bmod n$ 番目の位置に移動するものだ。実行時間は $O(1+\min\{r,n-r\})$ である必要があり、リスト内のノードを修正してはならない。

問 **3.9.** truncate(i) を実装せよ。これは DLList を i 番目で切り詰める操作のだ。この操作を実行すると、リストの要素数は i になり、$0,\ldots,i-1$ 番目の要素だけが残る。返り値も別の DLList で、これは $i,\ldots,n-1$ 番目の要素を含むものである。この操作の実行時間は $O(\min\{i,n-i\})$ である。

問 **3.10.** DLList の操作 absorb(l2) を実装せよ。これは別の DLList l2 を引数に取り、l2 を空にし、その中身を自分の要素として追加する。例えば l1 が a,b,c を含み、l2 が d,e,f を含むとき、l1.absorb(l2) を実行すると l1 は a,b,c,d,e,f を含み、l2 は空になる。

問 **3.11.** deal() を実装せよ。これは DLList から偶数番目の要素を削除し、それらの要素を含む DLList を返す操作だ。例えば l1 が a,b,c,d,e,f を含む

とき、l1.deal() を呼ぶと、l1 の要素は a,c,e になり、b,d,f を含むリストが返される。

問 **3.12.** reverse() を実装せよ。これは DLList の要素の順序を逆転する操作だ。

問 **3.13.** この問題は DLList を整列するマージソートというアルゴリズムを実装してみるものだ。マージソートは 11.1.1 節扱う。

1. DLList の takeFirst(l2) を実装せよ。この操作は l2 の先頭ノードを取り出しレシーバに追加するものだ。これは新しいノードを作らないことを除けば、add(size(),l2.remove(0)) と等価である。
2. DLList の静的メソッド merge(l1,l2) を実装せよ。これはふたつの整列済みのリスト l1・l2 を統合し、その結果を含む新たな整列済みリストを返す。この操作をすると l1・l2 は空になる。例えば l1 の要素は a,c,d、l2 の要素は b,e,f であるとき、このメソッドは a,b,c,d,e,f を含むリストを返す。
3. DLList の sort() メソッドを実装せよ。これはマージソートを使ってリストの全ての要素を整列するものである。この再帰的なアルゴリズムは次のように動作する。
   (a) リストの要素数が 0 または 1 ならなにもしない。
   (b) そうでないなら truncate(size()/2) によってリストをほぼ等しい大きさのふたつのリスト l1 と l2 に分割する。
   (c) 再帰的に l1 を整列する。
   (d) 再帰的に l2 を整列する。
   (e) 最後に l1 と l2 を統合して一つの整列済みリストとする。

つづく数問は発展的なもので、要素が追加・削除される際に Stack・Queue の最小値がどうなるかについての理解を要求するものである。

問 **3.14.** MinStack を設計・実装せよ。これは比較可能な要素を持ち、スタックの操作 push(x)・pop()・size() をサポートし、min() 操作も可能なものである。min() はデータ構造に入っている要素のうち最小の値を返す。全ての操作の実行時間は定数である。

問 **3.15.** MinQueue を設計・実装せよ。これは比較可能な要素を持ち、キューの操作 add(x)・remove()・size() をサポートし、min() 操作も可能なものである。全ての操作の償却実行時間は定数である。

問 **3.16.** MinDeque を設計・実装せよ。これは比較可能な要素を持ち、双方向キューの操作 addFirst(x)・addLast(x)・removeFirst()・removeLast()・size() をサポートし、min() 操作も可能なものである。全ての操作の償却実行時間は定数である。

次の問題は領域効率のよい SLList の解析・実装の理解度を測るためのものである。

問 **3.17.** SEList が Stack のように使われるとき、つまり SEList は push(x) ≡ add(size(), x) と pop() ≡ remove(size() − 1) によってのみ更新されるとき、これらの操作の償却実行時間はいずれも b の値に依らない定数であることを証明せよ。

問 **3.18.** Deque の操作をすべてサポートし、いずれの償却実行時間も b に依らない定数である SEList を設計・実装せよ。

問 **3.19.** ビット単位の排他的論理和^によってふたつの int 型の値を入れ替える方法を説明せよ。ただし、このときにみっつめの変数を使ってはならないものとする。

第 4

スキップリスト

この章ではスキップリストというオシャレで実用的なデータ構造を紹介する。スキップリストは `List` の実装であり、`get(i)`・`set(i,x)`・`add(i,x)`・`remove(i)` の実行時間はいずれも $O(\log n)$ である。`SSet` の実装でもあり、いずれの操作の期待実行時間も $O(\log \mathtt{n})$ である。

　スキップリストの効率性のキモはランダム性である。新しい要素を追加するとき、スキップリストではランダムなコイントスの結果に応じて要素の高さを決める。スキップリストの性能を要素を見つけるための経路の長さの期待値で表現する。コイントスにより決まる確率からこの期待値を計算する。ランダムなコイントスは擬似乱数生成器を使ってシミュレーションする。

4.1　基本的な構造

スキップリストは単方向連結リスト $L_0,\ldots,L_h$ を並べたものだと考えられる。`n` 個の要素を含むスキップリストでは、L_0 は `n` 個の要素すべてを含む。L_0 から L_1 を作り、L_1 から L_2 を作り、という作業を次のように繰り返す。リスト L_r の要素は L_{r-1} の要素の部分集合である。L_{r-1} のどの要素を L_r に含むかを決めるために、各要素についてコインを投げる。表が出た要素を L_r に含める。リスト L_r が空なら繰り返しを終える。スキップリストの例を図 4.1 に示した。

　スキップリストのノード `x` について、`x` の**高さ**を `x` を含むリスト L_r の添え字 `r` のうち最大のものと定義する。例えば `x` が L_0 だけに含まれているなら `x` の高さは 0 である。少し考えると `x` は次の試行と関連していることがわかるだろう。

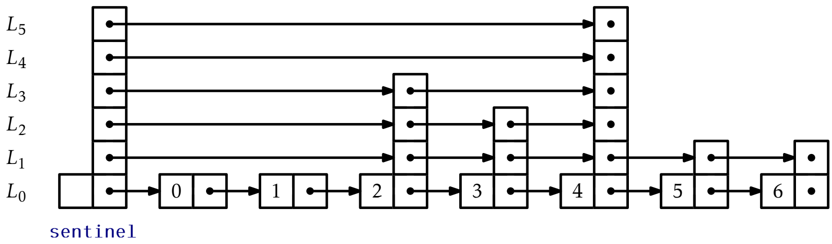


図 4.1: 7 つの要素を含む skiplist の例

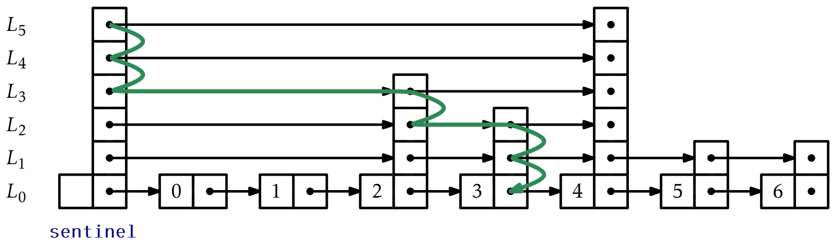


図 4.2: ある skiplist における、4 を含むノードの探索経路

裏が出るまでコインを繰り返し投げる。表は何回出るだろうか。この問いの答え、そして x の高さの期待値は 1 である。（コイントスの回数の期待値は 2 回だが、最後のトスは表でないため表が出る回数の期待値は 1 だ。）スキップリストの**高さ**とは、最も高いノードの高さである。

すべてのリストの先頭は特別で、**番兵**と呼ばれる。これはリストのダミーノードのようなものだ。スキップリストの重要な性質は、**探索経路**と呼ばれる L_h の番兵から L_0 の各ノードまでの短いパスが存在することだ。ノード u へのパスの作り方は簡単だ。（図 4.2 を参照のこと。）左上の端（L_h の番兵）からスタートし、u に到達したり u を通り越したりしない限り右に進み続ける。u に到達する、または u を通し越してしまうときは右ではなく下に進む。

もうすこし正確に説明する。L_h の番兵 w から L_0 のノード u への探索経路を見つける。まず w.next を見て、これが L_0 の中で u より前にあれば w = w.next とする。そうでなければ、ひとつ下のリストに下がり、L_{h-1} の w から処理を続ける。これを L_0 における u の直前の要素にたどり着くまで繰り返す。

次の補題は探索経路が非常に短いことを主張する。（4.4 節で証明する。）

補題 **4.1.** L_0 のノード u について、u の探索経路長の期待値は $2\log \mathtt{n} + O(1) = O(\log \mathtt{n})$ である。

空間効率のよいスキップリストの実装方法を説明する。ノード u はデータ x・ポインタの配列 next を含む。u.next[i] で L_i における u の次のノードを指せばよい。こうすると x は複数のリストに現れるかもしれないが、ノードとしての実体はひとつだけあれば済む。

SkiplistSSet
```
struct Node {
  T x;
  int height;     // length of next
  Node *next[];
};
```

この章の続くふたつの節ではスキップリストの応用を紹介する。いずれの場合でも L_0 に主な構造（リストや整列された集合）を入れる。違いは探索経路の辿り方である。L_r にいるとき下（L_{r-1}）に向かうか（L_r のまま）右に進むかが異なることがある。

4.2 SkiplistSSet：効率的な SSet

SkiplistSSet はスキップリストを使った SSet インターフェースの実装である。ここでは、L_0 は SSet の要素を整列して格納する。find(x) は探索経路に沿って $\mathtt{y} \geq \mathtt{x}$ を満たす最小の y を探す。

SkiplistSSet
```
Node* findPredNode(T x) {
  Node *u = sentinel;
  int r = h;
  while (r >= 0) {
    while (u->next[r] != NULL
               && compare(u->next[r]->x, x) < 0)
      u = u->next[r]; // go right in list r
```

```
    r--; // go down into list r-1
  }
  return u;
}
T find(T x) {
  Node *u = findPredNode(x);
  return u->next[0] == NULL ? null : u->next[0]->x;
}
```

y の探索経路を辿るのは簡単だ。L_r の中のノード u にいるとすると、まず右隣 u.next[r].x を見る。x > u.next[r].x なら L_r の中で右に進む。そうでないなら L_{r-1} に下がる。各ステップ（右または下に進む）は一定の時間で実行できる。よって補題 4.1 より find(x) の期待実行時間は $O(\log n)$ である。

SkipListSSet に要素を追加する方法の前に、新しいノードの高さ k を決めるためのコイントスをシミュレートする方法を考える。ランダムな整数 z を生成し、z の 2 進数表現において連続する 1 の数を数える。[*1]

SkiplistSSet

```
int pickHeight() {
  int z = rand();
  int k = 0;
  int m = 1;
  while ((z & m) != 0) {
    k++;
    m <<= 1;
  }
  return k;
}
```

SkiplistSSet の add(x) の実装は、x を入れる場所を見つけ、高さ k を

[*1] この方法はコイントスを完全に再現しているわけではない。なぜなら k は int のビット数より常に小さいからである。しかし要素数が $2^{32} = 4294967296$ を越える場合でもない限り、この影響は無視できるほど小さい。

pickHeight() で決め、x を $L_0,\ldots,L_k$ に継ぎ合せる。これを実現する最も簡単な方法は、リスト L_r からリスト L_{r-1} に下がるノードを記録する配列 stack を使うことだ。より正確にいうと、stack[r] には探索経路において L_r から L_{r-1} に下がるノードが記録されている。x を挿入する時に修正する必要のあるノードはちょうど stack[0],...,stack[k] である。次のコードはこの add(x) アルゴリズムの実装である。

SkiplistSSet
```
bool add(T x) {
  Node *u = sentinel;
  int r = h;
  int comp = 0;
  while (r >= 0) {
    while (u->next[r] != NULL
               && (comp = compare(u->next[r]->x, x)) < 0)
      u = u->next[r];
    if (u->next[r] != NULL && comp == 0)
      return false;
    stack[r--] = u;        // going down, store u
  }
  Node *w = newNode(x, pickHeight());
  while (h < w->height)
    stack[++h] = sentinel; // height increased
  for (int i = 0; i <= w->height; i++) {
    w->next[i] = stack[i]->next[i];
    stack[i]->next[i] = w;
  }
  n++;
  return true;
}
```

要素 x の削除も同様に行える。ただし stack を使って探索経路を記録する必要はない。削除は探索経路を辿りながら行える。x を探す途中にノード u から下に向かうとき、u.next.x = x なら u を繋ぎ替える。

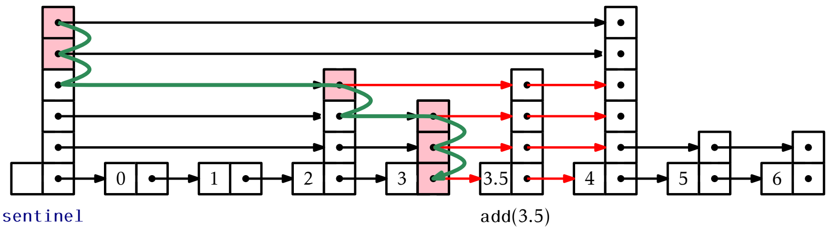


図 4.3: 値 3.5 を含むノードを skiplist に追加する。stack に格納されるノードを強調している。

SkiplistSSet
```
bool remove(T x) {
  bool removed = false;
  Node *u = sentinel, *del;
  int r = h;
  int comp = 0;
  while (r >= 0) {
    while (u->next[r] != NULL
               && (comp = compare(u->next[r]->x, x)) < 0) {
      u = u->next[r];
    }
    if (u->next[r] != NULL && comp == 0) {
      removed = true;
      del = u->next[r];
      u->next[r] = u->next[r]->next[r];
      if (u == sentinel && u->next[r] == NULL)
        h--; // skiplist height has gone down
    }
    r--;
  }
  if (removed) {
    delete del;
```

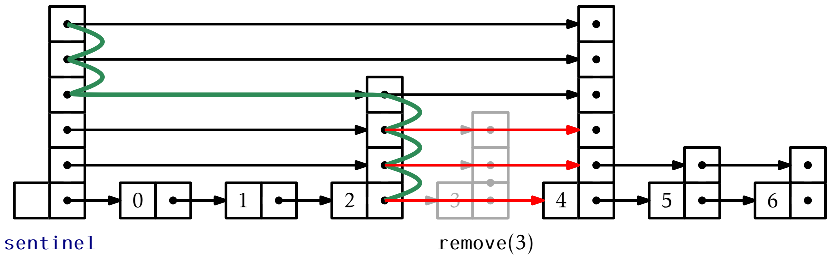


図 4.4: 値 3 を含むノードを skiplist から削除する

```
      n--;
    }
    return removed;
}
```

4.2.1　要約

次の定理はスキップリストを使った整列集合の性能をまとめたものだ。

定理 4.1. *SkiplistSSet* は *SSet* インターフェースの実装である。*SkiplistSSet* における add(x)・remove(x)・find(x) の実行時間の期待値はいずれも $O(\log n)$ である。

4.3　SkiplistList：効率的なランダムアクセス List

SkiplistList はスキップリストを使った List インターフェースの実装だ。SkiplistList では、L_0 はリストの要素をリストにおける順序通りに含む。SkiplistSSet と同様に、要素の追加・削除・読み書きのいずれの実行時間も $O(\log n)$ である。

これを可能にするためにはまず L_0 における i 番目の要素を見つける方法が必要だ。このための最も簡単な方法はリスト L_r における**辺の長さ**を定義することだ。L_0 における辺の長さをいずれも 1 とする。$L_r (r > 0)$ の辺 e の辺の長さを、L_{r-1} において e の下にある辺の長さの和とする。これは L_0 におい

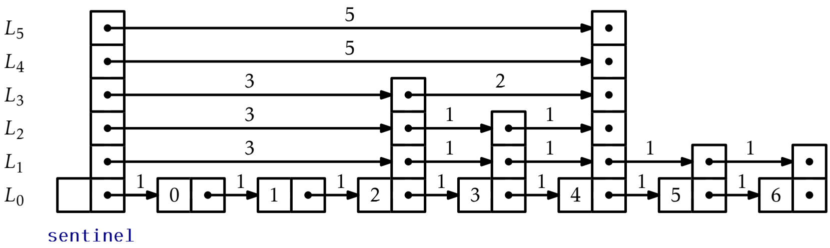


図 4.5: skiplist における辺の長さ

て e の下にある辺の数を e の長さとするのと等価な定義である。この定義の例として図 4.5 を参照せよ。スキップリストの辺は配列に格納されており、その長さも同様に格納すればよい。

```
SkiplistList
struct Node {
  T x;
  int height;     // length of next
  int *length;
  Node **next;
};
```

この定義の良い性質は、L_0 において j 番目のノードから長さ ℓ の辺を辿ると、L_0 において j + ℓ のノードに移ることだ。こうして、探索パスを辿りながら L_0 におけるインデックス j を算出できる。L_r のノード u にいるとき、辺 u.next[r] の長さと j の和が i より小さいなら右に進む。そうでないなら下（L_{r-1}）に進む。

```
SkiplistList
Node* findPred(int i) {
  Node *u = sentinel;
  int r = h;
  int j = -1;   // the index of the current node in list 0
  while (r >= 0) {
    while (u->next[r] != NULL && j + u->length[r] < i) {
```

```
      j += u->length[r];
      u = u->next[r];
    }
    r--;
  }
  return u;
}
```

```
                    SkiplistList
T get(int i) {
  return findPred(i)->next[0]->x;
}
T set(int i, T x) {
  Node *u = findPred(i)->next[0];
  T y = u->x;
  u->x = x;
  return y;
}
```

get(i)・set(i,x) において最も計算時間がかかるのは L_0 の i 番目のノードを見つける処理なので、これらの操作の実行時間は $O(\log n)$ である。

SkiplistList の i 番目の位置に要素を追加するのは簡単だ。SkiplistSSet とは違い新しいノードが必ず追加されるので、ノードの位置を見つける処理とノードを追加する処理とを同時に実行できる。まずは新たに挿入するノード w の高さ k を決め、i の探索経路を辿る。L_r から下に進むのは $r \le k$ のときで、このとき w を L_r とを継ぎ合わせる。このとき辺の長さも適切に更新する必要があることに注意する。図 4.6 を見よ。

探索経路上でリスト L_r のノード u に降りたとき、i 番目の位置に要素を追加するため辺 u.next[r] の長さをひとつ大きくする。ノード w をふたつのノード u と z の間に追加する様子を図 4.7 に示す。探索経路を辿りながら L_0 において u が何番目なのかを数えられる。そのため u から w までの辺の長さは $i - j$ とわかる。さらに、u から z への辺の長さ ℓ から、w から z への辺の長さを計算できる。こうして w を挿入し、関連する辺の長さの更新を定数時

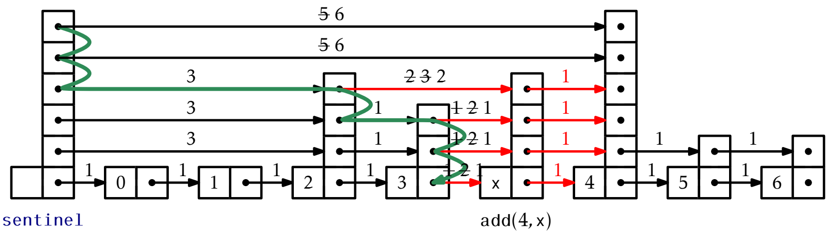


図 4.6: SkiplistList への要素の追加

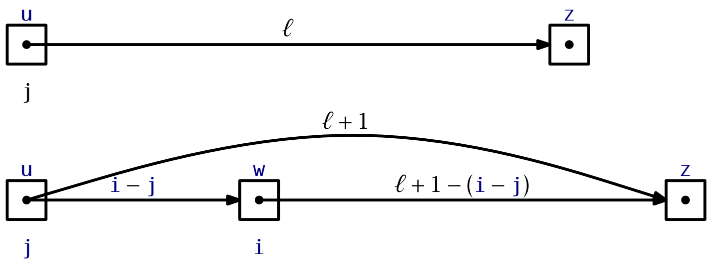


図 4.7: ノード w を skiplist に追加するときの、辺の長さの更新

間で終えることができる。

複雑そうに聞こえるかもしれないが、実際のコードはとても単純である。

SkiplistList

```
void add(int i, T x) {
  Node *w = newNode(x, pickHeight());
  if (w->height > h)
    h = w->height;
  add(i, w);
}
```

SkiplistList

```
Node* add(int i, Node *w) {
  Node *u = sentinel;
  int k = w->height;
```

```
  int r = h;
  int j = -1; // index of u
  while (r >= 0) {
    while (u->next[r] != NULL && j + u->length[r] < i) {
      j += u->length[r];
      u = u->next[r];
    }
    u->length[r]++; // to account for new node in list 0
    if (r <= k) {
      w->next[r] = u->next[r];
      u->next[r] = w;
      w->length[r] = u->length[r] - (i - j);
      u->length[r] = i - j;
    }
    r--;
  }
  n++;
  return u;
}
```

ここまでの話から SkiplistList における remove(i) の実装は明らかである。i 番目の位置への探索経路を辿る。高さ r のノード u から経路が下に向かうとき、その高さにおける u から出る辺の長さをひとつ小さくする。また、u.next[r] が高さ i の要素であるかどうかを確認し、もしそうならリストからそれを除く。図 4.8 に例が描かれている。

SkiplistList

```
T remove(int i) {
  T x = null;
  Node *u = sentinel, *del;
  int r = h;
  int j = -1; // index of node u
```

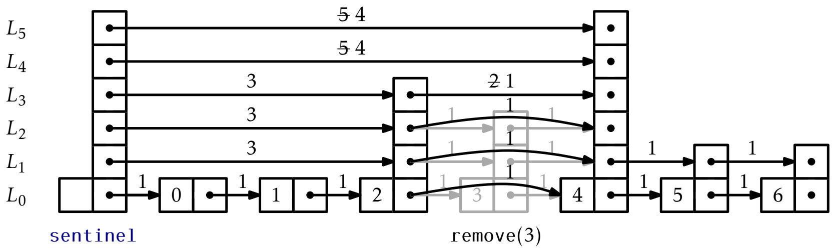


図 4.8: SkiplistList から要素を削除する。

```
  while (r >= 0) {
    while (u->next[r] != NULL && j + u->length[r] < i) {
      j += u->length[r];
      u = u->next[r];
    }
    u->length[r]--; // for the node we are removing
    if (j + u->length[r] + 1 == i && u->next[r] != NULL) {
      x = u->next[r]->x;
      u->length[r] += u->next[r]->length[r];
      del = u->next[r];
      u->next[r] = u->next[r]->next[r];
      if (u == sentinel && u->next[r] == NULL)
        h--;
    }
    r--;
  }
  deleteNode(del);
  n--;
  return x;
}
```

4.3.1 要約

次の定理は SkiplistList の性能をまとめたものだ。

定理 **4.2.** *SkiplistList* は *List* インターフェースを実装する。*SkiplistList* における get(i)・set(i,x)・add(i,x)・remove(i) の実行時間の期待値はいずれも $O(\log \mathtt{n})$ である。

4.4 スキップリストの解析

この節では高さ・大きさ・探索経路の長さの期待値を解析する。ここでは基本的な確率論の知識を前提とする。いくつかの証明は次に述べるコイントスについての考察を利用する。

補題 **4.2.** T を表裏が等しい確率で出るコインを投げて、表が出るまでに要するコイントスの回数とする。（表が出た回も含めて数えることに注意する。）このとき、$\mathrm{E}[T]=2$ である。

証明**.** 表が出るまでコイントスを繰り返すとき、次の指示変数を定義する。

$$I_i = \begin{cases} 0 & \text{コイントスが } i \text{ 回よりも少ないとき} \\ 1 & \text{コイントスが } i \text{ 回以上のとき} \end{cases}$$

$I_i = 1$ なのは最初の $i-1$ 回の結果がいずれも裏であることと同値である。よって $\mathrm{E}[I_i] = \Pr\{I_i = 1\} = 1/2^{i-1}$ である。コイントスの合計回数 T は $T = \sum_{i=1}^{\infty} I_i$ と書ける。以上より、次のことがわかる。

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[T] &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} I_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}[I_i] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} 1/2^{i-1} \\ &= 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots \\ &= 2 \end{aligned}$$

□

次のふたつの補題ではスキップリストにおけるノード数は要素数に概ね比

例することを示す。

補題 4.3. n 要素からなるスキップリストにおける（番兵を除く）ノード数の期待値は $2n$ である。

証明. 要素 x がリスト L_r に含まれる確率は $1/2^r$ である。よって L_r のノード数の期待値は $n/2^r$ である。[*2] 以上よりすべてのリストに含まれるノードの総数の期待値が求まる。

$$\sum_{r=0}^{\infty} n/2^r = n(1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots) = 2n \qquad \square$$

補題 4.4. n 要素を含むスキップリストの高さの期待値は $\log n + 2$ 以下である。

証明. $r \in \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$ について次の確率変数を定義する。

$$I_r = \begin{cases} 0 & L_r \text{ が空のとき} \\ 1 & L_r \text{ が空でないとき} \end{cases}$$

スキップリストの高さ h は次のように計算できる。

$$h = \sum_{r=1}^{\infty} I_r$$

I_r はリスト L_r の長さ $|L_r|$ を越えないことに注意する。

$$\mathrm{E}[I_r] \le \mathrm{E}[|L_r|] = n/2^r$$

よって

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[h] &= \mathrm{E}\left[\sum_{r=1}^{\infty} I_r\right] \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} E[I_r] \\ &= \sum_{r=1}^{\lfloor \log n \rfloor} E[I_r] + \sum_{r=\lfloor \log n \rfloor + 1}^{\infty} E[I_r] \end{aligned}$$

[*2] 指示変数と期待値の線形性からこの結果を得る方法は 1.3.4 節を参照せよ。

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{r=1}^{\lfloor \log n \rfloor} 1 + \sum_{r=\lfloor \log n \rfloor+1}^{\infty} n/2^r \\
&\le \log n + \sum_{r=0}^{\infty} 1/2^r \\
&= \log n + 2
\end{aligned}
$$

□

補題 4.5. n 要素からなるスキップリストのノード数の期待値は、番兵を含めて $2n + O(\log n)$ である。

証明. 補題 4.3 より番兵を除いたノード数の期待値は $2n$ である。番兵の数の期待値はスキップリストの高さ h に等しく、これは補題 4.4 より $\log n + 2 = O(\log n)$ 以下である。 □

補題 4.6. スキップリストにおける探索経路の長さの期待値は $2\log n + O(1)$ 以下である。

証明. 最も簡単な証明方法はノード x の**逆探索経路**を考えることだ。この経路は L_0 における x の直前のノードから始まる。パスが上に向かえるときはそうする。そうでないなら左に進む。少し考えると、x の逆探索経路は探索経路と方向が逆であることを除いて同じであることがわかるだろう。

ある高さで逆探索経路が通過するノードの数 r は次の試行と関連している。コインを投げる。表が出れば上に向かい停止する。裏が出れば左に向かい試行を続ける。このとき、表が出るまでにコインを投げる回数は逆探索経路のある高さで左に向かうステップの数に対応している。[*3] 補題 4.2 よりはじめて表が出るまでのコイントスの回数の期待値は 1 である。

S_r を（順方向の）探索経路における高さ r で右に進む回数を表す。$\mathrm{E}[S_r] \le 1$ である。さらに L_r では L_r の長さより多く右に進むことはないので $S_r \le |L_r|$ である。よって次の式が成り立つ。

$$\mathrm{E}[S_r] \le \mathrm{E}[|L_r|] = n/2^r$$

あとは補題 4.4 と同様に証明を完成できる。S をスキップリストにおけるノード u の探索経路の長差とする。また、h をそのスキップリストの高さとする。

[*3] これは左に向かう回数を大きく数えてしまうかもしれない。なぜなら実際には試行は表が出るか番兵に出くわすかのどちらかが起きたときに終えるべきだからである。しかし今考えている補題は上界に関するものであるので、ここでは問題にならない。

このとき、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[S] &= \mathrm{E}\left[\mathsf{h} + \sum_{\mathsf{r}=0}^{\infty} S_{\mathsf{r}}\right] \\
&= \mathrm{E}[\mathsf{h}] + \sum_{\mathsf{r}=0}^{\infty} \mathrm{E}[S_{\mathsf{r}}] \\
&= \mathrm{E}[\mathsf{h}] + \sum_{\mathsf{r}=0}^{\lfloor \log \mathsf{n} \rfloor} \mathrm{E}[S_{\mathsf{r}}] + \sum_{\mathsf{r}=\lfloor \log \mathsf{n} \rfloor + 1}^{\infty} \mathrm{E}[S_{\mathsf{r}}] \\
&\le \mathrm{E}[\mathsf{h}] + \sum_{\mathsf{r}=0}^{\lfloor \log \mathsf{n} \rfloor} 1 + \sum_{r=\lfloor \log \mathsf{n} \rfloor + 1}^{\infty} \mathsf{n}/2^{\mathsf{r}} \\
&\le \mathrm{E}[\mathsf{h}] + \sum_{\mathsf{r}=0}^{\lfloor \log \mathsf{n} \rfloor} 1 + \sum_{\mathsf{r}=0}^{\infty} 1/2^{\mathsf{r}} \\
&\le \mathrm{E}[\mathsf{h}] + \sum_{\mathsf{r}=0}^{\lfloor \log \mathsf{n} \rfloor} 1 + \sum_{\mathsf{r}=0}^{\infty} 1/2^{\mathsf{r}} \\
&\le \mathrm{E}[\mathsf{h}] + \log \mathsf{n} + 3 \\
&\le 2 \log \mathsf{n} + 5
\end{aligned}$$

□

次の定理はこの節の結果をまとめるものだ。

定理 **4.3.** n 要素を含むスキップリストの大きさの期待値は $O(\mathsf{n})$ である。ある要素の探索経路の長さの期待値は $2\log \mathsf{n} + O(1)$ 以下である。

4.5 ディスカッションと練習問題

スキップリストを提案したのは Pugh [60] であり、多くの拡張や応用も提案されている [59]。その後さらに多くの研究が行われている。スキップリストの i 番目の要素を見つける探索経路の長さの期待値や分散はより正確に求められている。 [45, 44, 56] 決定的な (ランダム性を用いない) 変種や [53] 偏りのある変種 [8, 26]、適応的な変種 [12] も開発されている。スキップリストは様々な言語やフレームワークで書かれ、またオープンソースのデータベースシステムで使われている。[69, 61] スキップリストの変種がオペレーティング・システム HP-UX におけるカーネルのプロセス制御の構造として使われて

いる。[42]

問 **4.1.** 図 4.1 のスキップリストにおける 2.5 と 5.5 の探索経路を説明せよ。

問 **4.2.** 図 4.1 のスキップリストに対して、値 0.5 の要素を高さ 1 で追加し、その後値 3.5 の要素を高さ 2 で追加するときの振る舞いを説明せよ。

問 **4.3.** 図 4.1 のスキップリストから 1 と 3 を削除するときの振る舞いを説明せよ。

問 **4.4.** 図 4.5 の `SkiplistList` に `remove`(2) を実行する時の振る舞いを説明せよ。

問 **4.5.** 図 4.5 の `SkiplistList` に `add`(3, `x`) を実行する時の振る舞いを説明せよ。なお、`pickHeight`() は新たなノードの高さとして 4 を選択すると仮定せよ。

問 **4.6.** `add`(`x`) または `remove`(`x`) を実行するとき、`SkiplistSet` のポインタのうち操作されるものの数の期待値は定数であることを示せ。

問 **4.7.** L_{i-1} から L_i に要素を上げるかどうかを決めるとき、コイントスではなく確率 $p(0 < p < 1)$ を用いる。

1. このとき探索経路長の期待値は $(1/p)\log_{1/p} \mathtt{n} + O(1)$ 以下であることを示せ。
2. これを最小にする p を求めよ。
3. スキップリストの高さの期待値を求めよ。
4. スキップリストのノード数の期待値を求めよ。

問 **4.8.** `SkiplistSet` の `find`(`x`) は**冗長な比較**を行うことがある。これは `x` と同じ値の比較を複数回行うことである。$\mathtt{u.next[r]} = \mathtt{u.next[r-1]}$ を満たすノード `u` が存在すると発生する。どのように冗長な比較が発生するかを説明し、`find`(`x`) においてこれが発生しないようにする方法を示せ。そして、このように修正した `find`(`x`) での比較操作の回数を解析せよ。

問 **4.9.** `SSet` における要素 `x` のランクとは、`SSet` の要素であって、`x` より小さいものの個数である。`SSet` インターフェースの実装であり、ランクによる要素への高速アクセスが可能なスキップリストを設計・実装せよ。これはランク `i` の要素を返す `get`(`i`) を持つ。この操作の実行時間は $O(\log \mathtt{n})$ である。

問 **4.10.** XXX: 日本語汚い

スキップリストの**指**とは探索経路において下に向かうノードを保存した配列である。（93 のコードで add(x) における変数 stack は**指**である。図 4.3 において影になっているノードは指を表している。）指は L_0 における経路を示していると解釈することもできる。

指探索は指を利用した find(x) の実装である。u.x < x かつ (u.next = null*or*u.next.x > x) を満たすノード u に到達するまで指の要素を見ていき、そして u からふつうの x の探索を実行する。L_0 において b と指が指す値との間にある値の数を r とするとき、**指探索**のステップ数の期待値は $O(1+\log r)$ である。

Skiplist のサブクラス SkiplistWithFinger を実装せよ。これは find(x) を指を利用して実装する。このサブクラスでは指を保持し、指探索によって find(x) を実装する。find(x) は x の位置を返すと同時に、指が常に前回の find(x) の結果を指すように更新する。

問 **4.11.** truncate(i) を実装せよ。これは SkiplistList を i 番目の位置で切り詰める操作である。このメソッドを実行するとリストの大きさは i になり、リストは添え字 $0,\ldots,\mathtt{i}-1$ の要素のみを含むようになる。返り値は SkiplistList であって、添え字 $\mathtt{i},\ldots,\mathtt{n}-1$ の要素を含むものである。このメソッドの実行時間は $O(\log \mathtt{n})$ でなければならない。

問 **4.12.** SkiplistList の操作 absorb(l2) を実装せよ。これは SkiplistList l2 を引数に取り、これを空にし、元々入っていた要素をそのままの順番でレシーバーに追加するものだ。例えば、l1 の要素が a,b,c、l2 の要素が d,e,f であるとき、l1.absorb(l2) を呼ぶと、l1 の要素は a,b,c,d,e,f になり l2 は空になる。このメソッドの実行時間は $O(\log \mathtt{n})$ でなければならない。

問 **4.13.** SEList のアイデアを転用し、空間効率の良い SSet である SESSet を設計・実装せよ。要素を順に SEList に格納し、この SEList のブロックを SSet に格納すればよい。もし使った SSet の実装が n 要素を $O(\mathtt{n})$ のメモリだけを使って保持できるなら、SESSet は n 要素を格納ためのメモリに加えて、消費する無駄なメモリは $O(\mathtt{n}/\mathtt{b}+\mathtt{b})$ である。

問 **4.14.** SSet を使って、（大きな）テキストを読み込み、そのテキストの任意の部分文字列をインタラクティブに検索できるアプリケーションを設計・実装せよ。このアプリはユーザーがクエリを入力するときテキストのマッチしている部分があればこれを結果として返す。

ヒント 1：任意の部分文字列はある接尾辞の接頭辞である。よってテキストファイルのすべての接尾辞を保存すれば十分である。
ヒント 2：任意の接尾辞はテキストの中のどこから接尾辞が始まるのかを表す一つの整数でコンパクトに表現できる。
書いたアプリケーションを長いテキストでテストせよ。プロジェクト Gutenberg [1] から本を入手できる。正しく動いたら、レスポンスを速くしよう。すなわち、キー入力から結果が得られるまでに要する時間を認識できないくらい小さくしよう。

問 **4.15.** （この練習問題は 6.2 節で二分探索木について学んでから取り組むべきだ。）スキップリストを二分探索木と比較せよ。

1. スキップリストの辺を削除することが、二分木のようにみえること、また二分探索木ににていることを説明せよ。
2. スキップリストと二分探索木は使うポインタの数は同じである。(ノードあたり 2 つ）しかしスキップリストの方がこれを上手く使っている。これは何故か、説明せよ。

第 5 ハッシュテーブル

ハッシュテーブルは大きな集合 $U = \{0,\ldots,2^{w}-1\}$ の要素 n 個（U の要素数と比べると、n は相対的に小さい整数）を格納するための効率的な方法だ。**ハッシュテーブル**という言葉が指すデータ構造はたくさんある。この章の前半ではハッシュテーブルの一般的な実装ふたつを紹介する。これはチェイン、または線形探索を使うものだ。

ハッシュテーブルは整数でないデータを格納することもよくある。この場合**ハッシュ値**というデータに対応する整数を使う。この章の後半ではハッシュ値の生成方法について説明する。

この章で扱う手法は、ある範囲からランダムに生成した整数を必要とする。サンプルコードではこのランダムな整数はハードコードされた定数になっている。この定数は空気中のノイズを利用したランダムなビット列から得られる[*1]。

5.1 ChainedHashTable: チェイン法を使ったハッシュテーブル

ChainedHashTable とは**チェイン法**を使ってデータをリストの配列 t に保存するデータ構造である。整数 n はすべてのリストにおける要素数の合計である。（図 5.1 を参照せよ。）

[*1] 訳注：物理現象を利用するとランダムな整数が得られる、ということだけ把握すればこの本の理解には差し支えない。

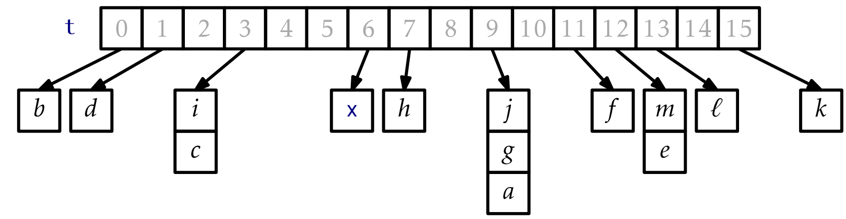


図 5.1: n = 14, t.length = 16 である ChainedHashTable の例。この例では hash(x) = 6 である。

ChainedHashTable
```
array<List> t;
int n;
```

データ x の**ハッシュ値** hash(x) とは {0,...,t.length − 1} の中のある値である。ハッシュ値が i であるデータはリスト t[i] に入れられる。リストが長くなり過ぎないように、次の不変条件を保持する。

$$\mathtt{n} \le \mathtt{t.length}$$

こうすると、リストの平均要素数は常に 1 以下（n/t.length ≤ 1）である。

ハッシュテーブルに要素 x を追加するには配列 t の大きさを増やす必要があるかどうかを確認し、必要があれば t を拡張する。あとは x から {0,...,t.length − 1} 内の整数であるハッシュ値 i を計算し、x をリスト t[i] に追加すればよい。

ChainedHashTable
```
bool add(T x) {
  if (find(x) != null) return false;
  if (n+1 > t.length) resize();
  t[hash(x)].add(x);
  n++;
  return true;
}
```

配列を拡張するときは、t の大きさを二倍にし、元のテーブルに入っていた要素をすべて新しいテーブルに入れ直す。これは ArrayStack のときと同じ戦

略であり、あのときと同じ結果が適用できる。すなわち、操作列についての拡張操作の償却実行時間は定数である。（必要ならページ 32 の補題 2.1 を見直すこと。）

拡張のあとは x を ChainedHashTable リスト t[hash(x)] に追加すればよい。2 章や 3 章で説明したどのリストの実装を使っても、この操作は定数時間で可能である。

要素 x をハッシュテーブルから削除するためには、リスト t[hash(x)] を x が見つかるまで辿ればよい。

ChainedHashTable
```
T remove(T x) {
  int j = hash(x);
  for (int i = 0; i < t[j].size(); i++) {
    T y = t[j].get(i);
    if (x == y) {
      t[j].remove(i);
      n--;
      return y;
    }
  }
  return null;
}
```

この実行時間は n_i をリスト t[i] の長さとするとき、$O(n_{hash(x)})$ である。

ハッシュテーブルから要素 x を見つけるのも同様である。リスト t[hash(x)] を線形に探索すればよい。

ChainedHashTable
```
T find(T x) {
  int j = hash(x);
  for (int i = 0; i < t[j].size(); i++)
    if (x == t[j].get(i))
      return t[j].get(i);
  return null;
}
```

これもリスト $t[\mathrm{hash}(x)]$ の長さに比例する時間がかかる。

ハッシュテーブルの性能はハッシュ関数の選択に大きく影響される。良いハッシュ関数は要素を t.length 個のリストに均等に分散する関数であり、このときの各リストの長さの期待値は $O(n/\mathrm{t.length}) = O(1)$ となる。一方、よくないハッシュ関数はすべての要素を同じリストに追加してしまう。すなわち、リスト $t[\mathrm{hash}(x)]$ の長さは n になってしまう。次の小節ではよいハッシュ関数について説明する。

5.1.1 乗算ハッシュ法

乗算ハッシュ法は剰余算術（2.3 節で説明した）と整数の割り算からハッシュ値を計算する効率的な方法である。div は割り算の商を求める演算子である。形式的には任意の整数 $a \geq 0$ と $b \geq 1$ について、$a \operatorname{div} b = \lfloor a/b \rfloor$ と定義される。

乗算ハッシュ法では、ある整数 d（これは**次数**と呼ばれる）について大きさ 2^{d} であるハッシュテーブルを使う。整数 $x \in \{0,\ldots,2^{w}-1\}$ のハッシュ値は次のように計算される。

$$\mathrm{hash}(x) = ((z \cdot x) \bmod 2^{w}) \operatorname{div} 2^{w-d}$$

ここで z は $\{1,\ldots,2^{w}-1\}$ のうちの奇数からランダムに選択される。整数の演算は整数のビット数を w とするとき、2^{w} で勝手に剰余を取られることを利用すると、このハッシュ関数は非常に効率よく実現できる [*2]。（図 5.2 を参照せよ。）さらに、2^{w-d} による整数の割り算は二進法で右側の $w-d$ ビットを落とせば計算できる。（これはビットを右に $w-d$ 個だけシフトすればよく、実装は上の式よりも単純になる。）

ChainedHashTable
```
int hash(T x) {
  return ((unsigned)(z * hashCode(x))) >> (w-d);
}
```

次の補題は乗算ハッシュ法がうまくハッシュ値の衝突を避けることを示す。（証明はこの節の後半に回す。）

[*2] ほとんどのプログラミング言語ではこうなのだが、残念なことに Ruby（や Python など）ではそうではない。w ビットの固定桁の演算の結果がビットに収まらなくなったときには、可変桁数の整数表現が使われるのである。

2^{w} (4294967296)	100000000000000000000000000000000
z (4102541685)	11110100100001111101000101110101
x (42)	00000000000000000000000000101010
$z \cdot x$	1010000000111100100100001011101001100010
$(z \cdot x) \bmod 2^{w}$	00011110010010000101110100110010
$((z \cdot x) \bmod 2^{w}) \operatorname{div} 2^{w-d}$	00011110

図 5.2: $w = 32$、$d = 8$ とした乗算ハッシュ法の操作

補題 5.1. x と y を $\{0,\dots,2^{w}-1\}$ 内の任意の整数であって、$x \neq y$ を満たすものとする。このとき $\Pr\{\mathrm{hash}(x) = \mathrm{hash}(y)\} \leq 2/2^{d}$ が成り立つ。

補題 5.1 より、remove(x) と find(x) の性能は簡単に解析できる。

補題 5.2. 任意のデータ x について、n_x を x がハッシュテーブルに現れる回数とするとき、リスト t[hash(x)] の長さの期待値は $n_x + 2$ 以下である。

証明. S をハッシュテーブルに含まれる x ではない要素の集合とする。要素 $y \in S$ について、次の指示変数を定義する。

$$I_y = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{hash}(x) = \mathrm{hash}(y) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで、補題 5.1 より、$\mathrm{E}[I_y] \leq 2/2^{d} = 2/\mathtt{t.length}$ である。リスト t[hash(x)] の長さの期待値は次のように求まる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathtt{t}[\mathrm{hash}(x)].\mathtt{size}()] &= \mathrm{E}\left[n_x + \sum_{y \in S} I_y\right] \\
&= n_x + \sum_{y \in S} \mathrm{E}[I_y] \\
&\leq n_x + \sum_{y \in S} 2/\mathtt{t.length} \\
&\leq n_x + \sum_{y \in S} 2/n \\
&\leq n_x + (n - n_x)2/n \\
&\leq n_x + 2
\end{aligned}$$

□

続いて補題 5.1 を証明する。まずは整数論の定理からはじめる。次の証明では $(b_r,\ldots,b_0)_2$ と書いて、$\sum_{i=0}^{r} b_i 2^i$ を表す。ここで、b_i は 0 か 1 である。すなわち、$(b_r,\ldots,b_0)_2$ は二進表記で $b_r,\ldots,b_0$ である整数のことである。また、$\star$ は値の不明な桁を表すとする。

補題 5.3. S を $\{1,\ldots,2^{\mathtt{w}}-1\}$ 内の奇数の集合とする。q,i は S の任意の要素とする。このとき、$\mathtt{z}q \bmod 2^{\mathtt{w}} = i$ を満たす $\mathtt{z}\in S$ の要素が一意に存在する。

証明. $\mathtt{z}$ を選ぶと i は決まるので、$\mathtt{z}q \bmod 2^{\mathtt{w}} = i$ を満たす $\mathtt{z}\in S$ が一意に決まることを示せば良い。

背理法で示す。整数 $\mathtt{z}$ と $\mathtt{z}'$ が存在し $\mathtt{z}>\mathtt{z}'$ であると仮定する。このとき、

$$\mathtt{z}q \bmod 2^{\mathtt{w}} = \mathtt{z}'q \bmod 2^{\mathtt{w}} = i$$

よって、

$$(\mathtt{z}-\mathtt{z}')q \bmod 2^{\mathtt{w}} = 0$$

しかしこれはある整数 k について次の式が成り立つことを意味する。

$$(\mathtt{z}-\mathtt{z}')q = k2^{\mathtt{w}} \tag{5.1}$$

これを 2 進数として考えると

$$(\mathtt{z}-\mathtt{z}')q = k\cdot(1,\underbrace{0,\ldots,0}_{\mathtt{w}})_2$$

なので、$(\mathtt{z}-\mathtt{z}')q$ の末尾 $\mathtt{w}$ 桁はすべて 0 である。

加えて、$q\neq 0$ かつ $\mathtt{z}-\mathtt{z}'\neq 0$ より $k\neq 0$ である。q は奇数なのでこの二進表記の末尾桁は 0 ではない。

$$q = (\star,\ldots,\star,1)_2$$

$|\mathtt{z}-\mathtt{z}'|<2^{\mathtt{w}}$ より、$\mathtt{z}-\mathtt{z}'$ の末尾に連続して並ぶ 0 の個数は $\mathtt{w}$ 未満である。

$$\mathtt{z}-\mathtt{z}' = (\star,\ldots,\star,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{<\mathtt{w}})_2$$

積 $(\mathtt{z}-\mathtt{z}')q$ の末尾に連続して並ぶ 0 の個数は $\mathtt{w}$ 未満である。

$$(\mathtt{z}-\mathtt{z}')q = (\star,\cdots,\star,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{<\mathtt{w}})_2$$

以上より、$(z - z')q$ は (5.1) を満たさず、矛盾する。背理法により補題 5.3 が満たされる。 □

補題 5.3 から次の便利な事実がわかる。z が S から一様な確率でランダムに選ばれるとき、zt は S 上に一様分布する。次の証明では z の最下位の 1 である桁を除いた、$w-1$ 桁のランダムなビットを考えるのがポイントだ。

Proof of 補題 *5.1.* 条件 $\mathrm{hash}(x) = \mathrm{hash}(y)$ と「$zx \bmod 2^w$ の上位 d ビットと $zy \bmod 2^w$ の上位 d ビットが等しい」は同値である。この条件の必要条件は、$z(x-y) \bmod 2^w$ の上位 d ビットがすべて 0 である、またはすべて 1 であることである。これは、$zx \bmod 2^w > zy \bmod 2^w$ ならば次の条件である。

$$z(x-y) \bmod 2^w = (\underbrace{0,\ldots,0}_{d},\underbrace{\star,\ldots,\star}_{w-d})_2 \tag{5.2}$$

一方、$zx \bmod 2^w < zy \bmod 2^w$ ならば次の条件である。

$$z(x-y) \bmod 2^w = (\underbrace{1,\ldots,1}_{d},\underbrace{\star,\ldots,\star}_{w-d})_2 \tag{5.3}$$

よって、$z(x-y) \bmod 2^w$ が (5.2) か (5.3) のどちらかであることを示せばよい。

q を、ある整数 $r \geq 0$ が存在し、$(x-y) \bmod 2^w = q2^r$ を満たす一意な奇数とする。補題 5.3 より、$zq \bmod 2^w$ の二進表現は $w-1$ 桁のランダムなビットを持つ。（最下位桁は 1 である。）

$$zq \bmod 2^w = (\underbrace{b_{w-1},\ldots,b_1}_{w-1},1)_2$$

よって $z(x-y) \bmod 2^w = zq2^r \bmod 2^w$ は $w-r-1$ 桁のランダムなビットを持つ。（その後 1 が続き、さらに r 個の 0 が続く。）

$$z(x-y) \bmod 2^w = zq2^r \bmod 2^w = (\underbrace{b_{w-r-1},\ldots,b_1}_{w-r-1},1,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{r})_2$$

これで証明が終わる。$r > w-d$ ならば $z(x-y) \bmod 2^w$ の上位 d ビットは 0 と 1 を共に含む。よって $z(x-y) \bmod 2^w$ が (5.2) または (5.3) である確率は 0 である。$r = w-d$ ならば (5.2) の確率は 0 だが、(5.3) である確率は $1/2^{d-1} = 2/2^d$ である。（これは $b_1,\ldots,b_{d-1} = 1,\ldots,1$ である必要があるためだ。）$r < w-d$ ならば $b_{w-r-1},\ldots,b_{w-r-d} = 0,\ldots,0$ か、$b_{w-r-1},\ldots,b_{w-r-d} = 1,\ldots,1$ である。いずれの場合の確率も $1/2^d$ であり、またそれぞれの事象は互いに排反である。よって、このどちらかである確率は $2/2^d$ である。 □

5.1.2 要約

次の定理は ChainedHashTable の性能をまとめたものだ。

定理 **5.1.** *ChainedHashTable* は *USet* インターフェースを実装する。grow() のコストを無視すると、*ChainedHashTable* における add(x)・remove(x)・find(x) の期待実行時間は $O(1)$ である [*3]。

さらに、空の *ChainedHashTable* に対して、m 個の add(x)・remove(x) からなる任意の操作列を順に実行するとき、grow() の呼び出しに要する償却実行時間は $O(m)$ である。

5.2 LinearHashTable：線形探索法

ChainedHashTable はリストの配列を使うデータ構造であった。i 番目のリストは hash(x) = i である x を全て格納していた。これに対して**オープンアドレス法**と呼ばれる方法は配列 t に直接要素を収めるものである。このやり方はこの節で説明する LinearHashTable が採用しているものだ [*4]。文献によっては**線形探索法によるオープンアドレス**と呼ばれることもある。

LinearHashTable の背後にあるアイデアは i = hash(x) である要素 x を理想的には t[i] に入れたい、というものだ。もしこれが（他の要素が既にそこに入っていて）ムリなら、t[(i+1) mod t.length] に要素を入れてみる。これもムリなら t[(i+2) mod t.length] に入れてみる。これを x が入れる場所が見つかるまで繰り返す。

t の値は次の三種類のいずれかだ。

1. データの値：USet に入っている実際の値である。
2. null：データが入っていないことを示す。
3. del：データが入っていたがそれが削除されたことを示す。

LinearHashTable の要素数を数えるカウンタ n に加えて、データ値の個数と del の個数の合計を数えるカウンタ q を用意する。q の値は n に del の

[*3] 訳注：これが、ハッシュテーブルが第 2 章の配列や第 3 章の連結リストよりも強力な理由である（利用要件によるが)。つまりハッシュ関数の性能さえ良ければ、追加も削除も検索もほぼ定数時間で行える。

[*4] 訳注：たとえば、Python の最も一般的な実装である CPython では、オープンアドレス法で dictionary が実装されている。

個数を加えた値である。これが効率的であるためには t が q より十分大きい必要がある。このとき、t には null である場所がたくさんある。よって LinearHashTable の操作は不変条件 $\mathtt{t.length} \geq 2\mathtt{q}$ を常に満たすようにする。

整理すると、LinearHashTable は要素の配列 t に加え、整数 n、q を持つ。n はデータ値の個数、q は null でない値の個数を保持する。さらに、ハッシュ関数の値域の大きさは 2 の冪に制限されていることが多いので、整数不変条件 $\mathtt{t.length} = 2^{\mathtt{d}}$ を満たす整数 d も持ち回る。

LinearHashTable
```
array<T> t;
int n;   // number of values in T
int q;   // number of non-null entries in T
int d;   // t.length = 2^d
```

LinearHashTable の find(x) 操作は単純である。i = hash(x) として、$\mathtt{t}[\mathtt{i}], \mathtt{t}[(\mathtt{i}+1) \bmod \mathtt{t.length}], \mathtt{t}[(\mathtt{i}+2) \bmod \mathtt{t.length}], \ldots$ と順に、$\mathtt{t}[\mathtt{i}'] = \mathtt{x}$ または $\mathtt{t}[\mathtt{i}'] = \mathtt{null}$ を満たす添え字 $\mathtt{i}'$ を探す。$\mathtt{t}[\mathtt{i}'] = \mathtt{x}$ のとき、x が見つかったとして $\mathtt{t}[\mathtt{i}']$ を返す。$\mathtt{t}[\mathtt{i}'] = \mathtt{null}$ のとき、x はハッシュテーブルに含まれないとして null を返す。

LinearHashTable
```
T find(T x) {
  int i = hash(x);
  while (t[i] != null) {
    if (t[i] != del && t[i] == x) return t[i];
    i = (i == t.length-1) ? 0 : i + 1; // increment i
  }
  return null;
}
```

LinearHashTable の add(x) 操作も簡単に実装できる。find(x) を使えば x が入っているかどうか確認できる。x が入っていなければ $\mathtt{t}[\mathtt{i}], \mathtt{t}[(\mathtt{i}+1) \bmod \mathtt{t.length}], \mathtt{t}[(\mathtt{i}+2) \bmod \mathtt{t.length}], \ldots$ と順に探し、null か del を見つけたらそこを x に書き換え、n と q をひとつずつ増やす。

LinearHashTable
```
bool add(T x) {
  if (find(x) != null) return false;
  if (2*(q+1) > t.length) resize();   // max 50% occupancy
  int i = hash(x);
  while (t[i] != null && t[i] != del)
    i = (i == t.length-1) ? 0 : i + 1; // increment i
  if (t[i] == null) q++;
  n++;
  t[i] = x;
  return true;
}
```

ここまでで remove(x) の実装も明らかだろう。$\mathtt{t}[\mathtt{i}]$, $\mathtt{t}[(\mathtt{i}+1) \bmod \mathtt{t.length}]$, $\mathtt{t}[(\mathtt{i}+2) \bmod \mathtt{t.length}]$, ... と $\mathtt{t}[\mathtt{i}'] = \mathtt{x}$ または $\mathtt{t}[\mathtt{i}'] = \mathtt{null}$ である添え字 $\mathtt{i}'$ を見つけるまで探す。$\mathtt{t}[\mathtt{i}'] = \mathtt{x}$ ならば $\mathtt{t}[\mathtt{i}'] = \mathtt{del}$ とし true を返す。$\mathtt{t}[\mathtt{i}'] = \mathtt{null}$ ならば x はテーブルに入っていなかった（そのため削除できない）として false を返す。

LinearHashTable
```
T remove(T x) {
  int i = hash(x);
  while (t[i] != null) {
    T y = t[i];
    if (y != del && x == y) {
      t[i] = del;
      n--;
      if (8*n < t.length) resize(); // min 12.5% occupancy
      return y;
    }
    i = (i == t.length-1) ? 0 : i + 1;  // increment i
  }
  return null;
```

```
}
```

find(x)・add(x)・remove(x) の正しさは簡単に確認できる。ただし、これは del を使うことに依存している。これらの操作は null でない値を null に書き換えないことに注意する。そのため t[i′] = null である添え字 i′ を見つけると、x は配列に入っていないことがわかる。t[i′] はずっと null であったといえるので、先立って、すなわち i′ よりも先の添字に add(x) が要素を追加していることはないのである。

null でないエントリの数が t.length/2 より大きいときに add(x) を呼ぶとき、またはデータの入っているエントリ数が t.length/8 よりも小さいときに remove(x) を呼ぶと resize() が呼ばれる。resize() は他の配列を使ったデータ構造の場合と同様に働く。まず $2^{d} \geq 3n$ を満たす最小の非負整数 d を見つける。大きさ 2^{d} の配列 t を割当て、古い配列の要素を全て移し替える。この処理の過程で、q を n に等しくリセットする。これは新しい配列 t は del を含まないためである。

LinearHashTable

```
void resize() {
  d = 1;
  while ((1<<d) < 3*n) d++;
  array<T> tnew(1<<d, null);
  q = n;
  // insert everything into tnew
  for (int k = 0; k < t.length; k++) {
    if (t[k] != null && t[k] != del) {
      int i = hash(t[k]);
      while (tnew[i] != null)
        i = (i == tnew.length-1) ? 0 : i + 1;
      tnew[i] = t[k];
    }
  }
  t = tnew;
}
```

5.2.1 線形探索法の解析

add(x)・remove(x)・find(x) のいずれも null であるエントリを見つけると（あるいはその前に）終了する。解析の直感的な説明としては、配列 t の半分以上は null なので、線形探索法はすぐに null のエントリを見つけて処理を終えるはずである。しかしこの直感を当てにしすぎてはいけない。例えば t のエントリを平均的には 2 つだけ見れば良さそうだが、実はこれは正しくない。この節ではハッシュ値は $\{0,\ldots,\mathtt{t.length}-1\}$ から一様な確率分布に従う独立な値であると仮定する。これは現実的な仮定ではないが、これを仮定すれば線形探索法の解析が可能になる。この節の後半で Tabulation Hashing という、線形探索法の用途には「十分よい」ハッシュ法を説明する。もうひとつの仮定として、t の添字はすべて t.length で剰余を取っているとする。つまり単に $\mathtt{t}[\mathtt{i}]$ と書いても $\mathtt{t}[\mathtt{i} \bmod \mathtt{t.length}]$ のことである。

i から始まる長さ k の連続 (run) が発生するとはテーブルのエントリ $\mathtt{t}[\mathtt{i}],\mathtt{t}[\mathtt{i}+1],\ldots,\mathtt{t}[\mathtt{i}+k-1]$ がいずれも null でなく、$\mathtt{t}[\mathtt{i}-1]=\mathtt{t}[\mathtt{i}+k]=\mathtt{null}$ であることをいう。t の null でない要素の数は q で、add(x) は常に $\mathtt{q}\le\mathtt{t.length}/2$ であることを保証する。直前の resize() 以後、t に挿入された q 個の要素を $\mathtt{x}_1,\ldots,\mathtt{x}_\mathtt{q}$ とする。仮定より、ハッシュ値 $\mathtt{hash}(\mathtt{x}_j)$ はいずれも一様分布に従う互いに独立な確率変数である。ここまでの準備で線形探索法の解析における主要な補題を示せる。

補題 **5.4.** i を $\{0,\ldots,\mathtt{t.length}-1\}$ のある要素に固定する。このときある定数 $c (0<c<1)$ が存在して、i から始まる長さ k の連続が発生する確率を $O(c^k)$ と表せる。

証明**.** i から始まる長さ k の連続が発生するとき、相異なる k 個の要素 $\mathtt{x}_j$ が存在し、$\mathtt{hash}(\mathtt{x}_j)\in\{\mathtt{i},\ldots,\mathtt{i}+k-1\}$ を満たす。この事象の発生確率は次のように計算できる。

$$p_k=\binom{\mathtt{q}}{k}\left(\frac{k}{\mathtt{t.length}}\right)^k\left(\frac{\mathtt{t.length}-k}{\mathtt{t.length}}\right)^{\mathtt{q}-k}$$

これは k 個の要素の選び方によらず、これら k 個の要素はいずれも k 箇所のうちのいずれかに、そして残りの $\mathtt{q}-k$ 個の要素は残りの $\mathtt{t.length}-k$ 箇所に割り振られなければならないためだ。[*5]

[*5] p_k は i から始まる長さ k の連続が発生する確率よりも大きいことに注意する。これは p_k は必要条件 $\mathtt{t}[\mathtt{i}-1]=\mathtt{t}[\mathtt{i}+k]=\mathtt{null}$ を要求しないためである。

次の導出ではすこしズルをしている。$r!$ を $(r/e)^r$ に置き換える部分である。スターリング近似（1.3.2 節）からこれは真の値との差は $O(\sqrt{r})$ 程度だとわかる。これを許すと導出が簡単になるのである。問 5.4 ではスターリング近似を使ったより厳密な計算を読者にやってもらう予定だ。

`t.length` が最小値を取るとき p_k は最大値を取る。またデータ構造は不変条件 `t.length` ≥ 2q を保つ。よって次の式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
p_k &\leq \binom{\mathrm{q}}{k}\left(\frac{k}{2\mathrm{q}}\right)^k\left(\frac{2\mathrm{q}-k}{2\mathrm{q}}\right)^{\mathrm{q}-k} \\
&= \left(\frac{\mathrm{q}!}{(\mathrm{q}-k)!k!}\right)\left(\frac{k}{2\mathrm{q}}\right)^k\left(\frac{2\mathrm{q}-k}{2\mathrm{q}}\right)^{\mathrm{q}-k} \\
&\approx \left(\frac{\mathrm{q}^{\mathrm{q}}}{(\mathrm{q}-k)^{\mathrm{q}-k}k^k}\right)\left(\frac{k}{2\mathrm{q}}\right)^k\left(\frac{2\mathrm{q}-k}{2\mathrm{q}}\right)^{\mathrm{q}-k} && \text{[Stirling's approximation]} \\
&= \left(\frac{\mathrm{q}^k\mathrm{q}^{\mathrm{q}-k}}{(\mathrm{q}-k)^{\mathrm{q}-k}k^k}\right)\left(\frac{k}{2\mathrm{q}}\right)^k\left(\frac{2\mathrm{q}-k}{2\mathrm{q}}\right)^{\mathrm{q}-k} \\
&= \left(\frac{\mathrm{q}k}{2\mathrm{q}k}\right)^k\left(\frac{\mathrm{q}(2\mathrm{q}-k)}{2\mathrm{q}(\mathrm{q}-k)}\right)^{\mathrm{q}-k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{(2\mathrm{q}-k)}{2(\mathrm{q}-k)}\right)^{\mathrm{q}-k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1+\frac{k}{2(\mathrm{q}-k)}\right)^{\mathrm{q}-k} \\
&\leq \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^k
\end{aligned}
$$

最後の変形では $x > 0$ ならば $(1+1/x)^x \leq e$ であることを利用した。ここで、$\sqrt{e}/2 < 0.824360636 < 1$ なので、補題が示された。 □

補題 5.4 を使えば `find(x)`・`add(x)`・`remove(x)` の期待実行時間の上界は直接的に計算できる。まずは最もシンプルな `find(x)` を呼ぶが `x` が `LinearHashTable` に入っていないときを考える。この場合 `i` = `hash(x)` は $\{0,\ldots,$`t.length`$-1\}$ の値を取り、`t` の中身と独立な確率変数である。`i` が長さ k の連続の一部なら、`find(x)` の実行時間は $O(1+k)$ 以下である。よって実行時間の期待値の上界を計算できる。

$$
O\left(1+\left(\frac{1}{\texttt{t.length}}\right)\sum_{i=1}^{\texttt{t.length}}\sum_{k=0}^{\infty}k\Pr\{\texttt{i}\text{ is part of a run of length }k\}\right)
$$

内側の和を取っている長さ k の連続は k 回カウントされているので、これをまとめて k^2 とすれば、上の和は次のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
&O\left(1+\left(\frac{1}{\texttt{t.length}}\right)\sum_{i=1}^{\texttt{t.length}}\sum_{k=0}^{\infty}k^2\Pr\{\texttt{i}\text{ starts a run of length }k\}\right)\\
&\le O\left(1+\left(\frac{1}{\texttt{t.length}}\right)\sum_{i=1}^{\texttt{t.length}}\sum_{k=0}^{\infty}k^2 p_k\right)\\
&= O\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}k^2 p_k\right)\\
&= O\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot O(c^k)\right)\\
&= O(1)
\end{aligned}
$$

最後の変形 $\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot O(c^k)$ では指数級数の性質を使っている [*6]。以上より、LinearHashTable に入っていない x について、find(x) の期待実行時間は $O(1)$ である。

resize() のコストを無視していいなら、この解析で LinearHashTable の解析を終わりだ。

まず上の find(x) の解析は、add(x) において x がテーブルに含まれないときにもそのまま適用できる。x がテーブルに含まれるときの find(x) の解析は add(x) によって x を加えたときのコストと同じである。最後に、remove(x) のコストも find(x) のコストと同じだ。

まとめると、resize() のコストを無視すれば、LinearHashTable の操作の期待実行時間はいずれも $O(1)$ である。リサイズのコストを考える場合は、2.1 節で ArrayStack の償却解析を行ったのと同様である。

5.2.2 要約

次の定理は LinearHashTable の性能をまとめたものだ。

定理 5.2. *LinearHashTable* は *USet* インターフェースを実装する。resize() のコストを無視すると、*LinearHashTable* における add(x)・

[*6] 解析学の教科書ではこの和は比を計算して求める。すなわち、ある正の数 k_0 が存在し、任意の $k \ge k_0$ について、$\frac{(k+1)^2c^{k+1}}{k^2c^k} < 1$ を満たす。

remove(x)・find(x) の期待実行時間は $O(1)$ である。

さらに、空の *LinearHashTable* に対して、m 個の add(x)・remove(x) からなる操作の列を順に実行するとき、resize() にかかる時間の合計は $O(m)$ である。

5.2.3 Tabulation Hashing

LinearHashTable の解析では強い仮定を置いていた。すなわち、任意の相異なる要素 $\{x_1,\ldots,x_n\}$ についてそのハッシュ値 hash(x_1),...,hash(x_n) が独立に一様な確率で $\{0,\ldots,\mathtt{t.length}-1\}$ 内に分布するという仮定である。これを実現するひとつのやり方は大きさ $2^{\mathtt{w}}$ の巨大な配列 tab を準備し、すべてのエントリを互いに独立な w-bit の整数乱数で初期化することだ。このとき、hash(x) は tab[x.hashCode()] から d ビットを整数として取り出せばよい。

LinearHashTable
```
int idealHash(T x) {
  return tab[hashCode(x) >> w-d];
}
```

あいにく大きさ $2^{\mathtt{w}}$ の配列はメモリ使用量の観点から現実的でない。Tabulation Hashing では w ビットの整数の代わりに w/r 個の r ビット整数で妥協する。こうすれば大きさ $2^{\mathtt{r}}$ の配列 w/r 個で済むのである。これらの配列に入っている整数はいずれも互いに独立な w ビットの乱数である。hash(x) を計算するために、x.hashCode() を w/r 個の r ビット整数に分け、それぞれを配列の添え字として使う。その後各配列の値をビット単位の排他的論理和を計算し、この結果を hash(x) とする。次のコードは $\mathtt{w}=32,\mathtt{r}=4$ の場合のものである。

LinearHashTable
```
int hash(T x) {
  unsigned h = hashCode(x);
  return (tab[0][h&0xff]
       ^ tab[1][(h>>8)&0xff]
       ^ tab[2][(h>>16)&0xff]
       ^ tab[3][(h>>24)&0xff])
      >> (w-d);
```

```
}
```

この場合、tab は 4 つの列と $2^{32/4} = 256$ の行からなる二次元配列である。

任意の x について hash(x) は $\{0,\ldots,2^{d}-1\}$ の値を一様な確率で取ることを簡単に確認できる。少し計算すればハッシュ値のペアが互いに独立であることも確認できる。これは ChainedHashTable における乗算ハッシュ法の代わりに Tabulation Hashing を使えることを意味する。

残念ながら、相異なる任意の n 個の値の組について、そのハッシュ値が互いに独立というわけではない。しかしそうであっても、Tabulation Hashing は定理 5.2 で示した性質を保証するのに十分よいハッシュ法である。この話題についてはこの章の終わりで参考文献を紹介する。

5.3 ハッシュ値

XXX: ハッシュ値と Hash Code は区別したほうがよいか?

前節のハッシュテーブルではデータに対して w ビットの整数を対応させていた。しかしキーが整数でないことはよくある。例えば文字列・オブジェクト・配列や他の複合データ型である。こういうデータにもハッシュテーブルを使うにはこれらの型から w ビットのハッシュ値を計算すればよい。このハッシュ値が満たすべき性質は次のものだ。

1. x と y が等しいとき、x.hashCode() と y.hashCode() は等しい。
2. x と y が等しくないとき、x.hashCode() = y.hashCode() である確率は小さい。（$1/2^{w}$ に近いということだ。）

一つ目の性質は、x をハッシュテーブルに入れたあと、x と等しい y を検索すると x がちゃんと見つかることを保証する。二つ目の性質は、オブジェクトを整数に変換する際のロスを小さくするものだ。これは相異なるふたつの要素はハッシュテーブルの違う場所に入ることが多いことを保証する。

5.3.1 プリミティブな型のハッシュ値

char・byte・int・float などの小さいプリミティブな型のハッシュ値は簡単に計算できる。これらの方はバイナリ表現があり、これは w ビット以下である。(たとえば C++ では char はたいてい 8 ビット型であり、float は 32

ビット型である。) このビット列を $\{0,\dots,2^{\mathtt{w}}-1\}$ の範囲の整数であると解釈すればよい。そうすれば、ふたつの異なる値は異なるハッシュ値を持つ。また、ふたつの同じ値は同じハッシュ値を持つ。

w ビットよりも多くのビットを持つプリミティブ型は少ない。ふつうある整数 c が存在し、$c\mathtt{w}$ ビットである。(Java の long・double 型は $c=2$ である例である。) これらのデータ型は c 個のオブジェクトの複合型と考えられる。この扱いは次の小節に譲る。

5.3.2 複合オブジェクトのハッシュ値

複合オブジェクトのハッシュ値は、その構成要素のハッシュ値を組み合わせて計算する。これは思うほど簡単でない。いい感じのやり方はたくさん思いつく（例えばビット単位の排他的論理和を計算する）が、そのうちの多くはうまくいかない。（5.7 から 5.9 を参照せよ。）しかし 2w ビットの算術精度があれば単純でロバストな方法がある。$P_0,\dots,P_{r-1}$ からなる複合オブジェクトがあり、それぞれのハッシュ値は $\mathtt{x}_0,\dots,\mathtt{x}_{r-1}$ であるとする。このとき互いに独立な w ビットの乱数 $\mathtt{z}_0,\dots,\mathtt{z}_{r-1}$ と、2w ビットのランダムな奇数 z から、複合オブジェクトのハッシュ値を計算できる。

$$h(\mathtt{x}_0,\dots,\mathtt{x}_{r-1}) = \left(\left(\mathtt{z}\sum_{i=0}^{r-1}\mathtt{z}_i\mathtt{x}_i\right) \bmod 2^{2\mathtt{w}}\right) \operatorname{div} 2^{\mathtt{w}}$$

このハッシュ値の計算過程は最後に z をかけ、$2^{\mathtt{w}}$ で割っていることに注目してほしい。これは 2w ビットの中間結果に 5.1.1 節で紹介した乗算ハッシュ法を使って w ビットの最終結果を得ている。x0・x1・x2 の 3 つの構成要素からなる複合オブジェクトの場合の例を示す。

Point3D

```
unsigned hashCode() {
  // random number from random.org
  long long z[] = {0x2058cc50L, 0xcb19137eL, 0x2cb6b6fdL};
  long zz = 0xbea0107e5067d19dL;
  long h0 = ods::hashCode(x0);
  long h1 = ods::hashCode(x1);
  long h2 = ods::hashCode(x2);
  return (int)(((z[0]*h0 + z[1]*h1 + z[2]*h2)*zz) >> 32);
```

```
}
```

実装が単純なだけでなく、次の定理はこの方法が良い性質を持つことを示す。

定理 5.3. $\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1}$ と $\mathtt{y}_0,\ldots,\mathtt{y}_{r-1}$ はいずれも、$\{0,\ldots,2^{\mathtt{w}}-1\}$ の要素である $\mathtt{w}$ ビットの整数からなる列とする。さらに、少なくとも一箇所の添え字 $i\in\{0,\ldots,r-1\}$ で $\mathtt{x}_i\neq\mathtt{y}_i$ が成り立つと仮定する。このとき、次が成り立つ。

$$\Pr\{h(\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1})=h(\mathtt{y}_0,\ldots,\mathtt{y}_{r-1})\}\le 3/2^{\mathtt{w}}$$

証明*.* 最後の乗算ハッシュ法については後半に考える。次の関数を定義する。

$$h'(\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1})=\left(\sum_{j=0}^{r-1}\mathtt{z}_j\mathtt{x}_j\right)\bmod 2^{2\mathtt{w}}$$

$h'(\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1})=h'(\mathtt{y}_0,\ldots,\mathtt{y}_{r-1})$ であるとする。これは次のように書き直せる。

$$\mathtt{z}_i(\mathtt{x}_i-\mathtt{y}_i)\bmod 2^{2\mathtt{w}}=t \tag{5.4}$$

ここで t は次のものである。

$$t=\left(\sum_{j=0}^{i-1}\mathtt{z}_j(\mathtt{y}_j-\mathtt{x}_j)+\sum_{j=i+1}^{r-1}\mathtt{z}_j(\mathtt{y}_j-\mathtt{x}_j)\right)\bmod 2^{2\mathtt{w}}$$

$\mathtt{x}_i>\mathtt{y}_i$ と仮定しても一般性を失わない。すると (5.4) は次のようになる。

$$\mathtt{z}_i(\mathtt{x}_i-\mathtt{y}_i)=t \tag{5.5}$$

これは $\mathtt{z}_i$ と $(\mathtt{x}_i-\mathtt{y}_i)$ はいずれも $2^{\mathtt{w}}-1$ 以下なので、これらの積は $2^{2\mathtt{w}}-2^{\mathtt{w}+1}+1<2^{2\mathtt{w}}-1$ 以下であるためである。仮定より $\mathtt{x}_i-\mathtt{y}_i\neq 0$ なので、(5.5) は $\mathtt{z}_i$ について高々ひとつの解を持つ。$\mathtt{z}_i$ と t は互いに独立（$\mathtt{z}_0,\ldots,\mathtt{z}_{r-1}$ は互いに独立である）なので、$h'(\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1})=h'(\mathtt{y}_0,\ldots,\mathtt{y}_{r-1})$ を満たす $\mathtt{z}_i$ を選ぶ確率は $1/2^{\mathtt{w}}$ 以下である。

最後の処理は乗算ハッシュ法であり、$2\mathtt{w}$ ビットの中間結果 $h'(\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1})$ を $\mathtt{w}$ ビットの最終結果 $h(\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1})$ に縮める。定理 5.3 より、$h'(\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1})\neq h'(\mathtt{y}_0,\ldots,\mathtt{y}_{r-1})$ ならば $\Pr\{h(\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1})=h(\mathtt{y}_0,\ldots,\mathtt{y}_{r-1})\}\le 2/2^{\mathtt{w}}$ である。以

上より、次の式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left\{\begin{array}{l} h(x_0,\ldots,x_{r-1}) \\ \quad = h(y_0,\ldots,y_{r-1}) \end{array}\right\} \\
&= \Pr\left\{\begin{array}{l} h'(x_0,\ldots,x_{r-1}) = h'(y_0,\ldots,y_{r-1}) \text{ or} \\ [h'(x_0,\ldots,x_{r-1}) \neq h'(y_0,\ldots,y_{r-1}) \\ \quad \text{and} \\ z h'(x_0,\ldots,x_{r-1}) \operatorname{div} 2^w = z h'(y_0,\ldots,y_{r-1}) \operatorname{div} 2^w] \end{array}\right\} \\
&\leq 1/2^w + 2/2^w = 3/2^w \ .
\end{aligned}
$$

□

5.3.3 配列と文字列のハッシュ値

前小節の手法はオブジェクトが固定数の構成要素からなるときにはうまくいく。しかし、可変長のオブジェクトをうまく扱えない。なぜなら w ビットの乱数 z_i を構成要素の数だけ使う必要があるためである。

必要なだけ z_i を生成するためには擬似乱数列を使えるが、その場合 z_i は互いに独立ではなく、擬似乱数がハッシュ関数に対して悪影響を及ぼさないことを証明するのは難しい。例えば定理 5.3 の証明における t と z_i の独立性は成り立たなくなる。

ここでは素数体上の多項式を使ったハッシュ法を使う。これは正規多項式の値を計算し、素数 p による剰余を取るものだ。次の定理は素数体上の多項式が普通の多項式と似た振る舞いをすることを主張する。

定理 5.4. p を素数、$f(z) = x_0 z^0 + x_1 z^1 + \cdots + x_{r-1} z^{r-1}$ を $x_i \in \{0,\ldots,p-1\}$ を係数とする非自明 *(*$x_0 = x_1 = ... = x_{r-1} = 0$ *でない)* な多項式とする。このとき、等式 $f(z) \bmod p = 0$ は $z \in \{0,\ldots,p-1\}$ の範囲に高々 $r-1$ 個の解を持つ。

定理 5.4 より、$z \in \{0,\ldots,p-1\}$ を使えば、$x_i \in \{0,\ldots,p-2\}$ である整数の列 $x_0,\ldots,x_{r-1}$ のハッシュ値を計算できる。

$$h(x_0,\ldots,x_{r-1}) = \left(x_0 z^0 + \cdots + x_{r-1} z^{r-1} + (p-1) z^r\right) \bmod p$$

最後に追加された項 $(p-1)z^r$ に注意する。$(p-1)$ を整数列の末尾の要素として $x_0,\ldots,x_r$ と考えると便利かもしれない。この要素は整数列の要素のいずれとも異なる。整数列の要素は $\{0,\ldots,p-2\}$ の要素である。$p-1$ を列の終わりを示すマーカーだと考える。

次の定理はふたつの同じ長さの列について、z だけの小さなランダム性にも関わらず、良い出力を返すことを示すものだ。

定理 5.5. p を $\mathtt{p} > 2^{\mathtt{w}} + 1$ を満たす素数とする。$\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1}$ と $\mathtt{y}_0,\ldots,\mathtt{y}_{r-1}$ を $\{0,\ldots,2^{\mathtt{w}}-1\}$ の要素である $\mathtt{w}$ ビットの整数からなる列であるとする。$i \in \{0,\ldots,r-1\}$ のうち少なくともひとつ $\mathtt{x}_i \neq \mathtt{y}_i$ が成り立つと仮定する。このとき、次の式が成り立つ。

$$\Pr\{h(\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1}) = h(\mathtt{y}_0,\ldots,\mathtt{y}_{r-1})\} \leq (r-1)/\mathtt{p}$$

証明. 等式 $h(\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1}) = h(\mathtt{y}_0,\ldots,\mathtt{y}_{r-1})$ は次のように変形できる。

$$\left((\mathtt{x}_0-\mathtt{y}_0)\mathtt{z}^0 + \cdots + (\mathtt{x}_{r-1}-\mathtt{y}_{r-1})\mathtt{z}^{r-1}\right) \bmod \mathtt{p} = 0 \tag{5.6}$$

$\mathtt{x}_\mathtt{i} \neq \mathtt{y}_\mathtt{i}$ なので、この多項式は非自明である。よって定理 5.4 より $\mathtt{z}$ についての解は高々 $r-1$ 個である。以上より、$\mathtt{z}$ を選んでこの解のうちの一つを引く確率は $(r-1)/\mathtt{p}$ 以下である。 □

このハッシュ関数はふたつの入力列の長さが異なる場合にも対応できる。この場合、一方の入力列が他方の入力列を含んでいても構わない。この関数は入力が無限列であってもそのまま問題なく処理できるのだ。

$$\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1},\mathtt{p}-1,0,0,\ldots$$

長さ $r, r'(r > r')$ のふたつの入力があるとき、ふたつの列は添え字 $i = r$ で異なる。このとき (5.6) は次のようになる。

$$\left(\sum_{i=0}^{i=r'-1}(\mathtt{x}_i-\mathtt{y}_i)\mathtt{z}^i + (\mathtt{x}_{r'}-\mathtt{p}+1)\mathtt{z}^{r'} + \sum_{i=r'+1}^{i=r-1}\mathtt{x}_i\mathtt{z}^i + (\mathtt{p}-1)\mathtt{z}^r\right) \bmod \mathtt{p} = 0$$

これは定理 5.4 より $\mathtt{z}$ について高々 r 個の解をもつ。定理 5.5 と合わせると次のより一般的な定理が示せる。

定理 5.6. p を $\mathtt{p} > 2^{\mathtt{w}} + 1$ を満たす素数とする。$\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1}$ と $\mathtt{y}_0,\ldots,\mathtt{y}_{r'-1}$ は $\{0,\ldots,2^{\mathtt{w}}-1\}$ の要素である $\mathtt{w}$ ビット整数からなる相異なる列であるとする。このとき次の式が成り立つ。

$$\Pr\{h(\mathtt{x}_0,\ldots,\mathtt{x}_{r-1}) = h(\mathtt{y}_0,\ldots,\mathtt{y}_{r-1})\} \leq \max\{r,r'\}/\mathtt{p}$$

次のサンプルコードを見れば配列 $\mathtt{x}$ を含むオブジェクトをこのハッシュ関数がどう扱うかがわかるだろう。

GeomVector
```
unsigned hashCode() {
  long p = (1L<<32)-5;   // prime: 2^32 - 5
  long z = 0x64b6055aL;  // 32 bits from random.org
  int z2 = 0x5067d19d;   // random odd 32 bit number
  long s = 0;
  long zi = 1;
  for (int i = 0; i < x.length; i++) {
    // reduce to 31 bits
    long long xi = (ods::hashCode(x[i]) * z2) >> 1;
    s = (s + zi * xi) % p;
    zi = (zi * z) % p;
  }
  s = (s + zi * (p-1)) % p;
  return (int)s;
}
```

このコードは実装上の都合で衝突確率がやや大きくなっている。特に x[i].hashCode() を 31 ビットに縮めるために 5.1.1 節で $d = 31$ とした乗算ハッシュ法を使っている。これは素数 $p = 2^{32} - 5$ で剰余を取った足し算や掛け算を、符号なし 63 ビット整数で実行するためである。

よって、長い方の長さが r であるふたつの相異なる列のハッシュ値が一致する確率は次の値以下である。

$$2/2^{31} + r/(2^{32} - 5)$$

これは定理 5.6 で求めた $r/(2^{32} - 5)$ よりも大きい。

5.4 ディスカッションと練習問題

ハッシュテーブルとハッシュ値は広大で活発な研究分野であり、この章ではほんのさわりを説明しただけである。ハッシュ方のオンライン参考文献一覧は [10]2000 近いエントリを含む。

ハッシュテーブルには他にも様々な実装がある。

5.1 節で説明したものはチェイン法 hashing with chaining である。（各配列のエントリは要素のチェイン（List）である。）チェイン法によるハッシュテーブルは IBM にて H. P. Luhn が 1953 年 1 月に出した内部報告書で提案された。この報告書は連結リストの最古の文献のうちの一つでもあると思われる。

別の方法として、**オープンアドレス法**がある。これは全てのデータを配列に直接格納するものだ。5.2 節で説明した LinearHashTable はこのやり方のうちのひとつである。このアイデアもまた別の IBM のグループによって独立に 1950 年代に提案された。オープンアドレス法は**衝突の解決**のことを考えなければならない。衝突とはふたつの値が配列の同じ位置に割当てられることだ。このための方法にはいくつか種類がある。それぞれ異なる性能保証があり、またこの章で説明したものよりも精巧なハッシュ関数を用いるものもある。

また別のハッシュテーブルの実装に関する話題としては、**完全ハッシュ法**と呼ばれるものがある。これは find(x) の実行時間が最悪の場合でも $O(1)$ になるハッシュ法だ。データセットが静的な場合にはこれはデータセットに対する**完全ハッシュ関数**を見つけることで実現できる。これはすべてのデータを別々の配列内の位置に対応させるハッシュ関数である。データが動的な場合には完全ハッシュ法として FKS **二段階ハッシュテーブル** [31, 24] や cuckoo hashing [55] などが知られている。

この章で紹介したハッシュ関数は任意のデータセットに対してうまく動作することが証明できる既知の手法の中でおそらく最も実用的なものである。別のよい方法として、Carter と Wegman による先駆け的な研究成果であった**ユニバーサルハッシュ法**を使ったものがある。いくつかのことなるシナリオのためのハッシュ関数が提案されている。[14] 5.2.3 節で説明した Tabulation hashing は Carter と Wegman の研究 [14] によるものだが、この手法を線形探索法（と他のいくつかのハッシュテーブルの実装）に適用した場合の解析は Pătraşcu と Thorup の研究成果である。[58]

乗算ハッシュ法のアイデアは非常に古くからあり、おそらくこれはハッシュ法の伝承といってもよいだろう。[48, Section 6.4] しかし、5.1.1 節で説明した乗数 z をランダムな奇数から選ぶアイデアとその解析は Dietzfelbinger らの研究成果である。[23] この乗算ハッシュ法は最もシンプルなもののうちの一つだが、衝突確率が $2/2^{\mathsf{d}}$、つまり 2^{w} から 2^{d} への全ての関数からランダムに選出した場合（理想的な場合）とくらべて衝突確率が二倍になってしまう。XXX: multiply-add の訳語 multiply-add **ハッシュ法**は次の関数を使う方法だ。

$$h(\mathsf{x}) = ((\mathsf{z}\mathsf{x} + b) \bmod 2^{2\mathsf{w}}) \operatorname{div} 2^{2\mathsf{w}-\mathsf{d}}$$

ここで z と b いずれも $\{0,\dots,2^{2w}-1\}$ からランダムに選出される。Multiply-add ハッシュ法の衝突確率は $1/2^{d}$ である。[21] しかし、$2w$ ビット精度の四則演算が必要である。

固定長の w ビットの整数列からハッシュ値を得る方法はたくさんある。特に高速な方法は次のものだ。[11]

$$h(x_0,\dots,x_{r-1}) \\ = \left(\sum_{i=0}^{r/2-1}((x_{2i}+a_{2i}) \bmod 2^{w})((x_{2i+1}+a_{2i+1}) \bmod 2^{w})\right) \bmod 2^{2w}$$

ここで r は偶数であり、$a_0,\dots,a_{r-1}$ はいずれも $\{0,\dots,2^{w}\}$ からランダムに選出される。

この $2w$ ビットのハッシュ値が衝突する確率は $1/2^{w}$ である。これを乗算ハッシュ法（か Multiply-add）を使って w ビットに縮めることができる。これは $r/2$ 回の $2w$ ビット乗算だけで実現でき、これは高速である。5.3.2 節の方法は r 回の乗算が必要であった。（mod の計算は w または $2w$ ビットの足し算、掛け算では暗に実行される。）

5.3.3 節で説明した素数体を使った可変長配列のハッシュ法は Dietzfelbinger et al.[22] による。この方法は mod を使うが、これは時間のかかる機械語命令であり、結果この方法は速くない。剰余の法として $2^{w}-1$ を使う工夫がある。こうすると mod を加算とビット単位の and 演算に置き換えられる。[47, Section 3.6] 他の方法としては固定長の高速なハッシュ法を使って長さ $c>1$ のブロックに対してハッシュ値を計算し、その結果の $\lceil r/c\rceil$ 個のハッシュ値の配列に素数体を使った方法でハッシュ値を求めるものがある。

問 **5.1.** ある大学では生徒が初めて講義を履修するときに学生番号を発行する。この番号はひとつずつ増える整数で、何年も前に 0 から始まり、今では数百万になっている。百人の一年生が受講する講義にて、各生徒に学生番号から計算したハッシュ値を割り当てる。このとき下の二桁、あるいは上の二桁のどちらを使うのはいいアイデアだろうか?説明せよ。

問 **5.2.** 5.1.1 節の方法において、$n=2^{d}$ かつ $d\le w/2$ である場合を考える。

1. z によらず、持つ相異なる n 個の入力であって、同じハッシュ値を持つものが存在することを示せ。（ヒント：これは簡単である。数論の知識などは必要ない。）
2. z が与えられたとき、n 個の同じハッシュ値を持つ値を求めよ。（これはより難しく、基本的な数論の知識が必要だ。）

問 **5.3.** 補題 5.1 で得た上界 $2/2^{d}$ はある意味で最適であることを示せ。 $x=$

2^{w-d-2} かつ $y = 3x$ のとき、$\Pr\{\mathrm{hash}(x) = \mathrm{hash}(y)\} = 2/2^d$ であることを示せ。（ヒントとしては、zx と $z3x$ の二進表記を考え、$z3x = zx+2zx$ であることを利用せよ。）

問 **5.4.** 1.3.2 節で与えたスターリングの公式を使って、補題 5.4 を今度は誤魔化しなしで証明せよ。

問 **5.5.** 要素 x を LinearHashTable に要素を追加するための簡略化された次のコードを見よ。これは単純に x をはじめに見つけた null であるエントリに入れる。このコードは非常に遅いことがあることを示せ。すなわち、$O(n)$ 個の add(x)・remove(x)・find(x) からなる操作の列で n^2 の実行時間がかかる例を挙げよ。

LinearHashTable

```
bool addSlow(T x) {
  if (2*(q+1) > t.length) resize();   // max 50% occupancy
  int i = hash(x);
  while (t[i] != null) {
      if (t[i] != del && x.equals(t[i])) return false;
      i = (i == t.length-1) ? 0 : i + 1; // increment i
  }
  t[i] = x;
  n++; q++;
  return true;
}
```

問 **5.6.** 昔の Java では String クラスの hashCode() メソッドは長い文字列の全ての文字を使ってはいなかった。例えば 16 文字の文字列の場合は偶数番目の 8 文字だけを使っていた。これがよくないアイデアであること、すなわち同じハッシュ値を持つ文字列がたくさん現れるような例を挙げよ。

問 **5.7.** ふたつの w ビットの整数 x と y からなるオブジェクトがあるとき、$x \oplus y$ をハッシュ値とするのはよくないことを示せ。すなわち、ハッシュ値が 0 となるようなオブジェクトの例をたくさん挙げよ。

問 **5.8.** ふたつの w ビットの整数 x と y からなるオブジェクトがあるとき、$x + y$ をハッシュ値とするのはよくないことを示せ。すなわち、同じハッシュ

値を持つオブジェクトの集まりの例を挙げよ。

問 **5.9.** ふたつの w ビットの整数 x と y からなるオブジェクトがあるとする。決定的な関数 $h(\mathtt{x},\mathtt{y})$ により w ビットの整数であるハッシュ値を計算するとする。このときハッシュ値が一致するオブジェクトの集合であって、要素数の大きいものが存在することを示せ。

問 **5.10.** ある正の数 w について、$p = 2^{\mathtt{w}} - 1$ であるとする。正の数 x について次の式が成り立つ理由を説明せよ。

$$(x \bmod 2^{\mathtt{w}}) + (x \operatorname{div} 2^{\mathtt{w}}) \equiv x \bmod (2^{\mathtt{w}} - 1)$$

（これは $x \bmod (2^{\mathtt{w}} - 1)$ を計算するための方法として、

$$\mathtt{x} = \mathtt{x}\&((1 << \mathtt{w}) - 1) + \mathtt{x} >> \mathtt{w}$$

を $\mathtt{x} \le 2^{\mathtt{w}} - 1$ を満たすまで繰り返すアルゴリズムを与えている。）

問 **5.11.** 標準ライブラリやこの本の HashTable・LinearHashTable を参考によく使われるハッシュテーブルの実装を見つけ、整数 x に対して find(x) が線形時間で実行できるプログラムを実装せよ。つまり、テーブルの中の同じ位置に対応付けられる n 個の整数の集まりを見つけよ。

実装によって、単にコードを見れば十分だったり、あるいは試しに挿入・検索をしてみてその時間を測ってみたりする必要があるだろう。これはウェブサーバーへの DoS (denial of service) 攻撃に使われることがある。[17]

第 **6**

二分木

この章では、コンピュータサイエンスで現れる最も基本的な構造のうちのひとつ、二分木を紹介する。この構造を**木**と呼ぶのは、図示したときに（森に生えている）木に似ているためである。二分木には複数の定義がある。数学的には、**二分木**とは連結[*1] な有限無向グラフであって、サイクルを持たず、すべての頂点の次数が 3 以下のものである[*2]。

コンピュータサイエンスにおける応用では、二分木はふつう**根を持つ**。木の**根**と呼ばれる特殊なノード r があり、このノードの次数は 2 以下である。ノード u(≠ r) から r に向かう経路における二番目のノードを u の**親**という。u に隣接する親以外のノードを u の**子**という。特に**順序付けられている**二分木に興味があることが多いので、子を**左の子**・**右の子**と呼び分けることにする。

二分木を図示するとき、ふつう根から下に向かって描く。根が一番上に描かれる。また、ノード u の左右の子は、u の左下・右下にそれぞれ描かれる。（図 6.1）図 6.2.a は 9 個のノードを持つ二分木の例である。

木（および二分木）は重要なので、その性質を記述するための専用の語彙が使われている。木におけるノード u の**深さ**とは、u から根までの経路の長さである[*3]。ノード w が u から r への経路に含まれるとき、w を u の**祖先**という。一方、このとき u を w の**子孫**という。木におけるノード u の**部分木**とは、u を根とし、u のすべての子孫を含む木である。ノード u の**高さ**とは、u から u の子孫への経路の長さの最大値である。木の**高さ**とはその根の高さである。

[*1] 訳注：グラフが連結 (connected) であるとは、グラフ上の辺を辿ることで任意の 2 頂点間を行き来できることである。そうして辿った辺の列のことを経路 (path) と呼ぶ。

[*2] 訳注：無向グラフの頂点における次数 (degree) とは、その頂点が持つ辺の数である。たとえば図 6.1 において、u の次数は 3 である。

[*3] 訳注：たとえば u=r であるとき、u の深さは 0 である。

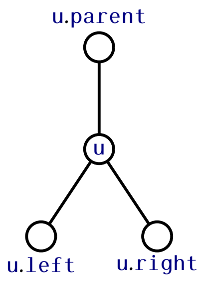


図 6.1: BinaryTree における、ノード u の親・左の子・右の子

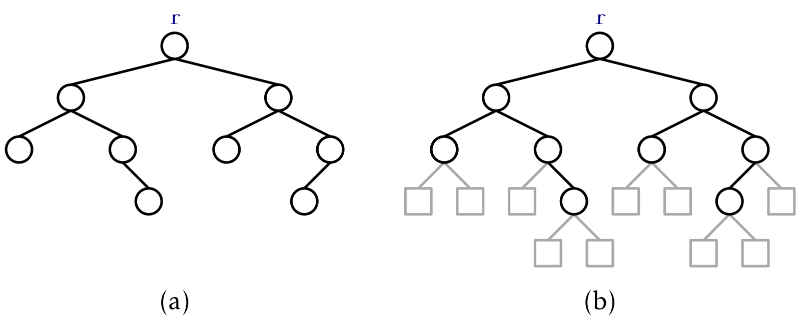


図 6.2: (a) 9 個の本物のノードを持つ二分木と、(b) 10 個の外部ノードを持つ二分木

ノード u が子を持たないなら、u は**葉**である。

外部ノードという概念を考えると便利なことがある。左の子を持たないノードは左の子として外部ノードを持ち、右の子を持たないノードは右の子として外部ノードを持つとする。（図 6.2.b を参照せよ。）帰納法により、$n \geq 1$ 個の（本物の）ノードを持つ二分木は、$n+1$ 個の外部ノードを持つことを示せる。

6.1 BinaryTree：基本的な二分木

二分木におけるノード u を表現するには、u に隣接する（3 つ以下の）ノードを明示的に保持するのが簡単だ。

BinaryTree
```
class BTNode {
  N *left;
  N *right;
  N *parent;
  BTNode() {
    left = right = parent = NULL;
  }
};
```

隣接する頂点が 3 つ揃っていないときには、そこは nil とする。このとき、外部ノードと根の親とが nil に対応する。

すると、二分木自体は根 r への参照として表現できる[*4]。

BinaryTree
```
Node *r;    // root node
```

ノード u の深さを、u から根への経路を辿るときのステップ数として計算できる。

BinaryTree
```
int depth(Node *u) {
  int d = 0;
  while (u != r) {
    u = u->parent;
    d++;
  }
  return d;
}
```

[*4] 訳注：二分木を連結なグラフとして定義したことを思い出そう。木に含まれる何らかのノードへの参照が 1 つあれば、他のノードへたどり着ける。そのような参照として根を選ぶ理由は、後の章で出てくるような木（たとえば B 木。14.2.2 節を参照せよ。）では、親への参照が存在せず、根以外の参照を選んだ場合に複数持つ必要が生じるためだ。

6.1.1 再帰的なアルゴリズム

再帰アルゴリズムを使うと二分木に関する計算が簡単になる。例えば u を根とする二分木のサイズ（ノードの数）は、u の子を根とする部分木のサイズを再帰的に計算し、足し合わせ、その結果に 1 加えると求まる。

BinaryTree
```
int size(Node *u) {
  if (u == nil) return 0;
  return 1 + size(u->left) + size(u->right);
}
```

ノード u の高さは、u のふたつの部分木の高さの最大値を計算し、その結果に 1 加えると求まる [*5]。

BinaryTree
```
int height(Node *u) {
  if (u == nil) return -1;
  return 1 + max(height(u->left), height(u->right));
}
```

6.1.2 二分木の走査

先の小節で説明したふたつのアルゴリズムは二分木のすべてのノードを訪問するために再帰を使った。いずれのアルゴリズムも二分木のノードを次のコードと同じ順番で訪問していた。

BinaryTree
```
void traverse(Node *u) {
    if (u == nil) return;
    traverse(u->left);
    traverse(u->right);
```

[*5] 訳注：完全な余談だが、このように二分木の高さを求めるのは、米国におけるソフトウェアエンジニア面接の頻出問題の一つである。https://leetcode.com/problems/maximum-depth-of-binary-tree/

```
}
```

再帰を使うとこのように簡潔なコードを書けるが、時に困ることもある。再帰の深さの最大値は、二分木におけるノードの深さの最大値、すなわち木の高さである。これが非常に大きいと、再帰のためのスタックとして、利用できる量以上の領域を要求し、プログラムがクラッシュしてしまうことがある[*6]。

再帰なしで二分木を走査するためには、どこから来たかによって次の行き先を決めるアルゴリズムを使えばよい。図 6.3 を参照せよ。ノード u に u.parent から来たときは、次は u.left に向かう。u.left から来たときは、次は u.right に向かう。u.right から来たときは、u の部分木を辿り終えたので u.parent に戻る。次のコードはこれを実装したものである。ただし、u.left・u.right・u.parent が nil であるケースも適切に処理している。

BinaryTree
```
void traverse2() {
  Node *u = r, *prev = nil, *next;
  while (u != nil) {
    if (prev == u->parent) {
      if (u->left != nil) next = u->left;
      else if (u->right != nil) next = u->right;
      else next = u->parent;
    } else if (prev == u->left) {
      if (u->right != nil) next = u->right;
      else next = u->parent;
    } else {
      next = u->parent;
    }
    prev = u;
    u = next;
  }
}
```

[*6] 訳注：この問題はスタックオーバーフローと呼ばれる。

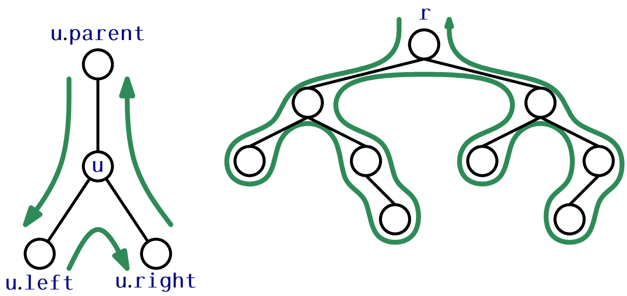


図 6.3: 二分木を再帰を使わずに走査するときの、三通りのノード u の訪れ方と、その結果として生じる木の走査

再帰アルゴリズムで計算できることは、こうして再帰なしでも計算できる。例えば木のサイズを計算するためには、カウンタ n を保持し、新しいノードを訪問するたびにその値をひとつずつ増やせばよい。

BinaryTree

```
int size2() {
    Node *u = r, *prev = nil, *next;
    int n = 0;
    while (u != nil) {
      if (prev == u->parent) {
        n++;
        if (u->left != nil) next = u->left;
        else if (u->right != nil) next = u->right;
        else next = u->parent;
      } else if (prev == u->left) {
        if (u->right != nil) next = u->right;
        else next = u->parent;
      } else {
        next = u->parent;
      }
      prev = u;
      u = next;
```

```
    }
    return n;
  }
```

二分木の実装には、parent を使わないこともある。この場合にも再帰を使わない実装は可能だが、List か Stack を使って、今訪問しているノードから根までの経路を記録しておく必要がある。

ここまで説明したものとは別の走査方法として、**幅優先**な走査がある [*7]。幅優先に走査する場合、根から下に向かって深さごとに、同じ深さのノードは左から右の順に、すべてのノードを訪問する。(図 6.4 を参照せよ。）これは英語の文章の読み方と似ている。（訳注：横書きなら、日本語でも同様である。）幅優先の走査はキュー q を使って実装できる。初期状態では q は根だけを含む。各ステップでは、q から次のノード u を取り出し、u を処理し、u.left と u.right を（nil でなければ）q に追加する。

BinaryTree
```
void bfTraverse() {
  ArrayDeque<Node*> q;
  if (r != nil) q.add(q.size(),r);
  while (q.size() > 0) {
    Node *u = q.remove(q.size()-1);
    if (u->left != nil) q.add(q.size(),u->left);
    if (u->right != nil) q.add(q.size(),u->right);
  }
}
```

6.2 BinarySearchTree：バランスされていない二分探索木

BinarySearchTree（二分探索木）はノード u がある全順序な集合の要素であるデータ u.x を持つ二分木である。二分探索木の各ノードとそのデータは次の**二分探索木の性質**を満たす。 ノード u について、u.left を根とする部分

[*7] 訳注：12.3.1 節では、一般的な場合の幅優先探索のアルゴリズムを紹介する。

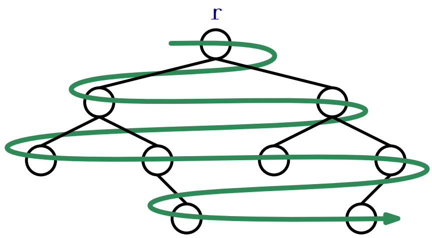


図 6.4: 幅優先な走査では、二分木の各ノードは深さ毎に、また各深さでは左から右の順で訪問される。

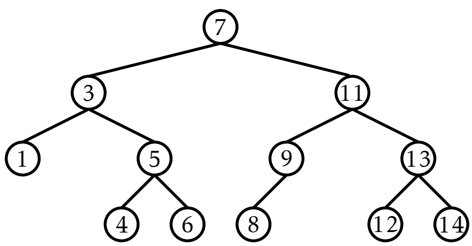


図 6.5: 二分探索木の例

木に含まれるデータはすべて u.x より小さく、u.right を根とする部分木に含まれるデータはすべて u.x より大きい。BinarySearchTree の例を図 6.5 に示す。

6.2.1 探索

二分探索木の性質は有用だ。この性質を利用して、二分探索木から値 x を高速に見つけられる。具体的には、まず根 r から x を探し始める。ノード u に訪問しているとき、次の 3 つの場合がありうる。

1. x < u.x なら u.left に進む。

2. $x > u.x$ なら u.right に進む。
3. $x = u.x$ なら値が x であるノード u を見つけた。

この探索は三つ目のケース、または u = nil になると終了する。前者なら x が見つかったことになる。後者なら x がこの木に含まれていないとわかる。

BinarySearchTree
```
T findEQ(T x) {
  Node *w = r;
  while (w != nil) {
    int comp = compare(x, w->x);
    if (comp < 0) {
      w = w->left;
    } else if (comp > 0) {
      w = w->right;
    } else {
      return w->x;
    }
  }
  return null;
}
```

二分探索木における探索の例を図 6.6 にふたつ示す。二つ目の例から、x が見つからない場合でも、役に立つ情報が得られることがわかる。探索における最後のノード u にて、先の場合分けの一つ目のケースであったなら、u.x は木に含まれるデータであって x よりも大きい値のうち、最小のものである。同様に場合分けの二つ目のケースであったなら、u.x は x より小さい値のうち、最大のものである。よって、場合分けの一つ目のケースが最後に発生したノード z を記録しておけば、BinarySearchTree の find(x) を、x 以上の値のうち最小のものを返すよう実装することもできる。

BinarySearchTree
```
T find(T x) {
  Node *w = r, *z = nil;
  while (w != nil) {
    int comp = compare(x, w->x);
```

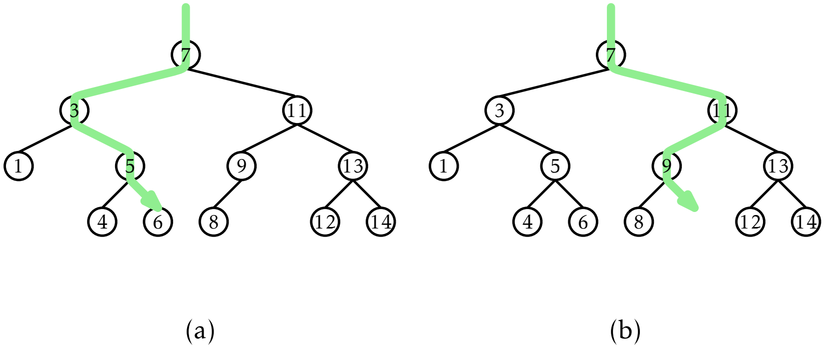


図 6.6: 二分探索木において、(a) 探索が成功する例（6 が見つかる）と、(b) 探索が失敗する（10 が見つからない）例

```
    if (comp < 0) {
      z = w;
      w = w->left;
    } else if (comp > 0) {
      w = w->right;
    } else {
      return w->x;
    }
  }
  return z == nil ? null : z->x;
}
```

6.2.2 追加

BinarySearchTree に値 x を追加するために、まずは x を検索する。もし見つかれば挿入の必要がない。見つからなければ、検索において最後に出会ったノード p の子である葉として、x を保存する。このとき、新しいノードが p の右の子か左の子かを、x と p.x の比較結果によって決める。

BinarySearchTree
```
bool add(T x) {
  Node *p = findLast(x);
  Node *u = new Node;
  u->x = x;
  return addChild(p, u);
}
```

BinarySearchTree
```
Node* findLast(T x) {
  Node *w = r, *prev = nil;
  while (w != nil) {
    prev = w;
    int comp = compare(x, w->x);
    if (comp < 0) {
      w = w->left;
    } else if (comp > 0) {
      w = w->right;
    } else {
      return w;
    }
  }
  return prev;
}
```

BinarySearchTree
```
bool addChild(Node *p, Node *u) {
    if (p == nil) {
      r = u;              // inserting into empty tree
    } else {
      int comp = compare(u->x, p->x);
```

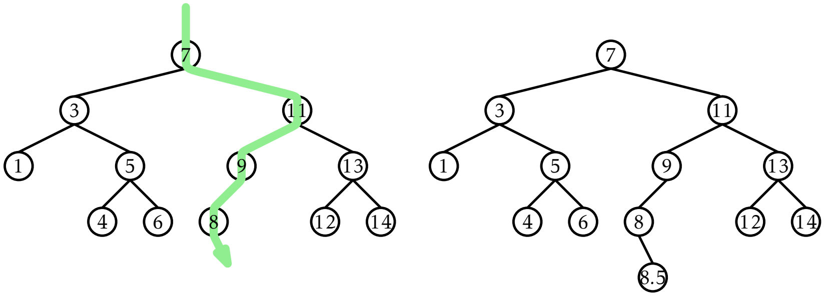


図 6.7: 二分探索木に 8.5 を追加する様子

```
    if (comp < 0) {
      p->left = u;
    } else if (comp > 0) {
      p->right = u;
    } else {
      return false;   // u.x is already in the tree
    }
    u->parent = p;
  }
  n++;
  return true;
}
```

図 6.7 に例を示した。最も時間がかかるのは x を検索する処理で、この時間は新たに追加するノード u の深さに比例する。 最悪の場合にはこれは BinarySearchTree の高さである。

6.2.3 削除

BinarySearchTree から、ある値を格納するノード u を削除する処理はもう少し複雑だ。u が葉なら、u を単に親から切り離せばよい。u がひとつだけの子を持つなら、u の点を継ぎ合わせる、すなわち u.parent と u の子とを新た

に親子関係とすればよい。（図 6.8 を参照せよ。）

BinarySearchTree
```
void splice(Node *u) {
  Node *s, *p;
  if (u->left != nil) {
    s = u->left;
  } else {
    s = u->right;
  }
  if (u == r) {
    r = s;
    p = nil;
  } else {
    p = u->parent;
    if (p->left == u) {
      p->left = s;
    } else {
      p->right = s;
    }
  }
  if (s != nil) {
    s->parent = p;
  }
  n--;
}
```

u がふたつの子を持つ場合はもっと手の込んだことをする必要がある。この場合、子の数が 1 以下のノード w であって、w.x と u.x とを入れ替えられるものを見つけるのが最も単純なやり方だ。二分探索木の性質を保つためには、w.x の値と u.x の値が近ければよい。例えば、w.x が u.x より大きい中で最小の値であればよい。このような w は簡単に見つけられる。これは u.right を根とする部分木の中で最小の値である。このノードは左の子を持たないため、取り除くのも簡単である。（図 6.9 を参照せよ。）

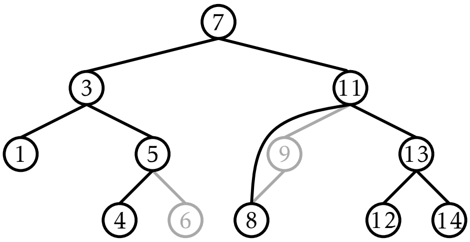


図 6.8: 葉 (6)、または一つだけの子を持つノード (9) を削除するのは簡単である。

BinarySearchTree
```
void remove(Node *u) {
  if (u->left == nil || u->right == nil) {
    splice(u);
    delete u;
  } else {
    Node *w = u->right;
    while (w->left != nil)
      w = w->left;
    u->x = w->x;
    splice(w);
    delete w;
  }
}
```

6.2.4 要約

BinarySearchTree における find(x)・add(x)・remove(x) の処理は、いずれも根から特定のノードへの経路を辿る処理を伴う。木の形状についてなにか仮定しない限り、この経路の長さについて「木の中のノード数は超えない」より強い主張をするのは難しい。次の（あまりパッとしない）定理は BinarySearchTree の性能をまとめたものだ。

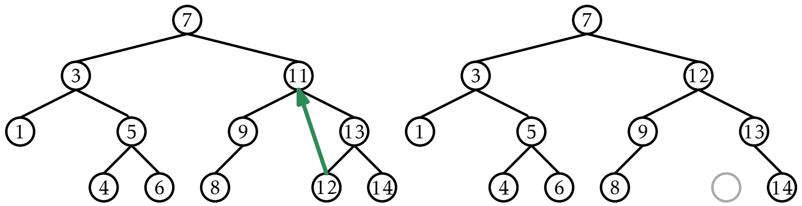


図 6.9: ふたつの子を持つノード u から値 11 を削除するために、u の値と、u の右の部分木における最小の値とを入れかえる。

定理 **6.1.** *BinarySearchTree* は *SSet* インターフェースの実装であって、add(x)・remove(x)・find(x) の実行時間は $O(n)$ である。

定理 4.1 と比べると、定理 6.1 の性能は良くない。SkiplistSSet は SSet インターフェースの操作を期待実行時間 $O(\log n)$ で実装していた。BinarySearchTree の問題は、木の形状が**アンバランス**かもしれないことだ。図 6.5 のような木の形ではなく、ほとんどのノードがひとつだけの子を持ち、n 個のノードからなる長い鎖のような見た目かもしれないのである [*8]。

アンバランスな二分探索木を避ける方法はたくさんあり、そうすると $O(\log n)$ の時間で各操作を行えるようになる。7 章で**期待実行時間** $O(\log n)$ を、ランダム性を利用して達成する方法を説明する。8 章では**償却実行時間** $O(\log n)$ を、部分的な再構築を利用して達成する方法を説明する。9 章では**最悪実行時間** $O(\log n)$ を、4 つまで子を持ちうる木をシミュレートすることで達成する方法を説明する。

6.3 ディスカッションと練習問題

二分木は血縁関係のモデルとして数千年に渡って使われている。二分木は家系図を自然にモデルすることができる。ある家系図の書き方では、根をある人、左右の子ノードをその人の両親とする。数世紀前からは生物学における系統樹にも二分木は使われている。ここでは葉は現存の種を表し、内部ノードは**分化**が起きたことを表す。分化とは一つの種から、二つの別々の種が派生す

[*8] 訳注：このような長い鎖のような見た目をしたデータ構造は見覚えがあるかもしれない。3 章で扱った連結リストを思い出そう（細かな違いはあるが）。

ることである。

二分探索木は、1950 年代に複数のグループが独立に発見したようである。[48, Section 6.2.2] 個々の二分探索木のより詳細な文献は後の章で紹介する。

ゼロから二分木を実装するとき、いくつか設計上考えることがある。ひとつは各ノードが親へのポインタを持つかどうかである。多くの操作が根から葉への経路を辿るだけのものなら、親へのポインタは不要で、メモリを無駄にし、バグを入れ込む原因となりうる。一方親へのポインタがないと、走査のために再帰を（または明示的にスタックを）使うことになる。また、実装が複雑になってしまう操作もある。（ある種の二分探索木における挿入や削除など）

もうひとつの設計上のポイントは、親と左右の子へのポインタをどう持つかである。この章の実装では、それぞれを別々の変数に保持していた。一方、長さ 3 の配列 p を使うこともできる。この場合、u.p[0]・u.p[1]・u.p[2] がそれぞれ、u の左右の子と親へのポインタを保持する。配列を使うと、プログラム内の `if` 文の連続を、代数的な表現でより単純に書ける。

例えば、この単純化は木を辿るときに役立つ。u.p[i] から u に来たとき、次に向かうのは $u.p[(i+1) \bmod 3]$ である。左右の対称性があるときにも似たようなことができる。すなわち、u.p[i] の兄弟は $u.p[(i+1) \bmod 2]$ である。これは u.p[i] が左の子 ($i = 0$) であっても右の子 ($i = 1$) であっても有効だ。この表現を使うと、左右の場合ためにそれぞれ書いていた複雑なコードを、ひとつにまとめられることがある。例として 164 の `rotateLeft(u)`・`rotateRight(u)` を参照せよ。

問 **6.1.** $n \geq 1$ 個のノードからなる二分木は $n-1$ 本の辺を持つことを示せ。

問 **6.2.** $n \geq 1$ 個の（本物の）ノードからなる二分木は $n+1$ 個の外部ノードを持つことを示せ。

問 **6.3.** 二分木 T が一つ以上葉を持つとき、T における根の子の数が 1 以下であるか、T は二つ以上の葉を持つかのいずれかであることを示せ。

問 **6.4.** ノード u を根とする部分木の大きさを計算する再帰的でないメソッド `size2(u)` を実装せよ。

問 **6.5.** ノード u の高さを計算する再帰的でないメソッド `height2(u)` を実装せよ。

問 **6.6.** 二分木が**サイズでバランスされている**とは、任意のノード u について、`u.left` を根とする部分木のサイズと、`u.right` を根とする部分木のサイズと

の差が 1 以下であることをいう。二分木がこの意味でバランスされているか判定する再帰的なメソッド isBalanced() を書け。なお、このメソッドの実行時間は $O(n)$ でなければならない。（色々な形状の大きい木でテストしてみること。$O(n)$ より多く時間を使う実装は簡単である。）

行きがけ順とは、二分木の訪問順であって、ノード u をそのいずれの子よりも先に訪問するものである。**通りがけ順**とは、二分木の訪問順であって、ノード u を左の部分木に含まれる子よりも後かつ右の部分木に含まれる子よりも先に訪問するものである。**帰りがけ順**とは、二分木の訪問順であって、ノード u を u を根とする部分木に含まれるいずれの子よりも後に訪問するものである。行きがけ番号・通りがけ番号・帰りがけ番号とは、各対応する順序に従って頂点を訪問した時のノードに付された訪問順の番号である。例として図 6.10 を見よ。

問 **6.7.** BinarySearchTree のサブクラスとしてノードのフィールドに行きがけ番号・通りがけ番号・帰りがけ番号を持つものを作れ。 これらの値を適切に割り当てる再帰的な関数 preOrderNumber()・inOrderNumber()・postOrderNumber() を書け。なお、いずれの実行時間も $O(n)$ でなければならない。

問 **6.8.** 再帰的でない関数 nextPreOrder(u)・nextInOrder(u)・nextPostOrder(u) を実装せよ。これらは各順序におけるノード u の次のノードを返す関数である。いずれの償却実行時間も高々定数でなければならない。また、ノード u からはじめて、この関数を繰り返し呼んでノードを辿り、u = null になるまでこれを続けるとき、すべての呼び出しの合計コストは $O(n)$ でなければならない。

問 **6.9.** ノードに行きがけ番号・通りがけ番号・帰りがけ番号が付された二分木があるとする。この番号を使って次の質問に定数時間で答える方法を考えよ。

1. ノード u が与えられたとき、u を根とする部分木の大きさを求めよ。
2. ノード u が与えられたとき、u の深さを求めよ。
3. ノード u と w が与えられたとき、u が w の祖先であるかを判定せよ。

問 **6.10.** ノードに対する行きがけ番号・通りがけ番号の組みのリストが与えられたとする。このような行きがけ番号・通りがけ番号が付される木は一意に定まることを示せ。また具体的にこの木を構成方法を与えよ。

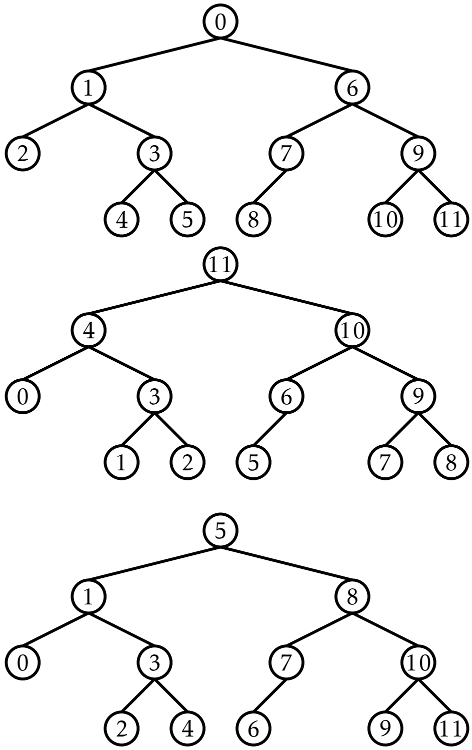


図 6.10: 二分木における行きがけ順・通りがけ順・帰りがけ順

問 **6.11.** n 個のノードからなる二分木は $2(n-1)$ ビット以下で表現できることを示せ。（ヒント：木を走査する際に起きることを記録し、これを再生して木を再構築することを考えるとよい。）

問 **6.12.** 図 6.5 の二分木に 3.5 を追加し、続けて 4.5 を追加するときの様子を図示せよ。

問 **6.13.** 図 6.5 の二分木に 3 を削除し、続けて 5 を削除するときの様子を図示せよ。

問 **6.14.** `BinarySearchTree` のメソッド `getLE(x)` を実装せよ。これは木に含まれる要素のうち、x 以下のものを集めたリストを返すものである。このメソッドの実行時間は $O(n' + h)$ でなければならない。ここで n' は木に含まれ

る x 以下の要素の数、h は木の高さである。

問 **6.15.** 空の BinarySearchTree に $\{1,\ldots,\mathtt{n}\}$ をすべて追加し、結果として得られる木の高さが $\mathtt{n}-1$ になるためにはどうすればよいか。また、このやり方は何通りあるか。

問 **6.16.** ある BinarySearchTree に add(x) を実行し、（同じ x について）remove(x) を実行すると、必ず木は元の状態に戻るか?

問 **6.17.** BinarySearchTree において remove(x) を実行するとき、あるノードの高さが大きくなることがあるか? もしそうなら、どのくらい大きくなりうるか?

問 **6.18.** BinarySearchTree において add(x) を実行するとき、あるノードの高さが大きくなることがあるか? また、そのとき木の高さが大きくなることがあるか? もしそうなら、どのくらい大きくなりうるか?

問 **6.19.** BinarySearchTree の一種であり、各ノード u が u.size（u を根とする部分木の大きさ）、u.depth（u の深さ）、u.height（u を根とする部分木の高さ）を保持するものを設計・実装せよ。

なお、add(x)・remove(x) を呼んでもこれらの値は適切に保たれる必要があり、一方で、これらの操作のコストが定数時間より大きくはならないように注意すること。

第 **7**

ランダム二分探索木

この章では、ランダム化を利用し、各操作を $O(\log \mathtt{n})$ の期待実行時間で実行できる二分探索木を紹介する。

7.1 ランダム二分探索木

図 7.1 のふたつの二分探索木を見てほしい。これらはいずれも $\mathtt{n} = 15$ 個のノードからなる。左のものはリストであり、右のものは完全にバランスされた二分探索木である。左の木の高さは $\mathtt{n} - 1 = 14$ で、右の木の高さは 3 である。

このふたつの木をどうすれば構築できるかを考えてみよう。左の木は空の

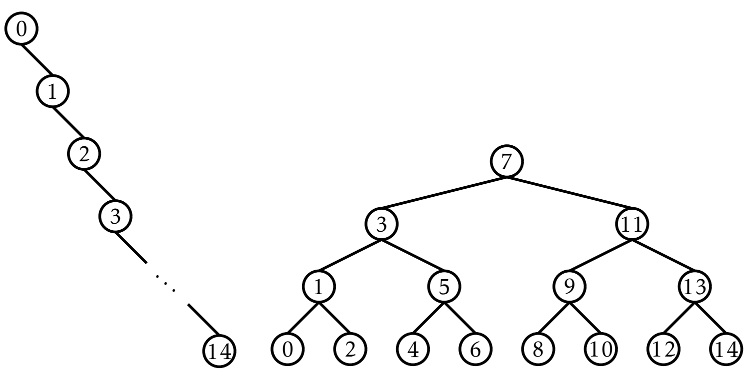


図 7.1: 整数 0,...,14 を含むふたつの二分探索木

BinarySearchTree に次の要素を順に追加すると得られる。

$$\langle 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\rangle$$

この木が得られる追加操作の列はこの列に限る。（証明は n についての帰納法で行う。）一方、右の木は次の要素を順に追加すると得られる。

$$\langle 7,3,11,1,5,9,13,0,2,4,6,8,10,12,14\rangle$$

他にも

$$\langle 7,3,1,5,0,2,4,6,11,9,13,8,10,12,14\rangle$$

や

$$\langle 7,3,1,11,5,0,2,4,6,9,13,8,10,12,14\rangle$$

からも、この木が得られる。右の木が得られる追加操作の列は 21,964,800 種類ある。一方で、左の木が得られる追加操作の列は上のものだけである。

上の例から、直感的には、$0,\ldots,14$ をランダムに並び替え、その要素を順に二分探索木に入れていくと、（図 7.1 の右のもののような）とてもバランスの良い木ができることが多く、（図 7.1 の左のもののような）非常にバランスの悪い木ができることはあまりないと分かる。

このことを形式的に述べるために、ランダム二分探索木を考える。次の手順で大きさ n の**ランダム二分探索木**が得られる。

$0,\ldots,n-1$ のランダムな置換をひとつ選ぶ。これを $x_0,\ldots,x_{n-1}$ とし、順に BinarySearchTree に追加する。ここで、**ランダムな置換**とは、$n!$ 個ある $0,\ldots,n-1$ の並び替えから、いずれも等しい確率 $1/n!$ でひとつ選出したものをいう。

値 $0,\ldots,n-1$ を、順序の定義された集合の要素 n 個組みと置き換えても、ランダム二分探索木の性質には影響しないことに注意する。$x\in\{0,\ldots,n-1\}$ は、単にサイズ n の順序付き集合における x 番目の要素を表しているのである。

ランダム二分探索木の主要な性質を説明する前に、少し脱線してランダムな構造を考えるときによく出てくる数の話をしよう。非負整数を k とするとき、k 番目の**調和数** H_k は次のように定義される。

$$H_k = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/k$$

調和数 H_k は単純な閉じた式では書けないが、自然対数と密接な関係を持つ。具体的には、次の式が成り立つ。

$$\ln k < H_k \le \ln k + 1$$

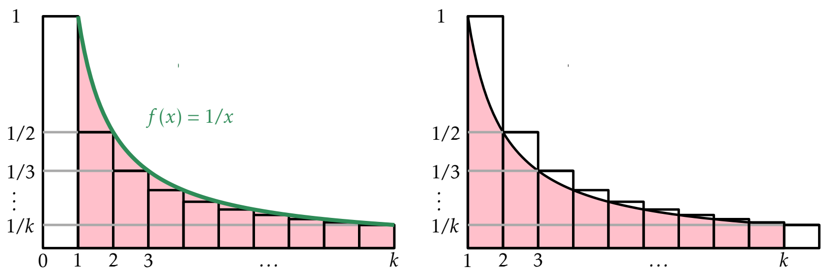


図 7.2: k 番目の調和数 $H_k = \sum_{i=1}^{k} 1/i$ の上界・下界を積分値として与える。各積分値は図の斜線部の面積であり、H_k は長方形の部分の面積である。

解析学を学んでいれば、$\int_1^k (1/x)\,\mathrm{d}x = \ln k$ からこれを導けるだろう。積分は曲線と x 軸との囲む領域の面積として解釈できるので、H_k の値の下界は $\int_1^k (1/x)\,\mathrm{d}x$、上界は $1 + \int_1^k (1/x)\,\mathrm{d}x$ である。（図 7.2 を見ると視覚的に理解できるだろう。）

補題 7.1. 大きさ n のランダム二分探索木について、次の補題が成り立つ。

1. 任意の $\mathsf{x} \in \{0,\ldots,\mathsf{n}-1\}$ について、x の探索経路の長さの期待値は $H_{\mathsf{x}+1} + H_{\mathsf{n}-\mathsf{x}} - O(1)$ である。[*1]
2. 任意の $\mathsf{x} \in (-1,n) \setminus \{0,\ldots,\mathsf{n}-1\}$ について、x の探索経路の長さの期待値は $H_{\lceil \mathsf{x} \rceil} + H_{\mathsf{n}-\lceil \mathsf{x} \rceil}$ である。

補題 7.1 は次の小節で証明する。ここでは補題 7.1 のふたつの項目の意味を考える。ひとつめは、サイズ n の木から要素を探索するとき、探索経路の長さの期待値は $2\ln n + O(1)$ 以下であると主張する。ふたつめは、木に含まれない要素を探す場合の探索経路の長さの期待値について主張する。 これらを比べると、木に含まれない要素を探すより、含まれる要素を探す方が、少しだけ早いことがわかる。

[*1] $\mathsf{x}+1$ と $\mathsf{n}-\mathsf{x}$ はそれぞれ木の要素のうち x 以上のものの個数、x 以下のものの個数と解釈できる。

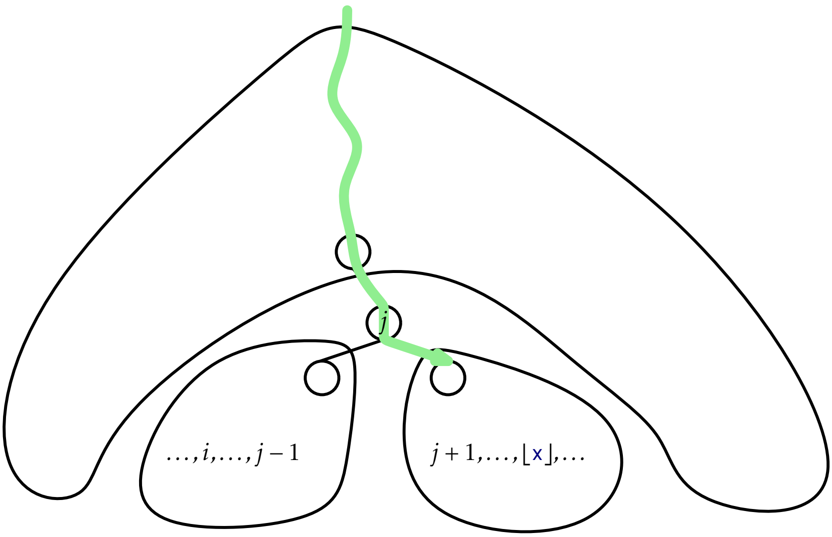


図 7.3: 値 $i < \mathtt{x}$ が $\mathtt{x}$ の探索経路中にあることの必要十分条件は i が $\{i, i+1, \dots, \lfloor \mathtt{x} \rfloor\}$ のうち最初に木に加えられた要素であることである。

7.1.1 補題 7.1 の証明

補題 7.1 を証明するための鍵となる考察は次のものだ。ランダム二分探索木 T における値 $\mathtt{x} \in (-1, \mathtt{n})$ の探索経路に $i < \mathtt{x}$ を満たす $\mathtt{i}$ をキーとするノードが含まれる必要十分条件は、T を作るランダムな置換において i が $\{i+1, i+2, \dots, \lfloor \mathtt{x} \rfloor\}$ のいずれよりも前に現れることである。

図 7.3 でいうと、$\{i, i+1, \dots, \lfloor \mathtt{x} \rfloor\}$ のいずれかが追加されるまで、探索経路 $(i-1, \lfloor \mathtt{x} \rfloor + 1)$ に含まれる要素の探索経路は等しいことから確認できる。（あるふたつの要素の探索経路が異なるならば、ふたつの要素の一方よりは大きく、他方よりは小さいある要素が存在するのである。）j をランダムな置換において最初に現れる $\{i, i+1, \dots, \lfloor \mathtt{x} \rfloor\}$ の要素とする。j はずっと $\mathtt{x}$ の探索経路上にあることに注意する。$j \neq i$ ならば j を含むノード $\mathtt{u}_j$ は i を含むノード $\mathtt{u}_i$ より先に作られる。そしてその後、i が追加されるとき、$i < j$ なので $\mathtt{u}_j.\mathtt{left}$ を根とする部分木に $\mathtt{u}_i$ は追加される。一方 $\mathtt{x}$ の探索経路はこの部分木を通らない。なぜならこの経路は $\mathtt{u}_j$ を訪問したあと $\mathtt{u}_j.\mathtt{right}$ に向かうからである。

$i > \mathtt{x}$ の場合も、キー i が $\mathtt{x}$ の探索経路に含まれる必要十分条件は、T を作るランダムな置換において、i が $\{\lceil \mathtt{x} \rceil, \lceil \mathtt{x} \rceil + 1, \dots, i-1\}$ のいずれよりも前に現

れることである。

$\{0,\ldots,\mathsf{n}\}$ のランダムな置換を考えるとき、そのうち $\{i,i+1,\ldots,\lfloor\mathsf{x}\rfloor\}$ または $\{\lceil\mathsf{x}\rceil,\lceil\mathsf{x}\rceil+1,\ldots,i-1\}$ だけを取り出した部分列も、やはりそれぞれのランダムな置換になっている。ランダムな置換を作ると、どの要素もみな等しい確率で先頭に来るので次の式が得られる。

$$\Pr\{i\text{ が }\mathsf{x}\text{ の探索経路に含まれる }\} = \begin{cases} 1/(\lfloor\mathsf{x}\rfloor - i + 1) & \text{if } i < \mathsf{x} \\ 1/(i - \lceil\mathsf{x}\rceil + 1) & \text{if } i > \mathsf{x} \end{cases} .$$

この考察により、調和数の簡単な計算で補題 7.1 を証明できる。

補題 *7.1* の証明. I_i を指示確率変数とする。この値は、i が探索経路に現れるときは 1、そうでないときは 0 である。このとき探索経路の長さを次のように計算できる。

$$\sum_{i\in\{0,\ldots,\mathsf{n}-1\}\setminus\{\mathsf{x}\}} I_i$$

よって $\mathsf{x}\in\{0,\ldots,\mathsf{n}-1\}$ なら探索経路の長さの期待値は次のように計算できる。（図 7.4.a を見よ。）

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\sum_{i=0}^{\mathsf{x}-1} I_i + \sum_{i=\mathsf{x}+1}^{\mathsf{n}-1} I_i\right] &= \sum_{i=0}^{\mathsf{x}-1}\mathrm{E}[I_i] + \sum_{i=\mathsf{x}+1}^{\mathsf{n}-1}\mathrm{E}[I_i] \\
&= \sum_{i=0}^{\mathsf{x}-1} 1/(\lfloor\mathsf{x}\rfloor - i + 1) + \sum_{i=\mathsf{x}+1}^{\mathsf{n}-1} 1/(i - \lceil\mathsf{x}\rceil + 1) \\
&= \sum_{i=0}^{\mathsf{x}-1} 1/(\mathsf{x} - i + 1) + \sum_{i=\mathsf{x}+1}^{\mathsf{n}-1} 1/(i - \mathsf{x} + 1) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\mathsf{x}+1} \\
&\quad + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\mathsf{n}-\mathsf{x}} \\
&= H_{\mathsf{x}+1} + H_{\mathsf{n}-\mathsf{x}} - 2 .
\end{aligned}$$

値 $\mathsf{x}\in(-1,n)\setminus\{0,\ldots,\mathsf{n}-1\}$ の場合も同様である。（図 7.4.b を見よ。） □

7.1.2 要約

次の定理はランダム二分探索木の性能をまとめたものだ。

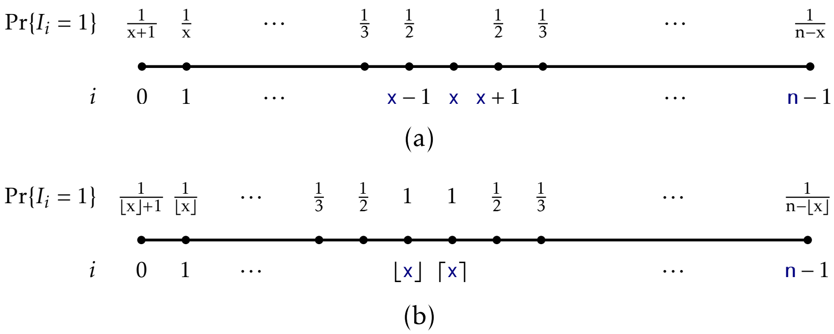


図 7.4: x の探索経路に各要素が現れる確率 (a) x が整数のとき (b) x が整数でないとき

定理 **7.1.** ランダム二分探索木は $O(\mathtt{n}\log\mathtt{n})$ の時間で構築できる。ランダム二分探索木における find(x) の期待実行時間は $O(\log\mathtt{n})$ である。

定理 7.1 における期待値は、ランダム二分探索木を作るための置換のランダム性に基づく。つまり、x をランダムに選ぶことには依存しておらず、任意の x についてこれは成り立つ。

7.2 Treap: 動的ランダム二分探索木

ランダム二分探索木の問題は当然ながら動的でないことだ。SSet インターフェースを実装するために必要な add(x)・remove(x) をサポートしていないのである。この節では Treap と呼ばれるデータ構造を説明する。これは補題 7.1 を利用して SSet インターフェースを実装する。[*2]

Treap のノードは値 x を持つ点で BinarySearchTree に似ているが、それに加えて値 x に対して一意な**優先度** p を持つ。この p はランダムに割当てられる。

Treap
```
class TreapNode : public BSTNode<Node, T> {
  friend class Treap<Node,T>;
```

[*2] Treap の名はこのデータ構造は二分木 **tree**(6.2 節) であると同時にヒープ **heap**(10 章) でもあることによる。

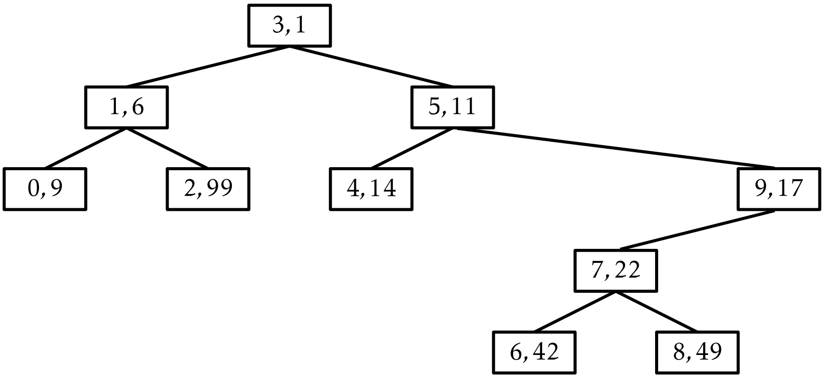


図 7.5: 整数 0,...,9 を含む Treap の例。ノード u は u.x,u.p を含む四角形として描かれている。

```
  int p;
};
```

Treap のノードは、二分探索木の性質に加えて、**ヒープ性**も満たす。

- （ヒープ性）根でない任意のノード u について u.parent.p < u.p が成り立つ。

言い換えると、どのノードの優先度も、そのふたつの子いずれの優先度よりも小さい。図 7.5 にこの例を示した。

ヒープ性と二分探索木の性質とを共に満たすことから、キー x と優先度 p が決まると Treap の形状は一意に定まる。ヒープ性から最小の優先度を持つノードが Treap の根 r であることがわかる。二分探索木性から r.x より小さなキーを持つノードは r.left を根とする部分木に含まれ、r.x より大きなキーを持つノードは r.right を根とする部分木に含まれることがわかる。

Treap の優先度の重要な特徴は、値 x に対して一意であり、かつランダムに割当てられることである。このことから Treap のふたつ等価な解釈の仕方がある。先ほどに定義したように、Treap はヒープ性と二分探索木性を満たす。この代わりに、Treap を優先度の昇順にノードが追加される BinarySearchTree だと考えることもできる。例えば図 7.5 の Treap は、

BinarySearchTree に対して次の値 $(\mathtt{x},\mathtt{p})$ の列を追加すると得られる。

$$\langle(3,1),(1,6),(0,9),(5,11),(4,14),(9,17),(7,22),(6,42),(8,49),(2,99)\rangle$$

優先度はランダムに決まるので、これはキーをランダムに置換するのと同じである。上の例は次の置換に対応する。

$$\langle 3,1,0,5,9,4,7,6,8,2\rangle$$

これらを BinarySearchTree に追加すればよい。これは Treap の形状は、ランダム二分探索木と同じであることを意味する。特にもしキー x をそのランクに置き換えると [*3] 補題 7.1 を適用できる。補題 7.1 を Treap のコトバで言い換えると次のようになる。

補題 7.2. n 個のキーからなる集合 S を保持する *Treap* において次の命題が成り立つ。

1. 任意の $\mathtt{x}\in S$ について x の探索経路の長さの期待値は $H_{r(\mathtt{x})+1}+H_{\mathtt{n}-r(\mathtt{x})}-O(1)$ である。
2. 任意の $\mathtt{x}\notin S$ について x の探索経路の長さの期待値は $H_{r(\mathtt{x})}+H_{\mathtt{n}-r(\mathtt{x})}$ である。

ここで $r(\mathtt{x})$ は集合 $S\cup\{\mathtt{x}\}$ における x のランクである。

繰り返しになるが、補題 7.2 の期待値は、頂点の優先度割当てのランダム性に基づく。これはキーがランダムであることは仮定していない。

補題 7.2 より、Treap の find(x) を効率よく実装できることがわかる。しかし本当に有用なのは add(x)・delete(x) 操作を実装できることである。このためにヒープ性を保つための回転操作が必要である。図 7.6 を参照せよ。二分探索木の**回転**とはノード w とその親 u について、二分探索木性を保ちながら w を u の親にする操作である。回転には**右回転**と**左回転**の二種類があって、それぞれ w が u の右の子であるか、左の子であるかに対応する。

これを実装するときには、ふたつの場合を処理し、コーナーケース（u が根である場合）にも注意しなければならない。そのため実際のコードは図 7.6 を見て想像するものよりも少し長い。

[*3] x を集合 S の要素とするとき、x のランクとは S の要素のうち x より小さいものの個数である。

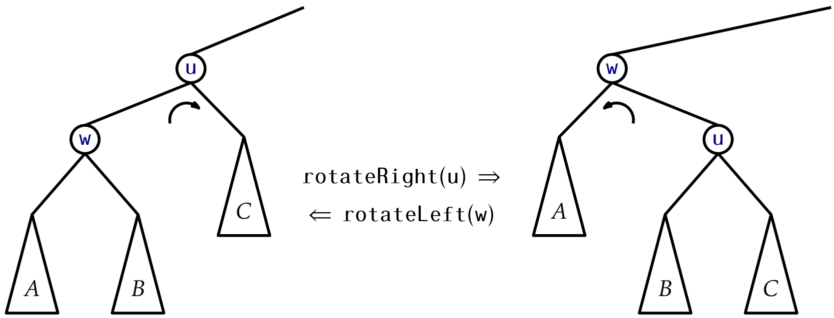


図 7.6: 二分探索木の左回転・右回転

BinarySearchTree
```
void rotateLeft(Node *u) {
  Node *w = u->right;
  w->parent = u->parent;
  if (w->parent != nil) {
    if (w->parent->left == u) {
      w->parent->left = w;
    } else {
      w->parent->right = w;
    }
  }
  u->right = w->left;
  if (u->right != nil) {
    u->right->parent = u;
  }
  u->parent = w;
  w->left = u;
  if (u == r) { r = w; r->parent = nil; }
}
void rotateRight(Node *u) {
  Node *w = u->left;
```

```
  w->parent = u->parent;
  if (w->parent != nil) {
    if (w->parent->left == u) {
      w->parent->left = w;
    } else {
      w->parent->right = w;
    }
  }
  u->left = w->right;
  if (u->left != nil) {
    u->left->parent = u;
  }
  u->parent = w;
  w->right = u;
  if (u == r) { r = w; r->parent = nil; }
}
```

Treap における回転の重要な性質は、w の深さが 1 減り、u の深さが 1 増えることだ。

回転を使って add(x) を次のように実装できる。新しいノード u を作り、u.x = x とし、u.p を乱数で初期化する。u を BinarySearchTree の add(x) アルゴリズムを使って追加する。このとき u は Treap の葉になる。ここで Treap は二分探索木性を満たすが、ヒープ性を満たすとは限らない。特にこれは u.parent.p > u.p の場合である。この場合、w=u.parent で回転操作実行し、u を w の親にする。u が引き続きヒープ性を犯しているなら、これを繰り返す。この度に u の深さは 1 減り、u が根になるか u.parent.p < u.p を満たすと処理は終了する。

Treap

```
bool add(T x) {
  Node *u = new Node;
  u->x = x;
  u->p = rand();
  if (BinarySearchTree<Node,T>::add(u)) {
```

```
    bubbleUp(u);
    return true;
  }
  delete u;
  return false;
}
void bubbleUp(Node *u) {
  while (u->parent != nil && u->parent->p > u->p) {
    if (u->parent->right == u) {
      rotateLeft(u->parent);
    } else {
      rotateRight(u->parent);
    }
  }
  if (u->parent == nil) {
    r = u;
  }
}
```

図 7.7 に add(x) 操作の例を示した。

add(x) 操作の実行時間は x の探索経路の長さと、新たに追加されたノード u を Treap におけるあるべき位置まで移動するための回転する回数から求まる。補題 7.2 より探索経路の長さの期待値は $2\ln n + O(1)$ 以下である。さらに回転のたびに u の深さは減る。u が根になると処理が終了するので、回転回数の期待値は探索経路長の期待値以下である。よって、Treap における add(x) の実行時間の期待値は $O(\log n)$ である。（問 7.5 はこの操作における回転の回数の期待値は実は $O(1)$ であることを示す問題である。）

Treap における remove(x) は add(x) の逆である。x を含むノード u を探し、u が葉に来るまで下方向に回転を繰り返し、最後に u を取り外す。u を下方向に動かすとき、右に回転するか左に回転するかの選択肢があることに注意する。この選択は次の規則に従う。

1. u.left と u.right がいずれも null なら、u は葉なので回転の必要は

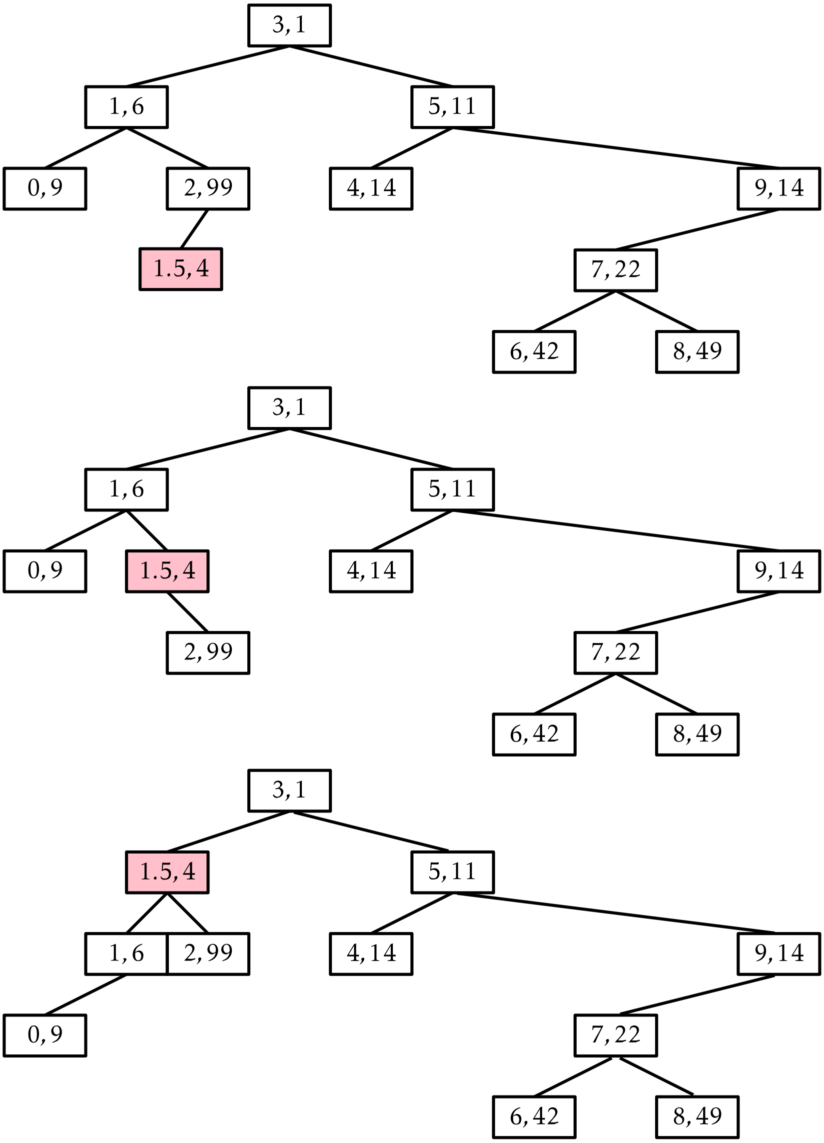


図 7.7: 図 7.5 の Treap に値 1.5 を追加する。

ない
2. u.left または u.right が null なら、null でない方と回転で u を入れ替える
3. u.left.p < u.right.p ならば右に回転し、そうでないなら左に回転する

この規則により Treap は連結であり、またヒープ性も保たれることがわかる。

Treap
```
bool remove(T x) {
  Node *u = findLast(x);
  if (u != nil && compare(u->x, x) == 0) {
    trickleDown(u);
    splice(u);
    delete u;
    return true;
  }
  return false;
}
void trickleDown(Node *u) {
  while (u->left != nil || u->right != nil) {
    if (u->left == nil) {
      rotateLeft(u);
    } else if (u->right == nil) {
      rotateRight(u);
    } else if (u->left->p < u->right->p) {
      rotateRight(u);
    } else {
      rotateLeft(u);
    }
    if (r == u) {
      r = u->parent;
    }
  }
```

```
}
```

図 7.8 に remove(x) の例を示した。

remove(x) の実行時間の解析におけるポイントは、add(x) の逆の操作になっていることだ。特に x を同じ優先度 u.p で再挿入することを考えると、add(x) 操作はちょうど同じ数の回転を実行し、Treap は remove(x) の直前の状態に戻る。（図 7.8 を下から上に見ると値 9 を Treap に追加している様子になっている。）これは大きさ n の Treap の remove(x) 操作の実行時間の期待値は、大きさ $n-1$ の Treap の add(x) 操作の実行時間の期待値に比例するということである。すなわち、remove(x) の実行時間の期待値は $O(\log n)$ である。

7.2.1 要約

次の定理は Treap の性能をまとめるものだ。

定理 7.2. *Treap* は *SSet* インターフェースを実装する。*Treap* は add(x)・remove(x)・find(x) をサポートし、いずれの実行時間の期待値も $O(\log n)$ である。

Treap と SkiplistSSet を比べてみるのは面白いだろう。いずれも SSet の実装で、各操作の実行時間の期待値は $O(\log n)$ である。どちらのデータ構造でも add(x)・remove(x) は検索に続く定数回のポインタの更新からなる。（下の問 7.5 を見よ）よってどちらのデータ構造でも探索経路の長さの期待値が性能を決める重要な値である。SkiplistSSet では探索経路の長さの期待値は次のようである。

$$2\log n + O(1)$$

Treap では次のようである。

$$2\ln n + O(1) \approx 1.386\log n + O(1)$$

よって Treap における探索経路の方が短く、各操作も Skiplist よりも Treap の方がかなり速いと解釈できるだろう。4 章の問 4.7 で示したように、偏ったコイントスを使って、Skiplist における探索経路の長さの期待値を次のように減らせる。

$$e\ln n + O(1) \approx 1.884\log n + O(1)$$

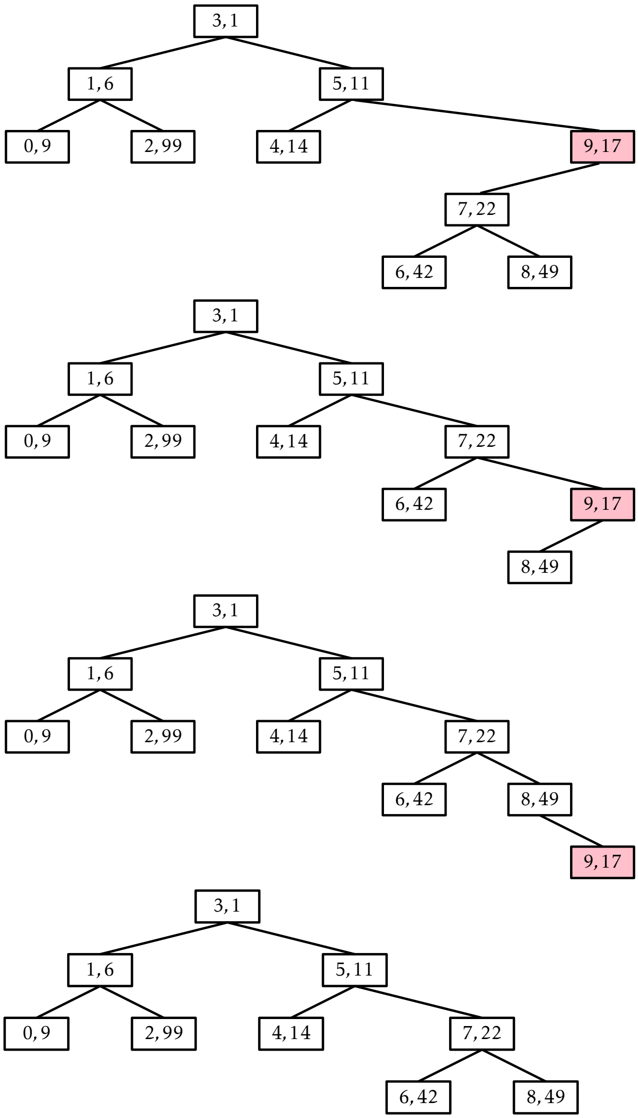


図 7.8: 図 7.5 の Treap から値 9 を削除する。

この最適化を採用しても、SkiplistSSet における探索経路の期待値は、やはり Treap のそれよりだいぶ長いのである。

7.3 ディスカッションと練習問題

ランダム二分探索木についての研究は多岐に渡る。Devroye[19] が補題 7.1 とそれに関連した成果を証明した。より強い結果も複数知られているが、もっとも印象的なのは Reed[62] の成果である。この文献ではランダム二分探索木の高さの期待値が次の式になることを示した。

$$\alpha \ln n - \beta \ln\ln n + O(1)$$

ここで $\alpha \approx 4.31107$ は $[2,\infty)$ 範囲における $\alpha \ln((2e/\alpha)) = 1$ の唯一の解であり、$\beta = \frac{3}{2\ln(\alpha/2)}$ である。さらに、高さの分散は定数である。

Treap という名前は Seidel と Aragon[65] が考えた。この文献では Treap といくつかの変種を議論している。しかし、Treap の基本的なデータ構造は Vuillemin[74] が先に研究しており、この文献では Cartesian tree と呼んでいた。

Treap における空間効率の最適化として、各ノードに明示的に優先度 p を蓄えずに済ませる方法がある。代わりに、u の優先度として u のメモリアドレスのハッシュ値を用いる。多くのハッシュ関数が実用的には上手く動作するが、補題 7.1 の証明の正しさを保つためには、min-wise independent **性**を満たす関数族からランダムに選出した関数を使う必要がある。min-wise independent 性とは次の性質である。相異なる任意の値 $x_1,\dots,x_k$ について、それぞれのハッシュ値 $h(x_1),\dots,h(x_k)$ は高い確率で相異なる値を取る。すなわち、ある定数 c が存在して、任意の $i \in \{1,\dots,k\}$ について次の式が成り立つ。

$$\Pr\{h(x_i) = \min\{h(x_1),\dots,h(x_k)\}\} \le c/k$$

この性質を持つハッシュ関数で、実装が簡単、かつ高速なものとして tabulation hashing がある。（5.2.3 節を参照せよ。）

Treap の他の変種であって、優先度を各ノードに蓄えないものとして、Martínez と Roura [51] による動的ランダム二分探索木がある。任意のノード u は u を根とする部分木の大きさ u.size を保持する。add(x)・remove(x) いずれのアルゴリズムもランダム化されている。x を u を根とする部分木に追加するアルゴリズムは次のものである。

1. 確率 $1/(\mathtt{size}(\mathtt{u})+1)$ で x はふつうに葉として追加され、回転によって x は部分木の根に向けて動いてくる。
2. そうでなければ（すなわち確率 $1-1/(\mathtt{size}(\mathtt{u})+1)$ で、x は u.left または u.right の適切な方を根とする部分木に再帰的に追加される。

ひとつめの場合は Treap における add(x) において x のノードがランダムな優先度として size(u) 個のいずれの値よりも小さい値を取る場合に対応しており、この事象の発生確率をそのままアルゴリズムに使っている。

x を動的ランダム二分探索木から削除するやり方は Treap における削除と似ている。x を含むノード u を見つけ、これが葉に到達するまで繰り返し深さを増やしながら回転し、そこで木から切り離す。各ステップにおける回転が右か左かをランダムに決める。

1. 確率 $\mathtt{u.left.size}/(\mathtt{u.size}-1)$ で u において右回転を行う。すなわち u.left を部分木の根に持ってくる。
2. 確率 $\mathtt{u.right.size}/(\mathtt{u.size}-1)$ で u において左回転を行う。すなわち u.right を部分木の根に持ってくる。

ここでも Treap において u で左右の回転を行う確率と同じであることを簡単に確認できる。

Treap と比べてこの動的ランダム二分探索木には短所がある。要素の追加・削除の際にたくさんランダムな選択をする必要があり、また部分木の大きさを保持しなければならないのである。この動的ランダム二分探索木の長所は、部分木の大きさを他の目的、例えばランクを $O(\log \mathtt{n})$ の期待実行時間で計算するのにも使えることである。（問 7.10 を参照せよ。）一方、Treap の優先度には木のバランスを保つ以外の用途はない。

問 **7.1.** 図 7.5 の Treap に 4.5 を優先度 7 で追加し、続いて値 7.5 を優先度 20 で追加する様子を図示せよ。

問 **7.2.** 図 7.5 の Treap から 5 と 7 を削除する様子を図示せよ。

問 **7.3.** 図 7.1 の右の木を生成する操作の列が 21,964,800 通りあることを示せ。（ヒント：高さ h の完全二分木の個数に関する漸化式を作り、$h=3$ の場合を評価せよ。）

問 **7.4.** permute(a) メソッドを設計・実装せよ。これは n 個の相異なる値を含む配列 a を入力とし、a のランダムな置換を返すものである。実行時間は $O(\mathtt{n})$ であり、n! 通りの置換がいずれも当確率で現れる必要がある。

問 **7.5.** 補題 7.2 を利用して、add(x) における回転回数の期待値が $O(1)$ であることを示せ。（このことから remove(x) の場合も同様のことがわかる。）

問 **7.6.** Treap の実装を明示的に優先度を保持しないように修正せよ。その際優先度として、各ノードのハッシュ値を利用せよ。

問 **7.7.** 二分探索木の各ノード u は高さ u.height、u を根とする部分木の大きさ u.size を保持していると仮定する。

1. 左または右の回転を u で実行すると、回転によって影響を受けるすべてのノードにおけるふたつの値を定数時間で更新できることを示せ。
2. 各ノードの深さも保持することにすると、上と同様の結果が成り立たなくなることを説明せよ。

問 **7.8.** n 要素からなる整列済み配列 a から Treap を構築するアルゴリズムを設計・実装せよ。この操作の実行時間は最悪の場合でも $O(n)$ である必要がある。また a の要素を順に add(x) メソッドで追加して得られる Treap と同一の Treap が得られなければならない。

問 **7.9.** この問題では Treap において、与えられたポインタの近くにあるノードを効率的に見つける方法を明らかにする。

1. 各ノードが自身を根とする部分木における最大値・最小値を保持する Treap を設計・実装せよ。
2. この情報を使って、fingerFind(x,u) を実装せよ。これは u の助けを借りて find(x) を実行する操作である。（u は x から遠くないノードであれば望ましい。）この操作は u から上に向かって進み w.min ≤ x ≤ w.max を満たすノード w を見つける。その後は w からふつうのやり方で x を検索する。（fingerFind(x,u) の実行時間は $O(1+\log r)$ であることを示せる。ここで、r は Treap の要素であって、その値が x と u.x の間にあるものの数である。）
3. Treap の実装を拡張し、find(x) の探索を開始するノードを、直近の find(x) で見つかったノードとするようにせよ。

問 **7.10.** Treap におけるランクが i であるキーを返す操作 get(i) を設計・実装せよ。（ヒント：各ノード u が u を根とする部分木の大きさを保持するようにするとよい。）

問 **7.11.** TreapList を実装せよ。これは List インターフェースを Treap と

して実装したものだ。各ノードはリストのアイテムを保持し、行きがけ順で辿るとリストに入っている順でアイテムが見つかる。List の操作 get(i)・set(i, x)・add(i, x)・remove(i) の期待実行時間はいずれも $O(\log n)$ である必要がある。

問 **7.12.** split(x) をサポートする Treap を設計・実装せよ。この操作は Treap に含まれる x より大きいすべての値を削除し、削除された値をすべて含む新たな Treap を返すものである。
例：t2 = t.split(x) は t から x より大きい値をすべて削除し、削除した値をすべて含む新たな Treap t2 を返す。split(x) の実行時間の期待値は $O(\log n)$ である必要がある。
注意：この修正後も size() は定数時間で正しく動く必要がある。これは問 7.10 のために必要である。

問 **7.13.** split(x) の逆であると考えられる absorb(t2) をサポートする Treap を設計・実装せよ。この操作は Treap t2 からすべての値を削除し、それらをレシーバーに追加する。また、この操作は t の最小値はレシーバーの最大値よりも大きいことを前提とする。なお、absorb(t2) の期待実行時間は $O(\log n)$ である必要がある。

問 **7.14.** この節で説明した Martinez の randomized binary search trees を実装せよ。また、Treap の実装と性能を比較せよ。

第 8

Scapegoat Tree

この章では二分探索木の一種である ScapegoatTree を紹介する。このデータ構造は何か誤りがあるとき、それは誰の責任なのかを決めようとする現実でよくある考え方に基づく。（scapegoat とは罪を負わされたヤギ、転じて身代わりや生け贄のことである。）責任の所在が決まれば、そいつに問題を解決させることができる。

ScapegoatTree は**部分的な再構築**によってバランスを保つ。部分的な再構築とは部分木を一度分解しその部分木を完全二分木に再構築するプロセスである。ここで完全二分木とは任意のノードがサイズでバランスされている（問 6.6 参照。）木である。ノード u を根とする部分木を完全二分木に再構築するやり方はたくさんある。もっとも単純なやり方のひとつは u の部分木を辿りすべてのノードを配列 a に集め、a から再帰的にバランスされた木を構築するものだ。$m = a.length/2$ とするとき、$a[m]$ を新たな部分木の根とし、$a[0],\dots,a[m-1]$ は左の部分木に、$a[m+1],\dots,a[a.length-1]$ は右の部分木にそれぞれ再帰的に格納される。

ScapegoatTree
```
void rebuild(Node *u) {
  int ns = BinaryTree<Node>::size(u);
  Node *p = u->parent;
  Node **a = new Node*[ns];
  packIntoArray(u, a, 0);
  if (p == nil) {
    r = buildBalanced(a, 0, ns);
    r->parent = nil;
```

```
  } else if (p->right == u) {
    p->right = buildBalanced(a, 0, ns);
    p->right->parent = p;
  } else {
    p->left = buildBalanced(a, 0, ns);
    p->left->parent = p;
  }
  delete[] a;
}
int packIntoArray(Node *u, Node **a, int i) {
  if (u == nil) {
    return i;
  }
  i = packIntoArray(u->left, a, i);
  a[i++] = u;
  return packIntoArray(u->right, a, i);
}
```

rebuild(u) の実行時間は $O(\text{size}(u))$ である。結果として得られる部分木は高さ最小のものである。すなわち、size(u) 個のノードを持ちこの木より低い木は存在しない。

8.1 ScapegoatTree：部分再構築する二分探索木

ScapegoatTree とは、BinarySearchTree であり、ノード数 n に加えてノード数の上界となる値 q を保持する。

ScapegoatTree

```
int q;
```

n と q は常に次の式を満たす。

$$q/2 \le n \le q$$

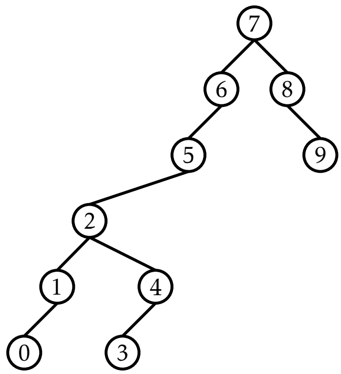


図 8.1: 10 個のノードを持ち、高さが 5 である ScapegoatTree の例

加えて ScapegoatTree の高さはノードの数に対して対数程度であるという性質を持つ。すなわち scapegoat tree の高さは常に $\log_{3/2} q$ 以下であり、この値は以下の性質を満たす。

$$\log_{3/2} q \le \log_{3/2} 2n < \log_{3/2} n + 2 \tag{8.1}$$

この制約を満たしても、ScapegoatTree は意外と偏った見た目になりうる。例えば図 8.1 は $q = n = 10$ であり、高さ $5 < \log_{3/2} 10 \approx 5.679$ の木である。

ScapegoatTree における find(x) の実装は BinarySearchTree の標準のアルゴリズムを使う。（6.2 節を参照せよ。）実行時間は木の高さに比例し、(8.1) よりこれは $O(\log n)$ である。

add(x) の実装では、まず n と q をひとつずつ増やし、x を二分探索木に追加する標準のアルゴリズムを使う。すなわち、x を探し、新たな葉 u を追加し、$u.x = x$ とする。 このとき、運良く u の深さが $\log_{3/2} q$ 以下なら、これ以上なにもしなくてよい。

$\mathrm{depth}(u) > \log_{3/2} q$ であることもある。この場合、高さを減らす必要がある。これはそんなに大変ではない。今、ノード u だけが、木の中で深さが $\log_{3/2} q$ を超えているノードである。u を修正するために、木を上に向かって辿りながら scapegoat であるノード w を探す。w は非常にバランスの悪い

ノードである。ここでバランスは次の式で判断される。

$$\frac{\mathtt{size(w.child)}}{\mathtt{size(w)}} > \frac{2}{3} \tag{8.2}$$

w.child は w の子であって、根から u に至る経路上にあるものである。scapegoat が存在することを示すのは難しくない。今はこれを事実として認めることにする。scapegoat w が見つかれば w を根とする部分木を完全に取り壊し、完全二分木として再構築すればよい。(8.2) より、u を加える前から w の部分木は完全二分木ではない。よって、w を再構築するときにその高さは 1 以上減り、ScapegoatTree の高さは再度 $\log_{3/2} \mathtt{q}$ 以上になる。

ScapegoatTree
```
bool add(T x) {
  // first do basic insertion keeping track of depth
  Node *u = new Node;
  u->x = x;
  u->left = u->right = u->parent = nil;
  int d = addWithDepth(u);
  if (d > log32(q)) {
    // depth exceeded, find scapegoat
    Node *w = u->parent;
    int a = BinaryTree<Node>::size(w);
    int b = BinaryTree<Node>::size(w->parent);
    while (3*a <= 2*b) {
      w = w->parent;
      a = BinaryTree<Node>::size(w);
      b = BinaryTree<Node>::size(w->parent);
    }
    rebuild(w->parent);
  } else if (d < 0) {
    delete u;
    return false;
  }
  return true;
```

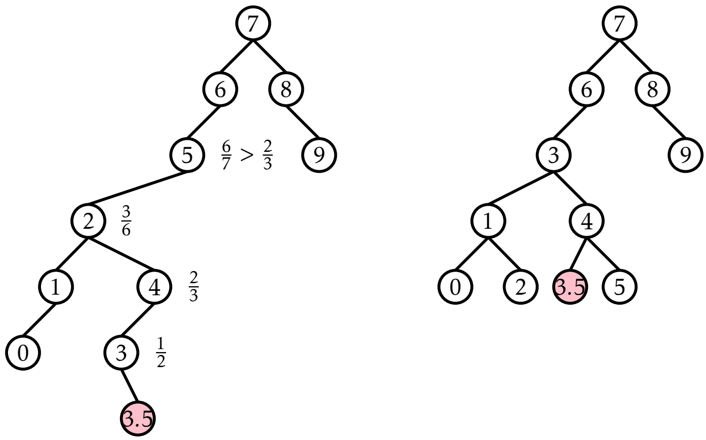


図 8.2: ScapegoatTree に 3.5 を追加する。このとき木の高さは 6 に増え、$6 > \log_{3/2} 11 \approx 5.914$ より (8.1) が成り立たない。scapegoat は値 5 を含むノードで見つかる。

```
}
```

scapegoat w を見つけるコスト、w を根とする部分木を再構築するコストを無視すれば、add(x) の実行時間のうち支配的なのは最初の検索のものであり、これは $O(\log q) = O(\log n)$ である。scapegoat を見つけ、部分木を再構築するコストは、次小節で償却解析を使って説明する。

ScapegoatTree における remove(x) の実装は非常に単純である。x を探し、BinarySearchTree におけるアルゴリズムを使ってそれを削除する。（これは木の高さを増やすことはない。）そして n をひとつ小さくし、q はそのままにしておく。最後に $q > 2n$ かどうかを確認し、もしそうなら**木全体を再構築**し、完全二分木にして、$q = n$ とする。

ScapegoatTree
```
bool remove(T x) {
  if (BinarySearchTree<Node,T>::remove(x)) {
    if (2*n < q) {
      rebuild(r);
      q = n;
```

```
    }
    return true;
  }
  return false;
}
```

ここでも、再構築のコストを無視すれば、remove(x) の実行時間は木の高さに比例し、$O(\log \mathtt{n})$ である。

8.1.1 正しさの証明と実行時間の解析

ここでは ScapegoatTree の各操作の正しさと償却実行時間の解析とを行う。まずは正しさを示すために、add(x) 操作において (8.1) が成り立たなくなったなら常に scapegoat を見つけられることを示す。

補題 8.1. u を *ScapegoatTree* における深さ $d > \log_{3/2} \mathtt{q}$ のあるノードとする。 このとき u から *root* への経路上に次の条件を満たすノード w が存在する。

$$\frac{\mathtt{size(w)}}{\mathtt{size(parent(w))}} > 2/3$$

証明. 背理法で示す。u から root への経路上の任意のノード w について次の式が成り立つと仮定する。

$$\frac{\mathtt{size(w)}}{\mathtt{size(parent(w))}} \le 2/3$$

また、根から u への経路を $\mathtt{r} = \mathtt{u}_0, \ldots, \mathtt{u}_d = \mathtt{u}$ とする。このとき $\mathtt{size}(\mathtt{u}_0) = \mathtt{n}$、$\mathtt{size}(\mathtt{u}_1) \le \frac{2}{3}\mathtt{n}$、$\mathtt{size}(\mathtt{u}_2) \le \frac{4}{9}\mathtt{n}$ であり、より一般に次の式が成り立つ。

$$\mathtt{size}(\mathtt{u}_i) \le \left(\frac{2}{3}\right)^i \mathtt{n}$$

ここで $\mathtt{size}(\mathtt{u}) \ge 1$ より次の式が成り立つことを示す。

$$1 \le \mathtt{size}(\mathtt{u}) \le \left(\frac{2}{3}\right)^d \mathtt{n} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{3/2} \mathtt{q}} \mathtt{n} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{3/2} \mathtt{n}} \mathtt{n} = \left(\frac{1}{\mathtt{n}}\right) \mathtt{n} = 1 \qquad \square$$

しかしこれは成り立たず、矛盾が導かれた。

続いてまだ説明していない部分の実行時間の解析を行う。scapegoat ノードを探す際の $\mathtt{size}(\mathtt{u})$・$\mathtt{rebuild}(\mathtt{w})$ のコストを改正する。これらふたつの操作の間には次のような関係がある。

補題 8.2. *ScapegoatTree* の $\mathtt{add}(\mathtt{x})$ において、*scapegoat* $\mathtt{w}$ を見つけて $\mathtt{w}$ を根とする部分木を再構築するコストは $O(\mathtt{size}(\mathtt{w}))$ である。

証明. scapegoat ノード $\mathtt{w}$ を見つけたあと、そこから再構築を行うコストは $O(\mathtt{size}(\mathtt{w}))$ である。 scapegoat を見つけるためには $\mathtt{size}(\mathtt{u})$ を $\mathtt{u}_k = \mathtt{w}$ を見つけるまで $\mathtt{u}_0,\ldots,\mathtt{u}_k$ に順に実行する。しかし、 $\mathtt{u}_k$ はこの列における最初の scapegoat ノードなので、任意の $i \in \{0,\ldots,k-2\}$ について次の式が成り立つ。

$$\mathtt{size}(\mathtt{u}_i) < \frac{2}{3}\mathtt{size}(\mathtt{u}_{i+1})$$

よって、すべての $\mathtt{size}(\mathtt{u})$ 呼び出しのコストの合計は次のようになる。

$$\begin{aligned}
O\left(\sum_{i=0}^{k}\mathtt{size}(\mathtt{u}_{k-i})\right) &= O\left(\mathtt{size}(\mathtt{u}_k) + \sum_{i=0}^{k-1}\mathtt{size}(\mathtt{u}_{k-i-1})\right) \\
&= O\left(\mathtt{size}(\mathtt{u}_k) + \sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^i\mathtt{size}(\mathtt{u}_k)\right) \\
&= O\left(\mathtt{size}(\mathtt{u}_k)\left(1 + \sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^i\right)\right) \\
&= O(\mathtt{size}(\mathtt{u}_k)) = O(\mathtt{size}(\mathtt{w}))
\end{aligned}$$

最後の行は減少幾何数列の和を計算している。 □

最後に、m 個の操作を順に実行する時の $\mathtt{rebuild}(\mathtt{u})$ の合計コストの上界を示す。

補題 8.3. 空の *ScapegoatTree* に対して、m 個の $\mathtt{add}(\mathtt{x})$・$\mathtt{remove}(\mathtt{x})$ からなる操作の列を順に実行するとき、$\mathtt{rebuild}(\mathtt{u})$ に要する時間の合計は $O(m\log m)$ である。

証明. XXX: credit scheme の訳語は? accounting method（AlgoIntro では出納法）のことだろうか?

出納法を使って示す。各ノードは預金を持っていると考える。預金が c だけあれば再構築のための支払いができる。預金の合計は $O(m\log m)$ で、$\mathtt{rebuild}(\mathtt{u})$ は $\mathtt{u}$ に蓄えられている預金を使って支払われる。

挿入・削除の際に挿入・削除されるノード $\mathtt{u}$ への経路上にある各ノードの預金を 1 だけ増やす。こうして一回の操作で増える預金の合計は最大 $\log_{3/2}\mathtt{q} \le \log_{3/2} m$ である。削除の際には多めに預金を蓄えることになる。こうして最大 $O(m\log m)$ だけの預金を行う。あとは、これだけの預金ですべての $\mathtt{rebuild(u)}$ の支払いに十分であることを示せばよい。

挿入の際に $\mathtt{rebuild(u)}$ を実行するなら、$\mathtt{u}$ は scapegoat である。次のことを仮定しても一般性を失わない。

$$\frac{\mathtt{size(u.left)}}{\mathtt{size(u)}} > \frac{2}{3}$$

次の事実を仮定すると、

$$\mathtt{size(u)} = 1 + \mathtt{size(u.left)} + \mathtt{size(u.right)}$$

次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}\mathtt{size(u.left)} > \mathtt{size(u.right)}$$

このとき、さらに次の式が成り立つ。

$$\mathtt{size(u.left)} - \mathtt{size(u.right)} > \frac{1}{2}\mathtt{size(u.left)} > \frac{1}{3}\mathtt{size(u)}$$

$\mathtt{u}$ を含む部分木が直前に再構築されたとき（もし、$\mathtt{u}$ を含む部分木が一度も再構築されていなければ、$\mathtt{u}$ が挿入されたとき）、次の式が成り立つ。

$$\mathtt{size(u.left)} - \mathtt{size(u.right)} \le 1$$

よって、$\mathtt{u.left}$・$\mathtt{u.right}$ に影響を与えた $\mathtt{add(x)}$・$\mathtt{remove(x)}$ の数の合計は次の値以上である。

$$\frac{1}{3}\mathtt{size(u)} - 1$$

$\mathtt{u}$ には少なくともこれだけの預金が蓄えられており、$\mathtt{rebuild(u)}$ に必要な $O(\mathtt{size(u)})$ だけの支払いには十分である。

削除において $\mathtt{rebuild(u)}$ が呼ばれるとき、$\mathtt{q} > 2\mathtt{n}$ である。この場合、$\mathtt{q} - \mathtt{n} > \mathtt{n}$ だけ余分に預金が蓄えられており、根の再構築に必要な $O(\mathtt{n})$ だけの支払いには十分である。

以上で示された。 □

8.1.2 要約

次の定理は ScapegoatTree の性能をまとめるものだ。

定理 8.1. *ScapegoatTree* は *SSet* インターフェースを実装する。rebuild(u) のコストを無視すると、*ScapegoatTree* は add(x)・remove(x)・find(x) をいずれも $O(\log n)$ の時間で実行できる。さらに、空の *ScapegoatTree* に対して、m 個の add(x)・remove(x) からなる操作の列を順に実行するとき、rebuild(u) に要する時間の合計は $O(m \log m)$ である。

8.2 ディスカッションと練習問題

Galperin と Rivest[33] が scapegoat tree という名前を提案し、このデータ構造を定義し、解析した。しかし同じデータ構造が Andersson [5, 7] によって先に発見されており、そこでは general balanced trees と呼ばれていた。これはこのデータ構造は高さが小さいならどのような形状も取れることによる。

ScapegoatTree の実装で実験してみると、この本で紹介した他の SSet の実装と比べてかなり遅いことがわかる。高さの上界は

$$\log_{3/2} q \approx 1.709 \log n + O(1)$$

であり、これは Skiplist の探索経路の長さの期待値よりも良く、Treap とも遠くないため、この結果は意外かもしれない。最適化として、部分木のサイズを各ノードが保持したり、既に計算した部分木のサイズを再利用したりできる。（8.5 と 8.6 を参照せよ。）これらの最適化をしても依然として add(x)・delete(x) からなる操作の列を ScapegoatTree で実行したとき、他の SSet の実装より遅いことがあるだろう。

この本で扱った他の SSet の実装と異なり ScapegoatTree は再構築自体に多くの時間を消費するため、このような性能差が現れる。この本で紹介した他の SSet の実装では、n 個の操作の間に $O(n)$ 程度のデータ構造の変形をすればよかった。一方、問 8.3 から n 個の操作の列を ScapegoatTree に実行するとき、$n \log n$ のオーダーの時間を rebuild(u) に費やすことがわかる。これは再構築をすべて rebuild(u) で行っていることの帰結である。[20].

性能は劣るものの、ScapegoatTree を使うのが正しい選択となる場合がある。これは、各ノードに追加のデータがあり、それを回転操作においては定数時間で更新できないが、rebuild(u) 操作の際に更新できる場合である。この

場合 ScapegoatTree や部分的な再構築を行う他のデータ構造が有効である。このような応用の例を問 8.11 で取り上げている。

問 **8.1.** 図 8.1 の ScapegoatTree に 1.5、1.6 を順に追加する様子を描け。

問 **8.2.** 空の ScapegoatTree に 1,5,2,4,3 を順に追加する様子を描け。加えて、補題 8.3 の証明で使った預金がどう移動し、どのように使われるかも説明せよ。

問 **8.3.** 空の ScapegoatTree に対して、$x = 1,2,3,\ldots,n$ について順に add(x) を呼び出す。このときある定数 $c > 0$ が存在し、rebuild(u) に要する時間の合計は $cn\log n$ 以上であることを示せ。

問 **8.4.** ScapegoatTree における探索経路の長さは $\log_{3/2} q$ を超えない。

1. ScapegoatTree を修正し、$1 < b < 2$ を満たすパラメータ b について探索経路の長さが $\log_b q$ を超えないデータ構造を、設計・解析・実装せよ。
2. 解析・実験によると、find(x)・add(x)・remove(x) の償却コストは n と b の関数としてどう表せるか。

問 **8.5.** ScapegoatTree の add(x) メソッドを修正し、既に計算した部分木の大きさは再計算せず、無駄を省くように修正せよ。size(w) を計算するとき、size(w.left) か size(w.right) は既に計算しているため、このような最適化が可能である。修正前後での性能を比較せよ。

問 **8.6.** ScapegoatTree の変種として、明示的に各ノードを根とする部分木の大きさを蓄えるものを実装せよ。もともとの ScapegoatTree や問 8.5 での実装と、ここでの実装とを性能比較せよ。

問 **8.7.** この章の最初に説明した rebuild(u) を、再構築する部分木に含まれるノードを蓄える配列を使わずに再実装せよ。代わりに、まずは再帰を使ってこれらのノードを連結リストにし、この連結リストを完全二分木に変換せよ。(いずれのステップにも華麗な再帰による実装がある。)

問 **8.8.** WeightBalancedTree を設計・実装せよ。このデータ構造では、根以外の各ノード u は**バランス条件** $\mathrm{size}(u) \le (2/3)\mathrm{size}(u.\mathrm{parent})$ を満たす。add(x)・remove(x) 操作はふつうの BinarySearchTree とほぼ同じだが、ノード u でバランス条件が成り立たないときには u.parent を根とする部分木が再

構築される点でのみ異なっている。そして、WeightBalancedTree の償却実行時間は $O(\log n)$ であることを示せ。

問 **8.9.** CountdownTree を設計・実装せよ。このデータ構造では各ノード u は**タイマー** u.t を持っている。add(x)・remove(x) 操作はふつうの BinarySearchTree とほぼ同じだが、いずれかの操作が u の部分木に影響を与えるとき、u.t をひとつ小さくする点で異なる。u.t = 0 のとき、u を根とする部分木は完全二分木に再構築される。ノード u が再構築に関わるとき（u が再構築されるか、u の祖先のうちのひとつが再構築されるとき）u.t は size(u)/3 にリセットされる。

そして、CountdownTree の償却実行時間は $O(\log n)$ であることを示せ。（ヒント：まずは任意のノードがあるバランスに関する不変条件を満たすことを示せ。）

問 **8.10.** DynamiteTree を設計・実装せよ。このデータ構造ではすべてのノード u は u を根とする部分着の大きさを u.size として保持する。add(x)・remove(x) 操作はふつうの BinarySearchTree とほぼ同じだが、いずれかの操作が u の部分木に影響を与えるとき、u は確率 1/u.size で**爆発**する。u が爆発すると、u を根とする部分木は完全二分木に再構築される。

そして、DynamiteTree の償却実行時間は $O(\log n)$ であることを示せ。

問 **8.11.** 要素の列を保持するデータ構造 Sequence を設計・実装せよ。これは次のような操作を提供する。

- addAfter(e)：要素 e の次に新たな要素を追加する。また、新たに追加した要素を返す。（e が null なら新たな要素は列の先頭に追加される。）
- remove(e)：e を列から削除する。
- testBefore(e1,e2)：e1 が e2 の前にあるならば、またそのときに限って true を返す。

はじめのふたつの操作の償却実行時間は $O(\log n)$ でなければならない。みっつめの操作は定数時間でなければならない。

Sequence は、列の中の順序を使い、ScapegoatTree のようにデータを蓄えれば実装できる。testBefore(e1,e2) を定数時間で実装するために、要素 e は根から e への経路を符号化した整数でラベル付けされる。こうすると testBefore(e1,e2) は e1 と e2 のラベルを比較すればよい。

第 9

赤黒木

この章では赤黒木という、要素数に対して木の高さを対数程度に抑える二分木を紹介する。赤黒木は最も広く使われるデータ構造のひとつである。例えば、多くのライブラリの実装における基本的なデータ構造であり、Java のコレクションフレームワークや C++ の標準テンプレートライブラリ（のいくつかの実装）に使われている。また、Linux という OS のカーネルでも使われている。赤黒木が人気な理由を挙げよう。

1. n 個の要素を含む赤黒木の高さは $2\log n$ 以下である
2. add(x)・remove(x) を**最悪の場合でも** $O(\log n)$ の時間で実行できる
3. add(x)・remove(x) における、回転の回数は償却すると定数である

はじめのふたつの性質が Skiplist・Treap・Scapegoat に対する赤黒木の優位性を示している。Skiplist・Treap はランダム化を使うため実行時間 $O(\log n)$ は期待値にすぎない。Scapegoat tree には高さの保証があるものの、add(x)・remove(x) の実行時間 $O(\log n)$ は償却実行時間にすぎない。3 つめの性質はおまけである。この性質から、要素 x を追加・削除するときの主な時間は、x を見つける処理によることがわかる。[*1]

しかし、赤黒木におけるよい性質には代償がある。実装が複雑なのである。高さの上界を $2\log n$ に保つのは容易ではない。様々な可能性を、慎重に解析しなければならない。そしてそのすべてにおいて、実装が正しくなければならないのである。ひとつ回転を間違えたり、色を間違えると、わかりにくいバグが発生することになる。

[*1] スキップリストや Treap も平均的にはこの性質を持つ。4.6 と 7.5 を参照せよ。

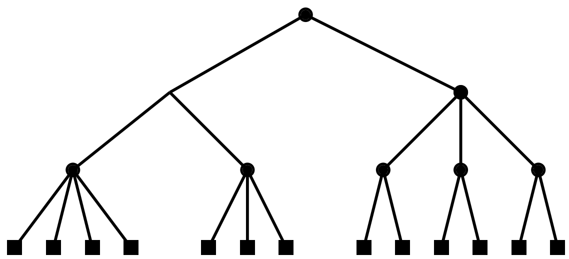


図 9.1: 高さ 3 である 2-4 木

赤黒木の実装に直接取り掛かるのでなく、まずは関連する背景知識として 2-4 木を説明する。これは赤黒木が発見された経緯と、なぜ効率的に管理できるのかを理解する助けとなるだろう。

9.1 2-4 木

2-4 木は次の性質を持つ根付き木である。

性質 **9.1** (高さ)**.** すべての葉の深さは等しい。

性質 **9.2** (次数)**.** すべての内部ノードは 2 個以上 4 個以下の子ノードを持つ。

2-4 木の例を図 9.1 に示す。2-4 木の性質より、この木の高さは葉の数の対数程度である。

補題 **9.1.** $\mathtt{n}$ 個の葉を持つ *2-4* 木の高さは $\log \mathtt{n}$ 以下である。

証明**.** 内部ノードの子の数は 2 以上なので、2-4 木の高さを h とすると葉の数は 2^h 以上である。

$$\mathtt{n} \geq 2^h \enspace .$$

両辺の対数を取ると $h \leq \log \mathtt{n}$ である。 □

9.1.1 葉の追加

2-4 木に葉を追加するのは簡単である。（図 9.2 を参照せよ。）他の葉の親ノード $\mathtt{w}$ の子として葉 $\mathtt{u}$ を追加したいときは、単に $\mathtt{u}$ を $\mathtt{w}$ の子とする。このとき

高さの制約は保たれるが、次数の制約が成り立たなくなるかもしれない。つまり、u を追加する直前に w の 4 つの子を持っていたなら、w の子の数は今では 5 となる。この場合、 w を**分割**し、2 つの子を持つノード w と、3 つの子を持つノード w' とする。このとき w' には親がいないので、w の親を w' の親とする。この処理は再帰的に行われる。つまり、先の処理の結果として w の親が持つ子の数が多くなりすぎるかもしれず、その場合にはまた分割を行う。この処理を、子の数が 4 未満のノードが見つかるか、根 r を r と r' に分割するまで繰り返す。後者の場合には新しい根を作り、r と r' をその子とする。そのときにはすべての葉の深さが同時に増えるので、高さの性質はやはり保たれる [*2]。

2-4 木の高さは常に $\log n$ 以下なので、葉の追加は $\log n$ ステップ以下で完了する。

9.1.2 葉の削除

2-4 木から葉を削除するには少し工夫が必要である。（図 9.3 を参照せよ。）葉 u をその親 w から削除するとき、単に u を削除する。その直前に、w がふたつしか子を持っていなければ、w の子はひとつだけになり、次数の制約を犯す。

これを修正するため、w の兄弟 w' を見る。w の親が持つ子の数は 2 以上なので、兄弟 w' は必ず存在する。w' が 3 つまたは 4 つの子を持つなら、そのうちひとつを w' から w に移す。すると w の子の数は 2、w' の子の数は 2 か 3 になり、処理を終えられる。

一方、w' の子の数が 2 なら、w と w' を**併合**し、子を 3 つ持つ一つのノード w とする。続いて w' を w' の親から取り除く。この処理はノード u かその兄弟 u' が 3 つ以上子を持つような u を見つけるか、根に到達すると終了する。後者の場合、根はひとつの子だけを持つので、根は削除して、その子を新たな根とする。この場合もすべての葉の高さが同時に減るので、高さの性質はやはり保たれる。

ここでも、2-4 木の高さは常に $\log n$ 以下なので、葉の削除は $\log n$ ステップ以下で完了する。

[*2] 訳注：これに似た議論は 14.2.2 節において現れる。

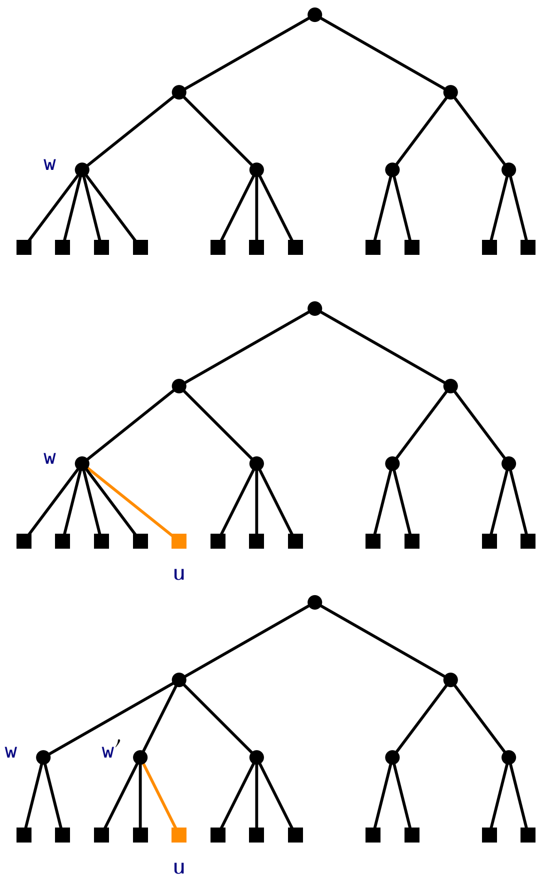


図 9.2: 2-4 木に葉を追加する。w.parent の次数が 4 未満なので、この処理は 1 回の分割の後終了する。

9.2 RedBlackTree：2-4 木のシミュレーション

赤黒木は各ノード u が**赤**か**黒**の**色**を持つ二分探索木である。赤は 0 で、黒は 1 で表現される。

RedBlackTree
```
class RedBlackNode : public BSTNode<Node, T> {
  friend class RedBlackTree<Node, T>;
```

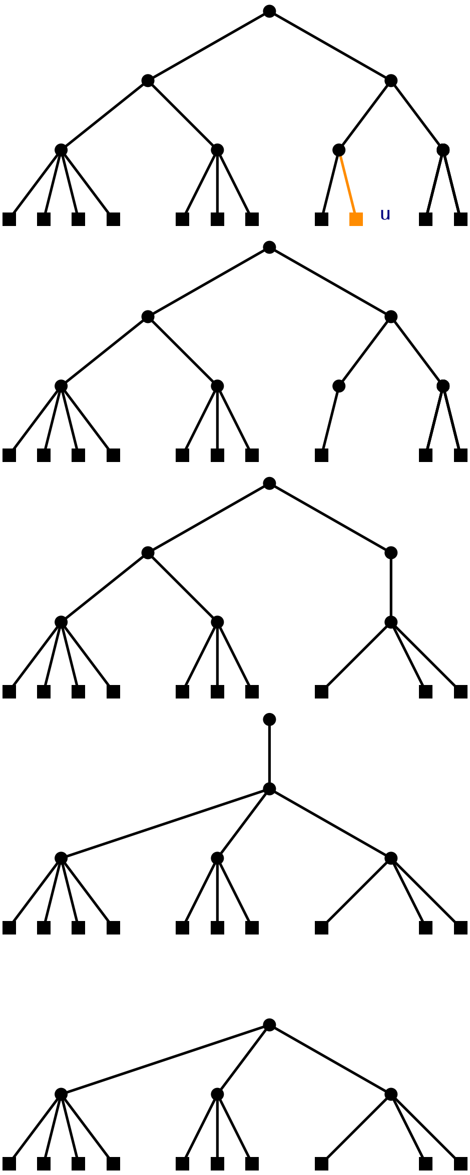


図 9.3: 2-4 木から葉を削除する。u の祖先とその兄弟はみな 2 つしか子を持っていないため、この処理は根まで繰り返される。

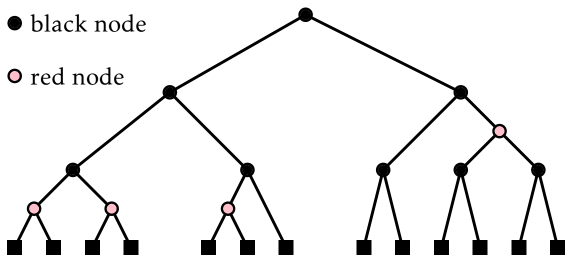


図 9.4: 黒の高さが 3 である赤黒木の例。外部ノード (`nil`) を正方形で描いている。

```
  char colour;
};
int red = 0;
int black = 1;
```

赤黒木を操作する前後では次のふたつの性質が満たされる。いずれも赤・黒の色と、0・1 の数値を使って定義される。

性質 **9.3** (黒の高さの性質)**.** 「黒の高さ」が一様：葉から根への経路はいずれも、同じ数だけ黒いノードを含む。

性質 **9.4** (赤の辺の性質)**.** 赤の辺が無い：赤いノード同士は隣接しない。（根でない任意のノード `u` について、`u.colour`+`u.parent.colour` ≥ 1 が成り立つ。）

根 `r` については、どちらの色であってもこれらの性質が満たされる。そのためここでは、根は黒であると仮定する。また赤黒木を更新するアルゴリズムはこれを保つようにする。赤黒木を単純化するための別の工夫として、外部ノード（`nil` で表現される）を黒いノードと扱うのがよい。図 9.4 に赤黒木の例を示した。

9.2.1 赤黒木と 2-4 木

前の小節で定義した黒の高さと赤の辺についての性質を保ちながら、赤黒木を効率的に更新できる事実には、はじめて聞くと驚くかもしれない。一方で、これらの性質がなんの役に立つのかわからないかもしれない。実は、赤黒木は 2-4 木を二分木として効率的にシミュレートするように設計されているの

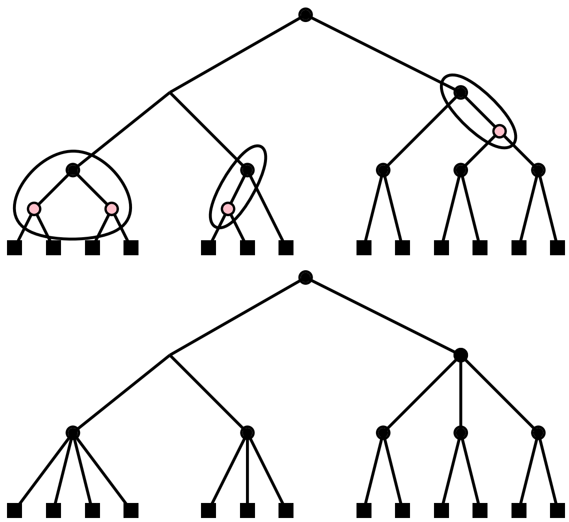


図 9.5: 任意の赤黒木には、対応する 2-4 木が存在する。

である。

図 9.5 を参照せよ。n 個のノードを持つ赤黒木 T に次の変換を施す。すべての赤いノード u を取り除き、u のふたつの子をいずれも（黒い）u の親に直接接続する。こうして得られる木 T は黒いノードだけを含む。

T' の内部ノードはみな 2-4 個の子を持つ。ふたつの黒い子を持っていた黒いノードは、変換後も 2 つの黒い子を持つ。赤い子と黒い子をひとつずつ持っていた黒いノードは、変換後は 3 つの黒い子を持つ。ふたつの赤い子を持っていた黒いノードは、変換後は 4 つの黒い子を持つ。加えて黒の高さの性質より、T' の任意の葉から根への経路の長さは同じである。つまり、T' は 2-4 木なのである！

2-4 木 T' は $n+1$ 個の葉を持ち、各葉は赤黒木の $n+1$ 個の外部ノードと対応する。よってこの木の高さは $\log(n+1)$ 以下である。2-4 木のすべての葉から根への経路は赤黒木 T' における根から外部ノードへの経路に対応する。この経路の最初・最後のノードは黒色で、内部ノードのふたつにひとつ以下が赤いので、この経路にあるノードのうち黒いものは $\log(n+1)$ 個以下、赤いものは $\log(n+1)-1$ 個以下である。よって、任意の $n \geq 1$ について、根から任意

の**内部**ノードへの経路のうち最長のものの長さは次の左辺の値以下である。

$$2\log(n+1)-2 \le 2\log n$$

このことから、赤黒木の最も重要な性質を示せる。

補題 **9.2.** n 個のノードからなる赤黒木の高さは $2\log n$ 以下である。

2-4 木と赤黒木の関係がわかれば、赤黒木を保ちながら効率的に要素の追加・削除ができる気がしてきたことだろう。

BinarySearchTree における要素の追加は新たな葉を追加することで行えることはこれまでの章で説明した。よって、赤黒木における add(x) を実装するためには、2-4 木における 5 つの子を持つノードの分割をシミュレートする方法があればよい。5 つの子を持つ 2-4 木のノードは、ふたつの赤い子を持つひとつの黒いノード w であって、子のうちの一方が更に赤い子を持つものである。w を「分割」するには、w を赤く、w の子をいずれも黒くすればよい。例を図 9.6 に示す。

一方、remove(x) のためには、ふたつのノードを併合する方法と兄弟から子を借りる方法があればよい。ふたつのノードの併合は図 9.6 で示した分割の逆の処理であり、いずれも黒い兄弟を赤に、その共通の赤い親を黒にすればよい。兄弟から子を借りる操作が最も複雑で、回転と色の変更を共に行う必要がある。

もちろん赤の辺の性質、黒の高さの性質をいずれも満たす必要がある。これが可能なことくらいではもう驚かないかもしれないが、2-4 木を赤黒木でシミュレートするために考慮すべき場合分けはやはり多い。背景にある 2-4 木を無視して赤黒木の性質を保つことを直接的に考えることで、よりシンプルになることもある。

9.2.2 左傾赤黒木

XXX: left-learning に定訳はあるか?

赤黒木の定義の仕方は複数ある。add(x)・remove(x) を実行しながら、赤の辺の性質・黒の高さの性質を保てる、いくつかのデータ構造があるのだ。異なる構造では、異なるやり方でこれを実現する。この節では RedBlackTree と呼ぶデータ構造を実装する。これは赤黒木の一種であって、ある追加の性質を満たすものである。

性質 **9.5** (左傾性)**.** 任意のノード u について、u.left が黒ならば u.right も

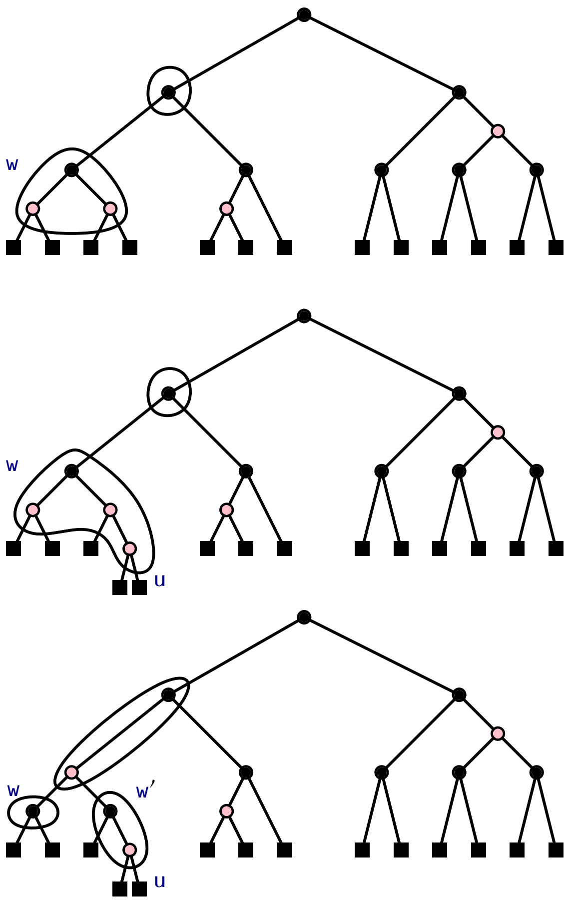


図 9.6: 2-4 木における追加の際の分割を赤黒木で模倣する。（これは図 9.2 に示した 2-4 木への要素の追加を模倣している。）

黒である。

例えば図 9.4 の左傾性を満たしていない。右に向かう経路の赤いノードの親がこの性質を犯しているためだ。

左傾性を保持するのは、これにより add(x)・remove(x) において木を更新するときの場合分けが単純になるためである。これは対応する 2-4 木の表現が一意に定まるためである。次数が 2 のノードは黒いノードであって、ふた

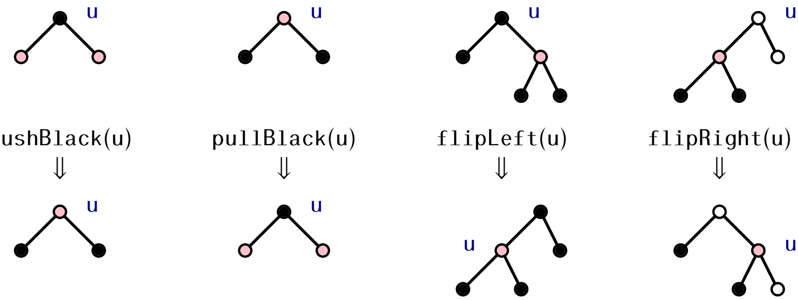


図 9.7: push・pull・flip

つの黒い子を持つものである。次数が 3 のノードは黒いノードであって、左の子が赤く、右の子が黒の黒いものである。次数が 4 のノードは黒いノードであって、ふたつの赤い子を持つものである。

add(x)・remove(x) の実装の詳細に入る前に、図 9.7 に示す単純なサブルーチンを導入する。最初のふたつのサブルーチンは黒い高さの性質を保ったまま色を操作するものである。pushBlack(u) の入力 u はふたつの赤い子を持つ黒いノードで、u を赤に、そのふたつの子をいずれも黒に塗り替える。pullBlack(u) はこの逆の操作である。

RedBlackTree
```
void pushBlack(Node *u) {
  u->colour--;
  u->left->colour++;
  u->right->colour++;
}
void pullBlack(Node *u) {
  u->colour++;
  u->left->colour--;
  u->right->colour--;
}
```

flipLeft(u) は u と u.right の色を入れ替え、その後 u を左回転する。この操作はこれらふたつのノードの色と親子関係をいずれも入れ替える。

RedBlackTree
```
void flipLeft(Node *u) {
  swapcolours(u, u->right);
  rotateLeft(u);
}
```

flipLeft(u) は u が左傾性を犯しているとき、この性質を取り戻すのに役立つ。これは u.left が黒で u.right が赤であるためだ。この場合は特に、この操作によって黒の高さ・赤の辺の性質がいずれも満たされることが保証される。flipRight(u) は flipLeft(u) を左右対称に入れ替えた操作である。

XXX: 図のノードが一部白抜きなのはなぜ?

RedBlackTree
```
void flipRight(Node *u) {
  swapcolours(u, u->left);
  rotateRight(u);
}
```

9.2.3 要素の追加

RedBlackTree において add(x) を実装するには、BinarySearchTree におけるふつうの挿入操作によって、u.x = x かつ u.colour = red を満たす新たな葉 u を追加すればよい。この処理ではどのノードの黒の高さも変わらないので、黒の高さの性質が犯されることはない。しかし、左傾性が犯される可能性がある。（これは u が右の子であるときである。）また赤の辺の性質を犯すかもしれない。（これは u の親が赤いときである。）これらの性質を取り戻すために、addFixup(u) を呼び出す。

RedBlackTree
```
bool add(T x) {
  Node *u = new Node();
  u->left = u->right = u->parent = nil;
  u->x = x;
  u->colour = red;
  bool added = BinarySearchTree<Node,T>::add(u);
```

```
  if (added)
    addFixup(u);
  else
    delete u;
  return added;
}
```

図 9.8 に図示したように、addFixup(u) は赤いノード u を入力に取るが、これは赤の辺の性質や左傾性を犯しているかもしれない。この先の議論は、図 9.8 を見たり、それを一度紙に描いてみたりしなければ、理解するのが難しいかもしれない。続きを読む前に、この図に目を通して意味を考えてみてほしい。

XXX: 白いノードの意味がよくわからない

u が木の根なら、u を黒くすればふたつの性質が成り立つ。u の兄弟も赤いなら、u の親は黒いのでふたつの性質は既に成り立っている。

このいずれでもないとき、まずは u の親 w が左傾性を犯しているかを確認し、もしそうなら flipLeft(w) を実行し、u = w とする。すると、u は親である w の左の子になり、そのため w は左傾性を満たすようになる。あとは u の赤の辺の性質が満たされることを示せばよい。w が黒いなら既に赤の辺の性質は満たされているので、赤い場合だけを心配すれば十分である。

まだ処理は終わりではなく、u と w はいずれも赤い。赤い辺の性質（u によって侵されているが、w によっては侵されていない）より、u には親の親 g が存在し、それは黒い。g の右の子が赤いなら左傾性より g の子は共に赤く、pushBlack(g) を呼ぶと g は赤く、w は黒くなる。すると、u について赤の辺の性質が満たされるが、g について赤の辺の性質が侵されるかもしれず、u = g として同じ処理を再度繰り返す。

もし g の右の子が黒いなら、flipRight(g) を呼べば w は g の（黒い）親になり、w は u と g のふたつの赤い子を持つ。これは u が赤い辺の性質を満たすこと、g が左傾性を満たすことを保証する。この場合、処理はここで終了してよい。

RedBlackTree
```
void addFixup(Node *u) {
  while (u->colour == red) {
    if (u == r) { // u is the root - done
```

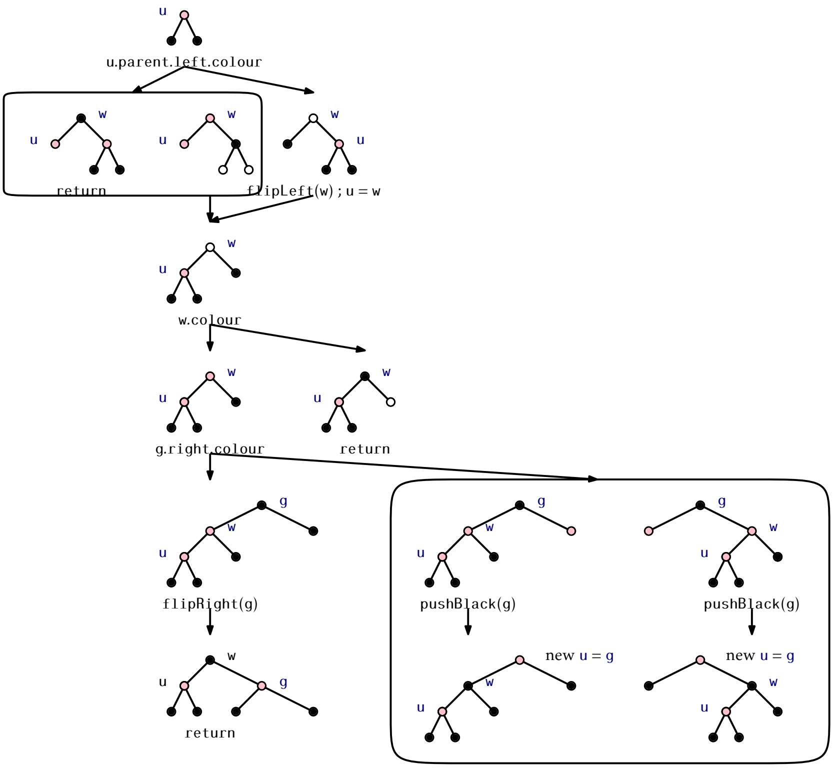


図 9.8: 要素を挿入したあと、ふたつの性質を満たすようにするための処理

```
    u->colour = black;
    return;
  }
  Node *w = u->parent;
  if (w->left->colour == black) { // ensure left-leaning
    flipLeft(w);
    u = w;
    w = u->parent;
  }
  if (w->colour == black)
```

```
      return; // no red-red edge = done
    Node *g = w->parent; // grandparent of u
    if (g->right->colour == black) {
      flipRight(g);
      return;
    } else {
      pushBlack(g);
      u = g;
    }
  }
}
```

insertFixup(u) の繰り返し一度あたりの実行時間は定数で、繰り返しの度に u を根に向けて動かすが処理が終了する。よって、insertFixup(u) は $O(\log n)$ 回の繰り返しの後に終了し、このときの実行時間は $O(\log n)$ である。

9.2.4 要素の削除

RedBlackTree では remove(x) の実装が最も複雑であり、これは知られているどの赤黒木の場合でも同様である。**二分探索木**における remove(x) のように、この操作は唯一の子 u を持つノード w を特定し、u を u.parent と接続し、w を木から取り除く。

このとき w が黒いと、黒の高さの性質が w.parent で成り立たなくなってしまう。w.colour を u.colour に足せば、この問題は一時的に解決する。もちろんそうすると、ふたつの別の問題が発生しうる。(1) u と w が共に黒いとき、u.colour + w.colour = 2 であり、不正な色 double-black になってしまう。(2) w が赤いとき、u と入れ替えると u.parent の左傾性が犯されるかもしれない。これらの問題はいずれも removeFixup(u) を呼ぶと解決できる。

RedBlackTree

```
bool remove(T x) {
  Node *u = findLast(x);
  if (u == nil || compare(u->x, x) != 0)
    return false;
```

```
  Node *w = u->right;
  if (w == nil) {
    w = u;
    u = w->left;
  } else {
    while (w->left != nil)
      w = w->left;
    u->x = w->x;
    u = w->right;
  }
  splice(w);
  u->colour += w->colour;
  u->parent = w->parent;
  delete w;
  removeFixup(u);
  return true;
}
```

removeFixup(u) の入力であるノード u の色は 1 か 2（無効な色）である。u の色が 2 なら、removeFixup(u) は回転と色の塗り替え操作とを繰り返し、double-black のノードを木から追い出す。この処理では、更新している部分木の根をノード u が参照するまで、更新を繰り返す。この部分木の根の色は変わっているしれない。具体的には赤から黒に変わっているかもしれず、そのため removeFixup(u) は最後に u の親が left-learning 性を満たしているか確認し、もし必要があればそれを修正する。

RedBlackTree

```
void removeFixup(Node *u) {
  while (u->colour > black) {
    if (u == r) {
      u->colour = black;
    } else if (u->parent->left->colour == red) {
      u = removeFixupCase1(u);
```

```
    } else if (u == u->parent->left) {
      u = removeFixupCase2(u);
    } else {
      u = removeFixupCase3(u);
    }
  }
  if (u != r) { // restore left-leaning property, if needed
    Node *w = u->parent;
    if (w->right->colour == red && w->left->colour == black) {
      flipLeft(w);
    }
  }
}
```

図 9.9 は removeFixup(u) を図示したものだ。以降の説明も図 9.9 をよく見てからでないと理解するのは難しいだろう。removeFixup(u) の繰り返し毎に、double-black であるノード u は、次の 4 つの場合分けに従って処理される。

Case 0: u が根である場合である。このときは最も簡単である。単に u を黒に塗り直せばよい。（これは赤黒木のいずれの性質を犯すこともない。）

Case 1: u の兄弟 v が赤い場合である。このとき左傾性より、u の兄弟 v はその親 w 左の子である。w で右回転を実行し、次の繰り返しに進む。この操作では w の親は左傾性を犯すようになり、u の深さが 1 大きくなることに注意する。しかし、次の繰り返しは w が赤い場合の Case 3 である。このとき、後で説明する Case 3 を実行すれば、うまく処理できる。

```
RedBlackTree
Node* removeFixupCase1(Node *u) {
  flipRight(u->parent);
  return u;
}
```

Case 2: u の兄弟 v が黒い場合である。このとき、u は親 w の左の子である。続いて pullBlack(w) を呼ぶ。すると、u は黒く、v は赤くなり、w はより黒

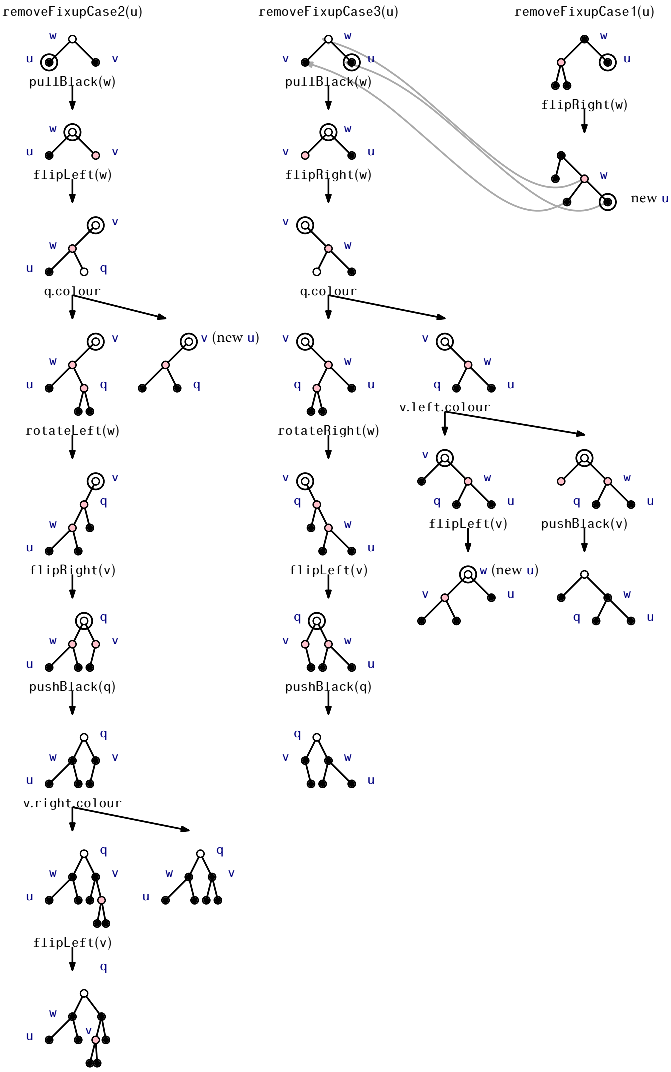


図 9.9: 削除のあと、double-black であるノードを追い出す様子

く、すなわち黒または double-black になる。このとき、w は左傾性を満たしておらず、flipLeft(w) を呼んでこれを解決する。

この時点で w は赤い。v を処理を開始した部分木の根とする。w が赤の辺の性質を犯していないか確認する必要がある。このために、w の右の子 q を見る。q が黒いなら、w は赤の辺の性質を満たしており、u = v として次の繰り返しに進める。

そうでない（q が赤い）なら、q と w によって、赤の辺の性質と左傾性とが満たされていない。左傾性を成り立たせるために、rotateLeft(w) を呼べばよい。この時点で、赤の辺の性質は依然として犯されている。q は v の左の子で、w は q の左の子である。また、q と w はいずれも赤く、v は黒または double-black である。flipRight(v) を実行すれば、q を v と w 両方の親になる。続いて、pushBlack(q) を呼ぶと v と w はいずれも黒くなり、q の色は w の元々の色になる。

すると、double-black のノードは無くなり、赤の辺の性質・黒の高さの性質はいずれも満たされる。あと気にする必要があるのは、v の右の子は赤いかもしれず、すると左傾性が犯されている。そのためこれを確認し、もし必要なら flipLeft(v) を実行する。

RedBlackTree
```
Node* removeFixupCase2(Node *u) {
  Node *w = u->parent;
  Node *v = w->right;
  pullBlack(w); // w->left
  flipLeft(w); // w is now red
  Node *q = w->right;
  if (q->colour == red) { // q-w is red-red
    rotateLeft(w);
    flipRight(v);
    pushBlack(q);
    if (v->right->colour == red)
      flipLeft(v);
    return q;
  } else {
    return v;
  }
```

```
}
```

Case 3: u の兄弟が黒く、u が右の子である場合である。この場合は Case 2 と対称性があり、ほぼ同様に処理できる。唯一の違いは、左傾性が非対称であることから生じる。そのため、少し違った処理をする必要もある。

前と同様に、まずは pullBlack(w) によって v を赤く、u を黒くする。flipRight(w) を呼ぶと v が部分木の根になる。この時点で w は赤く、コードは w の左の子の色と q の色とに応じて分岐する。

q が赤いとき、Case 2 の場合と全く同様に処理を終えることが出来る。ただし、v が左傾性を満たさない心配はないので、より単純な処理で済ませられる。

より複雑なのは q が黒い場合の処理である。この場合、v の左の子の色を確認する。もし赤いなら v はふたつの赤い子を持っており、pushBlack(v) を実行して余分な黒を下に送ることができる。この時点で v は w の元々の色になっており、処理を終えられる。

v の左の子が黒いなら、v は左傾性を犯しており、flipLeft(v) を呼んでこれを解消する。そして、次の removeFixup(u) の繰り返しを u = v として続けるために、ノード v を返す。

RedBlackTree

```
Node* removeFixupCase3(Node *u) {
  Node *w = u->parent;
  Node *v = w->left;
  pullBlack(w);
  flipRight(w);           // w is now red
  Node *q = w->left;
  if (q->colour == red) { // q-w is red-red
    rotateRight(w);
    flipLeft(v);
    pushBlack(q);
    return q;
  } else {
    if (v->left->colour == red) {
      pushBlack(v); // both v's children are red
      return v;
```

```
    } else { // ensure left-leaning
      flipLeft(v);
      return w;
    }
  }
}
```

removeFixup(u) の各繰り返しは定数時間で実行できる。Case 2・Case 3 は処理を終了するか、u を根に近づける。Case 0 では（u が根であり）処理は常に終了する。Case 1 は Case 3 に続き、その場合も処理は終了する。木の高さは高々 $2\log \mathtt{n}$ なので、高々 $O(\log \mathtt{n})$ 回の removeFixup(u) を繰り返せばよいことがわかるので、removeFixup(u) の実行時間は $O(\log \mathtt{n})$ である。

9.3 要約

次の定理は RedBlackTree の性能をまとめたものだ。

定理 **9.1.** *RedBlackTree* は *SSet* インターフェースの実装である。*RedBlackTree* は操作 add(x)・remove(x)・find(x) を持ち、いずれの最悪実行時間も $O(\log \mathtt{n})$ である。

加えて次の定理も成り立つ。

定理 **9.2.** 空の *RedBlackTree* に対して、m 個の add(x)・remove(x) からなる操作の列を実行するときの、addFixup(u)・removeFixup(u) に使われる時間の合計は $O(m)$ である。

定理 9.2 の証明は概要を示すだけにする。addFixup(u)・removeFixup(u) と、2-4 木における葉の追加・削除とを比べると、この性質は 2-4 木に由来するものという気がしてくるだろう。特に 2-4 木における分割・併合・子を借りる処理に必要な時間が $O(m)$ であることを示せれば、これから定理 9.2 を導けるだろう。

2-4 木に関するこの定理の証明は、ポテンシャル法を使った償却解析によ

る。[*3]2-4 木の内部ノード u のポテンシャルを次のように定義する。

$$\Phi(\mathrm{u}) = \begin{cases} 1 & \mathrm{u}\ \text{の子の数が 2 のとき} \\ 0 & \mathrm{u}\ \text{の子の数が 3 のとき} \\ 3 & \mathrm{u}\ \text{のこの数が 4 のとき} \end{cases}$$

また、2-4 木のポテンシャルをそのすべてのノードのポテンシャルの和と定義する。分割の際には、4 つの子を持つノードがそれぞれ 2 つと 3 つの子を持つふたつのノードになる。すなわち、全体のポテンシャルは $3-1-0=2$ 小さくなる。併合の際には、それぞれふたつの子を持っていたふたつのノードが、3 つの子を持つ一つのノードになる。このとき、全体のポテンシャルは $2-0=2$ 小さくなる。よって、分割や併合の際には、ポテンシャルは 2 だけ小さくなる。

分割と併合以外では、葉を加えたり削除したりして、子の数が変わるノードの個数は定数である。ノードを追加するとき、ひとつのノードの子が 1 だけ増え、ポテンシャルは高々 3 増える。ノードを削除するとき、ひとつのノードの子が 1 だけ減り、ポテンシャルは高々 1 増える。また子を借りる処理にはふたつのノードが関連し、それらのポテンシャルは高々 1 だけ増える。

まとめると、分割・併合はポテンシャルを 2 以上減らす。分割と併合以外では、追加と削除はポテンシャルを高々 3 増やし、ポテンシャルは常に非負である。よって、空の木に対して m 回の追加と削除を実行するとき、分割・併合は合わせて高々 $3m/2$ 回だけ実行される。定理 9.2 はこの解析の帰結であり、2-4 木と赤黒木の間の対応を示している。

9.4 ディスカッションと練習問題

赤黒木は Guibas と Sedgewick[38] によってはじめに提案された。赤黒木は実装が非常に複雑であるにも関わらず、ライブラリやアプリで最も頻繁に使われるもののうちの一つである。ほとんどのアルゴリズムやデータ構造の本では何種類かの赤黒木を説明している。

Andersson [6] は左傾なバランスされた木であって、赤黒木に似ているが任意のノードは最大で一つの赤い子を持つという制約を加えたものを提案している。そのためこのデータ構造がシミュレートするのは、2-4 木ではなく 2-3

[*3] ポテンシャル法の他の例としては、補題 2.2・補題 3.1 の証明を参照せよ。

木である。しかし、このデータ構造はこの章で説明した RedBlackTree よりもかなり単純である。

Sedgewick [64] は二種類の左傾赤黒木を提案している。これらのデータ構造では、2-4 木における上から下方向への分割・併合のシミュレーションに加えて、再帰を使っている。こうすると、プログラムが短くエレガントになる。

関連するより古いデータ構造としては AVL **木** [3] がある。AVL 木は次の height-balanced 性を満たす木である。任意のノード u について、u.left を根とする部分木の高さと、u.right を根とする部分木の高さとの差は、高々 1 である。$F(h)$ を高さ h である木のうち、葉が最も少ないものの葉の数とするとき、$F(h)$ は次のフィボナッチの漸化式を満たす。

$$F(h) = F(h-1) + F(h-2)$$

ただし $F(0) = 1, F(1) = 1$ である。ここで**黄金比** $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.61803399$ とするとき、$F(h)$ は近似的に $\varphi^h/\sqrt{5}$ である。（より正確には $|\varphi^h/\sqrt{5} - F(h)| \leq 1/2$ である。）補題 9.1 の証明で述べたように、これは式を含意する。

$$h \leq \log_\varphi \mathtt{n} \approx 1.440420088 \log \mathtt{n}$$

よって、AVL 木の高さは赤黒木の高さよりも低い。add(x)・remove(x) の際、根に向かって戻り、通過する各ノード u について、u の左右の部分木の高さが 2 以上異なるときバランスの再調整を行うことで高さのバランスを保つ。図 9.10 を参照せよ。

Andersson のものや Sedgewick のもの、AVL 木のいずれも RedBlackTree よりも実装は単純である。しかし、いずれもバランスの再調整のための償却実行時間が $O(1)$ であることを保証できない。特に定理 9.2 のような保証はない。

問 **9.1.** 図 9.11 の RedBlackTree に対応する 2-4 木を図示せよ。

問 **9.2.** 図 9.11 の RedBlackTree に 13, 3.5, 3.3 を順に追加する様子を図示せよ。

問 **9.3.** 図 9.11 の RedBlackTree から 11, 9, 5 を順に削除する様子を図示せよ。

問 **9.4.** どれだけ大きな n についても、n 個のノードを持ち、高さが $2\log \mathtt{n} - O(1)$ である赤黒木が存在することを示せ。

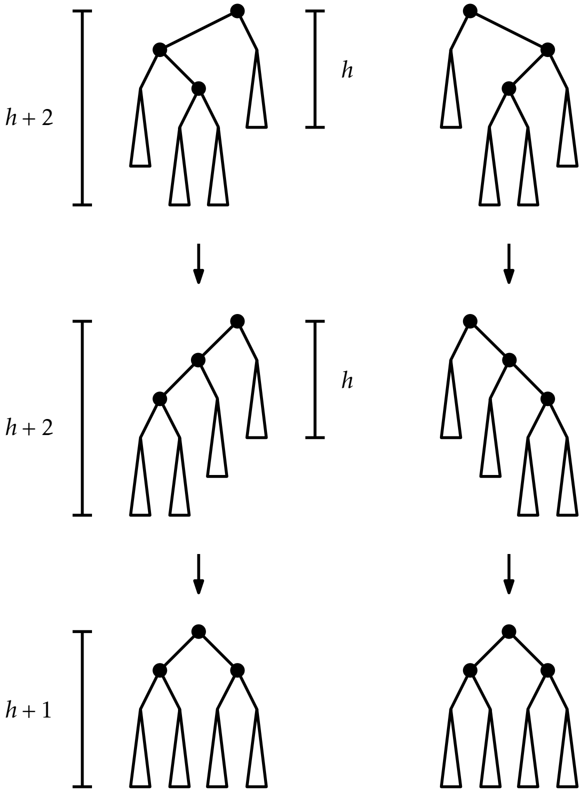


図 9.10: AVL 木におけるバランスの再調整の様子。その子の部分木の大きさが h と $h+2$ であるノードについて、いずれの子の部分木の高さも $h+1$ とする際に必要な回転は高々 2 回である。

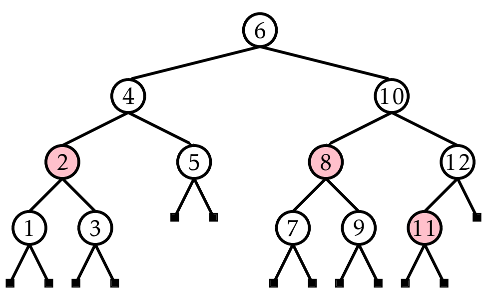


図 9.11: 練習問題のための赤黒木

問 **9.5.** 操作 pushBlack(u)・pullBlack(u) を考える。これらの操作は赤黒木によって表現されている 2-4 木に対して何を行うか。

問 **9.6.** どれだけ大きな n についても、どれだけ大きな n についても、n 個のノードを持ち、高さが $2\log n - O(1)$ である赤黒木を校正する add(x)・remove(x) からなる操作の列が存在することを示せ。

問 **9.7.** RedBlackTree の実装における remove(x) で u.parent = w.parent とするのはなぜか説明せよ。これは splice(w) において既に行われているはずではないか。

問 **9.8.** 2-4 木 T は n_ℓ 個の葉と n_i 個の内部ノードを持つとする。

1. n_ℓ が与えられたとき、n_i の最小値を求めよ。
2. n_ℓ が与えられたとき、n_i の最大値を求めよ。
3. T を表現する赤黒木を T' とすると、T' の持つ赤いノードの個数を求めよ。

問 **9.9.** n 個のノードを持ち、高さが $2\log n - 2$ 以下の二分探索木があるとする。このとき、この木のすべてのノードを、黒の高さの性質と赤の辺の性質をいずれも満たすように、赤または黒に塗ることはできるか。もしそうならそれに加えて左傾性を満たすことはできるか。

問 **9.10.** 赤黒木 T_1, T_2 は黒の高さがいずれも h であり、T_1 の最大のキーは T_2 の最小のキーよりも小さいものであるとする。このとき、$O(h)$ の時間で T_1 と T_2 を一つの赤黒木に併合する方法を示せ。

問 **9.11.** 問 9.10 の解法を拡張し、T_1, T_2 の黒い高さ h_1, h_2 が異なるとき、すなわち $h_1 \neq h_2$ であるときにも適用可能にせよ。ただし、実行時間は $O(\max\{h_1, h_2\})$ とする。

問 **9.12.** AVL 木における add(x) の間に、最大で一度だけバランスの再調整操作を実行しなければならないことを証明せよ。（このとき最大二度の回転を実行することになる。図 9.10 を参照せよ。）また、remove(x) 操作の際にオーダーで $\log n$ だけのバランスの再調整操作が必要な AVL 木の例を挙げよ。

問 **9.13.** 上で説明した AVL 木の実装である AVLTree クラスを作成せよ。この性能と RedBlackTree の性能とを比較せよ。find(x) が高速に行えるのはどちらの実装か。

問 **9.14.** SSet の実装である SkiplistSSet・ScapegoatTree・Treap・RedBlackTree における find(x)・add(x)・remove(x) の相対的な性能を評価する一連の実験を設計・実装せよ。なお、ランダムなデータや整列済みのデータ、ランダム・規則正しい順序での削除などを含む、多くのテストのシナリオを作ること。

第 10 章 ヒープ

この章では優先度付きキューという役に立つデータ構造のふたつの実装を説明する。いずれも特殊な二分木であり、**ヒープ**（雑多に積まれた山）と呼ばれている。これは二分探索木が高度に構造化されながら積み上げられていたのとは対照的である。

ひとつめのヒープの実装は配列を使って完全二分木をシミュレートする。この効率的な実装はヒープソート（11.1.3 節参照）という名の、最速の整列アルゴリズムのうちのひとつを実装するのに使える。ふたつめに紹介する実装は、より柔軟な二分木である。この実装では、ある優先度付きキューの要素を、別の優先度付きキューに取り込む `meld(h)` 操作を行うことができる。

10.1 BinaryHeap：非明示的な二分木

（優先度付き）キューの最初の実装は 400 年以上前に発見された手法に基づく。**Eytzinger 法**では木のノードを幅優先順に配列に入れて完全二分木を表現する。（6.1.2 節を参照せよ。）こうすると、根は 0 番目、根の左の子は 1 番目、右の子は 2 番目、根の左の子の左の子は 3 番目の位置に格納される。図 10.1 を参照せよ。

Eytzinger 法を大きな木に適用してみると、規則性が見えてくる。添え字 i のノードの左の子の添え字は $\mathtt{left}(i) = 2i + 1$ であり、右の子の添え字は $\mathtt{right}(i) = 2i + 2$ である。また、添え字 i のノードの親の添え字は $\mathtt{parent}(i) = (i - 1)/2$ である。

BinaryHeap
```
int left(int i) {
```

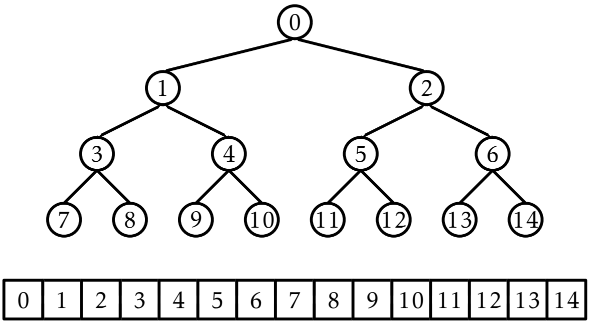


図 10.1: Eytzinger 法により、配列を使って完全二分木を表現する。

```
  return 2*i + 1;
}
int right(int i) {
  return 2*i + 2;
}
int parent(int i) {
  return (i-1)/2;
}
```

BinaryHeap はこの手法を使って完全二分木を非明示的に表現する。特に、この木の中では要素は**ヒープ順**に並んでいる。すなわち、添え字 i の位置に格納されている値は、parent(i) に格納されている値以上である。(ただし、i = 0 である根は除く。) このとき、優先度付き Queue における最小値が 0 番目の位置（根）に格納されていることがわかる。

BinaryHeap では n 個の要素が配列 a に格納されている。

BinaryHeap
```
array<T> a;
int n;
```

add(x) の実装は簡単である。他の配列ベースのデータ構造と同じく、まずは a が一杯かどうかを確認する。(a.length = n かどうかを確認する。) もしそうなら a を拡張する。続いて x を a[n] に入れ、n を 1 増やす。あとはヒー

プ性（要素がヒープ順に並んでいること）を保てばよい。これは x とその親とを交換する操作を、x が親以上になるまで繰り返せばよい。図 10.2 を参照せよ。

BinaryHeap
```
bool add(T x) {
  if (n + 1 > a.length) resize();
  a[n++] = x;
  bubbleUp(n-1);
  return true;
}
void bubbleUp(int i) {
  int p = parent(i);
  while (i > 0 && compare(a[i], a[p]) < 0) {
    a.swap(i,p);
    i = p;
    p = parent(i);
  }
}
```

remove() はヒープから最小の値を削除するが、この実装にはすこし工夫が必要だ。根が最小値なのはわかっているが、これを削除したあとにもヒープ性が成り立つことを保証しなければならない。

もっとも簡単な方法は根と $a[n-1]$ を交換し、交換後に $a[n-1]$ にある値を削除し、n を 1 小さくすることだ。しかし、その結果新たな根はおそらく最小値ではなくなっている。そのためこれを下方向に動かす必要がある。このため、この要素を子供と比較することを繰り返す。もしこの要素が三つ（自分と子供達）のうち最小ならば処理を終了する。そうでないなら、子供達のうち小さいものと、この要素とを入れ替え、処理を繰り返す。

BinaryHeap
```
T remove() {
  T x = a[0];
  a[0] = a[--n];
  trickleDown(0);
```

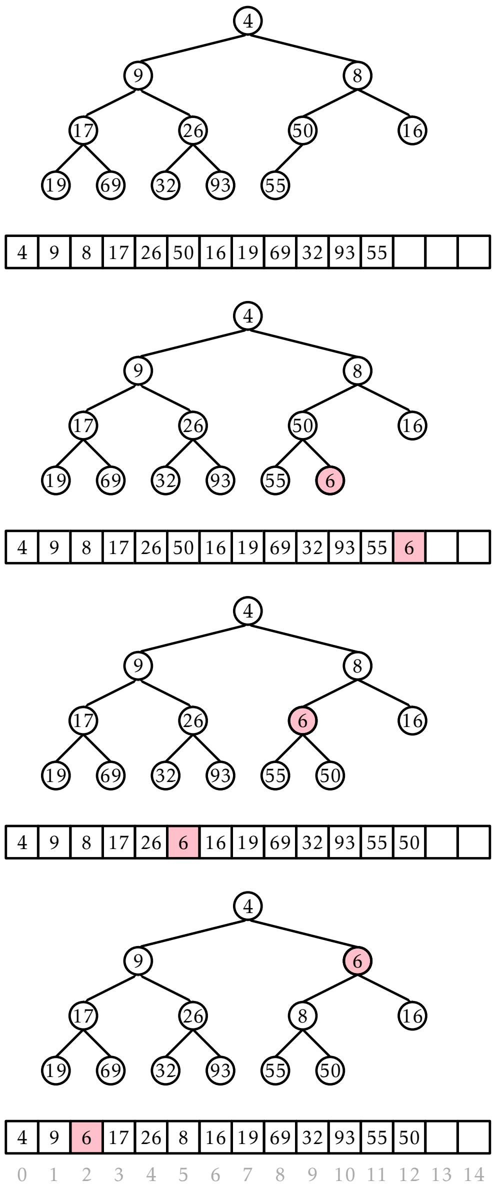


図 10.2: BinaryHeap に値 6 を追加する。

```
  if (3*n < a.length) resize();
  return x;
}
void trickleDown(int i) {
  do {
    int j = -1;
    int r = right(i);
    if (r < n && compare(a[r], a[i]) < 0) {
      int l = left(i);
      if (compare(a[l], a[r]) < 0) {
        j = l;
      } else {
        j = r;
      }
    } else {
      int l = left(i);
      if (l < n && compare(a[l], a[i]) < 0) {
        j = l;
      }
    }
    if (j >= 0)  a.swap(i, j);
    i = j;
  } while (i >= 0);
}
```

他の配列ベースのデータ構造と同様に、resize() のための時間を無視する。この実行時間は補題 2.1 の償却解析によってわかる。すると、add(x)・remove() の実行時間は（非明示の）二分木の高さに依存する。嬉しいことに、これは**完全**二分木である。最大の深さを除く各深さには、可能な最大数のノードがある。 よって、h を木の高さとすると、少なくとも 2^h 個のノードがある。言い換えると、次の式が成り立つ。

$$\mathtt{n} \geq 2^h$$

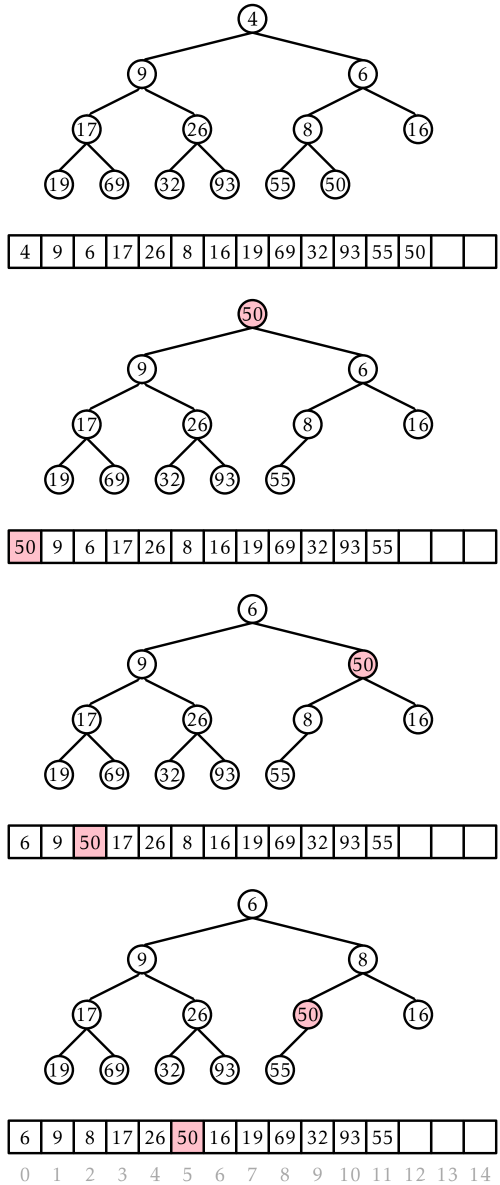


図 10.3: `BinaryHeap` から最小の値 4 を削除する。

両辺の対数を取ると、次の式が成り立つ。

$$h \leq \log \mathtt{n}$$

以上より、add(x)・remove() のいずれの実行時間も $O(\log \mathtt{n})$ である。

10.1.1 要約

次の定理は BinaryHeap の性能をまとめたものだ。

定理 10.1. *BinaryHeap* は（優先度付き）*Queue* インターフェースの実装である。*BinaryHeap* は add(x)・remove() をサポートし、resize() のコストを無視すると、いずれの実行時間も $O(\log \mathtt{n})$ である。

空の *BinaryHeap* から任意の m 個の add(x)・remove() からなる操作の列を実行する。このときすべての resize() にかかる時間の合計は $O(m)$ である。

10.2 MeldableHeap：ランダムな Meldable ヒープ

XXX: melbadle は定訳がある?

この節では、MeldableHeap を紹介する。これは優先度付き Queue の実装で、背後にある構造もまたヒープであるものである。しかし、BinaryHeap のようには要素数から二分木の形が一意には決まらず、MeldableHeap における背後にある二分木の形状には制約がない。

MeldableHeap における add(x)・remove() は merge(h1,h2) を使って実装される。この操作はヒープのノード h1 と h2 を引数にとり、それぞれを根とするふたつの部分木内のすべてのノードを含むヒープの根を返す。

嬉しいことに merge(h1,h2) は再帰的に定義できる。図 10.4 を参照せよ。h1 または h2 が nil なら、単に h2, h1 をそれぞれ返せばよい。そうでないとき、h1.x ≤ h2.x として一般性を失わない。このとき新たなヒープの根は h1.x を含む。h2 は再帰的に h1.left か h1.right の望む方と併合してよい。ここでランダム性の出番だ。コインを投げ、h を h1.left と h1.right のどちらと併合するかを決める。

MeldableHeap
```
Node* merge(Node *h1, Node *h2) {
  if (h1 == nil) return h2;
  if (h2 == nil) return h1;
```

```
  if (compare(h1->x, h2->x) > 0) return merge(h2, h1);
        // now we know h1->x <= h2->x
  if (rand() % 2) {
    h1->left = merge(h1->left, h2);
    if (h1->left != nil) h1->left->parent = h1;
  } else {
    h1->right = merge(h1->right, h2);
    if (h1->right != nil) h1->right->parent = h1;
  }
  return h1;
}
```

次の節では merge(h1,h2) の実行時間の期待値が $O(\log n)$ であることを示す。ここで、n は h1 と h2 の要素数の合計である。

merge(h1,h2) を使えば、add(x) は簡単である。x を含む新たなノード u を作り、u をヒープの根と併合すればよい。

MeldableHeap
```
bool add(T x) {
  Node *u = new Node();
  u->left = u->right = u->parent = nil;
  u->x = x;
  r = merge(u, r);
  r->parent = nil;
  n++;
  return true;
}
```

このとき実行時間の期待値は $O(\log(n+1)) = O(\log n)$ である。

remove() も同様に簡単である。削除したいのは根なので、そのふたつの子を併合し、その結果を新たな根とすればよい。

MeldableHeap
```
T remove() {
  T x = r->x;
```

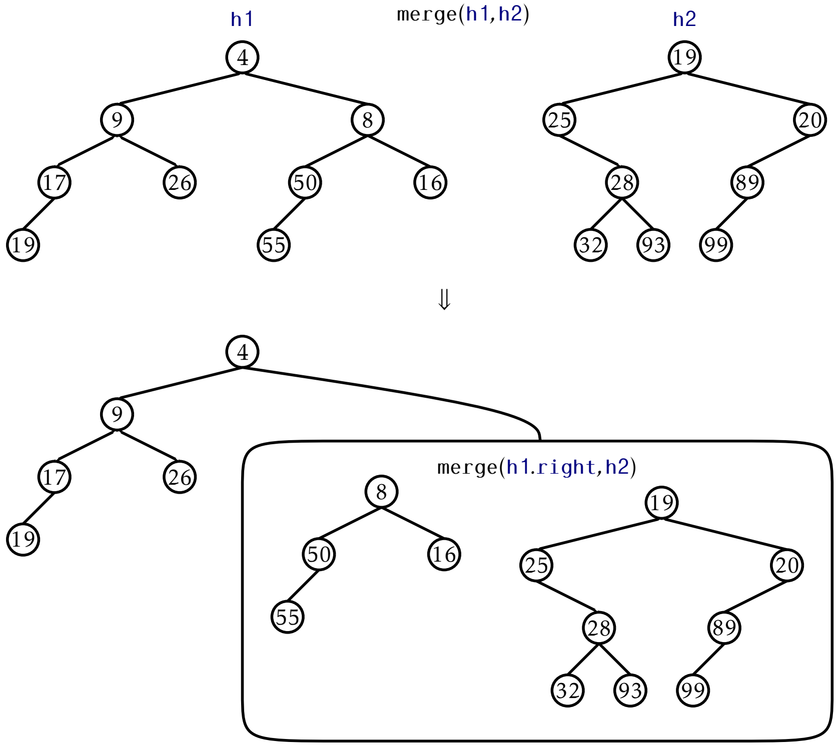


図 10.4: h1 と h2 を併合するために、h1.left または h1.right のいずれかに h2 を併合する。

```
  Node *tmp = r;
  r = merge(r->left, r->right);
  delete tmp;
  if (r != nil) r->parent = nil;
  n--;
  return x;
}
```

このときも実行時間の期待値は $O(\log n)$ である。

さらに MeldableHeap は他の色々な操作も $O(\log n)$ の期待実行時間で実装できる。例えば次のものがある。

- `remove(u)`：ヒープからノード u を削除する
- `absorb(h)`：このヒープに h の要素をすべて追加し、h を空にする

いずれの操作も定数回だけの `merge(h1,h2)` を使って実装できる。

10.2.1 `merge(h1,h2)` の解析

`merge(h1,h2)` の解析は二分木のランダムウォークに基づく。二分木の**ランダムウォーク**は根から始まる。各ステップではコインを投げ、その結果に応じて今のノードの右か左の子に進む。木からはみ出ると処理を終了する。（これは今のノードが `nil` になったときである。）

次の補題は注目に値する。これは二分木の形状に関わらず成り立つためである。

補題 10.1. n 個のノードからなる二分木におけるランダムウォークの長さの期待値は $\log(n+1)$ 以下である。

証明. n に関する帰納法により証明する。$n = 0$ のとき、ステップ数は $0 = \log(n+1)$ である。以下では、任意の非負整数 $n' < n$ について、示したい補題が成り立つと仮定する。

n_1 を根の左の部分木の大きさとし、$n_2 = n - n_1 - 1$ を根の右の部分木の大きさとする。根からはじめて、一歩進み、大きさ n_1 または n_2 の部分木について処理を続ける。仮定より、ステップ数の期待値は次のようになる。

$$\mathrm{E}[W] = 1 + \frac{1}{2}\log(n_1+1) + \frac{1}{2}\log(n_2+1)$$

これは n_1 と n_2 はいずれも n より小さいためである。log は凹関数（上に凸な関数）なので、$\mathrm{E}[W]$ は $n_1 = n_2 = (n-1)/2$ で最大値を取る。よって、ランダムウォークのステップ数の期待値は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[W] &= 1 + \frac{1}{2}\log(n_1+1) + \frac{1}{2}\log(n_2+1) \\
&\le 1 + \log((n-1)/2+1) \\
&= 1 + \log((n+1)/2) \\
&= \log(n+1)
\end{aligned}$$

□

余談だが、情報理論について知っている読者は補題 10.1 の証明をエントロピーの用語で言い換えることができるだろう。

補題 *10.1* の情報理論的な証明. d_i を i 番目の外部ノード (nil) の深さとする。n 個のノードを持つ二分木は $n+1$ 個の外部ノードを持つことを思い出そう。ランダムウォークが i 番目の外部ノードにたどり着く確率は $p_i = 1/2^{d_i}$ である。よってランダムウォークのステップ数の期待値は次のように計算できる。

$$H = \sum_{i=0}^{n} p_i d_i = \sum_{i=0}^{n} p_i \log\left(2^{d_i}\right) = \sum_{i=0}^{n} p_i \log(1/p_i)$$

右辺は $n+1$ 個の要素に渡って確率分布のエントロピーを求めたものだとわかるだろう。$n+1$ 個の要素にわたる分布のエントロピーに関する基本的な事実として、これはこの値は $\log(n+1)$ を超えない。よって補題が示された。 □

ランダムウォークに関するこの結果より、merge(h1,h2) の実行時間の期待値は $O(\log n)$ であることを示せる。

補題 **10.2.** h1・h2 はふたつのヒープの根であり、それぞれのヒープは n_1, n_2 個のノードを含むとする。このとき、merge(h1,h2) の実行時間は $O(\log n)$ 以下である。ただし、ここで $n = n_1 + n_2$ である。

証明. merge の各ステップはランダムウォークを 1 ステップで、h1 か h2 のいずれかを根とする部分木に進む。このアルゴリズムはふたつのランダムウォークのどちらかが木からはみ出すと終了する。（これは h1 = null または h2 = null のときである。）よって、併合アルゴリズムのステップ数の期待値は次の値以下である。

$$\log(n_1+1) + \log(n_2+1) \le 2\log n$$ □

10.2.2 要約

次の定理は MeldableHeap をまとめるものである。

定理 **10.2.** *MeldableHeap* は優先度付き *Queue* インターフェースを実装する。add(x)・remove() をサポートし、いずれの実行時間の期待値も $O(\log n)$ である。

10.3 ディスカッションと練習問題

完全二分木を配列またはリストを使って非明示的に表現する方法は Eytzinger [27] が最初に提案したようである。彼は貴族の家系図が書いてある本でこれを使った。この章で説明した BinaryHeap は Williams [76] が最初に提案したものである。

この章で説明したランダム操作を利用した MeldableHeap は Gambin と Malinowski [34] が最初に提案した。他の Meldable Heap も存在し、leftist heaps [16, 48, Section 5.3.2]、binomial heaps [73]、Fibonacci heaps [30]、pairing heaps [29]、skew heaps [70] などがある。しかし、いずれも MeldableHeap ほどシンプルではない。

上のデータ構造の中には decreaseKey(u, y) をサポートするものもある。これはノード u に格納される値を小さくして y とするものである。（これを実行する前には $y \le u.x$ である必要がある。）上に挙げたデータ構造の大部分では、ノード u を削除し、y を追加するので $O(\log n)$ の時間がかかる。しかし、一部のデータ構造ではこれをもっと効率的に実装できる。とくに、Fibonacci heaps では $O(1)$ の償却実行時間で、pairing heaps [25] の特殊なものでは $O(\log\log n)$ の償却実行時間でそれぞれ decreaseKey(u, y) を実行できる。効率的な decreaseKey(u, y) はグラフアルゴリズムの高速化に役立つ。（例えばダイクストラ法）[30]

問 **10.1.** 図 10.2 に示した BinaryHeap に 7, 3 を順に追加する様子を図示せよ。

問 **10.2.** 図 10.3 に示した BinaryHeap から次のふたつの値（6 と 8）を順に削除する様子を図示せよ。

問 **10.3.** remove(i) を実装せよ。これは BinaryHeap における a[i] の値を削除するメソッドである。このメソッドの実行時間は $O(\log n)$ でなければならない。また、なぜこのメソッドが役立ちそうにないかを説明せよ。

問 **10.4.** d 分木は二分木の一般化である。これは各内部ノードが d 個の子を持つ木である。Eytzinger の方法を使えば、完全 d 分木も配列を使って表現できる。すなわち、添え字 i が与えられたとき、i の親と、i の d 個の子、それぞれの添え字を計算する方法を与えよ。

問 **10.5.** 問 10.4 で学んだことを使って DaryHeap を設計・実装せよ。これは d 分木版の BinaryHeap である。DaryHeap の操作の実行時間を解析し、

DaryHeap の性能を BinaryHeap と比較せよ。

問 **10.6.** 図 10.4 に示した MeldableHeap に 17, 82 を順に追加する様子を図示せよ。ランダムなビットが必要なときにはコインを使うこと。

問 **10.7.** 図 10.4 に示した MeldableHeap から、次のふたつの値（4 と 8）を削除せよ。ランダムなビットが必要なときにはコインを使うこと。

問 **10.8.** MeldableHeap からノード u を削除する remove(u) を実装せよ。ただし、このメソッドの実行時間の期待値は $O(\log n)$ でなければならない。

問 **10.9.** BinaryHeap・MeldableHeap における二番目に小さい値を定数時間で見つける方法を示せ。

問 **10.10.** BinaryHeap・MeldableHeap における k 番目に小さい値を $O(k\log k)$ の時間で見つける方法を示せ。（ヒント：別のヒープを使うといいかもしれない。）

問 **10.11.** k 個の整列済みリストであって、合計の長さが n であるものがあるとき、ヒープを使ってこれらのリストを一つの整列済みリストにする方法を示せ。このとき実行時間は $O(n\log k)$ でなければならない。（ヒント：$k = 2$ の場合から考えてみるのがよいかもしれない。）

第 11 章

整列アルゴリズム

この章では $\mathtt{n}$ 個の要素の集合を整列するアルゴリズムを紹介する。データ構造の教科書にこの題材が入っているのは変に思うかもしれないが、これにはいくつか理由がある。例えばここで紹介する整列アルゴリズム（クイックソートとヒープソート）はこれまでに学んだデータ構造（ランダム二分探索木とヒープ）と深い関係がある。

11.1 節では比較だけを使った整列アルゴリズムであって、実行時間が $O(\mathtt{n}\log\mathtt{n})$ であるものを 3 つ紹介する。またこれらの 3 つはいずれも漸近的に最適であることも示す。つまり比較だけを使うアルゴリズムでは、最悪実行時間にせよ平均実行時間にせよ、最低でも $\mathtt{n}\log\mathtt{n}$ 回程度の比較が必要なのである。

ここで、これまでの章で説明した、整列済みの集合 SSet や優先度付き Queue の実装はいずれも $O(\mathtt{n}\log\mathtt{n})$ の時間で整列アルゴリズムを実装するのに使えることを注意しておく。例えば $\mathtt{n}$ 個の要素を、BinaryHeap または MeldableHeap における $\mathtt{n}$ 回の add($\mathtt{x}$) に続く $\mathtt{n}$ 回の remove() 操作で整列できる。あるいは、二分探索木のどれかに $\mathtt{n}$ 回の add($\mathtt{x}$) を実行し、そのあと行きがけ順（問 6.8）で要素を整列された順に取り出すことができる。しかしいずれの場合も完全に活用するわけでないデータ構造を構築するための無駄がかなり生じる。 整列は重要な問題なので、可能な限り速く、単純で、省メモリな手法を開発する価値がある。

この章の後半では比較以外の操作も使える場合には話が変わることを見ていく。実際に配列のランダムアクセスを使って、$\{0,\ldots,\mathtt{n}^c-1\}$ の要素である $\mathtt{n}$ 個の整数の整列を $O(c\mathtt{n})$ の時間で実行できることを説明する。

11.1 比較に基づく整列

この節では 3 つの整列アルゴリズム、マージソート・クイックソート・ヒープソートを紹介する。いずれも配列 a を入力すると、 $O(n\log n)$ の（期待）実行時間で a の要素を昇順に整列する。どれも**比較に基づく**アルゴリズムである。 整列するデータの型はなんでもよい。ただ、データの比較のための compare(a,b) メソッドを持っていなければならない。1.2.4 節でも説明したが、compare(a,b) は、$a < b$ なら負の値を、$a > b$ なら正の値を、$a = b$ ならゼロを返す。

11.1.1 マージソート

マージソートは再帰的な分割統治法の古典的な例である。配列 a の長さが 1 以下なら、a は既に整列されており、なにもする必要はない。そうでなければ、配列 a を半分ずつ配列 $a0 = a[0],\ldots,a[n/2-1]$ と配列 $a1 = a[n/2],\ldots,a[n-1]$ に分ける。再帰的に a0 と a1 を整列し、そして（整列済みの）a0 と a1 とを併合し、完全に整列された配列 a を得る [*1]。

Algorithms
```
void mergeSort(array<T> &a) {
  if (a.length <= 1) return;
  array<T> a0(0);
  array<T>::copyOfRange(a0, a, 0, a.length/2);
  array<T> a1(0);
  array<T>::copyOfRange(a1, a, a.length/2, a.length);
  mergeSort(a0);
  mergeSort(a1);
  merge(a0, a1, a);
}
```

図 11.1 に例を示した。

[*1] 訳注：Java の Arrays.copyOfRange(T[] original, int from, int to) メソッドは、to をコピー対象として含まないことに注意。そのため擬似コードでは a.length/2 が from と to で一度ずつ用いられている。

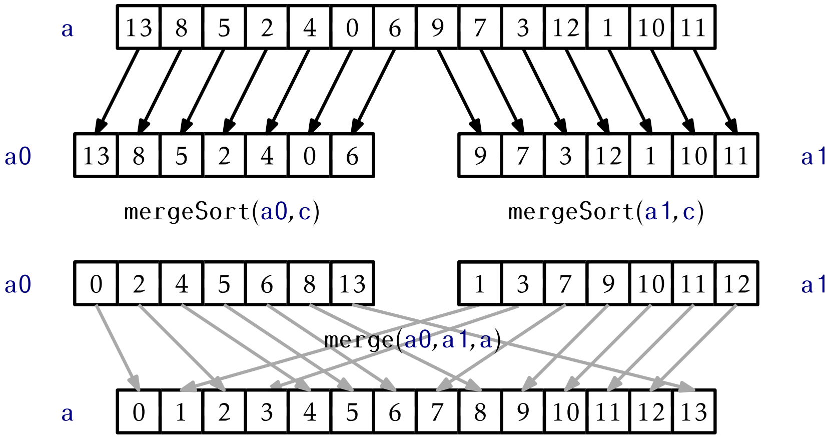


図 11.1: mergeSort(a,c) を実行する様子

整列と比べて、a0 と a1 を併合するのは簡単である。a に要素を一つずつ加えていく。もし a0 か a1 が空になれば、空でない方の配列の残りの要素をすべて a に加える。そうでなければ、a0 の次の要素と a1 の次の要素のうち、小さい方を a に加える。

Algorithms
```
void merge(array<T> &a0, array<T> &a1, array<T> &a) {
  int i0 = 0, i1 = 0;
  for (int i = 0; i < a.length; i++) {
    if (i0 == a0.length)
      a[i] = a1[i1++];
    else if (i1 == a1.length)
      a[i] = a0[i0++];
    else if (compare(a0[i0], a1[i1]) < 0)
      a[i] = a0[i0++];
    else
      a[i] = a1[i1++];
  }
}
```

merge(a0,a1,a,c) では a0 または a1 が空になる前に最大で $n-1$ 回の比較を行う。

マージソートの実行時間を求めるためには図 11.2 に示したような再帰木で考えるのがよい。n が 2 の冪乗であると仮定する。すなわち、$n = 2^{\log n}$ であり、$\log n$ は整数である。マージソートは n 個の要素の整列問題を、2 つの「n/2 個の要素の並び替え問題」に変換する。次に、これらの部分問題はそれぞれふたつの問題に変換され、4 つの「n/4 個の要素の並び替え問題」になる。そして、この 4 つの部分問題は 8 つの「大きさ n/8 の問題」になる。このようなことを繰り返す。最終ステップでは、n/2 個の「大きさ 2 の部分問題」が、n 個の「大きさ 1 の問題」に変換される。大きさ $n/2^i$ の問題を解く際に、既に解かれた 2 つの部分問題の解答をマージしながらコピーするのにかかる時間は $O(n/2^i)$ である。2^i 個の大きさ $n/2^i$ の問題があるので、大きさ 2^i の問題のために必要な時間の合計は次のようになる。（これはまだ再帰的には数えていないことに注意する。）

$$2^i \times O(n/2^i) = O(n)$$

よって、マージソートに必要な時間の合計は次のようになる。

$$\sum_{i=0}^{\log n} O(n) = O(n \log n)$$

次の定理の証明は以上の解析に基づくが、n が 2 の冪乗でない場合を扱うためもう少し注意することがある。

定理 **11.1.** *mergeSort(a)* の実行時間は $O(n \log n)$ であり、最大で $n \log n$ 回の比較を行う。

証明. n についての帰納法により証明する。$n = 1$ の場合は自明である。配列の長さが 0 または 1 のときには単に配列を返すだけで、比較を行わない。

長さの合計が n であるふたつのリストを併合するとき、最大で $n-1$ 回の比較が必要である。$C(n)$ を長さ n の配列 a に対して mergeSort(a,c) を実行するときに必要な比較の最大値とする。n が偶数なら、それぞれの部分問題に対して帰納法の仮定を適用し、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
C(n) &\le n - 1 + 2C(n/2) \\
&\le n - 1 + 2((n/2)\log(n/2)) \\
&= n - 1 + n\log(n/2)
\end{aligned}$$

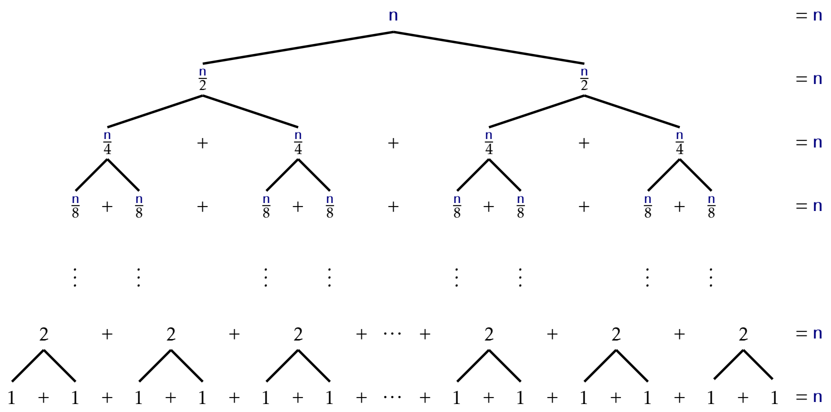


図 11.2: マージソートの再帰木

$$
\begin{aligned}
&= \mathsf{n} - 1 + \mathsf{n}\log \mathsf{n} - \mathsf{n} \\
&< \mathsf{n}\log \mathsf{n}
\end{aligned}
$$

n が奇数のときはもう少し複雑である。この場合ふたつの簡単に確認できる不等式を使う。任意の $x \geq 1$ について次の式が成り立つ。

$$\log(x+1) \leq \log(x) + 1 \tag{11.1}$$

また、任意の $x \geq 1/2$ について次の式が成り立つ。

$$\log(x+1/2) + \log(x-1/2) \leq 2\log(x) \tag{11.2}$$

不等式 (11.1) は $\log(x) + 1 = \log(2x)$ が成り立つことによる。不等式 (11.2) は log が凹関数（上に凸な関数）であるであることによる。これを利用して、奇数 n について次の式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
C(\mathsf{n}) &\leq \mathsf{n} - 1 + C(\lceil \mathsf{n}/2 \rceil) + C(\lfloor \mathsf{n}/2 \rfloor) \\
&\leq \mathsf{n} - 1 + \lceil \mathsf{n}/2 \rceil \log\lceil \mathsf{n}/2 \rceil + \lfloor \mathsf{n}/2 \rfloor \log\lfloor \mathsf{n}/2 \rfloor \\
&= \mathsf{n} - 1 + (\mathsf{n}/2 + 1/2)\log(\mathsf{n}/2 + 1/2) + (\mathsf{n}/2 - 1/2)\log(\mathsf{n}/2 - 1/2) \\
&\leq \mathsf{n} - 1 + \mathsf{n}\log(\mathsf{n}/2) + (1/2)(\log(\mathsf{n}/2 + 1/2) - \log(\mathsf{n}/2 - 1/2)) \\
&\leq \mathsf{n} - 1 + \mathsf{n}\log(\mathsf{n}/2) + 1/2 \\
&< \mathsf{n} + \mathsf{n}\log(\mathsf{n}/2) \\
&= \mathsf{n} + \mathsf{n}(\log \mathsf{n} - 1)
\end{aligned}
$$

$$= n \log n \qquad \square$$

11.1.2 クイックソート

クイックソートも古典的な分割統治アルゴリズムの一つである。ふたつの部分問題を解いてから結果を併合するマージソートとは違い、クイックソートはもっと直接的に仕事を行う。

クイックソートの説明は単純である。a からランダムに**軸**となる要素 x を選ぶ。a を x より小さい要素、x と同じ要素、x より大きい要素に分割する。そして、一つめと三つめの分割を再帰的に整列する。図 11.3 に例を示した。

Algorithms
```
void quickSort(array<T> &a) {
  quickSort(a, 0, a.length);
}
void quickSort(array<T> &a, int i, int n) {
  if (n <= 1) return;
  T x = a[i + rand()%n];
  int p = i-1, j = i, q = i+n;
  // a[i..p]<x,  a[p+1..q-1]??x, a[q..i+n-1]>x
  while (j < q) {
    int comp = compare(a[j], x);
    if (comp < 0) {        // move to beginning of array
      a.swap(j++, ++p);
    } else if (comp > 0) {
      a.swap(j, --q);  // move to end of array
    } else {
      j++;               // keep in the middle
    }
  }
  // a[i..p]<x,  a[p+1..q-1]=x, a[q..i+n-1]>x
  quickSort(a, i, p-i+1);
  quickSort(a, q, n-(q-i));
```

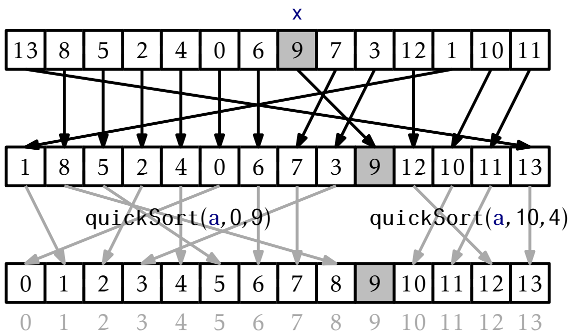


図 11.3: quickSort(a,0,14) の実行例

```
}
```

XXX: in-place の訳語

すべての処理は配列の部分的なコピーを取るのではなく in-place [*2] で実行され、quickSort(a,i,n,c) は $a[i],\ldots,a[i+n-1]$ を整列する。最初にこのメソッドを quickSort(a,0,a.length,c) と呼び出す。

クイックソートアルゴリズムの肝は、in-place で分割を行うことである。このアルゴリズムは余分な領域を使わず a の要素を入れ替え、次のような添え字 p と q を計算する。

$$
a[i]\begin{cases} < x & \text{if } 0 \le i \le p \\ = x & \text{if } p < i < q \\ > x & \text{if } q \le i \le n-1 \end{cases}
$$

この分割処理は while ループの中で、p を増やし、q を減らし、上の制約を保ちながら繰り返し実行される。各ステップで j 番目の位置にある要素は前に動くか、その場に留まるか、後ろに動く。初めのふたつの場合は j を 1 増やし、最後の場合は j 番目の要素は未処理なので j は増やさない。

クイックソートは 7.1 節で学んだランダム二分探索木と深い関係がある。実は n 個の相異なる要素を入力すると、クイックソートの再帰木はランダム

[*2] 訳注：in-place とは、入力配列 a 以外にはどの時点においても定数個の変数しか使わない、ということを表す。「前掲のマージソートは」a 全体をコピーするような別の配列を必要としたため、in-place なアルゴリズムではない。ただし、マージソートを in-place に行う方法も存在する。

二分探索木なのである。これを確認するためには、ランダム二分探索木を作るとき、まずはランダムに要素 $\mathtt{x}$ を選び、これを根にしたことを思い出そう。続いて、各要素を $\mathtt{x}$ と比較し、最終的に小さい要素を左の部分木に、大きい要素を右の部分木としたのだった。

クイックソートではランダムに要素 $\mathtt{x}$ を選び、直ちに全要素 $\mathtt{x}$ と比較し、小さい要素を配列の前方に、大きい要素を配列の後方に集める。続いて、再帰的に配列の前方・後方をそれぞれ整列する。一方、ランダム二分木では再帰的に小さい要素を左の部分木、大きい要素を右の部分木とすることを繰り返す。

ランダム二分木とクイックソートとの上の対応から、補題 7.1 をクイックソートの場合に置き換えて考えてみる。

補題 **11.1.** クイックソートは整数 $0,\ldots,\mathtt{n}-1$ を含む配列を整列するために呼ばれるとき、要素 $\mathtt{i}$ が軸と比較される回数の期待値は $H_{\mathtt{i}+1}+H_{\mathtt{n}-\mathtt{i}}$ 以下である。

調和数を計算するとクイックソートの実行時間に関する次の定理が得られる。

定理 **11.2.** $\mathtt{n}$ 個の相異なる要素をクイックソートで整列するとき、実行される比較の回数の期待値は $2\mathtt{n}\ln\mathtt{n}+O(\mathtt{n})$ 以下である。

証明*.* T を $\mathtt{n}$ 個の相異なる要素をクイックソートで整列するときに実行される比較の回数とする。補題 11.1 と期待値の線形性より次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[T] &= \sum_{i=0}^{\mathtt{n}-1}(H_{\mathtt{i}+1}+H_{\mathtt{n}-\mathtt{i}}) \\
&= 2\sum_{i=1}^{\mathtt{n}} H_i \\
&\le 2\sum_{i=1}^{\mathtt{n}} H_{\mathtt{n}} \\
&\le 2\mathtt{n}\ln\mathtt{n}+2\mathtt{n} = 2\mathtt{n}\ln\mathtt{n}+O(\mathtt{n})
\end{aligned}
$$
□

定理 11.3 は整列する要素が互いに異なる場合についてのものである。入力の配列 $\mathtt{a}$ が重複する要素を含むとき、クイックソートの実行時間の期待値は悪くはならず、むしろよくなることさえある。重複する要素 $\mathtt{x}$ が軸に選ばれると、$\mathtt{x}$ はまとめられ、ふたつの部分問題のいずれにも含まれないためである。

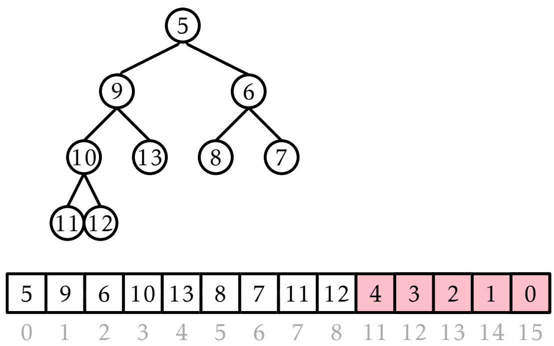


図 11.4: heapSort(a,c) の実行中のある瞬間の様子。色の付いている部分は既に整列済みの配列である。色の付いていない部分は BinaryHeap になっている。次の繰り返しでは、要素 5 が配列の位置 8 に移される。

定理 **11.3.** quickSort(a) の実行時間の期待値は $O(n\log n)$ である。また、実行される比較の回数の期待値は $2n\ln n + O(n)$ 以下である。

11.1.3 ヒープソート

XXX: in-place の訳語

ヒープソートも in-place で処理を行う整列アルゴリズムである。ヒープソートは 10.1 節で説明した二分ヒープを使う。BinaryHeap はひとつの配列を使ってヒープを表現していたことを思い出そう。ヒープソートは入力の配列をヒープに変換した後で、最小値を取り出すことを繰り返す。

具体的には、n 個の要素を配列 a に格納する。各要素は $a[0],\ldots,a[n-1]$ に入っており、最小値は根、すなわち $a[0]$ である。ヒープソートは次の操作を繰り返す。a を BinaryHeap に変換した後、$a[0]$ と $a[n-1]$ を入れ替え、n を 1 減らし、trickleDown(0) を呼んで $a[0],\ldots,a[n-2]$ を再度ヒープにする。$n = 0$ となってこの処理が終了すると、a の要素は降順に並んでいる。よって、a を逆順にすれば最終的な整列された状態になる。[*3] 図 11.4 は heapSort(a,c) の実行の様子を表している。

[*3] compare(x,y) を修正すれば、結果が直接昇順に並ぶようにすることもできる

BinaryHeap
```
void sort(array<T> &b) {
  BinaryHeap<T> h(b);
  while (h.n > 1) {
    h.a.swap(--h.n, 0);
    h.trickleDown(0);
  }
  b = h.a;
  b.reverse();
}
```

ヒープソートで肝となる処理のひとつは、未整列の配列 a からヒープを構築する、というものである。これを $O(n\log n)$ の時間で行うのは容易い。BinaryHeap の add(x) を繰り返し実行すればよい。しかし、ボトムアップなやり方を使うとより早い実行時間で達成できる。BinaryHeap において、a[i] の子は $a[2i+1]$ と $a[2i+2]$ に入っていることを思い出そう。そのため、$a[\lfloor n/2\rfloor],\ldots,a[n-1]$ は子を持っていない。別の言い方をすれば、$a[\lfloor n/2\rfloor],\ldots,a[n-1]$ は大きさ 1 の部分ヒープである。逆に考えると、$i\in\{\lfloor n/2\rfloor-1,\ldots,0\}$ に対して trickleDown(i) を呼べる。trickleDown(i) を呼ぶとき a[i] の子はいずれも部分ヒープの根なのでこれは可能で、trickleDown(i) を呼ぶと a[i] は次の部分ヒープの根になる。

BinaryHeap
```
BinaryHeap(array<T> &b) : a(0) {
  a = b;
  n = a.length;
  for (int i = n/2-1; i >= 0; i--) {
    trickleDown(i);
  }
}
```

興味深いことに、ボトムアップなやり方は add(x) を n 回実行するよりも効率的である。それを理解するためには、葉の位置に存在する $n/2$ 個の要素のためにはなにもする必要がなく、葉の親である $n/4$ 個の要素のためには a[i]

を根とする部分ヒープに対して trickleDown(i) を一度呼べばよく、n/8 個の要素のためには、この高さの部分ヒープに対して trickleDown(i) を二度呼べばよい… と言った流れに注目すればよい。trickleDown(i) によって実行される処理は a[i] を根とする部分ヒープの高さに比例するので、全体として必要な処理の量は高々次の値である。

$$\sum_{i=1}^{\log n} O((i-1)n/2^i) \le \sum_{i=1}^{\infty} O(in/2^i) = O(n)\sum_{i=1}^{\infty} i/2^i = O(2n) = O(n)$$

最後から二番目の等号は、期待値の定義より、$\sum_{i=1}^{\infty} i/2^i$ とコインを投げる（表が出る回も含む）回数が等しいことと、補題 4.2 から成り立つ。

次の定理は heapSort(a,c) の性能を説明する。

定理 **11.4.** heapSort(a,c) の実行時間は $O(n\log n)$ であり、このメソッドは最大 $2n\log n + O(n)$ の比較を実行する。

証明**.** このアルゴリズムには 3 つのステップがある。(1) a をヒープに変形し、(2) a の最小値を繰り返し取り出し、(3) a を逆順にする。ステップ 1 の実行時間は $O(n)$ で、$O(n)$ 回の比較を行う。ステップ 3 の実行時間は $O(n)$ で、比較は行わない。ステップ 2 では trickleDown(0) を n 回呼ぶ。i 番目の呼び出しは大きさ $n-i$ のヒープに対するもので、最大 $2\log(n-i)$ 回の比較を行う。i についての和を取ると次の値が得られる。

$$\sum_{i=0}^{n-i} 2\log(n-i) \le \sum_{i=0}^{n-i} 2\log n = 2n\log n$$

3 つのステップにおいて実行される比較の回数を足し合わせると、証明が完成する。 □

11.1.4 比較ベースの整列における下界

3 つの比較に基づく整列アルゴリズムの実行時間がいずれも $O(n\log n)$ であることを見てきた。ここで気になるのはもっと速いアルゴリズムがあるかどうかである。端的に答えるとこれは存在しない。a の要素に実行できる操作が比較だけなら、$n\log n$ 回程度の比較を必ずすることになるのである。これを示すのは難しくないが、そのためには想像力が必要だ。最終的にこれは次の事実から導かれる。

$$\log(n!) = \log n + \log(n-1) + \cdots + \log(1) = n\log n - O(n)$$

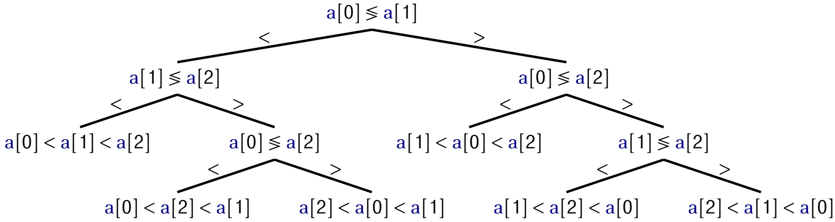


図 11.5: 長さ $n = 3$ の配列 $a[0], a[1], a[2]$ を整列するときの比較木

（この事実の証明を問 11.10 とした。）

まずは、マージソートやヒープソートのような決定的なアルゴリズムを、ある特定の値 n について実行した場合について考える。このようなアルゴリズムで n 個の相異なる要素を整列する場面を想像せよ。下界を示すために注目すべきは、n を固定すると決定的なアルゴリズムが最初に比較する要素は常に決まったペアであることである。例えば heapSort(a,c) では n が偶数なら最初に trickleDown(i) を呼ぶとき $i = n/2 - 1$ であり、最初に行われるのは $a[n/2 - 1]$ と $a[n - 1]$ との比較である。

入力は相異なるので最初の比較の結果は二通りである。二番目の比較は最初の比較の結果に依存して行われるかもしれない。三度目の比較は最初のふたつの比較の結果に依存するかもしれず、以降も同様である。こうして、任意の決定的な比較に基づく整列アルゴリズムを根付き二分**比較木**とみなせる。この木の各内部ノード u は添え字のペア $u.i$ と $u.j$ でラベル付けられている。$a[u.i] < a[u.j]$ ならアルゴリズムは左の部分木に進み、そうでないなら右の部分木に進む。この木の各葉 w は $0,\ldots,n-1$ のある置換 $w.p[0],\ldots,w.p[n-1]$ でラベル付けられている。この置換は比較木がこの葉に到達するとき a を整列するのに必要な比較を表現している。これは次のものである。

$$a[w.p[0]] < a[w.p[1]] < \cdots < a[w.p[n-1]]$$

大きさ $n = 3$ である配列の比較木の例を図 11.5 に示す。

整列アルゴリズムの比較木を見ることで、そのアルゴリズムのすべてがわかる。n 個の相異なる要素からなる任意の入力配列 a について必要な比較の列や、アルゴリズムが a を整列するためにどういう順で並べ替えを行うかがわかるのである。そのため比較木は少なくとも $n!$ 個の葉を持つ。もしそうでなければ、相異なる置換であって同じ葉に到達するものが存在してしまう。するとそのアルゴリズムは、同じ葉に到達する置換のうち少なくともどれか 1 つ

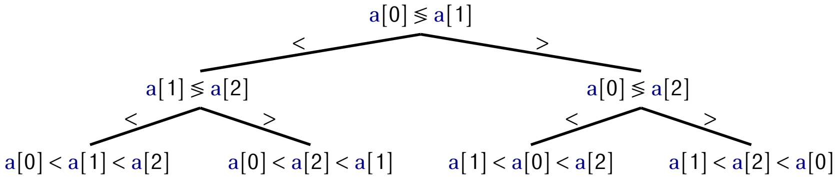


図 11.6: 正しく整列できない入力が存在する比較木

を正しく整列できないことになる。

例えば図 11.6 に示した比較木は $4 < 3! = 6$ 個の葉を持つ。この木を見ると、ふたつの入力 $3,1,2$ と $3,2,1$ はいずれも右端の葉に到達することがわかる。入力 $3,1,2$ は正しく $a[1] = 1, a[2] = 2, a[0] = 3$ を出力する。しかし入力 $3,2,1$ の出力は $a[1] = 2, a[2] = 1, a[0] = 3$ となり正しくない。この議論から比較に基づくアルゴリズムの本質的な下界が得られる。

定理 **11.5.** 比較に基づく任意の決定的な整列アルゴリズム $\mathcal{A}$ と、任意の整数 $n \geq 1$ について、ある長さ n の入力配列 a が存在し、$\mathcal{A}$ が a を整列するとき $\log(n!) = n\log n - O(n)$ 回の比較を実行する。

証明*.* これまでの議論から $\mathcal{A}$ の比較木は少なくとも $n!$ 個の葉を持つ必要がある。帰納法により簡単に k 個の葉を持つ二分木の高さが $\log k$ 以上であることを示せる。よって $\mathcal{A}$ の比較木には深さ $\log(n!)$ 以上の葉 w が存在し、ある入力配列 a が存在し、この葉に到達する。この a に対して $\mathcal{A}$ は $\log(n!)$ 回以上の比較を実行する。 □

定理 11.5 はマージソートやヒープソートなどの決定的なアルゴリズムに関するものであり、クイックソートのようなランダムなアルゴリズムに関してはなにもわからない。ランダム性を利用するアルゴリズムは比較回数の下界 $\log(n!)$ を打ち破れるのだろうか。これもやはりできないのである。これを示すには、ランダムなアルゴリズムについて違った視点から考えてみればよい。

XXX: decision tree の訳語

以下の議論では決定木は次の意味で「整理されてある」と仮定する。 どのような入力配列 a によっても到達できないノードは削除される。このとき木にはちょうど $n!$ 個だけの葉が含まれる。葉の数が $n!$ 以上なのは、そうでないと整列を正しく行えないからである。一方、葉の数が $n!$ 以下なのは、n 個の相異なる要素の置換は $n!$ 通りであり、それぞれが決定木における根から葉へ

の経路をちょうど一つ辿るためである。

ランダムなソートアルゴリズム $\mathcal{R}$ は、ふたつの入力を取る決定的なアルゴリズムだと考えられる。整列すべき入力配列 a と、$[0,1]$ 内のランダムな実数の長い列 $b = b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$ である。このランダムな数によってアルゴリズムはランダム化される。アルゴリズムがコインを投げてランダムな選択をしたくなったとき、b の要素を使ってこれを行う。例えばクイックソートにおける最初の軸を選ぶとき、アルゴリズムは式 $\lfloor nb_1 \rfloor$ を使う。

b を特定の列 $\hat{b}$ に替えると、$\mathcal{R}$ は決定的なアルゴリズムになる。このアルゴリズムを $\mathcal{R}(\hat{b})$ とし、これによる比較木を $\mathcal{T}(\hat{b})$ とする。また、a を $\{1,\ldots,\mathtt{n}\}$ の置換からランダムに選ぶのは、$\mathcal{T}(\hat{b})$ の $\mathtt{n}!$ 個の葉のうちのひとつをランダムに選ぶのは同じである。

問 11.12 で示す必要があったのは、k 個の葉を持つ二分木の葉をランダムに選ぶとき、葉の深さの期待値が $\log k$ 以上であることであった。以上より、$\{1,\ldots,n\}$ の置換からランダムに選んだものを入力するとき、（決定的な）アルゴリズム $\mathcal{R}(\hat{b})$ が実行する比較の回数の期待値は $\log(\mathtt{n}!)$ 以上である。結局任意の $\hat{b}$ についてこれが成り立つので、$\mathcal{R}$ についても同じことが成り立つ。ランダムなアルゴリズムについての下界がこうして示された。

定理 **11.6.** 任意の整数 $n \geq 1$ と、任意の（決定的でもランダムでもよい）比較に基づく整列アルゴリズム $\mathcal{A}$ について、$\{1,\ldots,n\}$ の置換からランダムに選んだ入力を整列するときに実行する比較の回数の期待値は $\log(\mathtt{n}!) = \mathtt{n}\log\mathtt{n} - O(\mathtt{n})$ 以上である。

11.2 計数ソートと基数ソート

この節では比較に基づいたものでないアルゴリズムをふたつ紹介する。小さい整数に特化し、要素（の一部）を配列の添え字として使うことで、これらのアルゴリズムは定理 11.5 の下界に縛られない。次の文を考えよう。

$$\mathtt{c}[\mathtt{a}[\mathtt{i}]] = 1$$

この文は定数時間で実行できるが、`a[i]` の値により `c.length` の値は異なる。これはこのような文を使うアルゴリズムは二分木でモデル化できないということである。突き詰めると、これこそがこの節のアルゴリズムが比較に基づくアルゴリズムよりも速く整列をこなせる理由なのである。

11.2.1 計数ソート

$0,\dots,k-1$ の範囲の要素 n 個からなる入力の配列 a があるとする。**計数ソート**はカウンタの補助配列 c を使って a を整列する。そして、整列された a を補助配列 b として返す。

計数ソートのアイデアは単純だ。任意の $i \in \{0,\dots,k-1\}$ について、i の出て来る回数を数え、これを c[i] に入れておく。整列の後では、出力は c[0] 個の 0 からはじまり、c[1] 個の 1 が続き、c[2] 個の 2 が続き、...、c[k−1] 個の k−1 で終わる。このコードは巧妙である。実行の様子を図 11.7 に示す。

Algorithms
```
void countingSort(array<int> &a, int k) {
  array<int> c(k, 0);
  for (int i = 0; i < a.length; i++)
    c[a[i]]++;
  for (int i = 1; i < k; i++)
    c[i] += c[i-1];
  array<int> b(a.length);
  for (int i = a.length-1; i >= 0; i--)
    b[--c[a[i]]] = a[i];
  a = b;
}
```

このコードと最初の for ループでは各カウンタ c[i] が a において i が何回現れるかを数えている。a の値を添え字として使うことで、この処理を合計 $O(n)$ のひとつの for ループで終えている。続いて、c を使って直接出力配列 b を埋めていける。しかし、a にデータが関連づけられているときはこれはできない。よって、a から b に要素をコピーするための追加の仕事が必要になる。

次の for ループでは、$O(k)$ の時間をかけてカウンタを順に足しこんでいる。こうすると c[i] は a における i 以下の要素の個数になる。特に、任意の $i \in \{0,\dots,k-1\}$ について、出力配列 b は次の式を満たす。

$$b[c[i-1]] = b[c[i-1]+1] = \cdots = b[c[i]-1] = i$$

最後に a を逆に辿って、要素を b に入れる。a を辿りながら、要素 $a[i] = j$ は

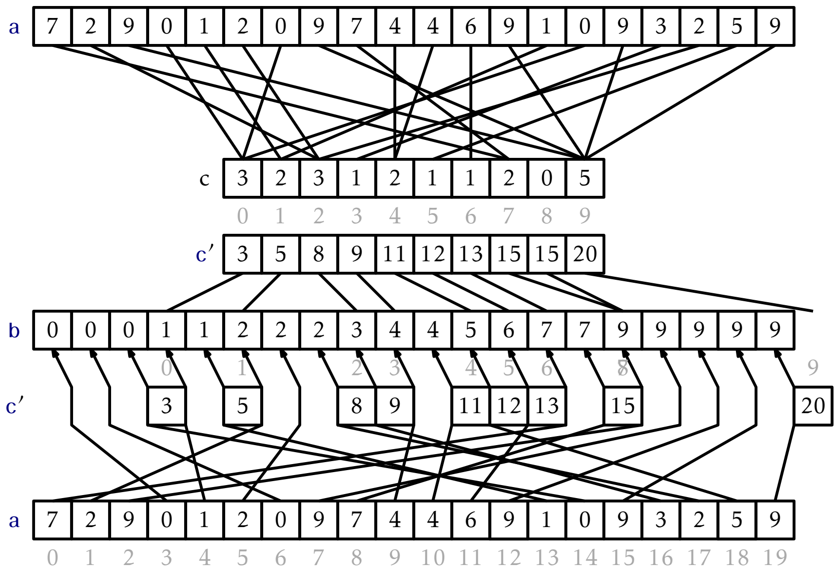


図 11.7: $0,\ldots,k-1=9$ のいずれかを格納する、長さ $n=20$ である配列に対する、計数ソートの操作

$b[c[j]-1]$ に入れられ、$c[j]$ をひとつ減らす。

定理 **11.7.** countingSort(a,k) は $\{0,\ldots,k-1\}$ の要素 n 個からなる配列 a を $O(n+k)$ の時間で整列する。

計数ソートは**安定性**という良い性質を持つ。これは等しい要素の相対的な位置を保つ性質である。すなわち、要素 $a[i]$ と $a[j]$ が等しい値で、$i<j$ であるとき、b においても $a[i]$ が $a[j]$ の前に来るのである。この性質は次の節で役立つ。

11.2.2 基数ソート

計数ソートは配列の長さ n が、配列内の最大値 $k-1$ と比べてそれほど小さくないなら、非常に効率的である。今から説明する**基数ソート**は複数回の計数ソートにより、もっと大きな範囲の最大値があっても大丈夫なアルゴリズムである。

基数ソートは w ビットの整数を w/d 回の計数ソートにより、一度に d ビッ

トずつ整列する。[*4] より正確に言うと、基数ソートはまず整数の最下位 d ビットだけを見て整列する。続いて、次の d ビットだけを見て整列する。このような処理を繰り返し、最後には整数の最高位 d ビットだけを見て整列する。

Algorithms
```
void radixSort(array<int> &a) {
  int d = 8, w = 32;
  for (int p = 0; p < w/d; p++) {
    array<int> c(1<<d, 0);
    // the next three for loops implement counting-sort
    array<int> b(a.length);
    for (int i = 0; i < a.length; i++)
      c[(a[i] >> d*p)&((1<<d)-1)]++;
    for (int i = 1; i < 1<<d; i++)
      c[i] += c[i-1];
    for (int i = a.length-1; i >= 0; i--)
      b[--c[(a[i] >> d*p)&((1<<d)-1)]] = a[i];
    a = b;
  }
}
```

（このコードでは $(\mathtt{a}[\mathtt{i}] >> \mathtt{d} * \mathtt{p})\&((1 << \mathtt{d}) - 1)$ と書いて、$\mathtt{a}[\mathtt{i}]$ の 2 進数表記において $(\mathtt{p}+1)\mathtt{d}-1, \ldots, \mathtt{pd}$ ビット目である整数を抽出している。）このアルゴリズムの例を図 11.8 に示した。

この注目に値するアルゴリズムが正しく整列を行うのは、計数ソートが安定なソートアルゴリズムであるからである。a のふたつの要素 x と y が $\mathtt{x} < \mathtt{y}$ を満たし、x と y が添え字 r の位置で異なるなら、$\lfloor r/\mathtt{d} \rfloor$ 回目の整列で x は y より前に置かれる。そして、以降は x と y の相対的な位置は変わらない。

基数ソートは $\mathtt{w}/\mathtt{d}$ 回の計数ソートを行う。各計数ソートの実行時間は $O(\mathtt{n}+2^{\mathtt{d}})$ である。よって、基数ソートの性能は次の定理のようになる。

定理 11.8. 任意の整数 $\mathtt{d} > 0$ について、radixSort(a,k) は n 個の w ビット整数を含む配列 a を $O((\mathtt{w}/\mathtt{d})(\mathtt{n}+2^{\mathtt{d}}))$ の時間で整列する。

[*4] d は w を割り切れると仮定する。もしそうでないときは w を $\mathtt{d}\lceil \mathtt{w}/\mathtt{d} \rceil$ に増やす必要がある。

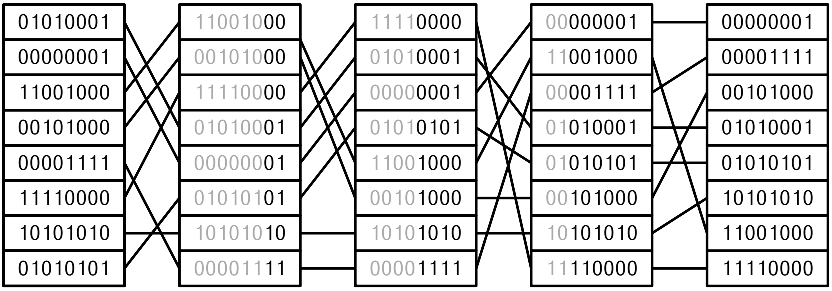


図 11.8: 基数ソートにより $\mathtt{w} = 8$ ビットの整数を整列する。$\mathtt{d} = 2$ ビットの整数を計数ソートによって整列する処理を 4 回行う。

配列の要素は $\{0,\ldots,\mathtt{n}^c - 1\}$ の範囲の整数であり、$\mathtt{d} = \lceil \log \mathtt{n} \rceil$ だとすれば、定理 11.8 は次のように整理できる。

系 **11.1.** `radixSort(a,k)` は、$\{0,\ldots,\mathtt{n}^c - 1\}$ の範囲の $\mathtt{n}$ 個の整数からなる配列 $\mathtt{a}$ を、$O(c\mathtt{n})$ の時間で整列する。

11.3 ディスカッションと練習問題

整列は計算機科学における基本的なアルゴリズムであり、長い歴史がある。Knuth [48] によればマージソートは von Neumann (1945) が考案したものだという。クイックソートは Hoare [39] が考案した。はじめにヒープソートを考案したのは Williams [76] だが、本節で説明した $O(\mathtt{n})$ の時間でボトムアップにヒープを構築する方法は Floyd [28] によるものである。比較に基づくソートの下界は言い継がれてきたものである。次の表は比較に基づくアルゴリズムの性能をまとめたものだ。

	時間計算量		in-place
マージソート	$\mathtt{n}\log\mathtt{n}$	最悪実行時間	No
クイックソート	$1.38\mathtt{n}\log\mathtt{n} + O(\mathtt{n})$	期待実行時間	Yes
ヒープソート	$2\mathtt{n}\log\mathtt{n} + O(\mathtt{n})$	最悪実行時間	Yes

これらの比較に基づくアルゴリズムにはそれぞれの長所・短所がある。マージソートは比較の回数が最も少なく、ランダムでもない。しかしマージのとき

に補助配列が必要だ。この配列を確保するのはコストが高く、またメモリの制限によりソートに失敗する可能性もある。クイックソートは入力配列の中だけで処理を済ませ、比較の回数も二番目に少ないか、ランダムなアルゴリズムなので実行時間の保証が常には成り立たない。ヒープソートは比較の回数は最も多いが、入力配列だけを使った決定的なアルゴリズムである。

マージソートが明らかに一番優れている場面がある。これは連結リストを整列するときである。この場合は補助的な配列が必要ないのである。ふたつの整列済みの連結リストはポインタ操作によって簡単に併合でき、整列済みの一つの配列が得られる。（問 11.2 を参照せよ。）

この章で説明した計数ソートと基数ソートは Seward [66, Section 2.4.6] によるものである。しかし、基数ソートの一種が 1920 年代からパンチカードを整列するために機械によって使われていた。この機械はカードの山を、ある場所に穴が空いているかどうかを判定してふたつの山に分けた。色々な穴の位置についてこの処理を繰り返すことで、基数ソートになる。

最後に、計数ソート・基数ソートはいずれも非負整数以外の数も整列できることを確認しておく。計数ソートを $\{a,\dots,b\}$ の範囲の整数を整列できるよう素直に修正すれば、実行時間は $O(\mathtt{n}+b-a)$ になる。同様に基数ソートは同じ範囲の整数を $O(\mathtt{n}(\log_{\mathtt{n}}(b-a))$ の時間で整列できる。また、いずれのアルゴリズムも、IEEE754 形式の浮動小数点数を整列するのにも使える。これは IEEE の形式では数の大きさに符号が付いた二進整数表現だと見なして比較ができるように設計されているからである。[2]

問 **11.1.** 1,7,4,6,2,8,3,5 からなる配列を入力とする、マージソートとヒープソートの実行の様子を描け。また同じ配列について、クイックソートを実行の様子として、ありえるもののうちのひとつを描け。

問 **11.2.** マージソートの一種で、補助配列を使わずに `DLList` を整列するものを実装せよ。（問 3.13 を参照せよ。）

問 **11.3.** `quickSort`$(\mathtt{a},\mathtt{i},\mathtt{n},\mathtt{c})$ の実装には、軸として常に $\mathtt{a}[\mathtt{i}]$ を選ぶものがある。この実装が、$\binom{\mathtt{n}}{2}$ 回の比較を実行する長さ $\mathtt{n}$ の入力の例を示せ。

問 **11.4.** `quickSort`$(\mathtt{a},\mathtt{i},\mathtt{n},\mathtt{c})$ の実装には、軸として常に $\mathtt{a}[\mathtt{i}+\mathtt{n}/2]$ を選ぶものがある。この実装が、$\binom{\mathtt{n}}{2}$ 回の比較を実行する長さ $\mathtt{n}$ の入力の例を示せ。

問 **11.5.** どのような `quickSort`$(\mathtt{a},\mathtt{i},\mathtt{n},\mathtt{c})$ の実装でも、軸を決定的に選び、$\mathtt{a}[\mathtt{i}],\dots,\mathtt{a}[\mathtt{i}+\mathtt{n}-1]$ を先に見ないならば、長さ $\mathtt{n}$ のある入力が存在し、$\binom{\mathtt{n}}{2}$ 回の比較を実行することを示せ。

問 **11.6.** `quickSort`$(\mathtt{a},\mathtt{i},\mathtt{n},\mathtt{c})$ を実行するとき $\binom{\mathtt{n}}{2}$ 回の比較を実行する Comparator $\mathtt{c}$ を設計せよ。（ヒント：comparator は比較する値を実際に見なくてもよい。）

問 **11.7.** 定理 11.3 の証明よりも細かくクイックソートが実行する比較の回数の期待値を解析せよ。具体的には、比較の回数の期待値が $2\mathtt{n}H_{\mathtt{n}} - \mathtt{n} + H_{\mathtt{n}}$ であることを示せ。

問 **11.8.** ヒープソートを実行するときの、比較の回数が $2\mathtt{n}\log\mathtt{n} - O(\mathtt{n})$ 回になる入力配列を与え、そのことを説明せよ。

問 **11.9.** 図 11.6 の比較木によって正しく整列できない $1,2,3$ の別の置換を見つけよ。

問 **11.10.** $\log\mathtt{n}! = \mathtt{n}\log\mathtt{n} - O(\mathtt{n})$ を示せ。

問 **11.11.** k 個の葉を持つ二分木の高さは $\log k$ 以上であることを示せ。

問 **11.12.** k 個の葉を持つ二分木の葉をランダムに選ぶとき、その葉の高さの期待値は $\log k$ 以上であることを示せ。

問 **11.13.** この章で説明した `radixSort`$(\mathtt{a},\mathtt{k})$ は入力配列 $\mathtt{a}$ が非負整数だけからなるとき動作する。入力配列が負の整数を含むときにも、正しく動作するように実装を修正せよ。

第 12

グラフ

この章ではグラフのふたつの表現方法を説明し、それらを使う基本的なアルゴリズムを紹介する。

数学的には、**（有向）グラフ**とは組み $G=(V,E)$ である。ここで V は**頂点**の集合であり、E は**辺**と呼ばれる頂点の組みの集合である。辺 (i, j) は i から j に向いている。XXX: source と target の訳語 i は辺の**始点**と呼ばれ、j は**終点**と呼ばれる。G における**経路**とは頂点の列 $v_0,\ldots,v_k$ であって 任意の $i \in \{1,\ldots,k\}$ について辺 (v_{i-1},v_i) が E に含まれるものである。経路 $v_0,\ldots,v_k$ が**循環**である（循環している）とは、(v_k,v_0) も E の要素であることをいう。経路（または循環）が**単純**であるとは、経路に含まれる頂点が互いに異なることをいう。頂点 v_i から頂点 v_j への経路があるとき、v_j は v_i から**到達可能**であるという。図 12.1 にグラフの例を示した。

グラフは多くの現象をモデル化できるので多くの応用がある。自明な例がいくつかある。コンピュータのネットワークはコンピュータを頂点、それらを繋ぐ（直接の）通信路を辺と見なせばグラフとしてモデル化できる。街道は交差点を頂点、それらを繋ぐ通りを辺と見なせばグラフとしてモデル化できる。

もうすこし巧みな例は、グラフが集合における二項関係のモデルであることに着目すると見つかる。例えば大学の時間割における**衝突グラフ**を考えられる。ここで頂点は大学の講義で、辺 (i, j) は i と j の両方を受講する生徒がいることを表している。よってこの辺から講義 i・j のテストは同じ時間に割当てられてはならないことがわかる。

この節を通じて n は頂点の数を、m は辺の数を表すことにする。すなわち n $=|V|$ かつ m $=|E|$ である。さらに $V=\{0,\ldots,$n$-1\}$ と仮定する。V の各頂点とひも付けられたデータを保存するためには、大きさ n の配列にデータを入れておけば良い。

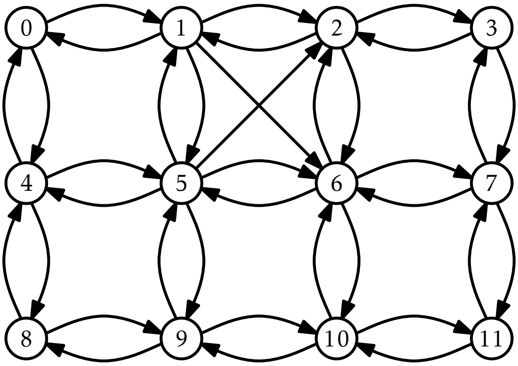


図 12.1: 12 個の頂点からなるグラフ。頂点は番号付きの円で、辺は source から target に向かう矢印で描く。

グラフに対する典型的な操作は次のものだ。

- addEdge(i, j)：辺 (i, j) を E に加える。
- removeEdge(i, j)：辺 (i, j) を E から除く。
- hasEdge(i, j)：(i, j) $\in E$ かどうかを調べる。
- outEdges(i)：(i, j) $\in E$ を満たす整数整数 j のリストを返す。
- inEdges(i)：(j, i) $\in E$ を満たす整数整数 j のリストを返す。

これらの操作を効率的に実装するのはさほど難しくない。例えばはじめの 3 つの操作は USet を使って実装でき、5 章で説明したハッシュテーブルを使えば期待実行時間は定数である。最後のふたつの操作は各頂点毎に隣接する頂点のリストを保持すれば定数時間で実行できる。

しかし、グラフの応用によって各操作への要求が異なり、そして理想的にはこれらの要求をすべて満たす中で最も単純な実装を使いたい。そのため、グラフを表現する方法を大きくふたつに分けて議論する。

12.1 AdjacencyMatrix：行列によるグラフの表現

隣接行列は n 個の頂点を持つグラフ $G = (V, E)$ を、各エントリが真偽値である n×n 行列 a を使って表現したものである。

AdjacencyMatrix
```
int n;
bool **a;
```

行列のエントリ a[i][j] は次のように定義される。

$$\mathtt{a[i][j]} = \begin{cases} \mathtt{true} & (\mathtt{i},\mathtt{j}) \in E \text{ のとき} \\ \mathtt{false} & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

図 12.1 のグラフの隣接行列を図 12.2 に示した。

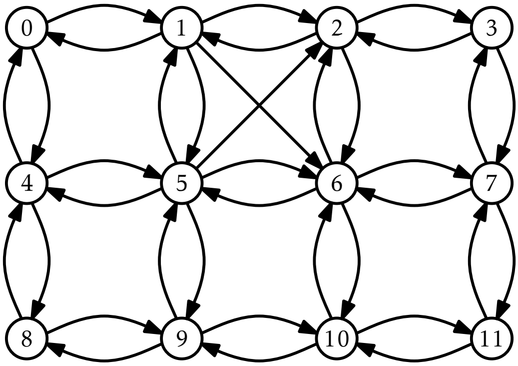
この表現における addEdge(i, j)・removeEdge(i, j)・hasEdge(i, j) はいずれもエントリ a[i][j] を読み書きすればよい。

AdjacencyMatrix
```
void addEdge(int i, int j) {
  a[i][j] = true;
}
void removeEdge(int i, int j) {
  a[i][j] = false;
}
bool hasEdge(int i, int j) {
  return a[i][j];
}
```

これらの操作は明らかに定数時間で実行できる。

隣接行列で効率がよくないのは outEdges(i) と inEdges(i) である。これを実装するためには、a における対応する行または列の n 個のエントリを順に見て、各添え字 j についてそれぞれ a[i][j] と a[j][i] が真かどうかを確認しなければならない。

AdjacencyMatrix
```
void outEdges(int i, List &edges) {
  for (int j = 0; j < n; j++)
    if (a[i][j]) edges.add(j);
}
void inEdges(int i, List &edges) {
  for (int j = 0; j < n; j++)
```



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
5	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
7	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0

図 12.2: グラフとその隣接行列

```
    if (a[j][i]) edges.add(j);
}
```

これらの操作は明らかに $O(\mathtt{n})$ の時間がかかる。

隣接行列による表現のもうひとつの短所は行列が大きいことである。$\mathtt{n}\times\mathtt{n}$ の真偽値の行列を格納するには $\mathtt{n}^2$ ビット以上のメモリが必要である。真偽値

を単純にならべた行列では実際は n^2 バイトのメモリを使う。より手の込んだ実装で、w 個の真偽値をワードに詰め込めば、領域使用量は $O(n^2/w)$ ワードのメモリに減らせる。

定理 **12.1.** *AdjacencyMatrix* は *Graph* インターフェースを実装する。*AdjacencyMatrix* は以下のように各操作をサポートする。

- addEdge(i, j)・removeEdge(i, j)・hasEdge(i, j) を定数時間で実行できる。
- inEdges(i)・outEdges(i) を時間 $O(n)$ で実行できる。

AdjacencyMatrix の領域使用量は $O(n^2)$ である。

メモリ使用量の多さと inEdges(i)・outEdges(i) の性能の低さにもかかわらず、AdjacencyMatrix が有効な場合もある。具体的にはグラフ G が**密**なとき、つまり辺の数が n^2 に近く、メモリ使用量 n^2 が許容できる場合である。

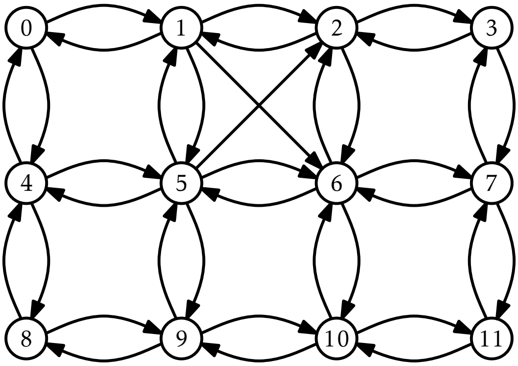
AdjacencyMatrix が広く使われるのは、グラフ G の性質を計算するための行列 a の代数的な操作を効率的に実行できるからでもある。これはアルゴリズムの授業のトピックだが、ひとつだけそのような性質を挙げる。a のエントリを整数（true が 1、false が 0）であると見なして、a 同士の積を行列の掛け算を使って計算すると、行列 a^2 が求まる。積の定義から、次の関係を思い出してほしい。

$$a^2[i][j] = \sum_{k=0}^{n-1} a[i][k] \cdot a[k][j]$$

この和をグラフ G の文脈で解釈すると、これは G が辺 (i, k) と辺 (k, j) を共に持つ頂点 k の個数を数えている。つまりこれは i から j への（中間頂点 k を通る）経路であって、長さがちょうど 2 であるものの個数である。この観察は、G におけるすべての頂点の対についての最短経路を $O(\log n)$ 回だけの行列の積で計算するアルゴリズムの基礎になっている。

12.2 AdjacencyLists：リストの集まりとしてのグラフ

グラフの**隣接リスト**表現は辺を重視するアプローチである。隣接リストの実装方法は色々ありうる。この節では単純なものを説明する。そしてこの節の最後に別のやり方について述べる。隣接リスト表現ではグラフ $G = (V, E)$ はリストの配列 adj で表現される。リスト adj[i] は頂点 i と隣接するすべての



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	1	2	0	1	5	6	4	8	9	10
4	2	3	7	5	2	2	3	9	5	6	7
	6	6		8	6	7	11		10	11	
	5				9	10					
					4						

図 12.3: グラフとその隣接リスト

頂点を含む。つまり、$(\mathtt{i},\mathtt{j})\in E$ を満たす添え字 j をすべて含むのである。

AdjacencyLists
```
int n;
List *adj;
```

（例を図 12.3 に示す）この実装ではリスト adj は ArrayStack のサブクラスとしている。なぜなら添え字を使って定数時間で要素にアクセスしたいからである。他の選択肢もありうる。特に adj を DLList として実装してもよいだろう。

addEdge(i, j) はリスト adj[i] に j を加えるだけだ。

AdjacencyLists
```
void addEdge(int i, int j) {
  adj[i].add(j);
```

```
}
```

これは定数時間で実行できる。

removeEdge(i, j) はリスト adj[i] から j を見つけ、それを削除する。

AdjacencyLists
```
void removeEdge(int i, int j) {
  for (int k = 0; k < adj[i].size(); k++) {
    if (adj[i].get(k) == j) {
      adj[i].remove(k);
      return;
    }
  }
}
```

これは $O(\deg(\mathtt{i}))$ の時間がかかる。ここで $\deg(\mathtt{i})$（i の**次数**）は E の要素のうち i から出ている辺の個数である。

hasEdge(i, j) も同様だ。リスト adj[i] から j を探して、見つかれば真を、そうでないなら偽を返す。

AdjacencyLists
```
bool hasEdge(int i, int j) {
  return adj[i].contains(j);
}
```

これにかかる時間は $O(\deg(\mathtt{i}))$ である。

outEdges(i) は単純である。これはリスト adj[i] 中身を出力リストにコピーする。

AdjacencyLists
```
void outEdges(int i, LisT &edges) {
  for (int k = 0; k < adj[i].size(); k++)
    edges.add(adj[i].get(k));
}
```

これにかかる時間は $O(\deg(\mathtt{i}))$ である。

inEdges(i) はもう少しタイヘンだ。すべての頂点 j について (i, j) が存在するかどうか確認し、もしそうなら j を出力リストに追加する。

AdjacencyLists
```
void inEdges(int i, LisT &edges) {
  for (int j = 0; j < n; j++)
    if (adj[j].contains(i))  edges.add(j);
}
```

この操作は非常に時間がかかる。すべての頂点の隣接リストを見て回る必要があるので、$O(\mathtt{n}+\mathtt{m})$ の時間がかかる。

次の定理は上で説明したデータ構造の性能をまとめたものである。

定理 **12.2.** *AdjacencyLists* は *Graph* インターフェースを実装する。*AdjacencyLists* は以下のように各操作をサポートする。

- addEdge(i, j) は定数時間で実行できる。
- removeEdge(i, j)・hasEdge(i, j) にかかる時間は $O(\deg(\mathtt{i}))$ である。
- outEdges(i) にかかる時間は $O(\deg(\mathtt{i}))$ である。
- inEdges(i) にかかる時間は $O(\mathtt{n}+\mathtt{m})$ である。

AdjacencyLists の領域使用量は $O(\mathtt{n}+\mathtt{m})$ である。

先程少し言ったように、グラフを隣接リストとして実装する方法には色々ある。実装に当たって確認すべきことの例としては以下のものがある。

- adj の要素を格納するにはどんなデータ構造を使うのがいいだろう。配列ベースのもの、ポインタベースのもの、あるいはハッシュテーブルだろうか。
- 任意の i について $(\mathtt{j},\mathtt{i}) \in E$ を満たす j のリストである二次隣接リスト inadj があるべきだろうか。これは inEdges(i) の実行時間を劇的に改善するが、辺を追加・削除する際の仕事を少し増やす。
- adj[i] における辺 (i, j) は対応する inadj[j] のエントリへの参照を持つべきだろうか。
- 辺は明示的にオブジェクトとして実装し、関連データを持たせるべきだろうか。このとき adj は頂点のリストではなく、辺のリストを持つことになる。

これらの選択肢の大部分は、実装の複雑さと性能とのトレードオフをふまえて考えることになる。

12.3 グラフの走査

この節ではグラフの頂点 i からはじめて、i から到達可能なすべての頂点を探索するアルゴリズムをふたつ紹介する。いずれの場合も隣接リストで表現されたグラフを使うのが適切である。よって、この節でアルゴリズムを分析するときにはグラフの表現が AdjacencyLists であることを仮定する。

12.3.1 幅優先探索

幅優先探索を頂点 i からはじめると、まずは i に隣接する頂点を訪問し、続いて i の隣の隣、続いて i の隣の隣の隣、というように進んでいく。

このアルゴリズムは二分木における幅優先の走査アルゴリズム（6.1.2 節）の一般化であって、非常に似ている。初期状態において i だけを含むようなキュー q を使う。q から要素を取り出し、取り出した要素に隣接する要素を q に追加する。ここで、追加する要素はまだこれまで q に追加していないものであるとする。木とグラフにおける幅優先探索アルゴリズムの大きな違いは、グラフの場合には同じ頂点を q に二度以上追加しないよう気をつける必要があることである。このためには真偽値の補助配列 seen を使って、どの頂点が既に見つかっているかを覚えておけばよい。

Algorithms

```
void bfs(Graph &g, int r) {
  bool *seen = new bool[g.nVertices()];
  SLList<int> q;
  q.add(r);
  seen[r] = true;
  while (q.size() > 0) {
    int i = q.remove();
    ArrayStack<int> edges;
    g.outEdges(i, edges);
    for (int k = 0; k < edges.size(); k++) {
```

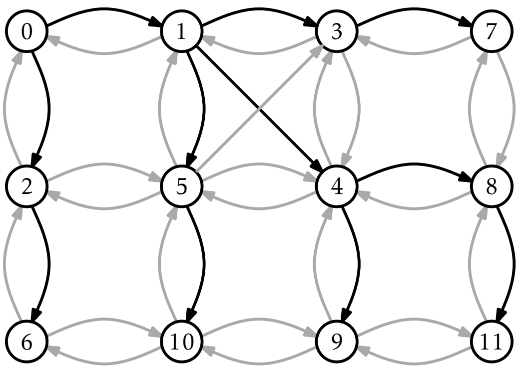


図 12.4: ノード 0 から始まる幅優先探索の例。ノードの数字はこの探索において q に追加される順番を表している。ノードが q に追加されるときに辿られる辺を黒、それ以外の辺を灰色に描いている。

```
      int j = edges.get(k);
      if (!seen[j]) {
        q.add(j);
        seen[j] = true;
      }
    }
  }
  delete[] seen;
}
```

図 12.1 において bfs(g,0) を実行する様子の一例を図 12.4 に示した。この処理の順番は隣接リストの並び順によって異なる。図 12.4 の処理は図 12.3 の隣接リストを使った。

bfs(g,i) の実行時間の解析は簡単である。seen によって同じ頂点は q に二度以上追加されることはない。q に頂点の追加する（そして後で削除する）処理は定数時間で実行でき、合計 $O(\mathtt{n})$ だけの時間がかかる。すべての頂点が内部ループにおいて高々一度処理されるので、すべての隣接リストが高々一度処理される。よって G の辺は高々一度だけ処理される。内部ループが一周すると辺がひとつ処理され、この各周は定数時間で実行できるので、合計 $O(\mathtt{m})$

だけの時間がかかる。以上より、アルゴリズム全体の実行時間は $O(\mathtt{n}+\mathtt{m})$ である。

次の定理は bfs(g,r) の性能をまとめたものである。

定理 **12.3.** *AdjacencyLists* で実装された *Graph* g を入力すると、bfs(g,r) の実行時間は $O(\mathtt{n}+\mathtt{m})$ である。

幅優先の走査には特別な性質がある。bfs(g,r) を呼ぶと r からの有向経路が存在するすべての頂点を q に追加する（頂点はいずれ取り出される）。また、r から距離 0 の頂点 (r 自身) は、r から距離 1 の頂点より先に q に追加され、距離 1 の頂点は距離 2 の頂点よりも先に q に追加され、これが繰り返される。そのため、bfs(g,r) は r からの距離の昇順で頂点を訪問し、r から到達不可能な頂点を訪問することはない。

そのため、幅優先探索の特に便利な応用は最短経路の計算である。r からすべての頂点への最短経路を求めるために、長さ n の補助配列 p を利用する bfs(g,r) の変種を使える。頂点 j を q に追加するとき、p[j] = i とする。こうすると p[j] は r から j への最短経路における、最後から二番目の頂点になる。p[p[j]], p[p[p[j]]]... とこれを繰り返すと、r から j への最短経路を（逆順に）再構築できる。

12.3.2 深さ優先探索

深さ優先探索は二分木における標準的な走査アルゴリズムに似ている。このアルゴリズムではある部分木を完全に探索し終えてから根の方向に戻り、そして別の部分木の探索に進む。別の考え方をすると、深さ優先探索は幅優先探索に似ていて、その違いはスタックの代わりにキューを使うことである。

深さ優先探索において各頂点 i には色 c[i] を割り当てる。未訪問の頂点は white、現在訪問中の頂点は grey、既に訪問した頂点は black とする。深さ優先探索は再帰的なアルゴリズムとして考えるのが簡単である。r を訪問するところから処理がはじまる。頂点 i を訪問するとき、i の色を grey にする。続いて i の隣接リストを見て、その中の白い頂点を再帰的に訪問する。最後に i の色を black にして、i の処理を終える。

Algorithms
```
void dfs(Graph &g, int i, char *c) {
  c[i] = grey;  // currently visiting i
  ArrayStack<int> edges;
```

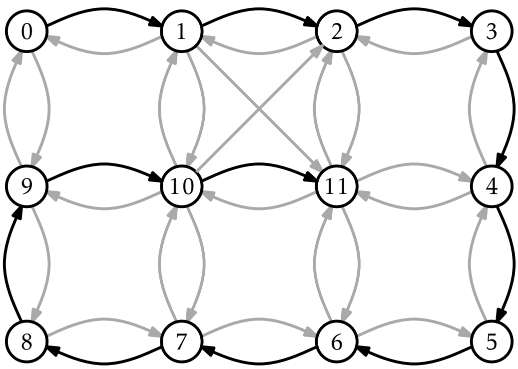


図 12.5: ノード 0 から始まる深さ優先探索の例。ノードにはこの探索において q に追加される順番が付されている。再帰的呼び出しになる辺を黒、それ以外の辺を灰色に描いている。

```
  g.outEdges(i, edges);
  for (int k = 0; k < edges.size(); k++) {
    int j = edges.get(k);
    if (c[j] == white) {
      c[j] = grey;
      dfs(g, j, c);
    }
  }
  c[i] = black; // done visiting i
}
void dfs(Graph &g, int r) {
  char *c = new char[g.nVertices()];
  dfs(g, r, c);
  delete[] c;
}
```

図 12.5 にこのアルゴリズムの処理の例を示す。

深さ優先探索のことを考えるのには再帰は便利なのだが、実装する際にはこ

れは最善の方法ではない。XXX: stack overflow の訳語上のコードは、スタックのオーバーフローによって大きなグラフの探索に失敗してしまうことがある。 別の実装方法として、再帰を明示的なスタック s に置き換えることが考えられる。次の実装はこれを行ったものである。

XXX: black にしなくていいのか?

Algorithms
```
void dfs2(Graph &g, int r) {
  char *c = new char[g.nVertices()];
  SLList<int> s;
  s.push(r);
  while (s.size() > 0) {
    int i = s.pop();
    if (c[i] == white) {
      c[i] = grey;
      ArrayStack<int> edges;
      g.outEdges(i, edges);
      for (int k = 0; k < edges.size(); k++)
        s.push(edges.get(k));
    }
  }
  delete[] c;
}
```

上のコードでは、次の頂点 i が処理されるとき、i の色を grey にし、i の隣接行列に入っていた頂点をスタックに積み、次はそのうちの一つを i にする。

当然だが dfs(g,r)・dfs2(g,r) の実行時間は bfs(g,r) と同じである。

定理 12.4. *AdjacencyLists* で実装された *Graph* g を入力すると、dfs(g,r)・dfs2(g,r) の実行時間はいずれも $O(n+m)$ である。

幅優先探索と同様に、深さ優先探索の各実行にもある木を対応づけられる。頂点 $i \neq r$ の色が white から grey になるのは、ある頂点 i' を再帰的に処理する中で dfs(g,i,c) を呼び出したからである。(dfs2(g,r) の場合は i は i' をスタックで置き換えた頂点のうちの一つである。) i' を i の親だと考える

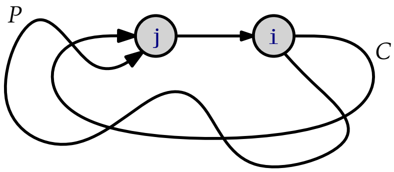


図 12.6: 深さ優先探索アルゴリズムにより、グラフ G の循環を検出できる。ノード i が灰色であるとき、ノード j も灰色である。そのため、深さ優先探索木において i から j への経路 P が存在する。また、辺 (j,i) が存在するとき、P は循環である。

と、r を根とする木が得られる。図 12.5 では、この木は頂点 0 から頂点 11 への経路である。

深さ優先探索の重要な性質を述べる。i の色が grey であるとき、i から他の頂点 j への白い頂点だけを辿る経路が存在するとする。そして、i の色が black になるよりも前に、j の色は grey、そして black になる。（これは背理法で証明できる。i から j へのある経路 P を考えればよい。）

この性質は例えば循環の検出に役立つ。図 12.6 を参照せよ。r から到達可能なある循環 C があるとする。i を C の中で色が grey である最初の頂点とし、j を C において i の前にある頂点とする。このとき上の性質から、j の色は grey になり、辺 (j,i) を辿るときにも、i の色はまだ grey である。深さ優先探索において i から j への経路 P が存在し、一方辺 (j,i) も存在するので、P も循環であることがわかる。

12.4 ディスカッションと練習問題

12.3 と 12.4 で示されている幅優先探索・深さ優先探索の実行時間はあまりタイトではない。$\mathtt{n}_\mathtt{r}$ を G における頂点 i であって、i から r への経路が存在するものの個数と定義する。$\mathtt{m}_\mathtt{r}$ をこのような頂点から出る辺の個数とする。このとき、幅優先探索・深さ優先探索の実行時間に関してより正確に述べる次の定理が成り立つ。（練習問題で扱うアルゴリズムのうちの一部で、この定理は役に立つ。）

定理 12.5. *AdjacencyLists* で実装された *Graph* g を入力すると、bfs(g,r)・dfs(g,r)・dfs2(g,r) の実行時間はいずれも $O(\mathtt{n}_\mathtt{r}+\mathtt{m}_\mathtt{r})$ である。

幅優先探索は Moore [52] と Lee [49] によって独立に考案されたようであ

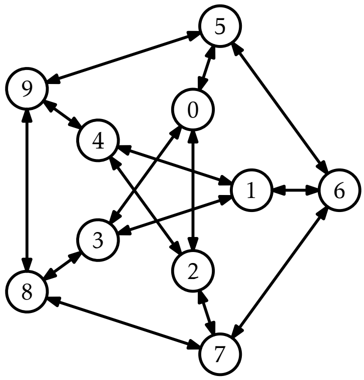


図 12.7: 例題用のグラフ

る。それぞれは迷路の探索と回路における経路に関する文脈で発見された。

グラフの隣接リスト表現は（より一般的であった）隣接行列表現の代替として Hopcroft と Tarjan [40] が提案した。隣接リスト表現は、深さ優先探索の他にも、Hopcroft-Tarjan の平面性テストのアルゴリズムにおいて重要な役割を果たす。これはグラフを辺が交差しないように平面に描けるかどうかを $O(\mathtt{n})$ の時間で調べるアルゴリズムである。[41].

以下の練習問題において、無向グラフとは辺 $(\mathtt{i},\mathtt{j})$ が存在するならば、またそのときに限って辺 $(\mathtt{j},\mathtt{i})$ が存在するようなグラフであるとする。

問 12.1. 図 12.7 のグラフの隣接リスト表現および隣接行列表現を書け。

問 12.2. グラフ G の**接続行列**とは、$\mathtt{n}\times\mathtt{m}$ 行列 A であって、次のように定義されるものである。

$$A_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{if vertex } i \text{ the source of edge } j \\ +1 & \text{if vertex } i \text{ the target of edge } j \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

1. 図 12.7 のグラフの接続行列を書け。
2. グラフの隣接行列表現を設計・実装せよ。また、領域使用量を解析し、addEdge$(\mathtt{i},\mathtt{j})$・removeEdge$(\mathtt{i},\mathtt{j})$・hasEdge$(\mathtt{i},\mathtt{j})$・inEdges$(\mathtt{i})$・outEdges$(\mathtt{i})$ の実行時間を求めよ。

問 12.3. 図 12.7 のグラフ G について、bfs(G,0)・dfs(G,0) を実行する様子

を図示せよ。

問 **12.4.** G を無向グラフとする。G が**連結**であるとは、任意の相異なる頂点の組み $\mathtt{i}, \mathtt{j}$ について、$\mathtt{i}$ から $\mathtt{j}$ への辺があることをいう。（なお、このとき G は無向グラフなので、$\mathtt{j}$ から $\mathtt{i}$ にも辺がある。）G が連結かどうかを $O(\mathtt{n}+\mathtt{m})$ の時間で確認する方法を示せ。

問 **12.5.** G を無向グラフとする。G の**連結成分ラベル付け**とは、それぞれが連結な部分グラフになるような G の分割方法のうち、分割後の集合が極大であるものである。これを $O(\mathtt{n}+\mathtt{m})$ の時間で計算する方法を示せ。

問 **12.6.** G を無向グラフとする。G の**全域森**は木の集まりであって、各木の辺は G の辺であり、G のすべての頂点をある木に含むものである。これを $O(\mathtt{n}+\mathtt{m})$ の時間で計算する方法を示せ。

問 **12.7.** グラフ G が**強連結**であるとは、G の任意の頂点の組み $\mathtt{i}, \mathtt{j}$ について、$\mathtt{i}$ から $\mathtt{j}$ への経路が存在することをいう。これを $O(\mathtt{n}+\mathtt{m})$ の時間で確認する方法を示せ。

問 **12.8.** グラフ $G=(V,E)$ と、特別な頂点 $\mathtt{r}\in V$ があるとき、$\mathtt{r}$ から全頂点 $\mathtt{i}\in V$ への最短経路の長さを計算する方法を示せ。

問 **12.9.** `dfs`$(\mathtt{g},\mathtt{r})$ が `dfs2`$(\mathtt{g},\mathtt{r})$ と異なる順番で頂点を訪問する単純な例を与えよ。また、`dfs`$(\mathtt{g},\mathtt{r})$ と常に同じ順番で頂点を訪問する `dfs2`$(\mathtt{g},\mathtt{r})$ を実装せよ。（ヒント：$\mathtt{r}$ からふたつ以上の辺が出ているグラフをいくつか作り、それぞれのアルゴリズムがどう動くか考えてみるといいだろう。）

問 **12.10.** XXX: universal sink の訳語
　グラフ G の universal sink とは、$\mathtt{n}-1$ 個の辺の行き先になっており、かつそこから辺が出ていない頂点である。[*1] `AdjacencyMatrix` で表現されるグラフ G が universal sink を持つかどうかを判定するアルゴリズムを設計・実装せよ。ただし、実行時間は $O(\mathtt{n})$ でなければならない。

[*1] universal sink $\mathtt{v}$ を celebrity と言うこともある。部屋の中のみなが $\mathtt{v}$ のことを知っているが、$\mathtt{v}$ は部屋の中の他の人が誰だか全く知らないのである。

第 **13**

整数を扱うデータ構造

この章では SSet の実装を再び扱う。ただしここでは SSet の要素は w ビットの整数だと仮定する。すなわち $x \in \{0,\ldots,2^w-1\}$ について add(x)・remove(x)・find(x) を実装する。データが整数であったり、あるいはデータを保存するためのキーが整数である応用は明らかにたくさんあるだろう。

以上のことをふまえた 3 つのデータ構造についてこの章では説明する。一つ目は BinaryTrie であり、これは SSet の 3 つの操作をいずれも $O(w)$ の時間で実行する。これにはさほど驚かないかもしれない。$\{0,\ldots,2^w-1\}$ の部分集合の大きさは $n \le 2^w$ であり、$\log n \le w$ が成り立つためだ。この本でこれまで解説した SSet の実装は各操作の実行時間が $O(\log n)$ であった。すなわち、いずれも BinaryTrie と同じくらいは高速であった。

二つ目は XFastTrie であり、これは BinaryTrie の検索をハッシュ法を利用して高速化するものである。この高速化により、find(x) の実行時間は $O(\log w)$ になる。しかし XFastTrie における add(x)・remove(x) の実行時間は依然として $O(w)$ であり、領域使用量は $O(n \cdot w)$ である。

三つ目は YFastTrie であり、これはおよそ w 個にひとつの要素を XFastTrie に格納し、それ以外の要素をふつうの SSet に格納するデータ構造である。この工夫により add(x)・remove(x) の実行時間は $O(\log w)$ に、領域使用量は $O(n)$ に抑えられる。

この章における実装例は整数と対応付けられる限り任意の型のデータを格納できる。サンプルコードにおける ix は x に対応する整数を表し、intValue(x) は x を ix に変換するメソッドであるとする。簡単のため、文章中においては単に x が整数であるかのように扱う。

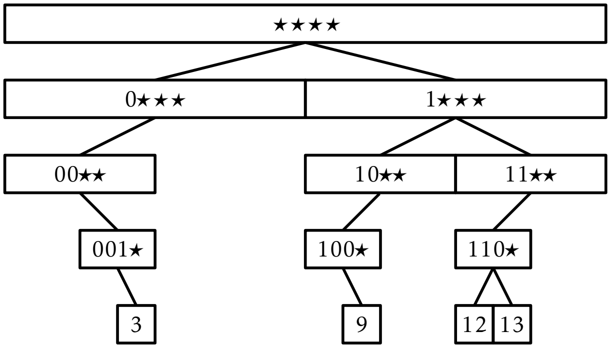


図 13.1: 二分トライでは、整数を根から葉への経路として符号化する。

13.1 BinaryTrie：デジタル探索木

BinaryTrie は w ビットの整数の集合を二分木で符号化したものである。この木の任意の葉の深さは w であって、各整数は根から葉への経路として符号化される。整数 x への経路は深さ i において、もし上から i 番目のビットが 0 なら左、1 なら右に向かう。図 13.1 は $w = 4$ の場合の例を示しており、ここでは整数 3(0011), 9(1001), 12(1100), 13(1101) がトライに格納されている。

x の探索経路は x の二進表現によって決まるので、ノード u の子を u.child[0] (left)・u.child[1] (right) と呼ぶことにすると便利である。この子を指すポインタは二重の用途で使われる。二分トライの葉は子を持たないので、ここではポインタを使って葉の双方向連結リストを作る。二分トライの葉では、u.child[0] (prev) はリストにおける u の直前のノードを、u.child[1] (next) はリストにおける u の直後のノードを指す。特別なノード dummy は先頭のノードの前のノード、および末尾のノードの後のノードを表現するために使われる。（3.2 節を参照せよ。）サンプルコードでは、u.child[0], u.left, u.prev はノード u の同じフィールドを参照している。u.child[1], u.right, u.next についても同様である。

各ノード u は u.jump というポインタも持つ。u が左の子を持たないとき、u.jump は u の部分木における最小の葉を指す。u が右の子を持たないとき、u.jump は u の部分木における最大の葉を指す。BinaryTrie の jump ポインタと葉の双方向連結リストとを描いた例を、図 13.2 に示す。

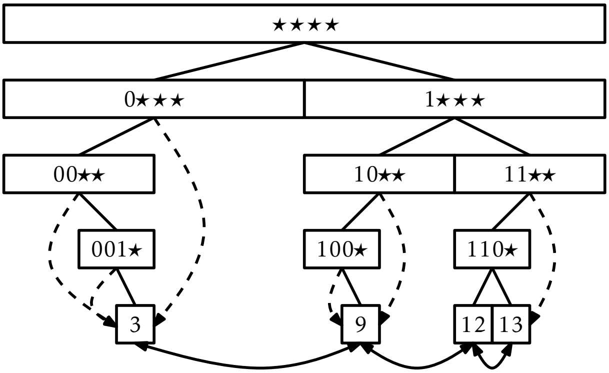


図 13.2: 二分トライにおける jump ポインタを破線で表す。

BinaryTrie における find(x) 操作は簡単である。x の探索経路を辿ればよい。葉にたどり着いたなら、x が存在することが分かる。（進みたい方向の子を持っていないため）それ以上進めないノード u に辿り着いたときは、u.jump を辿る。そうすると、x より大きい最小の葉、または x より小さい最大の葉が見つかる。どちらになるかは u が左右どちらの子を持たないのかに応じて決まる。u が左の子を持たないなら、欲しいノードを見つけたことになる。 u が右の子を持たないなら、連結リストを辿れば欲しいノードが見つかる。図 13.3 にはこのふたつの場合を描いた。

BinaryTrie
```
T find(T x) {
  int i, c = 0;
  unsigned ix = intValue(x);
  Node *u = &r;
  for (i = 0; i < w; i++) {
    c = (ix >> (w-i-1)) & 1;
    if (u->child[c] == NULL) break;
    u = u->child[c];
  }
  if (i == w) return u->x;  // found it
  u = (c == 0) ? u->jump : u->jump->next;
  return u == &dummy ? null : u->x;
```

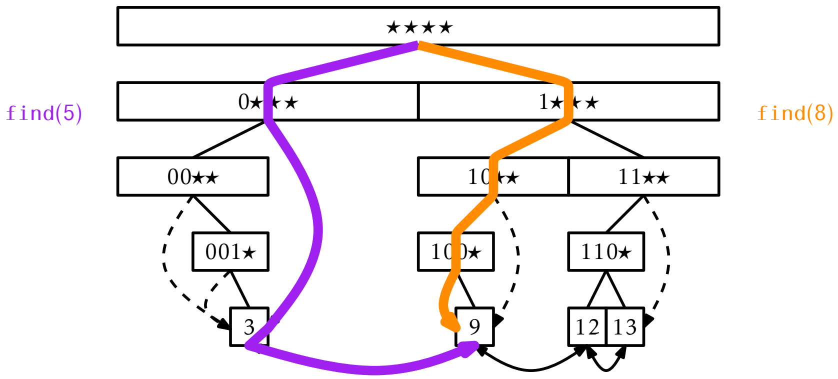


図 13.3: find(5) および find(8) が辿る経路

```
}
```

find(x) の実行時間において支配的なのは、根から葉への経路を辿る処理であり、この時間は $O(w)$ である。

BinaryTrie における add(x) も単純だが、やらなければならない処理はたくさんある。

1. x の探索経路を辿り、それ以上進めないノード u を得る。
2. u から x を含む葉への、探索経路の足りない部分を作る。
3. x を含むノード u′ を葉の連結リストに追加する。(最初のステップで得た u の jump ポインタを利用して、連結リストにおける u′ の直前のノード pred を得られる。)
4. これまで来た経路を逆に辿り、x を指す必要のある jump ポインタを調整する。

図 13.4 に要素を追加する様子を示した。

BinaryTrie
```
bool add(T x) {
  int i, c = 0;
  unsigned ix = intValue(x);
  Node *u = &r;
  // 1 - search for ix until falling out of the trie
```

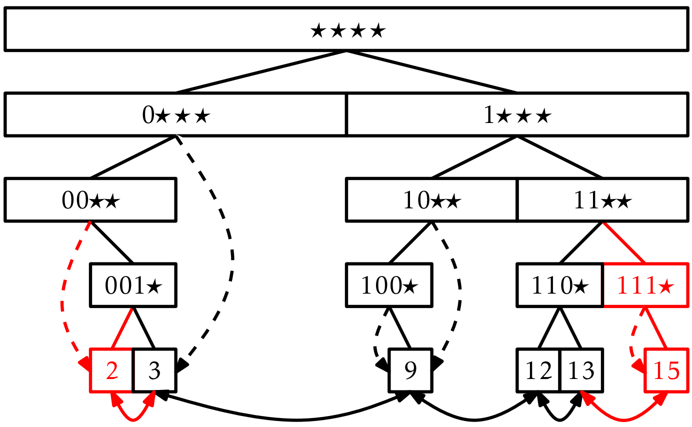


図 13.4: 図 13.2 の BinaryTrie に、値 2、値 15 を追加する。

```
for (i = 0; i < w; i++) {
  c = (ix >> (w-i-1)) & 1;
  if (u->child[c] == NULL) break;
  u = u->child[c];
}
if (i == w) return false; // already contains x - abort
Node *pred = (c == right) ? u->jump : u->jump->left;
u->jump = NULL;  // u will have two children shortly
// 2 - add path to ix
for (; i < w; i++) {
  c = (ix >> (w-i-1)) & 1;
  u->child[c] = new Node();
  u->child[c]->parent = u;
  u = u->child[c];
}
u->x = x;
// 3 - add u to linked list
u->prev = pred;
```

```
  u->next = pred->next;;
  u->prev->next = u;
  u->next->prev = u;
  // 4 - walk back up, updating jump pointers
  Node *v = u->parent;
  while (v != NULL) {
    if ((v->left == NULL
        && (v->jump == NULL || intValue(v->jump->x) > ix))
    || (v->right == NULL
        && (v->jump == NULL || intValue(v->jump->x) < ix)))
      v->jump = u;
    v = v->parent;
  }
  n++;
  return true;
}
```

このメソッドはまず x の探索経路を辿り、その後に根方向に向かって戻る。この各ステップは定数時間で実行できるので、add(x) の実行時間は $O(w)$ である。

remove(x) は add(x) のすることを取り消す。add(x) と同様にやらなければならないことがたくさんある。

1. x の探索経路を辿り、x を含む葉 u を見つける。
2. u を双方向連結リストから削除する。
3. u を削除し、x の探索経路に含まれない子を持つノード v を見つけるまで x の探索経路を逆に辿りながら、その過程で訪問したノードを削除する。
4. v から根まで辿りながら、u を指していた jump があれば更新する。

図 13.5 に削除の様子を描いた。

BinaryTrie

```
bool remove(T x) {
  // 1 - find leaf, u, containing x
```

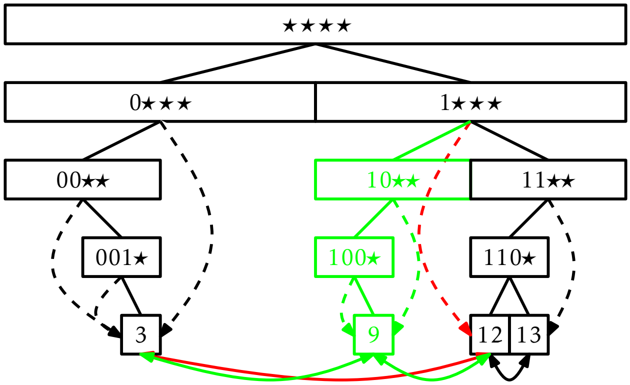


図 13.5: 図 13.2 の BinaryTrie から値 9 を削除する。

```
int i = 0, c;
unsigned ix = intValue(x);
Node *u = &r;
for (i = 0; i < w; i++) {
  c = (ix >> (w-i-1)) & 1;
  if (u->child[c] == NULL) return false;
  u = u->child[c];
}
// 2 - remove u from linked list
u->prev->next = u->next;
u->next->prev = u->prev;
Node *v = u;
// 3 - delete nodes on path to u
for (i = w-1; i >= 0; i--) {
  c = (ix >> (w-i-1)) & 1;
  v = v->parent;
  delete v->child[c];
  v->child[c] = NULL;
  if (v->child[1-c] != NULL) break;
```

```
  }
  // 4 - update jump pointers
  c = (ix >> (w-i-1)) & 1;
  v->jump = u->child[1-c];
  v = v->parent;
  i--;
  for (; i >= 0; i--) {
    c = (ix >> (w-i-1)) & 1;
    if (v->jump == u)
      v->jump = u->child[1-c];
    v = v->parent;
  }
  n--;
  return true;
}
```

定理 **13.1.** *BinaryTrie* は w ビット整数のための *SSet* インターフェースの実装である。*BinaryTrie* は add(x)・remove(x)・find(x) をいずれも $O(w)$ の時間で実行できる。n 個の要素を格納する *BinaryTrie* の領域使用量は $O(n \cdot w)$ である。

XXX: doubly-logarithmic は log(log(x)) のことだろうか（なんと訳そう）

13.2 XFastTrie：$log(logn)$ 時間で検索を行う

BinaryTrie の性能はパッとしないものであった。要素数 n は最大で 2^w であり、$\log n \le w$ が成り立つ。つまりこの本でこれまで説明した比較に基づく SSet の実装はいずれも、少なくとも BinaryTrie と同じ程度効率的であり、またそれらには整数しか格納できないという制限はなかった。

次は XFastTrie を説明する。これは単に BinaryTrie に加えて、トライの各深さにひとつずつ、$w+1$ 個のハッシュテーブルを置いたものである。これを使って、find(x) の性能を $O(\log w)$ に上げられる。BinaryTrie における find(x) は、x の探索経路を辿り、進みたい方向の子を持たないノード u を見

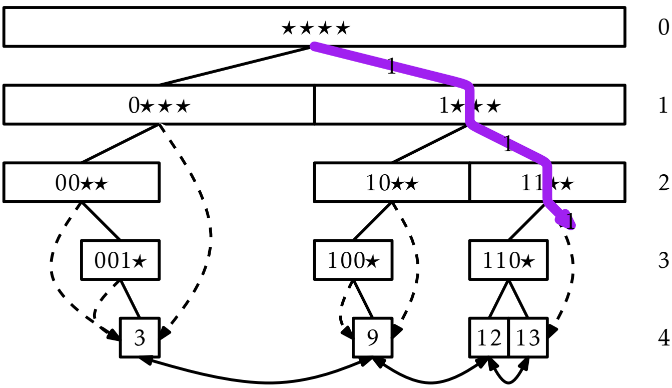


図 13.6: ラベル 111★ を持つノードは存在しないので、14 (1110) の探索経路はラベル 11★★ を持つノードで終了する。

つければ、ほぼ完了であった。あとは、u.jump を利用して葉 v にジャンプし、v か葉のリストにおける v の直前のノードのどちらかを返すだけであった。トライのある深さにおける二分探索でノード u を見つけることで、XFastTrie はこの探索処理を高速に行う。

二分探索を行うためには探しているノード u が、ある深さ i より上にあるのか、i またはその下にあるのかを判定する必要がある。これは x の二進表現における上位 i ビットを見ればわかる。このビット列によって、根から深さ i までの x の探索経路が決まる。例えば、図 13.6 を見てほしい。14（二進表現では 1110）の探索経路における最後のノード u は、深さ 2 にある 11★★ とラベル付けられたノードである。これは深さ 3 に 111★ とラベル付けられたノードが無いためである。このように、深さ i のノードをみな i ビットの整数でラベル付けられる。すると、探している u が深さ i、またはそれより下にあるのは、深さ i に x の上位 i ビットと一致するラベルを持つノードがあるとき、かつそのときに限る。

XFastTrie では、$i \in \{0,\ldots,w\}$ について深さ i のすべてのノードを USet t[i] に格納する。USet はハッシュテーブル（5 章）で実装する。USet を使うと、深さ i に x の上位 i ビットと一致するラベルを持つノードがあるかどうかを期待定数時間で判定できる。具体的には、このノードを次のように見つけられる。t[i].find(x >> (w − i))

ハッシュテーブル t[0],...,t[w] によって、二分探索で u を見つけられる。最初は、$0 \le i < w+1$ を満たすある深さ i に u があることを知っている。ま

ずは $\mathtt{l} = 0, \mathtt{h} = \mathtt{w}+1$ とする。$\mathtt{i} = \lfloor(\mathtt{l}+\mathtt{h})/2\rfloor$ として、ハッシュテーブル $\mathtt{t}[\mathtt{i}]$ を繰り返し検索する。$\mathtt{t}[\mathtt{i}]$ が $\mathtt{x}$ の上位 $\mathtt{i}$ ビットと一致するラベルを持つノードを含むとき、$\mathtt{l} = \mathtt{i}$ とする。（このとき、$\mathtt{u}$ は深さ $\mathtt{i}$、またはそれよりも下にある。）そうでなければ、$\mathtt{h} = \mathtt{i}$ とする。（このとき、$\mathtt{u}$ は深さ $\mathtt{i}$ よりも上にある。）$\mathtt{h}-\mathtt{l} \le 1$ になればこの処理を終了する。このとき、$\mathtt{u}$ は深さ $\mathtt{l}$ にある。あとは u.jump と葉の双方向連結リストとを使って、find($\mathtt{x}$) の処理を完了できる。

XFastTrie
```
T find(T x) {
  int l = 0, h = w+1;
  unsigned ix = intValue(x);
  Node *v, *u = &r;
  while (h-l > 1) {
    int i = (l+h)/2;
    XPair<Node> p(ix >> (w-i));
    if ((v = t[i].find(p).u) == NULL) {
      h = i;
    } else {
      u = v;
      l = i;
    }
  }
  if (l == w) return u->x;
  Node *pred = (((ix >> (w-l-1)) & 1) == 1)
                 ? u->jump : u->jump->prev;
  return (pred->next == &dummy) ? nullt : pred->next->x;
}
```

上のメソッドの while ループにおける各繰り返しにおいて、$\mathtt{h}-\mathtt{l}$ は約半分になる。よって、このループを $O(\log \mathtt{w})$ 回繰り返すと $\mathtt{u}$ が見つかる。各繰り返しは決まった量だけの仕事をし、一回だけ USet の find($\mathtt{x}$) を呼ぶ。USet の検索処理の実行時間の期待値は定数である。残りの処理の実行時間も定数なので、XFastTrie における find($\mathtt{x}$) の実行時間の期待値は $O(\log \mathtt{w})$ である。

XFastTrie における add(x)・remove(x) は BinaryTrie におけるそれらの操作とほとんど同じである。修正が必要なのはハッシュテーブル t[0],...,t[w] を管理する必要があることだけである。add(x) の実行中に深さ i でノードが作られるなら、このノードを t[i] に加える。remove(x) の実行中に深さ i でノードが削除されるなら、このノードを t[i] から削除する。ハッシュテーブルにおける追加・削除の実行時間の期待値は定数なので、この修正によって add(x)・remove(x) の実行時間は定数程度しか増えない。add(x)・remove(x) のコードは、BinaryTrie のときに提示した（長い）コードとほぼおなじなので、ここには掲載しない。

次の定理は XFastTrie の性能をまとめたものだ。

定理 **13.2.** *XFastTrie* は w ビット整数の *SSet* インターフェースを実装する。*XFastTrie* がサポートするのは次の操作である。

- add(x)・remove(x) の実行時間の期待値は $O(\mathtt{w})$ である。
- find(x) の実行時間の期待値は $O(\log \mathtt{w})$ である。

n 個の要素を格納する *XFastTrie* の領域使用量は $O(\mathtt{n} \cdot \mathtt{w})$ である。

13.3 YFastTrie：実行時間が Doubly-Logarithmic な SSet

XFastTrie は BinaryTrie と比べて問い合わせの応答時間は指数的に速くなった。しかし、add(x)・remove(x) の実行時間は依然としてさほど速くない。さらに、領域使用量は $O(\mathtt{n} \cdot \mathtt{w})$ であり、この本で紹介した他の SSet の実装の $O(\mathtt{n})$ と比べて大きい。このふたつの問題は関連している。n 回の add(x) によって大きさ $\mathtt{n} \cdot \mathtt{w}$ の構造を作るなら、add(x) の一回あたりの実行時間・領域使用量は少なくとも w 程度のオーダーになる。

次に紹介する YFastTrie は XFastTrie の実行時間と領域使用量を共に改善する。YFastTrie は XFastTrie xft を使うが、xft には $O(\mathtt{n}/\mathtt{w})$ 個の値しか格納しない。こうすると xft の領域使用量は $O(\mathtt{n})$ になる。さらに、w 回に一回だけの add(x)・remove(x) が xft に add(x)・remove(x) を実行する。こうして、xft における add(x)・remove(x) の平均呼び出しコストは定数になる。

きっと疑問を感じるだろう。xft には n/w 個だけの要素を格納するなら、残りの $\mathtt{n}(1-1/\mathtt{w})$ 個の要素はどこに行くのだろう。これらの要素は**二次構造**である Treap(7.2 節) を拡張したデータ構造に格納する。二次構造は約 n/w 個

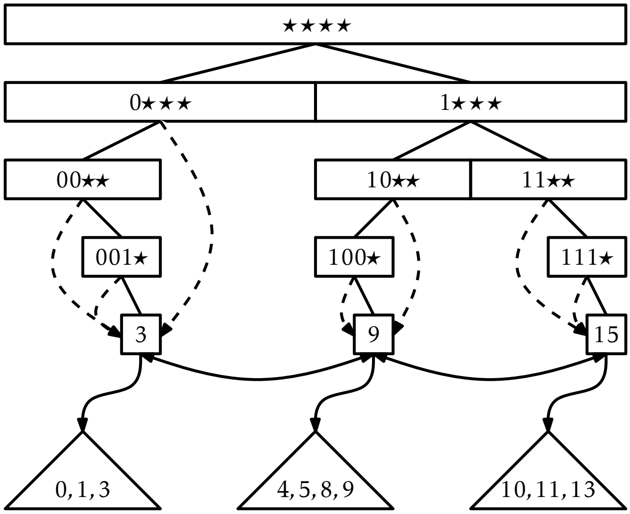


図 13.7: 0, 1, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13 を含む YFastTrie

あり、平均的にはそれぞれ $O(\mathtt{w})$ 個の要素を格納する。Treap は SSet の操作を対数時間でサポートするので、それぞの操作の実行時間は期待通り $O(\log \mathtt{w})$ である。

具体的には、YFastTrie は、独立に確率 $1/\mathtt{w}$ でランダムに選り抜いたデータを格納する XFastTrie xft を含む。都合上、xft は常に値 $2^{\mathtt{w}}-1$ を含むものとする。また、xft が含む要素を $\mathtt{x}_0 < \mathtt{x}_1 < \cdots < \mathtt{x}_{k-1}$ とする。要素 $\mathtt{x}_i$ には対応する Treap $\mathtt{t}_i$ があり、これは $\mathtt{x}_{i-1}+1,\ldots,\mathtt{x}_i$ の範囲の値をすべて格納する。図 13.7 にこの様子を示す。

YFastTrie における find(x) は簡単である。x を xft から検索し、Treap $\mathtt{t}_i$ に対応するある値 $\mathtt{x}_i$ を得る。続いて、$\mathtt{t}_i$ の find(x) メソッドを使って、問い合わせに答える。このメソッド全体を一行で書ける。

YFastTrie
```
T find(T x) {
  return xft.find(YPair<T>(intValue(x))).t->find(x);
}
```

はじめの xft に対する find(x) にかかる時間は $O(\log \mathtt{w})$ である。二回目の Treap に対する find(x) にかかる時間は $O(\log r)$ である。ここで、r は Treap

の大きさである。この節の後半で Treap の大きさの期待値は $O(\mathtt{w})$ であることを示すので、結局この操作の実行時間は $O(\log \mathtt{w})$ である。[*1]

YFastTrie に要素を追加するのも、ほとんどの場合は単純である。add(x) メソッドは xft.find(x) を呼んで、x を挿入すべき Treap t を特定する。続いて t.add(x) を呼んで x を t に追加する。ここで確率 $1/\mathtt{w}$ で表が、確率 $1-1/\mathtt{w}$ で裏が出る、偏りのあるコインを投げる。もし表が出れば、x を xft に追加する。

これが少し複雑なところである。x を xft に追加するとき、Treap t をふたつの Treap t1, t′ に分割しなければならない。t1 は x 以下の値をすべて含む。t′ はそれ以外の値を含むように t を更新したものである。最後に、組み (x, t1) を xft に追加する。図 13.8 に例を示す。

YFastTrie
```
bool add(T x) {
  unsigned ix = intValue(x);
  Treap1<T> *t = xft.find(YPair<T>(ix)).t;
  if (t->add(x)) {
    n++;
    if (rand() % w == 0) {
      Treap1<T> *t1 = (Treap1<T>*)t->split(x);
      xft.add(YPair<T>(ix, t1));
    }
    return true;
  }
  return false;
  return true;
}
```

x を t に追加するのにかかる時間は $O(\log \mathtt{w})$ である。問 7.12 では、t を t1 と t′ とに分割するのにかかる時間の期待値も $O(\log \mathtt{w})$ であることを示す。組み (x,t1) を xft に追加するのは $O(\mathtt{w})$ の時間がかかるが、これは確率 $1/\mathtt{w}$ で

[*1] これは Jensen **の不等式**の応用すればよい。$\mathrm{E}[r]=\mathtt{w}$ ならば $\mathrm{E}[\log r] \le \log w$ である。

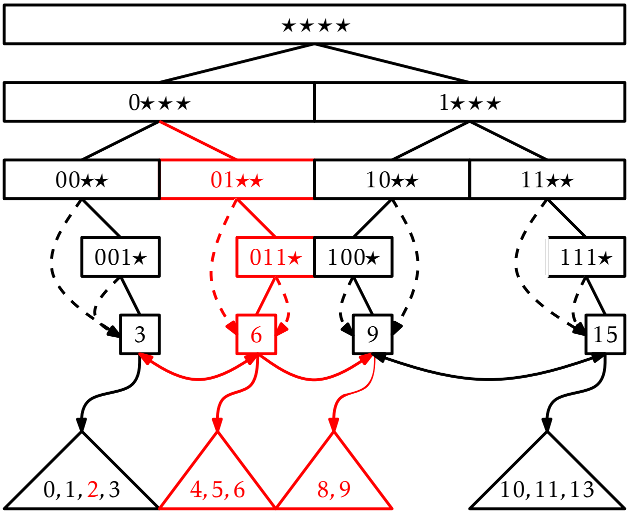


図 13.8: YFastTrie に値 2、値 6 を追加する。6 を追加する時のコイン投げで表が出たので、6 は xft に追加され、4,5,6,8,9 を含む Treap は分割される。

のみ起きる。以上より、add(x) の実行時間の期待値は次のようになる。

$$O(\log w) + \frac{1}{w}O(w) = O(\log w)$$

remove(x) は add(x) のしたことを取り消す。xft を使って、xft.find(x) の結果を教えてくれる葉 u を見つける。u から x を含む Treap t を得て、t から x を削除する。もし x が xft にも含まれていれば（そして x が $2^w - 1$ でなければ)、x を xft から削除し、x の Treap の要素を Treap t2 に追加する。ここで、t2 は連結リストにおける u の直後のノードに対応する Treap である。図 13.9 にこの様子を示す。

YFastTrie

```
bool remove(T x) {
  unsigned ix = intValue(x);
  XFastTrieNode1<YPair<T> > *u = xft.findNode(ix);
  bool ret = u->x.t->remove(x);
  if (ret) n--;
  if (u->x.ix == ix && ix != UINT_MAX) {
```

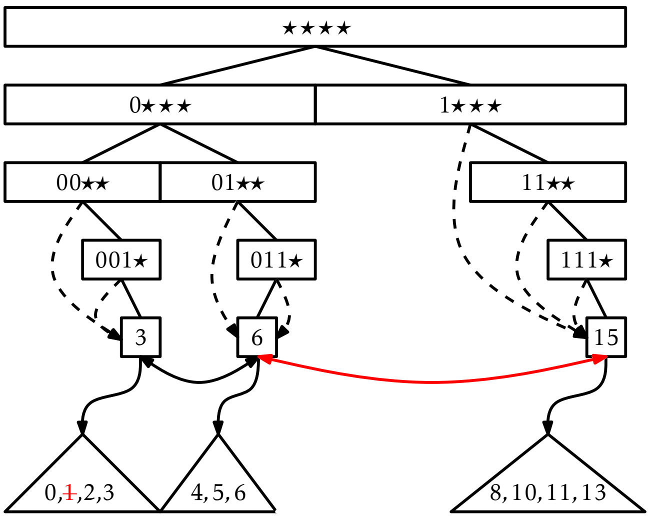


図 13.9: 図 13.8 の YFastTrie から値 1、値 9 を削除する。

```
    Treap1<T> *t2 = u->child[1]->x.t;
    t2->absorb(*u->x.t);
    xft.remove(u->x);
  }
  return ret;
}
```

xft からノード u を見つけるのに必要な時間の期待値は $O(\log w)$ である。t から x を削除するのにかかる時間の期待値も $O(\log w)$ である。繰り返しになるが、問 7.12 では、t を t1 と t′ とに分割するのにかかる時間の期待値も $O(\log w)$ であることを示す。xft から x を削除する必要があるときは、この処理に $O(w)$ の時間がかかるが、xft に x が含まれる確率は $1/w$ である。よって、YFastTrie から要素を削除するときにかかる時間の期待値は $O(\log w)$ である。

議論の前半で、このデータ構造における各 Treap の大きさについて説明するのを後回しにしていた。この章を終える前に、必要な結果を示しておく。

補題 13.1. x を *YFastTrie* に格納する整数とし、n_x を x を含む *Treap* t の要

$$\begin{array}{c} \mathrm{H} \\ \mathtt{x}_{i-k-1}\end{array}\;\overbrace{\underbrace{\begin{array}{ccccc} \mathrm{T}&\mathrm{T}&\cdots&\mathrm{T}&\mathrm{T}\\ \mathtt{x}_{i-k}&\mathtt{x}_{i-k+1}&\cdots&\mathtt{x}_{i-2}&\mathtt{x}_{i-1}\end{array}}_{k}\;\underbrace{\begin{array}{cccccc}\mathrm{T}&\mathrm{T}&\mathrm{T}&\cdots&\mathrm{T}&\mathrm{H}\\ \mathtt{x}_i=\mathtt{x}&\mathtt{x}_{i+1}&\mathtt{x}_{i+2}&\cdots&\mathtt{x}_{i+j-2}&\mathtt{x}_{i+j-1}\end{array}}_{j}}^{\text{elements in treap, }\mathtt{t}\text{, containing }\mathtt{x}}$$

図 13.10: x を含む treap t の要素数は二回のコイン投げにより決まる。

素数とする。このとき $E[n_x] \le 2w-1$ が成り立つ。

証明. 図 13.10 を参照せよ。$x_1 < x_2 < \cdots < x_i = x < x_{i+1} < \cdots < x_n$ を YFastTrie の各要素とする。Treap t は x 以上の要素を含む。これらを $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j-1}$ をとすると、x_{i+j-1} はこのうち add(x) のときの偏りのあるコイン投げで表が出た唯一の要素である。つまり、$E[j]$ は偏りのあるコイン投げで、はじめて表が出るまで繰り返すときの試行回数の期待値に等しい。[*2] コイン投げは独立な試行であり、確率 $1/w$ で表が出る。そのため $E[j] \le w$ である。($w = 2$ の場合の解析として補題 4.2 を参照せよ。)

同様に、t の x よりも小さい要素 $x_{i-1}, \ldots, x_{i-k}$ について、これらの k 回のコイン投げはいずれも裏であり、x_{i-k-1} のコイン投げは表である。これは、先の段落と同じコイン投げ試行において、最後の試行を数えない場合なので、$E[k] \le w-1$ である。

まとめると、$n_x = j + k$ より、

$$E[n_x] = E[j+k] = E[j] + E[k] \le 2w-1 \qquad \square$$

補題 13.1 が次の定理を示す最後のピースであった。次の定理は YFastTrie の性能をまとめるものである。

定理 13.3. *YFastTrie* は w ビット整数の *SSet* を実装する。*YFastTrie* は add(x)・remove(x)・find(x) をサポートし、いずれの実行時間の期待値も $O(\log w)$ である。n 要素を格納する *YFastTrie* の領域使用量は $O(n+w)$ である。

領域使用量における項 w があるのは xft が常に値 $2^w - 1$ を格納しているためである。実装を修正し、この値を格納せずに済ませることも可能だ。(ただ

[*2] この解析は j が $n-i+1$ を越えることがないことを無視している。しかし、これは $E[j]$ を減らすため、上界に関する性質はやはり成り立つ。

し、いくつか場合分けをコードに追加する必要がある。）この場合、上の定理における領域使用量は $O(\mathtt{n})$ になる。

13.4 ディスカッションと練習問題

add(x)・remove(x)・find(x) の実行時間がいずれも $O(\log \mathtt{w})$ であるデータ構造としてはじめて提案されたのは、van Emde Boas によるもので、van Emde Boas **木**（または stratified **木**）という名で知られている。[72] オリジナルの van Emde Boas 木の大きさは $2^{\mathtt{w}}$ で、このために大きな整数についてこのデータ構造は非実用的であった。

XFastTrie・YFastTrie は Willard [75] によって提案された。XFastTrie と van Emde Boas には密接な関係がある。例えば、XFastTrie におけるハッシュテーブルは van Emde Boas 木の配列を置き換えたものである。つまり、ハッシュテーブル t[i] に要素を格納する代わりに、van Emde Boas では長さ $2^{\mathtt{i}}$ の配列に要素を格納する。

他の整数を格納するためのデータ構造としては、Fredman と Willard の fusion tree がある。[32] このデータ構造は n 個の w ビット整数を $O(\mathtt{n})$ の領域に格納でき、find(x) を $O((\log \mathtt{n})/(\log \mathtt{w}))$ の時間で実行できる。$\log \mathtt{w} > \sqrt{\log \mathtt{n}}$ ならば fusion tree を、$\log \mathtt{w} \leq \sqrt{\log \mathtt{n}}$ なら YFastTrie を使えば、領域使用量 $O(\mathtt{n})$ であり、find(x) にかかる時間は $O(\sqrt{\log \mathtt{n}})$ であるデータ構造が得られる。近年の Pătraşcu and Thorup [57] が示した下界によると、$O(\mathtt{n})$ だけの領域を使うデータ構造としてはすくなくともほぼ最適である。

問 **13.1.** 単純化された BinaryTrie を設計・実装せよ。これは連結リストやジャンプポインタを持たないが、find(x) の実行時間は依然として $O(\mathtt{w})$ である必要がある。

問 **13.2.** 単純化された XFastTrie を設計・実装せよ。これは二分トライを使わない。代わりに、この実装ではすべてを双方向連結リストと、$\mathtt{w}+1$ 個のハッシュテーブルとに格納する。

問 **13.3.** BinaryTrie は、長さ w のビット列を根から葉への経路として表現するデータ構造であると考えられる。この発想を可変章の文字列を格納する SSet の実装に拡張し、add(s)・remove(s)・find(s) をいずれも s の長さに比例する時間で実行できるデータ構造を実装せよ。

ヒント：データ構造の各ノードは文字の値によってインデックスを計算する

ハッシュテーブルを格納する。

問 **13.4.** 整数 $x \in \{0,\ldots 2^w - 1\}$ について、$d(x)$ を x と `find(x)` の返り値との差と定義する。（なお、`find(x)` が `null` を返すときは、$d(x)$ は 2^w であるとする。）例えば、`find(23)` が 43 を返すとき、$d(23) = 20$ である。

1. `XFastTrie` における `find(x)` を修正し、実行時間の期待値が $O(1 + \log d(x))$ であるものを設計・実装せよ。ヒント：ハッシュテーブル $t[w]$ は $d(x) = 0$ であるすべての値 x を格納することで、処理を開始する良い位置を見つけられる。
2. `XFastTrie` における `find(x)` を修正し、実行時間の期待値が $O(1 + \log\log d(x))$ であるものを設計・実装せよ。

第 14

外部メモリの探索

この本を通じて計算のモデルとしては 1.4 節で定義した `w` ビットのワード RAM モデルを使ってきた。これは、コンピュータのランダムアクセスメモリはデータ構造内のすべてのデータを格納できるくらい大きいと暗に仮定していたということである。しかし時にはこの仮定が成り立たないこともある。大きすぎてどんなコンピュータのメモリにも収まりきらないデータはたくさん存在するのである。このような場合、ハードディスクドライブ（HDD）・ソリッドステートドライブ（SSD）・ネットワーク越しのサーバーなどの外部ストレージにデータを蓄えざるを得ない。

外部ストレージへのデータアクセスは非常に遅い。この本を書くのに使っているコンピュータでは、ハードディスクへの平均アクセス時間は 19ms、SSD の場合は 0.3ms である。これに対してにランダムアクセスメモリの場合は 0.000113ms 未満である。RAM へのアクセスは SSD と比べて 2500 倍、HDD と比べて 160000 倍以上高速である。

これらの速度は典型的な値である。RAM へのランダムアクセスは HDD や SSD へのランダムアクセスと比べて数千倍高速である。しかしアクセスにかかる時間だけを考えれば十分というわけではない。HDD や SSD のバイトにアクセスするときには、実際は**ブロック**単位での読み出しが行われる。コンピュータに接続されるドライブは大きさ 4096 のブロックを持つ [*1]。1 バイトの読み出しをする度にドライブは 4096 バイトを返してくる。このことを踏まえてデータ構造を設計すれば、この 4096 バイトを操作にうまく利用することができるだろう。

これが**外部メモリモデル**の背後にあるアイデアである。図 14.1 にはこれを

[*1] 訳注：異なる大きさが使われることもあるが、ここでは簡単のため 4096 で統一している。

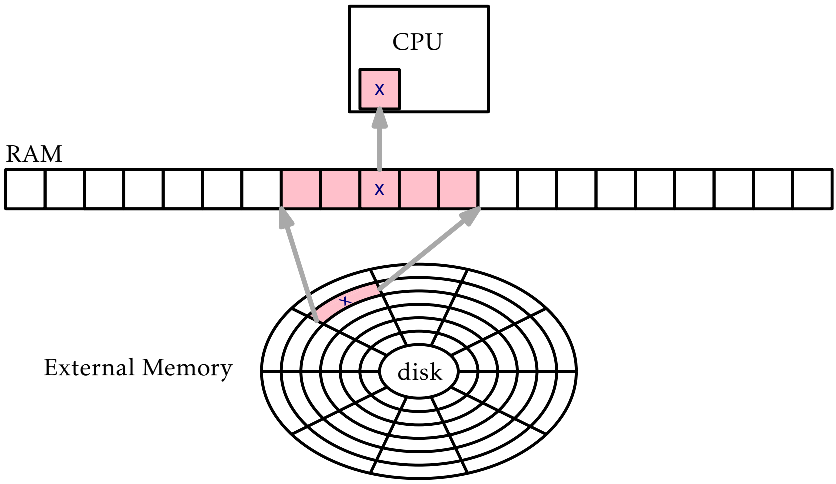


図 14.1: 外部メモリモデルでは、外部メモリに含まれる要素 x にアクセスするためには x を含むブロックをまるごと RAM に読み込む必要がある。

図示した。このモデルではコンピュータはすべてのデータが保存されている大きな外部メモリにアクセスできる。このメモリは**ブロック**に分割されており、それぞれのブロックは B ワードからなる。このコンピュータは有限の内部メモリも利用でき、ここで計算を実行できる。内部メモリと外部メモリの間でブロックを転送するのには一定の時間がかかる。内部メモリでの計算は**タダ**である。つまり一切の時間がかからない。この仮定は奇妙に感じるかもしれないが、外部メモリへのアクセスが非常に遅いことを強調した結果である。

本格的な外部メモリモデルでは内部メモリの大きさもパラメータである。しかし、この章で扱うデータ構造では内部メモリのサイズは $O(B+\log_B \mathtt{n})$ で十分である。これは定数個だけのブロックと、高さ $O(\log_B \mathtt{n})$ だけのスタックに必要なメモリである。多くの場合 $O(B)$ が支配的な項である。例えば比較的小さい値 $B=32$ であっても、すべての $\mathtt{n} \le 2^{160}$ について $B \ge \log_B \mathtt{n}$ が成り立つ。十進法では、$B \ge \log_B \mathtt{n}$ が以下の範囲で成り立つ。

$$\mathtt{n} \le 1\,461\,501\,637\,330\,902\,918\,203\,684\,832\,716\,283\,019\,655\,932\,542\,976$$

14.1 BlockStore

外部メモリには HDD や SSD など様々なデバイスが含まれる。ブロックの大きさはデバイスごとに定義されており、それぞれ独自のシステムコールによってアクセスされる。説明を単純にし、一般的なアイデアに焦点をあてるため、外部メモリのデバイスを `BlockStore` と呼ばれるオブジェクトに隠蔽する。`BlockStore` はブロックの集まりを格納する。各ブロックの大きさは B である。各ブロックは整数のインデックスによって一意に特定される。`BlockStore` は次の操作をサポートする。

1. `readBlock(i)`：インデックス `i` のブロックの内容を返す。
2. `writeBlock(i,b)`：インデックス `i` のブロックに `b` の内容を書く。
3. `placeBlock(b)`：新たなインデックスを返し、そこに `b` の内容を書く。
4. `freeBlock(i)`：インデックス `i` のブロックを開放する。これは指定したブロックの内容をもう使わず、このブロックに割り当てられていた外部メモリは別の用途に使ってよいことを示す。

`BlockStore` は B バイトのブロックに分割されたディスク上のファイルだと考えるのが最も想像しやすいだろう。このとき、`readBlock(i)`・`writeBlock(i,b)` は、このファイルのバイト列 $\mathtt{i}B,\ldots,(\mathtt{i}+1)B-1$ の読み・書きである。さらに、`BlockStore` は利用可能なブロックからなる**フリーリスト**を保持してもよい。 `freeBlock(i)` により解放されたブロックはフリーリストに追加される。こうすれば、`placeBlock(b)` はフリーリストのブロックを使い、利用可能なブロックがないときだけファイルの末尾に新しいブロックを追加するようにできる。

14.2 B 木

この節では二分木の一般化である、B 木と呼ばれる、外部メモリモデルにおいて効率的なデータ構造を紹介する。それ以外にも B 木は 9.1 節で説明した 2-4 木の自然な一般化だと考えることもできる。（B 木において $B=2$ とおくと 2-4 木になる。）

任意の整数 $B\geq 2$ について ***B* 木**とは木であって、すべての葉は同じ深さにあり、すべての根でない内部ノードの子の数が B 以上 $2B$ 以下なものである。ノード `u` の子は配列 `u.children` に格納される。ただし、子の数の条件は根

では緩和され、2 以上 $2B$ 以下である。

B 木の高さが h のとき、葉の数 ℓ は次の式を満たす。

$$2B^{h-1} \le \ell \le (2B)^h$$

この式の左辺は根の子が 2 個のみで全ての内部ノードが B 個の子を持つときの葉の数に対応し、右辺は葉以外のノードの子が全て $2B$ 個であるときの葉の数に対応する。最初の不等式の両辺から対数を取り、項を並べ替えると次の式が得られる。

$$\begin{aligned} h &\le \frac{\log \ell - 1}{\log B} + 1 \\ &\le \frac{\log \ell}{\log B} + 1 \\ &= \log_B \ell + 1 \end{aligned}$$

つまり、B 木の高さは B を底とする葉の数の対数に比例する。

B 木における各ノード u にはキーの配列 u.keys$[0],\ldots,$u.keys$[2B-1]$ を格納する。u が k 個の子を持つ内部ノードのとき、u に格納されるキーの数はちょうど $k-1$ であり、それぞれ u.keys$[0],\ldots,$u.keys$[k-2]$ に格納される。u.keys における残りの $2B-k+1$ 個の配列のエントリは null にしておく。u が根でない葉ノードのとき、u は $B-1$ 個以上 $2B-1$ 個以下のキーを持つ。B 木のキーは二分探索木と同様の順序を守る。$k-1$ 個のキーを格納する任意のノード u は次の式を満たす [*2]。

$$\texttt{u.keys}[0] < \texttt{u.keys}[1] < \cdots < \texttt{u.keys}[k-2]$$

u が内部ノードなら、任意の i $\in \{0,\ldots,k-2\}$ について u.keys[i] は u.children[i] を根とする部分木に格納されるどのキーよりも大きく、u.children[i + 1] を根とする部分木に格納されるどのキーよりも小さい。つまり、厳密な書き方ではないが、次が成り立つ。

$$\texttt{u.children}[\texttt{i}] \prec \texttt{u.keys}[\texttt{i}] \prec \texttt{u.children}[\texttt{i}+1]$$

$B = 2$ である B の例を図 14.2 に示す。

[*2] 訳注：この本では B 木はキーの重複がない SSet インターフェースを実装するために使うため、等号なし不等号による。キーの重複がある multiset の実装時は u.keys$[0] \le$ u.keys$[1] \le \cdots \le$ u.keys$[k-2]$、u.children[i] $\le$ u.keys[i] $\le$ u.children[i + 1] を満たす。

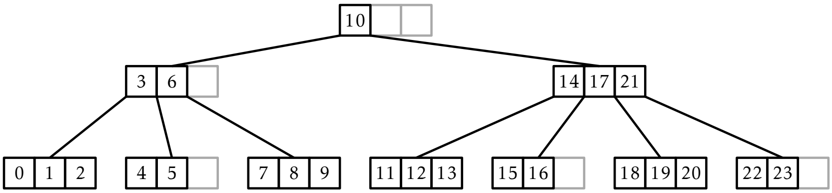


図 14.2: $B = 2$ である B 木

B 木のノードに格納されるデータの大きさは $O(B)$ である。そのため外部メモリのことを考えると、B 木の B の値は外部メモリのブロックの大きさに合わせて選ばれる。こうすれば外部メモリモデルにおいて B 木の操作にかかる時間は、操作の際にアクセス（読み書き）するノードの数に比例する。

例えば、キーが 4 バイト整数であり、ノードのインデックスも 4 バイトであるとする。このとき $B = 256$ とすれば各ノードは

$$(4+4)\times 2B = 8\times 512 = 4096$$

バイトのデータを格納することになる。この章の最初に説明したように、ハードディスクや SSD のブロックサイズは 4096 バイトなので、この B はこれらのデバイスに適した値である。

BTree クラスは B 木の実装である。BTree のノードを格納する BlockStore オブジェクト bs と、根のインデックス ri を格納する。また、他のデータ構造と同様に、整数 n はデータ構造の要素数を表す。

BTree
```
int n; // number of elements stored in the tree
int ri; // index of the root
BlockStore<Node*> bs;
```

14.2.1 要素の検索

図 14.3 に示した find(x) の実装は、二分探索木における find(x) の実装の一般化である。x を検索するために、根から処理を開始し、ノード u のキーを利用して次に u の子のうちのどれに進むべきかを決める。

より具体的には、ノード u にいるとき、まずは x が u.keys に格納されているかどうかを確認する。格納されていれば、x が見つかったので処理を終了

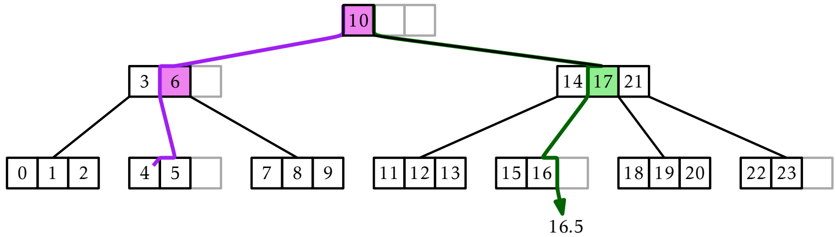


図 14.3: B 木における成功する探索（4 を探す）と、失敗する探索（16.5 を探す）の様子。色を付けたノードは探索の途中に値を更新されるものである。

する。そうでなければ、最小の u.keys[i] > x を満たす最小の整数 i を求め、u.children[i] を根とする部分木に進んで探索を続ける。もし u.keys に x より大きなキーがないときは、u の一番右の子に進んで探索を続ける。二分探索木と同じように、このアルゴリズムは x より大きなキーのうち、最後に訪れたもの z を記録しておく。x が見つからなかったときは、x 以上の最小の値である z を返す。

BTree
```
T find(T x) {
  T z = null;
  int ui = ri;
  while (ui >= 0) {
    Node *u = bs.readBlock(ui);
    int i = findIt(u->keys, x);
    if (i < 0) return u->keys[-(i+1)]; // found it
    if (u->keys[i] != null)
      z = u->keys[i];
    ui = u->children[i];
  }
  return z;
}
```

find(x) の肝は findIt(a,x) であり、これは null 埋めされた配列 a から x を探すメソッドである。図 14.4 に示したように、a[0],...,a[$k-1$] にはキーが整列された状態で、a[k],...,a[a.length -1] にはすべて null が入っている。x

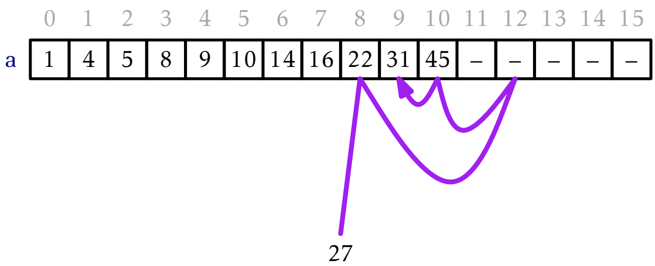


図 14.4: findIt(a,27) を実行する様子

がこの配列の i 番目の位置に入っているとき、findIt(a,x) は $-$i-1 を返す。そうでないときは、a[i] $>$ x または a[i] $=$ null を満たす最小のインデックス i を返す。

BTree
```
int findIt(array<T> &a, T x) {
  int lo = 0, hi = a.length;
  while (hi != lo) {
    int m = (hi+lo)/2;
    int cmp = a[m] == null ? -1 : compare(x, a[m]);
    if (cmp < 0)
      hi = m;      // look in first half
    else if (cmp > 0)
      lo = m+1;    // look in second half
    else
      return -m-1; // found it
  }
  return lo;
}
```

findIt(a,x) は二分探索を使う。これは各ステップで探索空間を半分に減らすことで、$O(\log(\texttt{a.length}))$ の時間で処理を終える。ここでは a.length $= 2B$ なので findIt(a,x) の (RAM モデルでの) 実行時間は $O(\log B)$ である。

B 木における find(x) の実行時間をいつものワード RAM モデル（全命令を数える）でも、または外部メモリモデル（アクセスするノードの数だけを

数える）でも解析できる。B 木の葉は少なくともひとつのキーを格納し、ℓ 個の葉を持つ B 木の高さは $O(\log_B \ell)$ なので、$\mathtt{n}$ 個のキーを格納する B 木の高さは $O(\log_B \mathtt{n})$ である。よって、外部メモリモデルでは、find(x) の実行時間は $O(\log_B \mathtt{n})$ である。ワード RAM モデルにおける実行時間を計算するためには、アクセスするすべてのノードについて findIt(a, x) 呼び出しのコストを考えればよい。よって、この場合の find(x) の実行時間は次のようになる。

$$O(\log_B \mathtt{n}) \times O(\log B) = O(\log \mathtt{n})$$

14.2.2 要素の追加

B 木と 6.2 節で説明した BinarySearchTree との重要な違いは、B 木のノードは親へのポインタを持っていないことである。この理由を軽く説明する。親へのポインタがないため、B 木における add(x)・remove(x) は再帰を使うのがもっとも簡単な実装方法となる。

他のバランスされた探索木と同様に、add(x) の際に何らかのバランス調整が必要になる。B 木ではこれはノードの**分割**によって行われる。図 14.5 を見ながら続く説明を読んで欲しい（訳注：¢ 記号は後の節で実行時間の解析に使うため、ここでは無視してよい。）。分割はふたつの再帰レベルに渡って起きるが、$2B$ 個のキーを含み $2B+1$ 個の子を持つノード u を引数とする操作であると考えると理解しやすいだろう。新たなノード w を作り、このノードは u.children$[B], \ldots,$ u.children$[2B]$ を引き受ける。u のキーのうち大きい方から B 個 u.keys$[B], \ldots,$ u.keys$[2B-1]$ も w に持たせる。この段階で、u は B 個の子と、B 個のキーを持っている。さらに追加で u.keys$[B-1]$ は u の親に渡され、u の親は w も子として引き受ける。

分割操作は 3 つのノードを修正する。これは u・u の親・新たなノード w である。これが B 木において親へのポインタを持たない理由なのである。もし親へのポインタがあると、w が引き取る $B+1$ 個の子すべてについて、親へのポインタを w へのポインタとして書き換える必要がある。これは外部メモリのアクセスを 3 回から $B+4$ 回に増やすことになり、B が大きいときに B 木が非効率になってしまう。

B 木における add(x) の様子を図 14.6 に示す。概要としては、まずこのメソッドは値 x を追加する葉 u を見つける。このときに u が一杯になった場合には（つまり既に $2B-1$ 個のキーを持っていれば）、u を分割する。この結果 u の親が一杯になった場合には、u の親を分割する。さらにその結果 u の親の親が一杯になった場合には... ということを繰り返す。ひとつずつ木を上に登

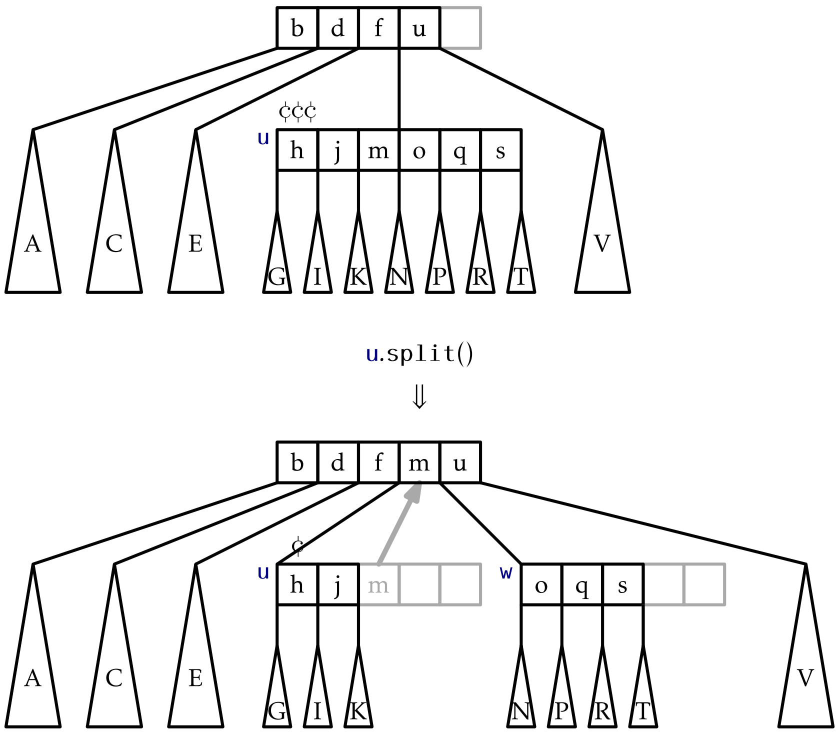


図 14.5: $B=3$ である B 木における、ノード u の分割。キー u.keys[2] = m は u からその親に移る。

りながら、一杯でないノードを見つけるか、根を分割するまでこの処理を繰り返す。一杯でないノードが見つかった場合には単に処理を終了する。根を分割した場合には、新たな根を作り、元の根を分割して得られたふたつのノードを共に新たな根の子にする [*3]。

add(x) の実行について整理すると、まずは根からスタートし、x を追加すべき葉を見つけ、その葉に x を追加し、根に向かって戻りながら、その途中で見かけた一杯になったノードを分割する。このような概要を頭に入れて、次はこのメソッドをどう再帰的に実装するかの詳細を見ていく。

add(x) が行う処理のほとんどは addRecursive(x,ui) が担当する。これは識別子 ui を持つノード u を根とする部分木に x を追加するメソッドだ。u が

[*3] 訳注：似た議論を 9.1.1 節で行なったことを思い出そう。

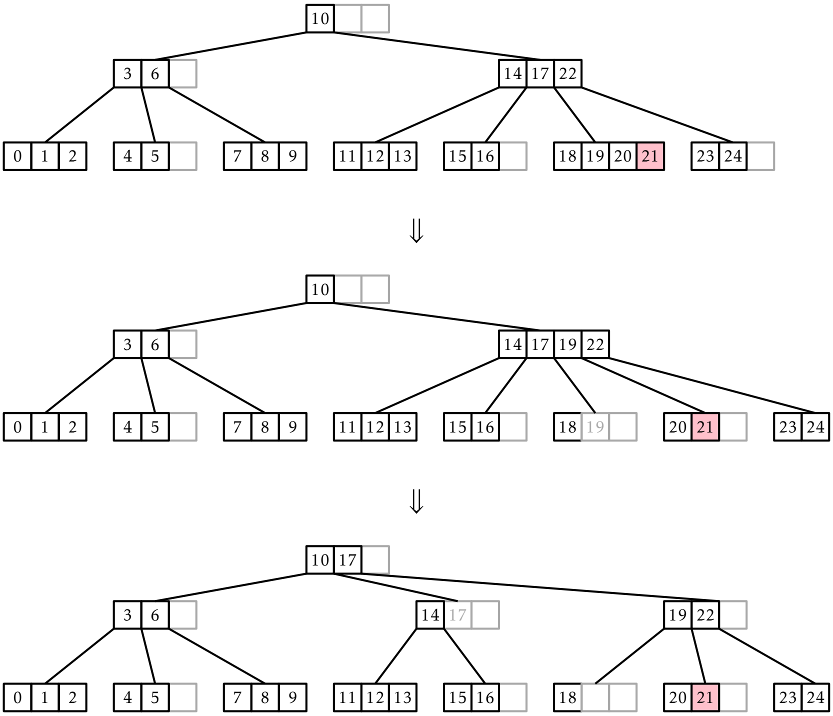


図 14.6: BTree における add(x) の様子。値 21 を追加すると、ふたつのノードが分割される。

葉なら、単に x を u.keys に挿入する。そうでないときは、x を u の子のうち適切なもの u′ に再帰的に追加する。この再帰的な呼び出しはふつうは null を返すが、u′ が分割されるときは新たに作られたノード w の参照を返す。この場合、u は w を子にした上で、その w の最初のキーを奪って、u′ の分割処理を終える。

x が（u または u の子孫に）追加された後、addRecursive(x,ui) は u の持つキーが多すぎないか（$2B-1$ より多くないか）どうかを確認する。もしそうなら u を**分割**しなければならず、u.split() を呼ぶ。u.split() の返り値である新しいノードは addRecursive(x,ui) の返り値として使われる。

BTree
```
Node* addRecursive(T x, int ui) {
  Node *u = bs.readBlock(ui);
```

```
  int i = findIt(u->keys, x);
  if (i < 0) throw(-1);
  if (u->children[i] < 0) { // leaf node, just add it
    u->add(x, -1);
    bs.writeBlock(u->id, u);
  } else {
    Node* w = addRecursive(x, u->children[i]);
    if (w != NULL) {  // child was split, w is new child
      x = w->remove(0);
      bs.writeBlock(w->id, w);
      u->add(x, w->id);
      bs.writeBlock(u->id, u);
    }
  }
  return u->isFull() ? u->split() : NULL;
}
```

addRecursive(x,ui) は add(x) のヘルパーであり、add(x) は addRecursive(x,ri) を呼んで x を B 木の根に挿入する [*4]。addRecursive(x,ri) によって根が分割されるときは、古い根と古い根の分割において新たに作られたノードとを、新たな根は子として持つ。

BTree

```
bool add(T x) {
       Node *w;
       try {
         w = addRecursive(x, ri);
       } catch (int e) {
         return false; // adding duplicate value
       }
```

[*4] 訳注：整数 ri は BTree クラスで根のインデックスとして定義したことを思い出そう。一方で addRecursive(x,ui) の引数として用いられている ui は、最初の呼び出しでは ri そのものであるが、以降はノード u のインデックスであることに注意。

```
        if (w != NULL) {   // root was split, make new root
    Node *newroot = new Node(this);
    x = w->remove(0);
    bs.writeBlock(w->id, w);
    newroot->children[0] = ri;
    newroot->keys[0] = x;
    newroot->children[1] = w->id;
    ri = newroot->id;
    bs.writeBlock(ri, newroot);
        }
        n++;
        return true;
}
```

add(x) とそのヘルパー addRecursive(x,ui) は二段階に分けて分析できる。

下向きに進む段階　再帰の下向きに進む段階では、x を追加する前に、各ノードにて findIt(a,x) を呼び、BTree のノードを順番にアクセスする。find(x) と同様に、このメソッドの実行時間は、外部メモリモデルでは $O(\log_B n)$、ワード RAM モデルでは $O(\log n)$ である。

上向きに進む段階　再帰の上向きに進む段階では、x を追加した後、合わせて最大 $O(\log_B n)$ 回の分割を行う。各分割は 3 つのノードだけに影響するので、この段階の実行時間は外部メモリモデルでは $O(\log_B n)$ である。しかし、各分割は B 個のキーと子をノードからノードに移すので、ワード RAM モデルでは、この実行時間は $O(B \log n)$ である。

B の値はかなり大きく、$\log n$ よりもだいぶ大きいことを思い出そう。そのため、ワード RAM モデルでは B 木への要素の追加はバランスされた二分探索木よりもかなり遅いかもしれない。14.2.4 節では、それほど悪くはないことを示す。実は償却すると、add(x) で実行される分割の回数は定数なのである。そのため、ワード RAM モデルにおける add(x) の償却実行時間は $O(B+\log n)$ なのである。

14.2.3 ノードの削除

BTree における remove(x) も再帰で実装するのが簡単だ。remove(x) を再帰で実装するといくつかのメソッドは複雑になるものの、図 14.7 に示したように全体としては非常に素直になる。ここでは結局、うまくキーを入れ替えて、ある葉 u から値 x′ を削除したい。x′ を削除すると、u の持つキーの数は $B-1$ 未満になるかもしれない。この状態を**アンダーフロー**と呼ぶことにする。

アンダーフローが発生すると、u は兄弟からキーを借りてくるか、兄弟のいずれかと併合される。u が兄弟と併合される場合には、u の親が持つ子とキーの数はそれぞれ 1 減り、その結果今度は u の親でアンダーフローが発生するかもしれない。これは再度、兄弟からキーを借りるか、兄弟と併合されるかで解決されるが、併合する場合には、今度は u の親の親がアンダーフローするかもしれない。この処理は、根に向かいながら行われ、アンダーフローが発生しなくなるか、根のふたつの子が一つに併合されるかすると終了する。後者の場合には、根は削除され、その唯一の子が新たな根になる。

続いて、各ステップの実装方法を詳細に見ていく。remove(x) はまず、削除したい要素 x を見つける。x が葉で見つかれば、x をこの葉から削除する。そうでなく、x がある内部ノード u の u.keys[i] で見つかれば、u.children[i + 1] を根とする部分木の最小値 x′ を削除する。x′ は x より大きい値を格納する BTree の最小値である。続いて、x′ の値で u.keys[i] の x を置き換える。図 14.8 にこの処理の様子を示す。

removeRecursive(x,ui) は上のアルゴリズムの再帰的な実装である。

BTree
```
T removeSmallest(int ui) {
  Node* u = bs.readBlock(ui);
  if (u->isLeaf())
    return u->remove(0);
  T y = removeSmallest(u->children[0]);
  checkUnderflow(u, 0);
  return y;
}
bool removeRecursive(T x, int ui) {
  if (ui < 0) return false;  // didn't find it
  Node* u = bs.readBlock(ui);
```

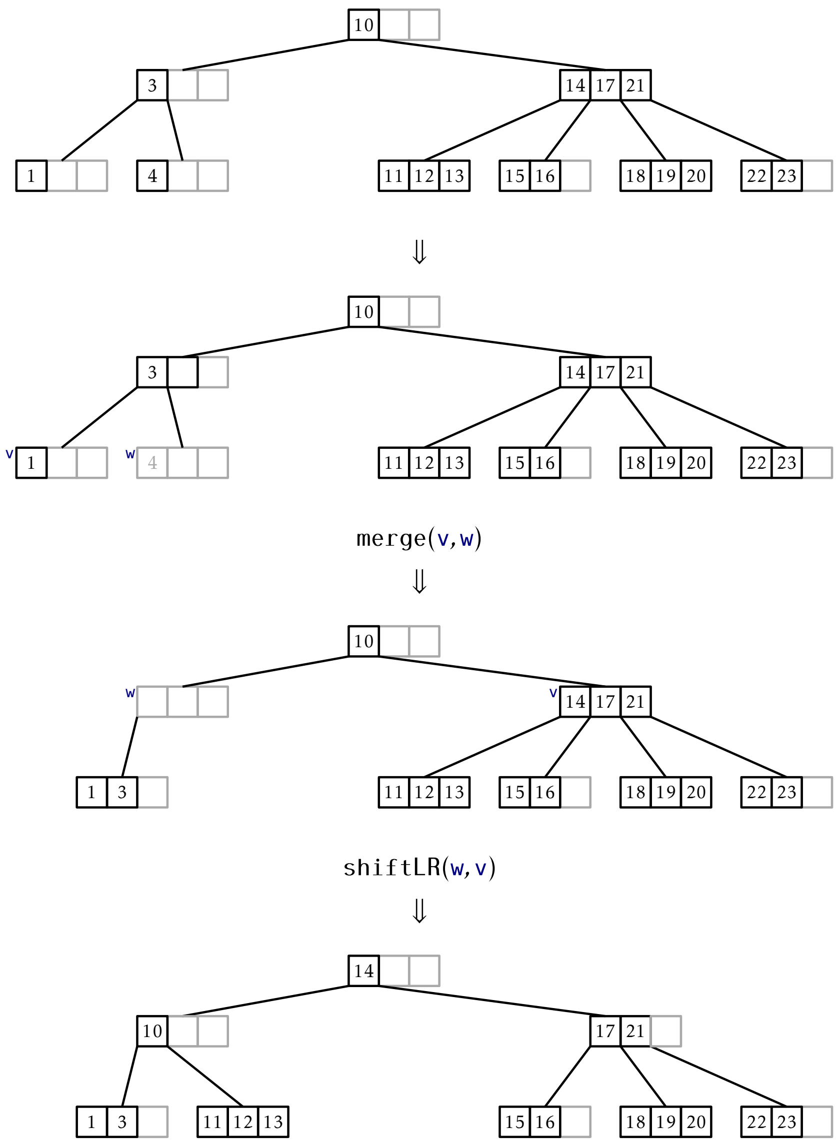


図 14.7: この *B* 木から値 4 を削除すると、併合・借用が一回ずつ発生する。

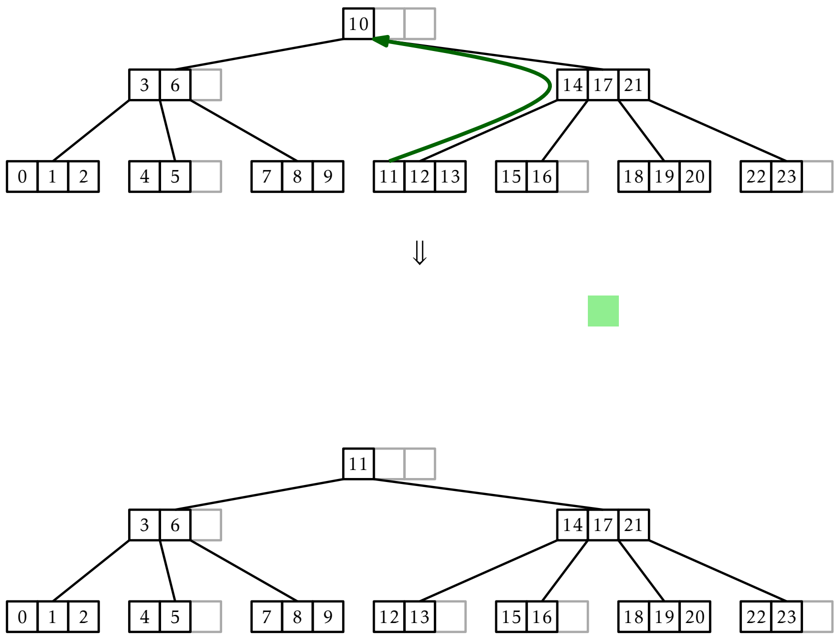


図 14.8: BTree において remove(x) を実行する様子。値 x = 10 を削除するとき、その値を x′ = 11 で上書きし、値 11 を含む葉を削除する。

```
int i = findIt(u->keys, x);
if (i < 0) { // found it
  i = -(i+1);
  if (u->isLeaf()) {
    u->remove(i);
  } else {
    u->keys[i] = removeSmallest(u->children[i+1]);
    checkUnderflow(u, i+1);
  }
```

```
    return true;
  } else if (removeRecursive(x, u->children[i])) {
    checkUnderflow(u, i);
    return true;
  }
  return false;
}
```

u の i 番目の子から値 x を再帰的に削除したあと、removeRecursive(x,ui) はこの子が少なくとも $B-1$ 個のキーを持っていることを保証しなければならない。先のコードでは checkUnderflow(x,i) がこの処理を行っている。これは u の i 番目の子についてアンダーフローの発生を確認し、修正する。w を u の i 番目の子とする。w が $B-2$ 個のキーしか持たないなら、修正の必要がある。これには w の兄弟を利用する。u の $\mathtt{i}+1$ 番目または $\mathtt{i}-1$ 番目の子を使う。ふつうは u の $\mathtt{i}-1$ 番目の子 v、つまり w のすぐ左の兄弟を使う。$\mathtt{i}=0$ のときだけはこれがうまくいかないので、w のすぐ右の兄弟を使う。

BTree
```
void checkUnderflow(Node* u, int i) {
  if (u->children[i] < 0) return;
  if (i == 0)
    checkUnderflowZero(u, i); // use u's right sibling
  else
    checkUnderflowNonZero(u, i);
}
```

ここでは $\mathtt{i}\neq 0$ の場合のみを考え、u の i 番目の子で発生したアンダーフローは u の $(\mathtt{i}-1)$ 番目の子の助けを借りて修正できることを確認する。$\mathtt{i}=0$ の場合も同様に処理できるので、詳細は付属のソースコードを参照してほしい。

w におけるアンダーフローを解決するために、w のためのキー（や子）を見つけてくる必要がある。これを行うための操作はふたつある。

借用 w の兄弟 v が $B-1$ 個よりも多くのキーを持っているなら、w はキーを（あとは可能なら子も）v から借りる。より具体的には v が size(v) 個のキーを持つなら、v と w とが持っているキーの個数の合計は次のよう

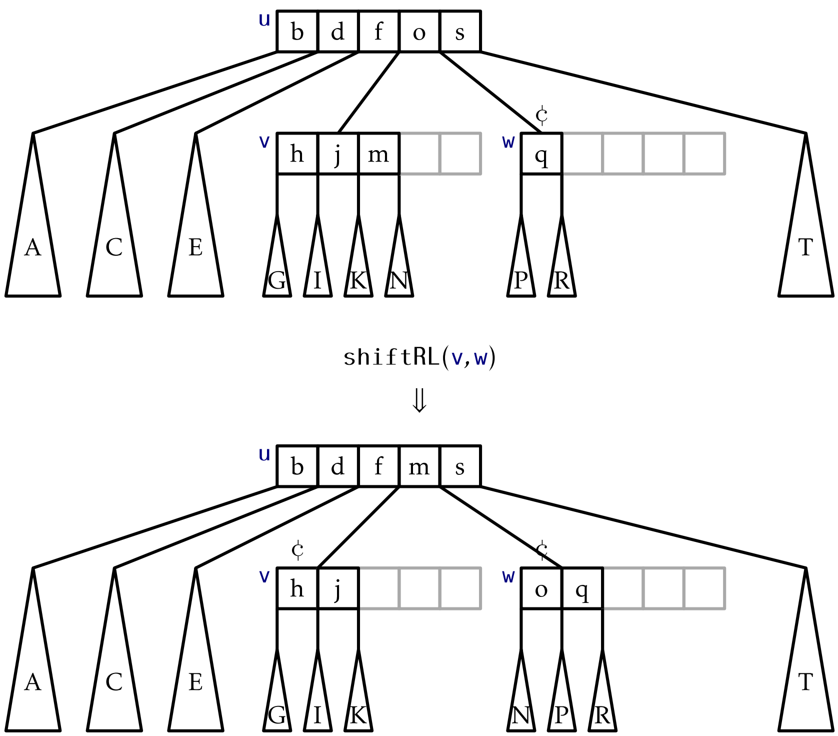


図 14.9: v が $B-1$ 個より多くのキーを持つ時、w は v からキーを借りることができる。

になる。

$$B-2+\mathrm{size}(\mathtt{w}) \geq 2B-2$$

よって v から w にキーを移し、v と w のいずれもが $B-1$ 個以上のキーを持つ状態にできる。この操作の様子を図 14.9 に示す。

併合 v が $B-1$ 個だけしかキーを持っていないとき、v にはキーを渡す余裕が無いので、もっと思い切ったことをする必要がある。そのために、図 14.10 に示したように v と w とを**併合**する。併合は分割の逆の操作である。これは合わせて $2B-3$ 個のキーを持つふたつのノードを併合し、$2B-2$ 個のキーを持つひとつのノードとする操作である。(併合されたノードのキー数がひとつ増えているのは、v と w を併合すると、それらの共通の親 u の子の数がひとつ減ることから、u は保有するキーのひとつを、併合されたノードに受け渡す必要があるためだ。)

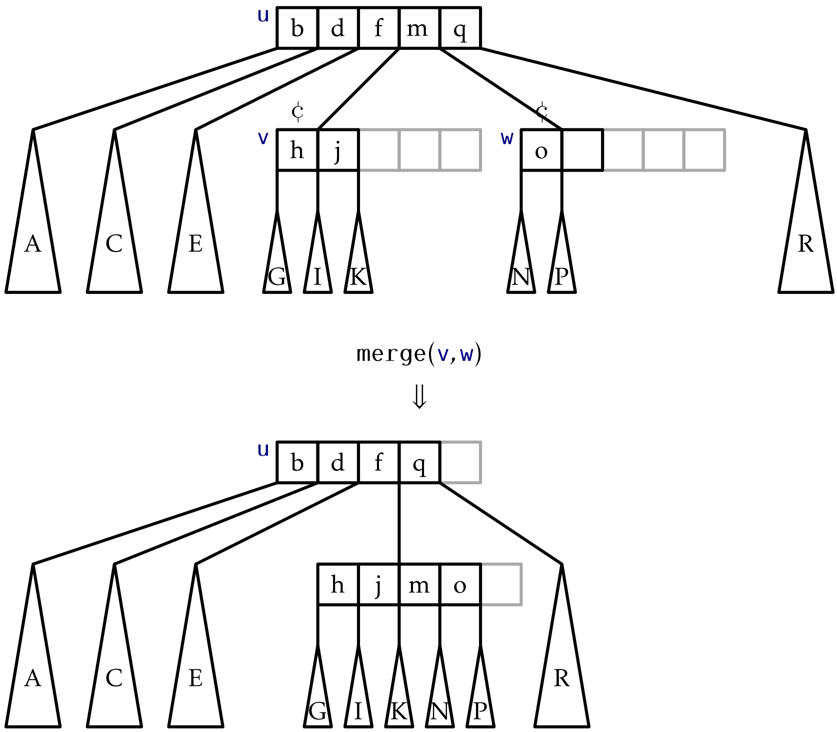


図 14.10: $B = 3$ である B 木の兄弟 v・w を併合する。

BTree
```
void checkUnderflowZero(Node *u, int i) {
  Node *w = bs.readBlock(u->children[i]);
  if (w->size() < B-1) {  // underflow at w
    Node *v = bs.readBlock(u->children[i+1]);
    if (v->size() > B) { // w can borrow from v
      shiftRL(u, i, v, w);
    } else { // w will absorb w
      merge(u, i, w, v);
      u->children[i] = w->id;
    }
```

```
    }
}
void checkUnderflowNonZero(Node *u, int i) {
  Node *w = bs.readBlock(u->children[i]);
  if (w->size() < B-1) {  // underflow at w
    Node *v = bs.readBlock(u->children[i-1]);
    if (v->size() > B) {  // w can borrow from v
      shiftLR(u, i-1, v, w);
    } else { // v will absorb w
      merge(u, i-1, v, w);
    }
  }
}
```

まとめると、B 木における remove(x) は根から葉まである経路を辿り、x′ を葉 u から削除し、その後 0 回以上の併合を u とその祖先に対して実行し、高々一回借用操作を行う。併合や借用には 3 つのノードしか修正せず、$O(\log_B n)$ 回だけの操作を行うので、外部メモリモデルにおける全体としての実行時間は $O(\log_B n)$ である。しかしここでも、ワード RAM モデルでは併合やノードを借りる操作には $O(B)$ だけの時間がかかるので、ワード RAM モデルにおける remove(x) の実行時間は $O(B \log_B n)$ であるとしか（現時点では）言えない。

14.2.4 B 木の償却解析

ここまでに、次のことを示してきた。

1. 外部メモリモデルでは、B 木における find(x)・add(x)・remove(x) の実行時間はそれぞれ $O(\log_B n)$ である。
2. ワード RAM モデルでは、find(x) の実行時間は $O(\log n)$ であり、add(x)・remove(x) の実行時間は $O(B \log n)$ である。

次の補題は、これまで B 木における分割・併合操作の数を過大評価していたことを示す。

補題 14.1. 空の B 木からはじめて、add(x)・remove(x) からなる m 個の操作

の列を順に実行するとき、分割・併合・借用は合わせて高々 $3m/2$ 回しか実行されない。

証明. $B=2$ の特別な場合について、9.3 節で既に証明の概要を示している。XXX: credit scheme この補題はここではクレジット法で証明する。

1. 分割・併合・借用の際に 2 のクレジットを支払う（失う）。
2. add(x) または remove(x) の際には、最大 3 のクレジットが得られる。

最大で $3m$ のクレジットが得られており、各分割・併合・借用はクレジットを 2 支払うので、最大 $3m/2$ 回の分割・併合・借用が実行される。 図 14.5、図 14.9、図 14.10 ではクレジットは ¢ で表した。

クレジットの値を追うために、証明では次の**クレジット不変条件**を保つ。$B-1$ 個のキーを持つ任意の根でないノードはクレジットを 1 だけ持つ。$2B-1$ 個のキーを持つノードはクレジットを 3 だけ持つ。B 以上 $2B-2$ 以下のキーを持つノードはクレジットを持たない。あとは、各 add(x)・remove(x) の間に、クレジット不変条件を保つことと、上で説明した性質 1・2 を満たすこととを示す。

追加の場合　add(x) は併合や借用を行わないため、分割だけを考えれば十分である。

既に $2B-1$ 個のキーを持つノード u にキーを追加すると分割が発生する。この場合、u はふたつのノード u′ と u″ に分割され、それぞれは $B-1$ 個、B 個のキーを持つ。直前には u が $2B-1$ 個のキーを持っていたのでクレジットは 3 あった。そのうちの 2 は分割のために支払われ、あと 1 は u′（$B-1$ 個のキーを持つ）に渡されるので、クレジット不変条件が保たれる。よって、いかなる分割においても、その分割のためのクレジットを支払える上に、クレジット不変条件を保てる。

add(x) を実行するとき、ノードに対する他の修正は、すべての分割処理を終えたあと実行される。これは新たなキーをあるノード u′ に追加する処理である。

直前に u′ が $2B-2$ 個の子を持っていれば、子の数は $2B-1$ になるので、クレジットを 3 得ることになる。これは高々 add(x) によって得られることになっているクレジットの範囲内である。

削除の場合　remove(x) の際には、0 回以上の併合と、それに続く借用が一度発生するかもしれない。併合のシナリオとしては、ふたつの v と w がともに $B-1$ 個のキーを remove(x) を呼ぶ直前に持っており、これらが $2B-2$ 個の

キーをもつひとつのノードに併合されるというものである。そのため、併合のために 2 のクレジットが支払われている。

併合のあとには、高々一度の借用処理があり、その後にはもう併合も借用も発生しない。この借用が起きるのは、$B-1$ 個のキーを持つ葉 v からキーを削除する場合に限る。このとき v はクレジットを 1 持っており、このクレジットは借用のコストとして使われる。しかし、借用のコストは 2 なので、クレジットが 1 足らず、支払いを完了するためにクレジットをあと 1 必要である。

ここまでで、クレジットを 1 得ており、クレジット不変条件が保たれていることを示す必要がある。最悪の場合には v の兄弟 w が、借用の前にちょうど B 個のキーを持っていて、直後には v も w も $B-1$ 個のキーを持つことになる。これは操作が完了するとき、v と w がクレジットを 1 持っている必要があることを意味する。よってこの場合には v と w とに渡すための追加のクレジットを 2 作る必要がある。借用は remove(x) の処理の間に高々一回発生するので、場合に応じて最大で 3 のクレジットが作られることがわかった。

もし remove(x) において借用がないなら、これはあるノードでキーを削除して終了したためであり、このノードは操作の前には B 個以上のキーを持っていたことになる。最悪の場合には、このノードがちょうど B 個のキーを持っており、そのため操作の後では $B-1$ 個のキーを持ち、クレジットを 1 作って与えなければならない。

削除が借用で終わる場合、そうでない場合のいずれにおいても、クレジット不変条件を保ち、併合と借用のコストを支払うためには、高々 3 のクレジットを remove(x) の間に作る必要がある。以上より定理が示された。 □

補題 14.1 の目的は、ワード RAM モデルにおいて、add(x)・remove(x) からなる m 個の操作の列を順に実行するとき、分割・併合・借用にかかる時間は合わせて $O(Bm)$ であることを示すことであった。つまり、これらの操作の償却コストは $O(B)$ であり、ワード RAM モデルにおける add(x)・remove(x) の償却コストは $O(B+\log \mathtt{n})$ である。この結果を次のふたつの定理にまとめる。

定理 14.1 (外部メモリモデルにおける B 木)**.** *BTree* は *SSet* インターフェースを実装する。*BTree* は add(x)・remove(x)・find(x) をサポートし、外部メモリモデルではいずれの実行時間も $O(\log_B \mathtt{n})$ である。

定理 14.2 (ワード RAM モデルにおける B 木)**.** *BTree* は *SSet* インターフェースを実装する。*BTree* は add(x)・remove(x)・find(x) をサポートする。ワード *RAM* モデルでは、分割・併合・借用のコストを無視すると、いずれの実行時間も $O(\log_B \mathtt{n})$ である。さらに、空の *BTree* に対して、add(x)・remove(x)

からなる m 個の操作の列を順に実行するとき、分割・併合・借用のためにかかる時間は合わせて $O(Bm)$ である。

14.3 ディスカッションと練習問題

外部メモリモデルを提案したのは Aggarwal と Vitter[4] である。このモデルは I/O **モデル**や**ディスクアクセスモデル**と呼ばれることもある。

内部メモリを使った探索における二分探索木を、外部メモリの場合に拡張したものが B 木である。B 木は McCreight [9] が 1970 年に提案した。10 年を待たずして Comer のサーベイ（論文のタイトルが”The Ubiquitous B-Tree”）が出版され、その中で B 木は「このデータ構造はいたるところで使われている」と紹介された。[15]

二分探索木と同様に、B 木には多くの種類がある。例えば、B^+ 木、B^* 木、counted B 木などである。B 木は本当にいたるところで使われていて、多くのファイルシステムにおける基本的なデータ構造である。例えば、Apple の HFS+、Microsoft の NTFS、Linux の Ext4 などの例がある。また、すべてのメジャーなデータベースシステムもそうである。クラウドコンピューティングで使われているキーバリューストアにもいくつも例がある。Graefe の近年のサーベイ [36] では 200 ページ以上にわたって現代の応用やデータ構造の変種、B の最適化などが述べられている。

B は SSet インターフェースを実装する。もし USet インターフェースだけが必要なときには、外部メモリハッシュ法を B 木の代わりに使うこともできるだろう。外部メモリハッシュ法も広く研究されている。例えば Jensen と Pagh の論文 [43] を見てほしい。この手法では、外部メモリモデルにおいて $O(1)$ の期待実行時間で USet の操作を実行できる。しかし、いくつかの理由で、多くのアプリケーションでは USet の操作だけが必要だとしても B 木を使う。

B 木が人気がある理由のひとつに、$O(\log_B \mathrm{n})$ という実行時間の上界から受ける印象より実際には性能がよいことがしばしばあることを挙げられる。外部メモリモデルでは、B の値はふつうかなり大きく、数百あるいは数千である。そのため、B 木におけるデータのうち、99% あるいは 99.9% は葉に保存されている。大きなメモリを持つデータベースシステムでは、内部ノードはすべてのデータのうちの 1% あるいは 0.1% 程度なので、すべて RAM にキャッシュできるかもしれない。この場合 B 木の検索では、RAM 上にある内部ノードの検索はすべて非常に高速に処理でき、一回だけの外部メモリアクセスで

葉が得られる。

問 **14.1.** 図 14.2 の B 木に 1.5、7.5 を順に追加するときの様子を描け。

問 **14.2.** 図 14.2 の B 木から 3、4 を順に削除するときの様子を描け。

問 **14.3.** n 個のキーを格納する B 木の内部ノードの数の最大値を求めよ。（これは n と B の関数である。）

問 **14.4.** この章のはじめに、B 木の内部メモリとして必要なのは $O(B+\log_B \mathtt{n})$ だけであると言った。しかし、ここで示した実装では実はより多くのメモリが必要であった。

1. この章で示した add(x)・remove(x) の実装は $B\log_B \mathtt{n}$ に比例する内部メモリを使うことを示せ。
2. これを $O(B+\log_B \mathtt{n})$ に減らすための修正方法を説明せよ。

問 **14.5.** 補題 14.1 の証明で使ったクレジットの様子を、図 14.6 と図 14.7 の木に描け。また、（追加のクレジット 3 で）分割・併合・借用のコストを支払い、クレジット不変条件を保てることを確認せよ。

問 **14.6.** B 木を修正し、ノードの持つ子の数が B 以上 $3B$ 以下（そのため、キーの数は $B-1$ 以上 $3B-1$ 以下）のデータ構造を設計せよ。また、この新 B 木では、m 回の操作を順に実行する間に、$O(m/B)$ 回だけの分割・併合・借用を実行することを示せ。（ヒント：これを実現するには、併合処理をもっと頑張らなければならない。必ずしも必要でないときにも、併合を行わなければならないことがある。）

問 **14.7.** この練習問題では、B 木の分割・併合を修正し、最大 3 つのノードを一度に考慮することで、分割・借用・併合処理の漸近的な実行回数を減らす。

1. u を一杯になったノード、v を u のすぐ右の兄弟とする。u のノード溢れを解消する方法は二通りある。
   (a) u のキーをいくつか v に渡す。
   (b) u を分割し、u と v のキーを平等に u と v と新しいノード w とで分け合う。

   この操作のあと、ある定数 $\alpha > 0$ について、関連する（最大 3 つの）ノードはいずれも $B+\alpha B$ 個以上 $2B-\alpha B$ 個以下のキーを持つようにできることを示せ。
2. ノード u はアンダーフローしており、v と w はの兄弟であるとする。u

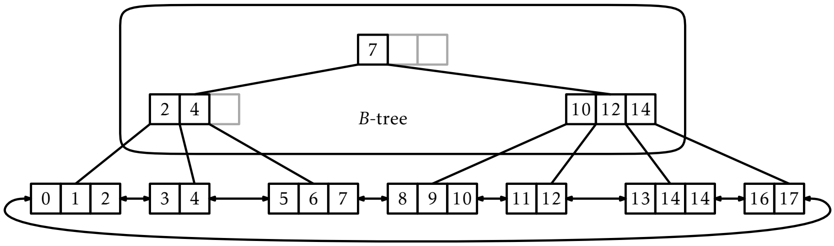


図 14.11: B^+ 木は、ブロックの双方向連結リストの上に B 木が乗ったデータ構造である。

のアンダーフローを解消する方法は二通りある。

(a) キーを u・v・w の間で分配しなおす。

(b) u・v・w を併合し、ふたつのノードにする。それぞれの持っていたキーはふたつのノードに分配しなおす。

この操作のあと、ある定数 $\alpha > 0$ について、関連する（最大 3 つの）ノードはいずれも $B+\alpha B$ 個以上 $2B-\alpha B$ 個以下のキーを持つようにできることを示せ。

3. 以上の修正によって、m 回の操作を実行する間に発生する併合・借用・分割の回数は $O(m/B)$ になることを示せ。

問 **14.8.** 図 14.11 に示した B^+ 木は、すべてのキーを葉に格納し、すべての葉を双方向連結リストとして格納する。葉はそれぞれ、ふつう $B-1$ 個以上 $2B-1$ 個以下のキーを格納する。葉から上側はふつうの B 木で、最後のもの以外の各葉の最大値を内部ノードは蓄えている。

1. B^+ 木における add(x)・remove(x)・find(x) の高速な実装を説明せよ。
2. findRange(x,y) の効率的な実装方法を説明せよ。これは B^+ 木に含まれる x より大きく y より小さいをすべて報告するメソッドである。
3. find(x)・add(x)・remove(x)・findRange(x,y) を持つ、クラス BPlus-Tree を実装せよ。
4. B^+ 木では B 木の部分と、リストの部分の両方に同じキーを格納するため、キーの重複がある。B の値が大きい時、この重複が大して問題とならない理由を説明せよ。

参考文献

[1] Free eBooks by Project Gutenberg. URL: http://www.gutenberg.org/ [cited 2011-10-12].

[2] IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic. Technical report, Microprocessor Standards Committee of the IEEE Computer Society, 3 Park Avenue, New York, NY 10016-5997, USA, August 2008. doi:10.1109/IEEESTD.2008.4610935.

[3] G. Adelson-Velskii and E. Landis. An algorithm for the organization of information. *Soviet Mathematics Doklady*, 3(1259-1262):4, 1962.

[4] A. Aggarwal and J. S. Vitter. The input/output complexity of sorting and related problems. *Communications of the ACM*, 31(9):1116–1127, 1988.

[5] A. Andersson. Improving partial rebuilding by using simple balance criteria. In F. K. H. A. Dehne, J.-R. Sack, and N. Santoro, editors, *Algorithms and Data Structures, Workshop WADS '89, Ottawa, Canada, August 17–19, 1989, Proceedings*, volume 382 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 393–402. Springer, 1989.

[6] A. Andersson. Balanced search trees made simple. In F. K. H. A. Dehne, J.-R. Sack, N. Santoro, and S. Whitesides, editors, *Algorithms and Data Structures, Third Workshop, WADS '93, Montréal, Canada, August 11–13, 1993, Proceedings*, volume 709 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 60–71. Springer, 1993.

[7] A. Andersson. General balanced trees. *Journal of Algorithms*, 30(1):1–18, 1999.

[8] A. Bagchi, A. L. Buchsbaum, and M. T. Goodrich. Biased skip lists. In P. Bose and P. Morin, editors, *Algorithms and Computation, 13th International Symposium, ISAAC 2002 Vancouver, BC, Canada, November*

21–23, 2002, Proceedings, volume 2518 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–13. Springer, 2002.

[9] R. Bayer and E. M. McCreight. Organization and maintenance of large ordered indexes. In *SIGFIDET Workshop*, pages 107–141. ACM, 1970.

[10] Bibliography on hashing. URL: `http://liinwww.ira.uka.de/bibliography/Theory/hash.html` [cited 2011-07-20].

[11] J. Black, S. Halevi, H. Krawczyk, T. Krovetz, and P. Rogaway. UMAC: Fast and secure message authentication. In M. J. Wiener, editor, *Advances in Cryptology - CRYPTO '99, 19th Annual International Cryptology Conference, Santa Barbara, California, USA, August 15–19, 1999, Proceedings*, volume 1666 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 79–79. Springer, 1999.

[12] P. Bose, K. Douïeb, and S. Langerman. Dynamic optimality for skip lists and b-trees. In S.-H. Teng, editor, *Proceedings of the Nineteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2008, San Francisco, California, USA, January 20–22, 2008*, pages 1106–1114. SIAM, 2008.

[13] A. Brodnik, S. Carlsson, E. D. Demaine, J. I. Munro, and R. Sedgewick. Resizable arrays in optimal time and space. In Dehne et al. [18], pages 37–48.

[14] J. Carter and M. Wegman. Universal classes of hash functions. *Journal of computer and system sciences*, 18(2):143–154, 1979.

[15] D. Comer. The ubiquitous B-tree. *ACM Computing Surveys*, 11(2):121–137, 1979.

[16] C. Crane. Linear lists and priority queues as balanced binary trees. Technical Report STAN-CS-72-259, Computer Science Department, Stanford University, 1972.

[17] S. Crosby and D. Wallach. Denial of service via algorithmic complexity attacks. In *Proceedings of the 12th USENIX Security Symposium*, pages 29–44, 2003.

[18] F. K. H. A. Dehne, A. Gupta, J.-R. Sack, and R. Tamassia, editors. *Algorithms and Data Structures, 6th International Workshop, WADS '99, Vancouver, British Columbia, Canada, August 11–14, 1999, Proceedings*, volume 1663 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 1999.

[19] L. Devroye. Applications of the theory of records in the study of random trees. *Acta Informatica*, 26(1):123–130, 1988.

[20] P. Dietz and J. Zhang. Lower bounds for monotonic list labeling. In J. R. Gilbert and R. G. Karlsson, editors, *SWAT 90, 2nd Scandinavian Workshop on Algorithm Theory, Bergen, Norway, July 11–14, 1990, Proceedings*, volume 447 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 173–180. Springer, 1990.

[21] M. Dietzfelbinger. Universal hashing and k-wise independent random variables via integer arithmetic without primes. In C. Puech and R. Reischuk, editors, *STACS 96, 13th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, Grenoble, France, February 22–24, 1996, Proceedings*, volume 1046 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 567–580. Springer, 1996.

[22] M. Dietzfelbinger, J. Gil, Y. Matias, and N. Pippenger. Polynomial hash functions are reliable. In W. Kuich, editor, *Automata, Languages and Programming, 19th International Colloquium, ICALP92, Vienna, Austria, July 13–17, 1992, Proceedings*, volume 623 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 235–246. Springer, 1992.

[23] M. Dietzfelbinger, T. Hagerup, J. Katajainen, and M. Penttonen. A reliable randomized algorithm for the closest-pair problem. *Journal of Algorithms*, 25(1):19–51, 1997.

[24] M. Dietzfelbinger, A. R. Karlin, K. Mehlhorn, F. M. auf der Heide, H. Rohnert, and R. E. Tarjan. Dynamic perfect hashing: Upper and lower bounds. *SIAM J. Comput.*, 23(4):738–761, 1994.

[25] A. Elmasry. Pairing heaps with $O(\log\log n)$ decrease cost. In *Proceedings of the twentieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 471–476. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

[26] F. Ergun, S. C. Sahinalp, J. Sharp, and R. Sinha. Biased dictionaries with fast insert/deletes. In *Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 483–491, New York, NY, USA, 2001. ACM.

[27] M. Eytzinger. *Thesaurus principum hac aetate in Europa viventium (Cologne)*. 1590. In commentaries, 'Eytzinger' may appear in variant forms, including: Aitsingeri, Aitsingero, Aitsingerum, Eyzingern.

[28] R. W. Floyd. Algorithm 245: Treesort 3. *Communications of the ACM*,

7(12):701, 1964.

[29] M. Fredman, R. Sedgewick, D. Sleator, and R. Tarjan. The pairing heap: A new form of self-adjusting heap. *Algorithmica*, 1(1):111–129, 1986.

[30] M. Fredman and R. Tarjan. Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms. *Journal of the ACM*, 34(3):596–615, 1987.

[31] M. L. Fredman, J. Komlós, and E. Szemerédi. Storing a sparse table with 0 (1) worst case access time. *Journal of the ACM*, 31(3):538–544, 1984.

[32] M. L. Fredman and D. E. Willard. Surpassing the information theoretic bound with fusion trees. *Journal of computer and system sciences*, 47(3):424–436, 1993.

[33] I. Galperin and R. Rivest. Scapegoat trees. In *Proceedings of the fourth annual ACM-SIAM Symposium on Discrete algorithms*, pages 165–174. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993.

[34] A. Gambin and A. Malinowski. Randomized meldable priority queues. In *SOFSEM ' 98: Theory and Practice of Informatics*, pages 344–349. Springer, 1998.

[35] M. T. Goodrich and J. G. Kloss. Tiered vectors: Efficient dynamic arrays for rank-based sequences. In Dehne et al. [18], pages 205–216.

[36] G. Graefe. Modern b-tree techniques. *Foundations and Trends in Databases*, 3(4):203–402, 2010.

[37] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, 2nd edition, 1994.

[38] L. Guibas and R. Sedgewick. A dichromatic framework for balanced trees. In *19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Ann Arbor, Michigan, 16–18 October 1978, Proceedings*, pages 8–21. IEEE Computer Society, 1978.

[39] C. A. R. Hoare. Algorithm 64: Quicksort. *Communications of the ACM*, 4(7):321, 1961.

[40] J. E. Hopcroft and R. E. Tarjan. Algorithm 447: Efficient algorithms for graph manipulation. *Communications of the ACM*, 16(6):372–378, 1973.

[41] J. E. Hopcroft and R. E. Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of*

the ACM, 21(4):549–568, 1974.

[42] HP-UX process management white paper, version 1.3, 1997. URL: http://h21007.www2.hp.com/portal/download/files/prot/files/STK/pdfs/proc_mgt.pdf [cited 2011-07-20].

[43] M. S. Jensen and R. Pagh. Optimality in external memory hashing. *Algorithmica*, 52(3):403–411, 2008.

[44] P. Kirschenhofer, C. Martinez, and H. Prodinger. Analysis of an optimized search algorithm for skip lists. *Theoretical Computer Science*, 144:199–220, 1995.

[45] P. Kirschenhofer and H. Prodinger. The path length of random skip lists. *Acta Informatica*, 31:775–792, 1994.

[46] D. Knuth. *Fundamental Algorithms*, volume 1 of *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, third edition, 1997.

[47] D. Knuth. *Seminumerical Algorithms*, volume 2 of *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, third edition, 1997.

[48] D. Knuth. *Sorting and Searching*, volume 3 of *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, second edition, 1997.

[49] C. Y. Lee. An algorithm for path connection and its applications. *IRE Transaction on Electronic Computers*, EC-10(3):346–365, 1961.

[50] E. Lehman, F. T. Leighton, and A. R. Meyer. *Mathematics for Computer Science*. 2011. URL: http://courses.csail.mit.edu/6.042/spring12/mcs.pdf [cited 2012-09-06].

[51] C. Martínez and S. Roura. Randomized binary search trees. *Journal of the ACM*, 45(2):288–323, 1998.

[52] E. F. Moore. The shortest path through a maze. In *Proceedings of the International Symposium on the Theory of Switching*, pages 285–292, 1959.

[53] J. I. Munro, T. Papadakis, and R. Sedgewick. Deterministic skip lists. In *Proceedings of the third annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms (SODA'92)*, pages 367–375, Philadelphia, PA, USA, 1992. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[54] Oracle. *The Collections Framework*. URL: http://download.oracle.com/javase/1.5.0/docs/guide/collections/ [cited 2011-07-19].

[55] R. Pagh and F. Rodler. Cuckoo hashing. *Journal of Algorithms*, 51(2):122–144, 2004.

[56] T. Papadakis, J. I. Munro, and P. V. Poblete. Average search and up-

date costs in skip lists. *BIT*, 32:316–332, 1992.

[57] M. Pătraşcu and M. Thorup. Randomization does not help searching predecessors. In N. Bansal, K. Pruhs, and C. Stein, editors, *Proceedings of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2007, New Orleans, Louisiana, USA, January 7–9, 2007*, pages 555–564. SIAM, 2007.

[58] M. Pătraşcu and M. Thorup. The power of simple tabulation hashing. *Journal of the ACM*, 59(3):14, 2012.

[59] W. Pugh. A skip list cookbook. Technical report, Institute for Advanced Computer Studies, Department of Computer Science, University of Maryland, College Park, 1989. URL: ftp://ftp.cs.umd.edu/pub/skipLists/cookbook.pdf [cited 2011-07-20].

[60] W. Pugh. Skip lists: A probabilistic alternative to balanced trees. *Communications of the ACM*, 33(6):668–676, 1990.

[61] Redis. URL: http://redis.io/ [cited 2011-07-20].

[62] B. Reed. The height of a random binary search tree. *Journal of the ACM*, 50(3):306–332, 2003.

[63] S. M. Ross. *Probability Models for Computer Science*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 2001.

[64] R. Sedgewick. Left-leaning red-black trees, September 2008. URL: http://www.cs.princeton.edu/~rs/talks/LLRB/LLRB.pdf [cited 2011-07-21].

[65] R. Seidel and C. Aragon. Randomized search trees. *Algorithmica*, 16(4):464–497, 1996.

[66] H. H. Seward. Information sorting in the application of electronic digital computers to business operations. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, Digital Computer Laboratory, 1954.

[67] Z. Shao, J. H. Reppy, and A. W. Appel. Unrolling lists. In *Proceedings of the 1994 ACM conference LISP and Functional Programming (LFP'94)*, pages 185–195, New York, 1994. ACM.

[68] P. Sinha. A memory-efficient doubly linked list. *Linux Journal*, 129, 2005. URL: http://www.linuxjournal.com/article/6828 [cited 2013-06-05].

[69] SkipDB. URL: http://dekorte.com/projects/opensource/SkipDB/ [cited 2011-07-20].

[70] D. Sleator and R. Tarjan. Self-adjusting binary trees. In *Proceedings of the 15th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 25–27 April, 1983, Boston, Massachusetts, USA*, pages 235–245. ACM, ACM, 1983.

[71] S. P. Thompson. *Calculus Made Easy*. MacMillan, Toronto, 1914. Project Gutenberg EBook 33283. URL: http://www.gutenberg.org/ebooks/33283 [cited 2012-06-14].

[72] P. van Emde Boas. Preserving order in a forest in less than logarithmic time and linear space. *Inf. Process. Lett.*, 6(3):80–82, 1977.

[73] J. Vuillemin. A data structure for manipulating priority queues. *Communications of the ACM*, 21(4):309–315, 1978.

[74] J. Vuillemin. A unifying look at data structures. *Communications of the ACM*, 23(4):229–239, 1980.

[75] D. E. Willard. Log-logarithmic worst-case range queries are possible in space $\Theta(N)$. *Inf. Process. Lett.*, 17(2):81–84, 1983.

[76] J. Williams. Algorithm 232: Heapsort. *Communications of the ACM*, 7(6):347–348, 1964.

索引

日本語索引