Bases de l'intelligence artificielle Programmation Logique

PR. M. THIAM
MAITRE DE CONFERENCES INFORMATIQUE
UFR SET – UT, 2016/2017

From scratch …

Résoudre un problème

Indiquer où vous habitez

?

Décrire le cheminement permettant d'arriver à la solution d'un problème décrit par un énoncé

Décrire le cheminement à emprunter pour arriver à votre habitation telle que décrit par votre adresse

Quelques problèmes

- Un nombre N est-il divisible par 4 ?

- Soit une série de nombre, trier ces nombres

- Soit le problème classique de la tour de Hanoi, afficher la liste des mouvements nécessaires pour le résoudre.

- Un voyageur de commerce désire faire sa tournée, existe-t-il une tournée de moins de 50 km ?

Équation diophantienne

- En arithmétique : Une équation diophantienne, en mathématiques, est une équation dont les
  - coefficients sont des nombres entiers et dont
  - solutions recherchées sont également entières.
- Le terme est aussi utilisé pour les équations à coefficients rationnels.

David Hilbert
& son problème n°10

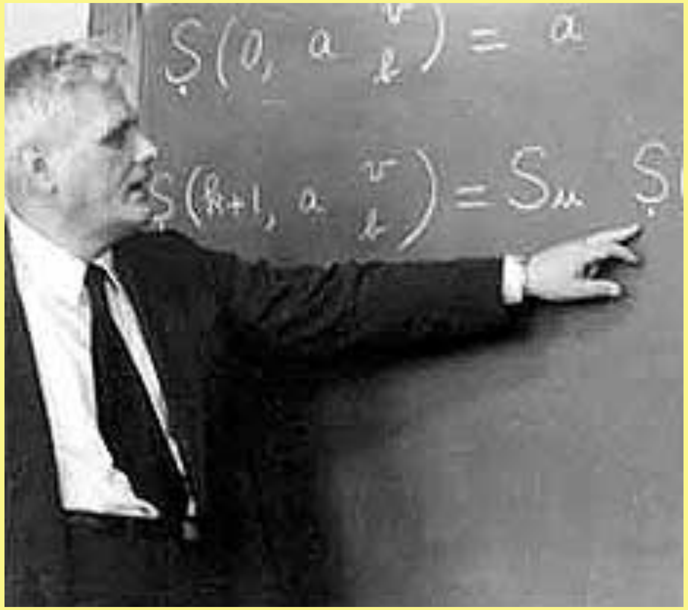
- 1862 - 1943
- Liste des 23 problèmes de Hilbert (1900)
- Problème numéro 10 :

« Trouver un algorithme déterminant si une équation diophantienne à des solutions »

Équation diophantienne

- Carl Friedrich Gauss, un mathématicien du XIXe siècle, disait : « Leur charme particulier vient de la simplicité des énoncés jointe à la difficulté des preuves »
- Identité de **Bézout :** $a\,x + b\,y = c$
- Théorème de **Wilson** : $(x - 1)! + 1 = y\,x$
- Triplet **Pythagoricien** : $x^2 + y^2 = z^2$
- Dernier théorème **Fermat** : $(n=4)$: $x^4 + y^4 = z^4$

Alonzo Church & le λ-calcul



- 1903 - 1995
- Résultat sur la calculabilité
- Développement du lambda-calcul
- 1936 : Démontre l'existence d 'un problème indécidable
- Thèse de Church

Kurt Godël

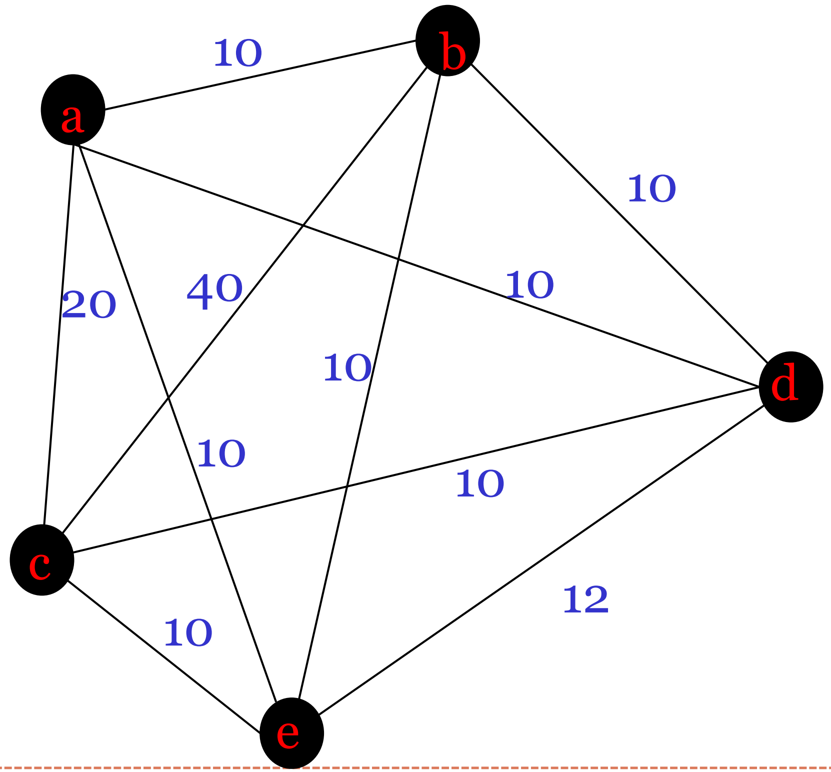
- 1906 - 1978
- Théorème d ’Incomplétude

« pour tout système formel S contenant le langage de l'arithmétique, il existe une proposition G indémontrable dans S »

Exemple de problème de NP

Le voyageur de commerce

• Un voyageur de commerce désire faire sa tournée, existe-t-il une tournée de moins de 50 km ?



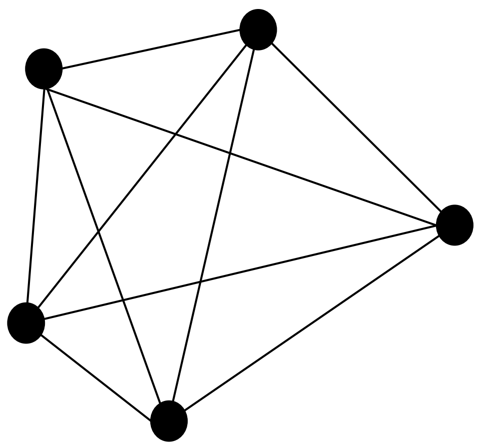
a-b-e-c-d-a	50km

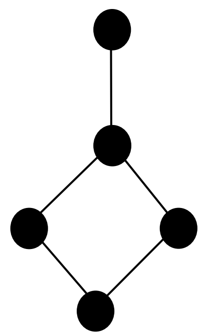
NP et co-NP ?

Problème du circuit hamiltonien

Un graphe est-il hamiltonien ?

Un graphe n'est-il pas hamiltonien ?





Ce problème $\in$ NP

Ce problème $\in$ co-NP

Est-ce que ce problème $\in$ NP ?

WANTED

$$\mathbf{P} \stackrel{?}{=} \mathbf{NP}$$

Des algorithmes …

- Résous le toi-même
- Cherchez dans la ville
- Lire la notice
- Faites de sorte que ca marche
- Etc …

Introduction (1)

- Les techniques que nous connaissons ne permettent pas de simuler le comportement d'une personne, par exemple :
  - apprendre à utiliser un logiciel en lisant le manuel
  - s'apercevoir qu'on a été insulté
  - rédiger une dissertation sur un sujet donné
  - traduire un texte d’une langue A → B

Introduction (2)

- Pour cela il faut des objets qui relient les éléments linguistiques à des représentations du monde

- Des objets qui représentent la sémantique du texte

Introduction (3)

- Déterminer si des énoncés sont VRAIS / FAUX
  - Si Superman voulait et pouvait prévenir le mal, il le ferait.
  - Si Superman ne pouvait prévenir le mal, il serait impuissant;
  - S'il ne voulait pas prévenir le mal, il serait malveillant.
  - Superman ne prévient pas le mal.
  - Si Superman existe, il n'est ni impuissant, ni malveillant.

Introduction (4)

- Déterminer si des énoncés sont VRAIS / FAUX
  - Par conséquent, Superman n'existe pas.
  - v est dans le tableau **b**[1..10]
  - si la valeur **v** est dans **b**,
  - alors elle n'est pas dans **b**[11..20]

Expressions

- Constantes
  - 42
- Variables
  - X
- Opérateurs
  - ÷, +, −, <, =, .
- Exemples
  - 13, z, x+3+z2, x+5>8÷x2

Chapitre 1

LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

Présentation

- Le ***calcul des propositions*** ou ***calcul propositionnel*** est une théorie logique qui définit les lois formelles du raisonnement.

- La version moderne de la logique stoïcienne.

- La première étape dans la construction des outils de la logique mathématique

Proposition

- **Définition**
  - Proposition = construction syntaxique pour laquelle il est sensé de parler de vérité.

- **Exemples**
  - « 2 + 2 = 4 »
  - « le livre est ouvert »
- Contre-exemples
  - « Que Dieu nous protège ! »
  - « viens ! »
  - « tais-toi ! »

Calcul des propositions

- $1^{ère}$ étape dans la définition de la logique et du raisonnement

- Définition des règles de déduction qui relient les propositions entre elles (sans en examiner le contenu)

- $1^{ère}$ étape dans la construction du calcul des prédicats
  - s'intéresse au contenu des propositions et qui est une formalisation achevée du raisonnement mathématique.

Calcul ou système déductif

- Ensemble de règles permettant en un nombre fini d'étapes et selon des règles explicites de déterminer si une proposition est vraie.
- Procédé s'appelle une *démonstration*.
- Structure mathématique permet de garantir que ces raisonnements ou démonstrations ont du sens (sémantique)
- Sémantique → 2 valeurs, *vrai* et *faux* (notés 1 et 0).

Syntaxe du langage

- **variables propositionnelles** ou **propositions atomiques**, notées *p*, *q*, etc.
- **opérateurs** ou **connecteurs**.

$\equiv, =, \Leftrightarrow$	égalité, équivalence
$\not\equiv, \neq$	inégalité, inéquivalence
$\neg$	négation, non
$\vee$	disjonction, ou
$\wedge$	conjonction, et
$\Rightarrow$	implication, si . . . alors
$\Leftarrow$	conséquence

Autres symboles

- Constante noté $\perp$,
  - prononcé taquet vers le haut, type vide, bottom ou bot, qui vise à représenter le *faux*.
- **()** parenthèses pour lever les ambiguïtés dans les formules
- Formules propositionnelles

Formules propositionnelles

- Règles de formation indiquent
  - comment construire des propositions complexes à partir des propositions élémentaires, ou atomes (variables propositionnelles, constantes comme $\perp$).
  - quels assemblages de signes, quels mots, sont bien formés et désignent des propositions.
- Définition dépend d'un choix de connecteurs, et d'un choix d'atomes.

Exemples de formules

- P un ensemble de variables propositionnelles
  - *p* ϵ P est une formule
  - $\perp$ est une formule
  - si *p* et *q* sont des formules, alors $(p \wedge p)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$, $(p \leftrightarrow q)$ et $\neg p$ sont des propositions

Systèmes déductifs

- **La déduction à la Hilbert**
  - Modus penens
- **La déduction naturelle**
- **Le calcul des séquents**

Egalité

- Si X et Y ont la même valeur alors
  - (X=Y)=Vrai;
- Si X et Y n'ont pas la même valeur alors
  - (X=Y)=Faux;
- Raisonner au sujet de l'égalité **X = Y** sans toujours devoir évaluer X et Y
  - (X=Y) = (Y=X)

Lois de l'égalité

- Réflexivité
  - $x=x$
- Symétrie (commutativité)
  - $(x=y) = (y=x)$
- Transitivité
  - $x=y, y=z \Rightarrow x=z$

Lois de l'égalité

- Loi de **Leibniz** (~350 ans)

*Deux expressions **A** et **B** sont égales si et seulement si le remplacement de l'une par l'autre dans n'importe quelle expression **E** ne change pas la valeur de **E**.*

Tables de vérités

		OR	NOR	AND	NAND
F	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
V	V	V	F	V	F

		XOR	NXOR	→	¬
F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F
V	V	F	V	V	F

Exemples

- j'ai une auto rouge $\vee$ j'étudie l'informatique
- j'ai une auto rouge OUEX j'étudie l'informatique
- $x>2 \Rightarrow x>0$
- Si je suis le recteur de l'UT, alors tu as traversé l'Atlantique à la nage.

Exemple : Evaluation de $\neg p \land (q \Rightarrow r)$

P	Q	R	¬P	Q ⇒ R	¬p ∧ (q ⇒ r)
V	V	V	F	V	**F**
V	V	F	F	F	**F**
V	F	V	F	V	**F**
V	F	F	F	V	**F**
F	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	**F**
F	F	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	**V**

Satisfiabilité et validité

- Soit P une expression booléenne
  - P est satisfaite dans un état si elle a la valeur vrai dans cet état.
  - P est satisfiable s'il y a un état dans lequel elle est satisfaite.
  - P est valide si elle est satisfaite dans tous les états.
  - Une tautologie est une expression booléenne valide.

Exemples

- $p \Rightarrow q$ est satisfaite dans l'état (p, faux), (q, vrai).
- Par l'item précédent, $p \Rightarrow q$ est satisfiable.
- $p \Rightarrow q$ n'est pas valide, car elle n'est pas satisfaite dans l'état (p,vrai), (q,faux).

Modélisation des propositions

- Une proposition est un énoncé qui peut être
  - vrai ou
  - faux
- Exemple :
  - La France a 80 universités et le Sénégal en a 5

Modélisation des propositions

- Pourquoi traduire une proposition en langue naturelle en expression booléenne ?
  - Cela force la résolution des ambiguïtés de la langue;
  - Cela permet de manipuler et de simplifier les expressions selon les lois de la logique propositionnelle;
  - C'est beaucoup plus sûr que de raisonner en langue naturelle.

Traduction triviale en expression booléenne

- Une variable pour toute la proposition. Donnons le nom **P** à la proposition.
- **P** : La France a 80 universités et le Sénégal en a 5
- **P** est une variable booléenne (variable propositionnelle) qui peut prendre la valeur vrai ou faux, selon que la proposition est vraie ou fausse.

Traduction raffinée (sous-propositions)

- Donnons les noms **Q** et **R** aux deux sous-propositions
  - Q : La France a 80 universités
  - R : le Sénégal en a 5

- **R** prise isolément est incensée

Traduction d’une proposition

- Introduire des variables booléennes pour dénoter les sous-propositions.
- Remplacer ces sous-propositions par les variables booléennes correspondantes.
- Traduire le résultat de l’étape 2 en expression booléenne, en utilisant les correspondances «évidentes» entre certains mots et les opérateurs logiques. Cf. table ci- dessous.

Traduction de certains mots en opérateurs

et, mais	deviennent	$\wedge$
ou	devient	$\vee$
ne pas, non	deviennent	$\neg$
il n'est pas vrai que	devient	$\neg$
si p alors q	devient	$p \Rightarrow q$

Traduction de certains mots en opérateurs

- Exemples
  - Si vous ne faites pas les exercices, vous coulerez ;
  - Faites les exercices ou vous coulerez ;
  - Tous les nombres pairs sont divisibles par 4 (peut aussi s'écrire : si un nombre est pair, il est divisible par 4).

Logique propositionnelle

- Calcul
  - méthode de raisonnement au moyen de symboles.
- logique équationnelle ou calcul des propositions
  - Un ensemble d'axiomes (exemple $p \lor q \equiv q \lor p$)
  - Trois règles d'inférence
  - Leibniz : $P = Q \Rightarrow E[r := P] = E[r := Q]$
  - Transitivité : $P = Q,\ Q = R \Rightarrow P = R$
  - Substitution : $P,\ P[r := Q]$
- Par conventions
  - P, Q, R, . . . sont des expressions booléennes.
  - p, q, r, . . . sont des variables booléennes.

Théorème et axiome

- Théorème
  - soit un axiome,
  - soit la conclusion d'une règle dont les prémisses sont des théorèmes,
  - soit une expression dont on démontre, en utilisant les règles d'inférence, qu'elle est égale à un axiome ou à un théorème précédemment démontré.
- Axiome
  - expression dont on assume qu'elle est un théorème sans en donner la démonstration. Nous choisirons comme axiomes des expressions valides.

Équivalence et VRAI

- Axiome, associativité de ≡
  - $(p \equiv q) \equiv r \ \equiv \ p \equiv (q \equiv r)$
- Axiome, commutativité (symétrie) de ≡
  - $p \equiv q \equiv q \equiv p$
- Identité (élément neutre)
  - Un élément U est l'identité (ou l'élément neutre) d'une opération ◦ ssi $b = b \circ U = U \circ b$, quel que soit b. U est une identité à gauche ssi $b = U \circ b$ pour tout b. U est une identité à droite ssi $b = b \circ U$ pour tout b.

Négation, inéquivalence et FAUX

- Axiome, définition de faux : faux $\equiv$ ¬vrai
- Axiome, distributivité de ¬ sur $\equiv$
  - $\neg(p\equiv q) \equiv \neg p\equiv q$
- Axiome, définition de $(\neg\equiv)$
  - $(p\ (\neg\equiv)\ q) \equiv \neg(p \equiv q)$
- Théorèmes reliant $\equiv, \not\equiv, \neg$ et faux
  - $\neg p \equiv q \equiv p \equiv \neg q$
  - $\neg\neg p \equiv p$
  - $\neg$faux $\equiv$ vrai
  - $(p \not\equiv q) \equiv \neg p \equiv q$

Négation, inéquivalence et FAUX

- Théorèmes reliant $\equiv, \not\equiv, \neg$ et faux
  - $\neg p \equiv p \equiv$ faux
  - $(p \not\equiv q) \;\equiv\; (q \not\equiv p)$
  - $((p \not\equiv q) \not\equiv r) \;\equiv\; (p \not\equiv (q \not\equiv r))$
  - $((p \not\equiv q) \equiv r) \;\equiv\; (p \not\equiv (q \equiv r))$
  - $p \not\equiv q \equiv r \;\equiv\; p \equiv q \not\equiv r$
- La double négation affirme que la négation est son propre inverse (note : on dit qu'une fonction g est l'inverse d'une fonction f si g(f.x) = x pour tout x).
  - $\neg\neg p \equiv p$

Disjonction

- Elle est définie par 5 axiomes
  - Commutativité (symétrie) de $\vee$
    - $p \vee q \equiv q \vee p$
  - Associativité de $\vee$
    - $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
  - Idempotence de $\vee$
    - $p \vee p \equiv p$
  - Distributivité de $\vee$ sur $\equiv$
    - $p \vee (q \equiv r) \equiv p \vee q \equiv p \vee r$
  - Tiers exclu : $p \vee \neg p$ ou encore $p \vee \neg p \equiv$ vrai

Disjonction

- Théorèmessur $\vee$
  - Zéro de $\vee$
    - $p \vee vrai \equiv vrai$
  - Identité de $\vee$
    - $p \vee faux \equiv p$
  - Distributivité de $\vee$ sur $\vee$
    - $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$
  - $p \vee q \equiv p \vee \neg q \equiv p$

Conjonction

- Axiome ou règle d'or
  - $p \wedge q \equiv p \equiv q \equiv p \vee q$
- Cette règle peut se lire de +sieurs manières
  - $(p \wedge q) \equiv (p \equiv q \equiv p \vee q)$: c'est alors une définition de $\wedge$
  - $(p \equiv q) \equiv (p \wedge q \equiv p \vee q)$: cette lecture indique que p est équivalent à q ssi la conjonction et la disjonction de p et q sont équivalentes.
- Propriétés élémentaires de $\wedge$
  - Commutativité (symétrie) de $\wedge$: $p \wedge q \equiv q \wedge p$
  - Associativité de $\wedge$: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Conjonction

- Propriétés élémentaires de $\wedge$
  - Idempotence de $\wedge$: $p \wedge p \equiv p$
  - Identité de $\wedge$: $p \wedge \text{vrai} \equiv p$
  - Zéro de $\wedge$: $p \wedge \text{faux} \equiv \text{faux}$
  - Distributivité de $\wedge$ sur $\wedge$: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$
  - Contradiction : $p \wedge \neg p \equiv \text{faux}$
- Théorèmes reliant $\wedge$ et $\vee$
  - Absorption
    - $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
    - $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
    - $p \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q$
    - $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$

Conjonction

- On parle d'absorption parce que la sous-expression q est absorbée par p dans les cas (a) et (b), et parce que $\neg p$ est absorbée et disparaît dans les cas (c) et (d).
- Distributivité de $\vee$ sur $\wedge$: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- Distributivité de $\wedge$ sur $\vee$: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- De Morgan (lois de De Morgan – Augustus De Morgan)
  - $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
  - $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

- **Théorèmes reliant $\wedge$ et $\equiv$**
  - $p \wedge q \equiv p \wedge \neg q \equiv \neg p$
  - $p \wedge (q \equiv r) \equiv p \wedge q \equiv p \wedge r \equiv p$
  - $p \wedge (p \equiv q) \equiv p \wedge q$
  - Remplacement : $(p \equiv q) \wedge (r \equiv p) \equiv (p \equiv q) \wedge (r \equiv q)$

Implication

- Axiome, définition de $\Rightarrow$:
  - $p \Rightarrow q \equiv p \vee q \equiv q$
  - alternative de $\Rightarrow$: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
  - alternative de $\Rightarrow$: $p \Rightarrow q \equiv p \wedge q \equiv p$
  - Contrapositivité : $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$
- Théorèmes sur $\Rightarrow$
  - $p \Rightarrow (q \equiv r) \equiv p \wedge q \equiv p \wedge r$
  - Distributivité de $\Rightarrow$ sur $\equiv$: $p \Rightarrow (q \equiv r) \equiv p \Rightarrow q \equiv p \Rightarrow r$
  - $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
  - Transfert : $p \wedge q \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

Implication

- Théorèmes sur ⇒
  - $p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$
  - $p \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p$
  - $p \vee (p \Rightarrow q) \equiv$ vrai
  - $p \vee (q \Rightarrow p) \equiv q \Rightarrow p$
  - $p \vee q \Rightarrow p \wedge q \equiv p \equiv q$
  - Réflexivité de ⇒ : $p \Rightarrow p \equiv$ vrai ou encore $p \Rightarrow p$
  - Zéro à droite de ⇒ : $p \Rightarrow$ vrai $\equiv$ vrai ou encore $p \Rightarrow$ vrai
  - Identité à gauche de ⇒ : vrai $\Rightarrow p \equiv p$
  - $p \Rightarrow$ faux $\equiv \neg p$
  - faux $\Rightarrow p \equiv$ vrai ou encore faux $\Rightarrow p$

Chapitre 2

LOGIQUE DU PREMIER ORDRE

LOGIQUE PROPOSITIONNELLE