Ayoub Insa Correa, *Ph.D.*

Unité de Formation et Recherche Sciences et Technologie
Université de Thies

Semestre 2, Année académique 2017-2018

Définition 1

Un graphe G est un couple (S, A), A étant une relation binaire sur un ensemble S.
Les éléments de S sont appelés sommets (ou noeuds ou encore points) du graphe.
Autre définition d'un graphe $G = (V, E)$:
Il est défini par l'ensemble fini $V = \{v_1, v_2, .., v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets (vertices en anglais) et par l'ensemble fini $E = \{e_1, e_2, .., e_m\}$.

Définition 2

Une arête $e \in E$ est en fait une paire non ordonnée de sommets, appelés extrêmités de e.
Les éléments de S sont appelés sommets (ou noeuds ou encore points) du graphe.
Si la paire de sommets (x, y) est ordonnée, nous parlerons d'arcs (x, y) et nous la représenterons par une fleche joignant x à y.

Définition 3

Le graphe $G' = (V, E')$ est un graphe partiel de $G = (V, E)$, si E' est inclus dans E . Autrement dit, on obtient G' en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G mais l'ensembe des sommets est gardé intact
Un graphe g est appelé sous graphe d'un graphe $G = (V, E)$ si tous les sommets de g et toutes les arêtes de g sont des sommets et des arêtes de G.
Le concept de sous graphe est similaire au concept de sous ensemble d'un ensemble.

Définition 3 (Remarques)

1. Tout graphe est un sous graphe de lui-même
2. Un sous graphe d'un sous graphe de G est un sous graphe de G
3. Un sommet unique dans G est un sous graphe de G
4. Une arête unique de G avec ses sommets est un sous graphe de G

Définition 4

Une boucle est une arête dont l'origine et la destination est le même sommet.
Des arêtes sont dites parallèles si elles sont associées au même paire de noeuds.

Définition 5

- Quand un point s est une extrêmité d'une arête e, nous dirons que s est un sommet incident à e ou bien e est incidente à s
- Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet s est appelé degré du sommet s et on le note $d(s)$. Les boucles sont comptées 2 fois.

Définition 6

- Un sommet isolé est un sommet qui n'a pas d'arête incidente c-à-d que son degré est nul
- Un sommet pendant est un sommet de degré 1.

Définition 7

Un graphe nul $G = (V, E)$ est un graphe tel que $E = \{\emptyset\}$.
L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets.
Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit régulier.
Si le degré commun est k, on dit que le graphe est k-régulier.

Propriété 1 (Lemme des poignées de mains)

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois son nombre d'arêtes.
$\sum d(s) = 2 * card(E)$.

Propriété 2

Le nombre de sommets de degré impair d'un graphe est un nombre pair.
$\sum d(s) = 2 * card(E)$.
$\sum d(s) = \sum d_i(s) + \sum d_p(s)$.

Définition de l'isomorphisme de graphes

En géométrie, deux figures sont dites équivalentes ou congruentes si elles ont un comportement identique en termes de propriétés géomètriques.
De la même manière, deux graphes sont dits équivalents ou isomorphes l'un envers l'autre s'ils ont un comportement identique du point de vue des propriétés de la théorie des graphes.
Ainsi, nous dirons que deux graphes G et G' sont isomorphes (l'un envers l'autre) s'il y a une correspondance un à un entre leurs sommets et entre leurs arêtes telle que la relation d'incidence soit conservée.
En d'autres mots, si l'arête e est incidente aux sommets v_1 et v_2 dans G, alors son arête correspondante e' dans G' doit être incidente aux sommets v'_1 et v'_2 dans G'

Propriétés des graphes isomorphes

Ce n'est pas toujours une tâche aisée que de déterminer si oui ou non deux graphes sont isomorphes.
Il n'y a pas de théorème, d'algorithme ou méthode systématique de détection de graphes isomorphes. C'est un problème ouvert en théorie des graphes.
Toutefois,il est évident que, par la définition de l'isomorphisme, deux graphes isomorphes doivent avoir :

1. Le même nombre de sommets
2. Le même nombre d'arêtes
3. Un nombre égal de sommets ayant un degré donné.

Ces conditions ne sont pas toutefois suffisantes.

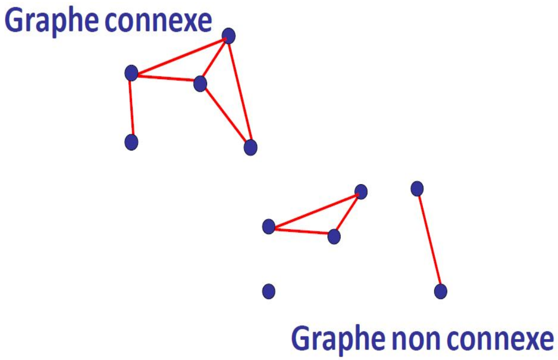
Définition 8

- Un graphe est dit simple si au plus une arête relie 2 sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet
- Un multigraphe est un graphe avec au moins une boucle ou plusieurs arêtes reliant une paire de sommets.

.

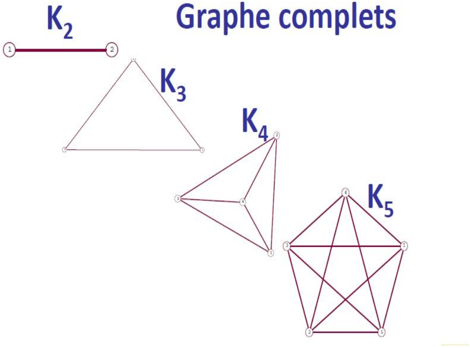
Definition 9 (Connexité)

Un graphe est dit connexe s'il est possible, à partir de n'importe quel sommet, de rejoindre tous les autres sommets en suivant les arêtes. Un graphe non connexe se décompose en composantes connexes.



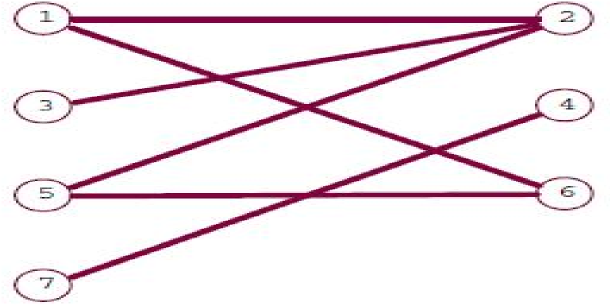
Définition 10 (Graphe complet ou clique)

Un graphe est complet (ou appelé une clique) si chaque sommet est directement relié à tous les autres sommets.
On note $G = K_n$, il y a alors $m = \frac{1}{2}.n(n-1)$ arêtes.

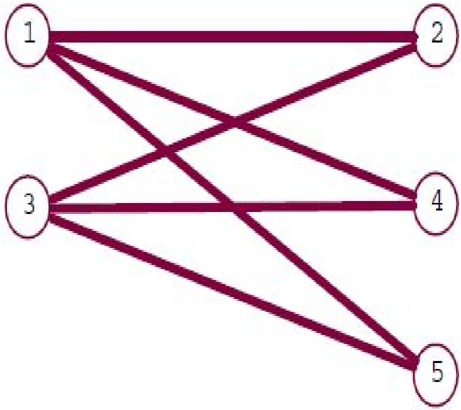


Définition 11

Un graphe est dit biparti si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles X et Y de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet dans X à un sommet dans Y, ou vice versa.



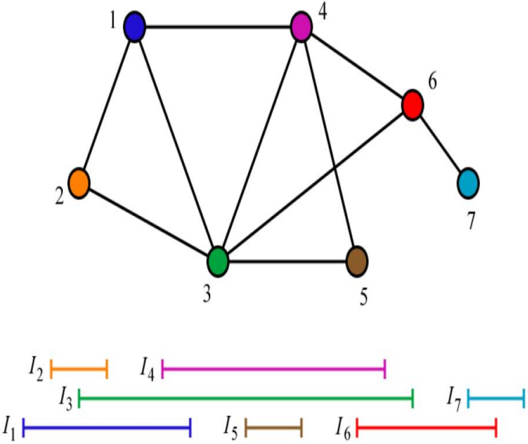
Définition 12 (graphe biparti complet)



Définition 13 (Graphe d'intervalles)

Un graphe d'intervalles G est construit à partir des intervalles de la droite réelle $I_1, ..., I_n$. Les sommets de G sont numérotés de 1 à n. Dans un graphe d'intervalles, il existe une arête entre les sommets i et j , $i \neq j$, si et seulement si $I_i \bigcap I_j \neq \emptyset$.
Autrement dit, deux sommets sont reliés si et seulement si les deux intervalles correspondants se chevauchent.

Exemple de graphe d'intervalles



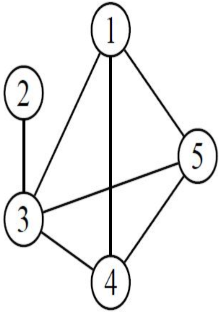
Mise en garde

Il ne faudrait pas confondre un graphe et son dessin : un graphe peut être dessiné de plusieurs façons.
Même s'il est vrai que les graphes tirent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins, la lisibilité de la visualisation est une question importante. Le dessin des graphes est a lui seul un domaine de recherche.

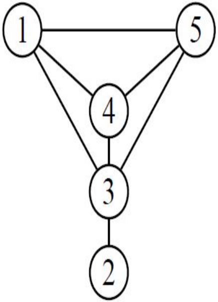
Définition 14

Un graphe planaire s'il admet un dessin dont les arêtes (ou arcs) qui ne se coupent pas.
Les arêtes (ou arcs) ne sont pas forcémment rectilignes et peuvent être représentés par des segments de courbes.

Exemple de graphe planaire



Une représentation non planaire du graphe G (des arêtes se croisent)



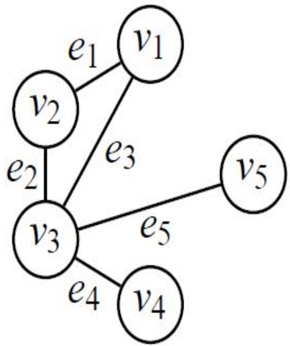
Une représentation planaire de G

Définition 15

Une chaîne dans un graphe G, est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arêtes, commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque arête est encadrée par ses extrémités.
On dira que la chaîne relie le premier sommet de la suite au dernier sommet. En plus, on dira que la chaîne a pour longueur le nombre d'arêtes de la chaîne.

Exemple de chaîne

Le graphe ci-dessous contient entre autres les chaînes $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_5, v_5)$ et $(v_4, e_4, v_3, e_2, v_2, e_1, v_1)$.



On ne change pas une chaîne en inversant l'ordre des éléments dans la suite correspondante. Ainsi, les chaînes $(v_1, e_3, v_3, e_4, v_4)$ et $(v_4, e_4, v_3, e_3, v_1)$ sont identiques.

Définition 16

- La distance entre deux sommets est la longueur de la plus petite chaîne les reliant ;
- Le diamêtre d'un graphe est la plus longue des distances entre deux sommets ;
- Une chaîne est élémentaire si chaque sommet y apparaît au plus une fois ;
- Une chaîne est simple si chaque arête apparaît au plus une fois. Dans le graphe précédent, $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3)$ est une chaîne simple et élémentaire ;
- Une chaîne dont les sommets de départ et de fin sont les mêmes est appelée chaîne fermée ; Dans le graphe précédent, $(v_4, e_4, v_3, e_5, v_5, e_5, v_3, e_4, v_4)$ est une chaîne fermée ;
- Une chaîne fermée simple est appelée cycle. Dans le graphe précédent, la chaîne $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_1)$ est un cycle.

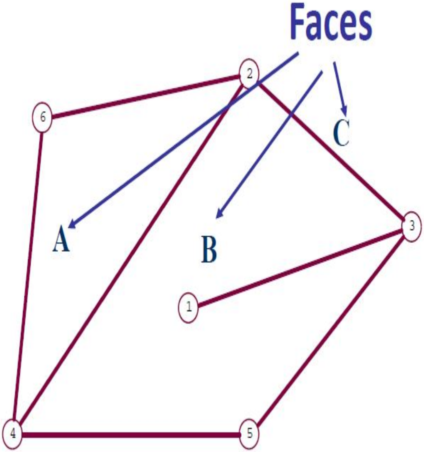
Théoreme 2

Pour un graphe G ayant m arêtes, n sommets et p composantes connexes, on définit : $\nu(G) = m - n + p$.
$\nu(G)$ est appelé le nombre cyclomatique. Prononcer « nu de G».
On a $\nu(G) \geq 0$ pour tout graphe G.
De plus, $\nu(G) = 0$ si et seulement si G est sans cycle.

Définition 17

- Un cycle eulérien d'un graphe G est un cycle passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G ;
- Un graphe est dit eulérien s'il possede un cycle eulérien ;
- Une chaîne eulérienne d'un graphe G est une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G ;
- Un graphe ne possédant que des chaînes eulériennes est semi-eulérien ;
- Plus simplement, on peut dire qu'un graphe est eulérien (ou semi-eulérien) s'il est possible de dessiner le graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

Définition 18 (Face ou Region)



Théoreme 3 (Formule d'Euler)

Pour un graphe G ayant m arêtes, n sommets et f faces, on a la relation suivante : $n - m + f = 2$.

Définition 18

- Un cycle hamiltonien d'un graphe G est un cycle passant une et une seule fois par chacun des sommets de G ;
- Un graphe est dit hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien ;
- Une chaîne hamiltonienne d'un graphe G est une chaîne passant une et une seule fois par chacun des sommets de G ;
- Un graphe ne possédant que des chaînes hamiltoniennes est semi-hamiltonien.

Remarques 2

Contrairement aux graphes eulériens, il n'existe pas de caractérisation simple des graphes (semi-) hamiltoniens. On peut énoncer quelques propriétés et conditions suffisantes :

- Un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien ;
- Si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien ;
- Les graphes complets K_n sont hamiltoniens.

Théoreme 4 (Ore)

Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien. $d(x)$ et $d(y)$ sont les degrés respectifs de x et y.

Corollaire du Théoreme 4 (Ore)

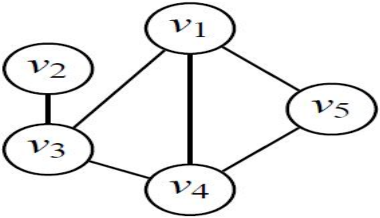
Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour tout sommet x de G, on a $d(x) \geq \frac{n}{2}$, alors G est hamiltonien.

Théoreme 5 (Kuratowski)

Un graphe est non planaire si et seulement s'il contient un sous-graphe homéomorphe au graphe biparti $K_{3,3}$ ou au graphe complet K_5.

Définition 19

Soit un graphe $G = (V, E)$. Un sous-ensemble S de V est un stable s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux.
Le cardinal du plus grand stable est le nombre de stabilité de G ; On le note $\alpha(G)$.
On dit que G un stable si E = Ø, autrement dit s ?il n ?a aucune arête, on note G = Sn. Exemple :



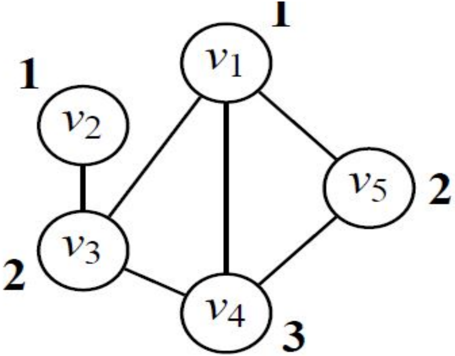
Les ensembles $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}$ et $\{v_3, v_5\}$ forment un stable et $\alpha(G) = 2$.

Définition 20

La coloration des sommets d'un graphe consiste à affecter à tous les sommets de ce graphe une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.
Une coloration avec k couleurs est donc une partition de l'ensemble des sommets en k stables.
Le nombre chromatique du graphe G, noté $\gamma(G)$, est le plus petit entier k pour lequel il existe une partition de V en k sous-ensembles stables.

Exemple

Dans le graphe précédent, nous avons besoin des couleurs 1, 2 et 3 pour colorer les sommets de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes.
On a donc trois stables : $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_5\}$ et $\{v4\}$.

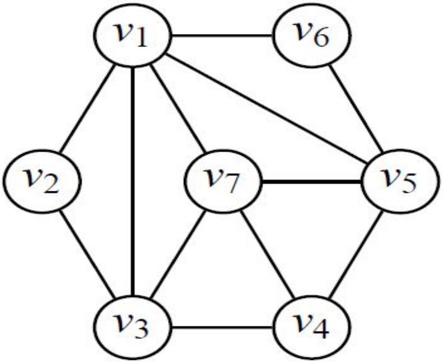


Propriétés du nombre chromatique

- $\gamma(G) \leq r + 1$, où r est le plus grand degré des sommets de G ;
- $\gamma(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$;
- Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes ;
- Le nombre chromatique du graphe sera supérieur ou égal à l'ordre de sa plus grande clique, que l'on note $\omega(G)$. Autrement dit, $\gamma(G) \geq \omega(G)$;

Exercice d'application 1

Majorez et minorez le nombre chromatique du graphe ci-dessous :



Exercice d'application 2

Un lycée doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et enfin 6 et 7.
Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?

Exercice d'application 3

On veut transporter des produits chimiques par le rail. A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit produits chimiques. Dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les produits ne peuvent pas être entreposés dans le même wagon, car il y aurait risque d'explosion :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		✘	✘	✘			✘	✘
B	✘				✘	✘	✘	
C	✘			✘		✘	✘	✘
D	✘		✘		✘			✘
E		✘		✘		✘	✘	
F		✘	✘		✘			
G	✘	✘	✘		✘			
H	✘		✘	✘				

Quel nombre minimum de wagons faut-il ?

Algorithme de Welsh et Powell

Cet algorithme couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est-à-dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant il n'assure pas que le nombre de couleurs soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).

Étape 1
Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.

Étape 2
En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur.
Étape 3
S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2. Sinon, FIN.

Exercice d'application 4

Utilisez l'algorithme de coloration de Welsh et Powell pour colorer les graphes des exercices d'application 1 et 2.

Théorème des quatre couleurs

On peut colorer les sommets d'un graphe planaire (sans boucles) en utilisant au plus quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes.

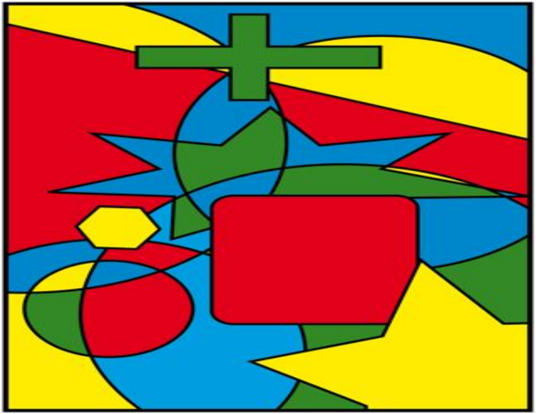
Exercice d'application 5

Colorez la carte d'Afrique ci-dessous en utilisant le moins de couleurs possibles, de sorte que deux régions voisines aient des couleurs différentes. Construisez d'abord son graphe associé avant de colorer ses sommets.

Application pratique du théorème des quatre couleurs

Affectation par un opérateur mobile des fréquences GSM aux zones de couverture des stations de base de son réseau. Les réseaux téléphoniques de première génération possédaient des cellules de grande taille (d'où la notion de réseau cellulaire) au centre desquelles se situait une antenne d'émission. En fonction de la nature du terrain et des constructions, les cellules n'ont pas nécessairement une forme circulaire. De plus, afin de permettre à un utilisateur passant d'une cellule à une autre de garder sa communication, il est nécessaire que les zones de couverture se recouvrent de 10 à 15%, ce qui renforce la contrainte de ne pas avoir une même bande de fréquences dans deux cellules voisines.

title



h

Coloration des arêtes d'un graphe

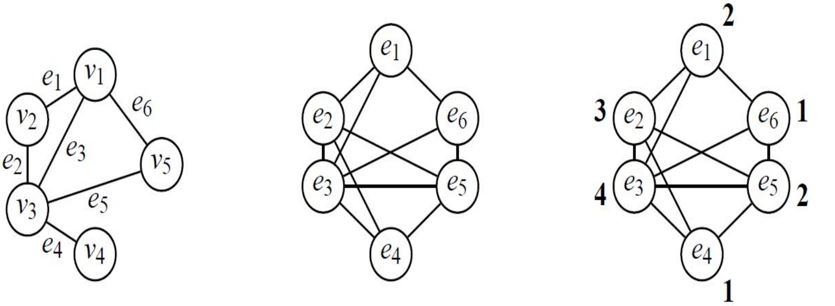
La coloration des arêtes d'un graphe consiste à affecter à toutes les arêtes de ce graphe une couleur de telle sorte que deux arêtes adjacentes ne portent pas la même couleur.
L'indice chromatique du graphe G est le plus petit entier k pour lequel il existe une coloration des arêtes ; on le note $\chi(G)$.
Pour colorer les arêtes d'un graphe, on peut se ramener au problème de la coloration des sommets. Il suffit pour cela de travailler non pas sur le graphe lui-même, mais sur le graphe adjoint, noté G', et que l'on définit ainsi :

Coloration des arêtes d'un graphe (suite)

- À chaque arête de $G = (V, E)$ correspond un sommet de $G' = (E, F)$
- Deux sommets de G' sont reliés par une arête si les deux arêtes correspondantes de G sont adjacentes.

On peut ensuite appliquer l'algorithme de Welsh et Powell sur le graphe G' pour colorer ses sommets. Une fois cela fait, on coloriera les arêtes de G de la même couleur que les sommets correspondants de G' .

Illustration



Graphe G Graphe adjoint G' Graphe adjoint G' coloré

Exercice d'application 6

Dans un tournoi d'échecs, chaque joueur doit rencontrer tous les autres. Chaque partie dure une heure.
Déterminez la durée minimum du tournoi dans le cas où le nombre de joueurs est 3, 4, 5 ou 6.

Opérations sur les graphes

Il est souvent convenable de voir les graphes comme étant la combinaison de graphes de petite taille.

- La réunion de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ est le graphe $G_3 = (V_3, E_3)$ (noté $G_3 = G_1 \bigcup G_2$) dont l'ensemble des sommets est $V_3 = V_1 \bigcup V_2$ et l'ensemble des arêtes est $E_3 = E_1 \bigcup E_2$;
- De même l'intersection de deux graphes G_1 et G_2 est le graphe $G_4 = G_1 \bigcap G_2 = (V_4, E_4)$ tel que $V_4 = V_1 \bigcap V_2$ et $E_4 = E_1 \bigcap E_2$;
- La somme de deux graphes G_1 et G_2 (notée $G_1 \bigoplus G_2$) est le graphe $G_5 = (V_5, E_5)$ tel que $V_5 = V_1 \bigcup V_2$) et les arêtes de E_5 sont soit dans G_1 soit dans G_2 mais pas dans les deux.

Propriétés

- $G_1 \bigcup G_2 = G_2 \bigcup G_1$;
- $G_1 \bigcap G_2 = G_2 \bigcap G_1$;
- $G_1 \bigoplus G_2 = G_2 \bigoplus G_1$;
- Si G_1 et G_2 n'ont pas d'arêtes en commun alors $G_1 \bigcap G_2$ est un graphe nul et $G_1 \bigoplus G_2 = G_1 \bigcup G_2$;
- Si G_1 et G_2 n'ont pas de sommets en commun alors $G_1 \bigcap G_2$ est vide ;
- $G \bigcup G = G \bigcap G = G$;
- $G \bigoplus G$ est le graphe nul.