Cours de mathématiques

Master 1 Informatique

Université de Thiès

Juin 2018

Dr. O. Diop

1ière partie : Méthodes mathématiques de gestion

La RO

Science du « comment mieux faire avec moins »

Des **outils** pour

- rationaliser
- simuler
- optimiser
- planifier

l'architecture et le fonctionnement des systèmes industriels et économiques.

Des **modèles** pour analyser des situations complexes

Permet aux décideurs de faire des **choix efficaces et robustes**

La recherche opérationnelle

1. Introduction
2. Modélisation d'un programme linéaire
3. Méthode graphique de résolution d'un problème linéaire
4. La méthode algébrique
5. La méthode du Simplex
6. Le solveur du logiciel Excel

Introduction

La programmation linéaire est une technique mathématique permettant de déterminer la meilleure solution d'un problème dont les données et les inconnues satisfont à une série d'équations et d'inéquations linéaires

Il peut aussi se définir comme une technique mathématique permettant de résoudre des problèmes de gestion et particulièrement ceux où le gestionnaire doit déterminer, face à différentes possibilités, l'utilisation optimale des ressources de l'entreprise pour atteindre un **objectif spécifique** comme la **maximisation** des bénéfices ou la **minimisation** des coûts.

Domaine d’application de la RO

- Gestion stratégique d’investissements

- Réseaux de communication, systèmes d’information

- Gestion de la chaine logistique
  - **Production** : maximiser le profit selon la disponibilité de la main d’œuvre, la demande du marché, la capacité de production, le prix de revient du matériau brut …

  - **Transport** : minimiser la distance totale parcourue selon les quantités de matériaux à transporter, la capacité des transporteurs, les points de ravitaillement en carburant …

Domaine d'application

Il existe d'autre domaines où la RO intervient:

- ❖ La finance
- ❖ L'informatique
- ❖ L'énergie
- ❖ Banque assurance
- ❖ File d'attente
- ❖ L'industrie manufacturière

Généralités sur la RO

Programmation linéaire

min le coût / max le profit	min / max $\quad c_1x_1 + c_2x_2 \ldots c_nx_n$
satisfaire la demande	$a_1x_1 + a_2x_2 \ldots a_nx_n \geq b_1$
avec des ressources limitées	$a'_1x_1 + a'_2x_2 \ldots a'_nx_n \leq b'_1$
quantités produites	$x_1, x_2 \ldots x_n \geq 0$

Approche de la RO

Modélisation

- Identifier les variables
- Déterminer la fonction à optimiser
- Structurer les contraintes

Analyse des modèles et résolution

- Méthode graphique
- Méthode algébrique
- Méthode du Simplex

Chapitre 1

Modélisation d’un programme linéaire

Objectif: *Dans ce chapitre, nous nous limiterons uniquement à la transcription d’un problème en un système d’inéquations ainsi que repérer la fonction à optimiser.*

Exemple 1 : production de peinture

Une société produit de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base M1 et M2.

	Quantité utilisée par tonne		Quantité disponible par jour
	Extérieure	Intérieure	
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

Contraintes supplémentaires

- Demande maximum en peinture d'intérieur : 2 tonnes / jour.
- La production en peinture d'intérieur ne dépasser que d'une tonne celle d'extérieur.

??? : système mathématique modélisant ce problème

Variables, inconnues du problème

x_1 = tonnes de peinture d'extérieur produites par jour

x_2 = tonnes de peinture d'intérieur produites par jour

Définitions :

- On appelle **fonction économique ou fonction objectif** la fonction qui doit être maximisée ou minimisée.
- On appelle **programme de base**
  - ✓ l'identification des variables,
  - ✓ la donnée de la fonction économique
  - ✓ le système d'inéquations correspondant aux contraintes

.

Max $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$

S.C
$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_2 - x_1 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- **<u>Solution admissible</u>** *:* Une *solution admissible* est un ensemble de valeurs données aux variables qui satisfait toutes les contraintes

Forme standard d'un programme linéaire

Définition
Un programme linéaire est sous forme standard lorsque toutes ses contraintes sont des égalités et toutes ses variables sont non-négatives.

Forme matricielle

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.c.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Forme canonique d'un programme linéaire

Définition : Un programme linéaire est sous *forme canonique* lorsque toutes ses contraintes sont des *inégalités* et toutes ses variables sont non-négatives.

Forme matricielle

$$\begin{array}{rl} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Théorème 1 (Equivalence des formes standard et canonique).
Tout programme linéaire peut s’écrire sous forme standard et sous forme canonique.

Preuve :

- Transformer les contraintes d’inégalité en contraintes d’égalité en rajoutant une variable d’écart

$$a^T x + s = b,$$
$$s \geq 0.$$

- Une contrainte d’inégalité peut etre remplacée par deux inégalités

$$a^T x \leq b$$
$$-a^T x \leq -b$$

$$a^T x \geq b \Leftrightarrow -a^T x \leq -b.$$
$$\min c^T x = -\max -c^T x.$$

Exemple 1

Exercice 3. L'administrateur d'une firme de comptables doit déterminer, chaque semaine, le temps qu'il doit allouer à chacune des trois activités suivantes : la vérification, la comptabilité de gestion et la planification fiscale.

Le but est de gérer, le mieux possible, les ressources humaines de la firme. Pour chaque heure de vérification facturée, la firme doit faire 15 minutes de travail de comptabilité et 30 minutes de travail de bureau. Pour chaque heure de comptabilité de gestion facturée, la firme doit fournir 20 minutes de travail de comptabilité, 60 minutes de travail de bureau et elle doit, de plus, utiliser 6 minutes de temps d'ordinateur. Pour chaque heure de planification fiscale facturée, la firme doit prévoir 30 minutes de travail de comptabilité, 45 minutes de travail de bureau et 3 minutes de temps d'ordinateur. Le profit net pour une heure de vérification est de 4 euro, tandis que les profits nets pour une heure de comptabilité de gestion et de planification fiscale sont respectivement de 10 euro et de 6 euro. Le personnel de la firme peut fournir cette semaine, 80 heures de comptabilité, 180 heures de travail de bureau et 30 heures de traitement par ordinateur.

Formuler ***le programme de base*** *de programmation linéaire dont la solution donnera la répartition des heures de travail disponibles qui maximise le profit net de la firme.*

Solution

Soit x_1 = nbre d'heures allouées à la vérification facturée.
Soit x_2 = nbre d'heures allouées à la comptabilité facturée.
Soit x_3 = nbre d'heures allouées à la planification facturée.

Trouver les nombres x_1, x_2 et x_3 qui maximisent le profit :

$$f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 4x_1 + 10x_2 + 6x_3$$

Et qui satisfont le système d'inéquations (en minutes) :

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 30x_3 \leqslant 4'800 \\ 30x_1 + 60x_2 + 45x_3 \leqslant 10'800 \\ \qquad\quad\;\; 6x_2 + \;\;3x_3 \leqslant 1'800 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

Exemple 2

On considère le cas d'un fabricant d'automobiles qui propose deux modèles à la vente, des grosses voitures et des petites voitures. Les voitures de ce fabricant sont tellement à la mode qu'il est certain de vendre tout ce qu'il parvient à produire, au moins au prix catalogue actuel de 16000 euros pour les grosses voitures, et 10000 euros pour les petites voitures. Son problème vient de l'approvisionnement limité en deux matières premières, le caoutchouc et l'acier. La construction d'une petite voiture nécessite l'emploi d'une unité de caoutchouc et d'une unité d'acier, tandis que celle d'une grosse voiture nécessite une unité de caoutchouc mais deux unités d'acier. Sachant que son stock de caoutchouc est de 400 unités et son stock d'acier de 600 unités,

*Formuler **le programme de base** de programmation linéaire associé à ce problème*

Exercices d’application

Exercice 1 - **Bucheron**.

Un bucheron a 100 hectares de bois de feuillus. Couper un hectare de bois et laisser la zone se regénérer naturellement coute 700 fcfa par hectare, et rapporte à terme 35000 fcfa. Alternativement, couper un hectare de bois, et replanter avec des pins coute 35000 fcfa par hectare, et rapporte à terme 84000 fcfa. Sachant que le bucheron n’a que 2800000 cfa en caisse au début de l’opération, déterminer le programme linéaire permettant d’avoir la meilleure stratégie à adopter.

Exercices d’application

Exercice 2 - **Taxi**.

Une compagnie de taxi dispose de quatre véhicules libres et doit transporter quatre clients. Le but de la compagnie est d’assigner un taxi par client en minimisant la somme des distances parcourues. Les distances respectives (en kilomètres) entre les taxis et les voyageurs sont données par le tableau suivant :

distance	client 1	client 2	client 3	client 4
taxi 1	6	3	4	5
taxi 2	4	5	4	6
taxi 3	5	6	6	7
taxi 4	4	4	3	5

Modéliser le problème sous la forme d’un programme linéaire sous forme canonique

Capitre 2 : Résolution d’un programme linéaire par la méthode graphique

Exemple 1 : Programme linéaire à deux inconnues

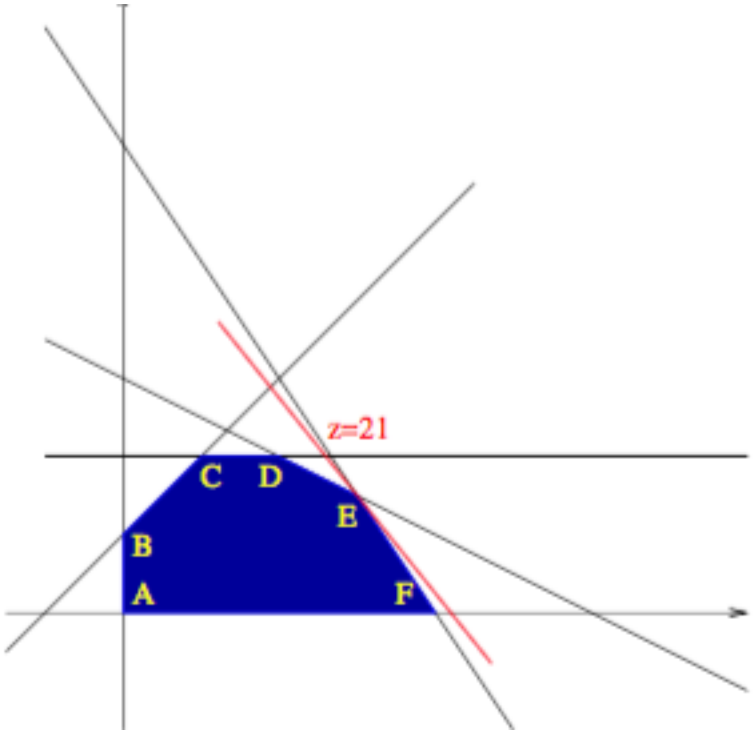
Reprenons l'exemple du chapitre précédent, la production de peinture

On rappelle que le programme linéaire modélisant la production de peinture est donné par le système suivant

Max $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$

SC

$$\begin{array}{rcll} 6x_1 + 4x_2 & \leq & 24 & (1) \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 6 & (2) \\ x_2 & \leq & 2 & (3) \\ x_2 - x_1 & \leq & 1 & (4) \\ x_1 & \geq & 0 & (5) \\ x_2 & \geq & 0 & (6) \end{array}$$



La solution optimale est $x_1 = 3$; $x_2 = 1{,}5$

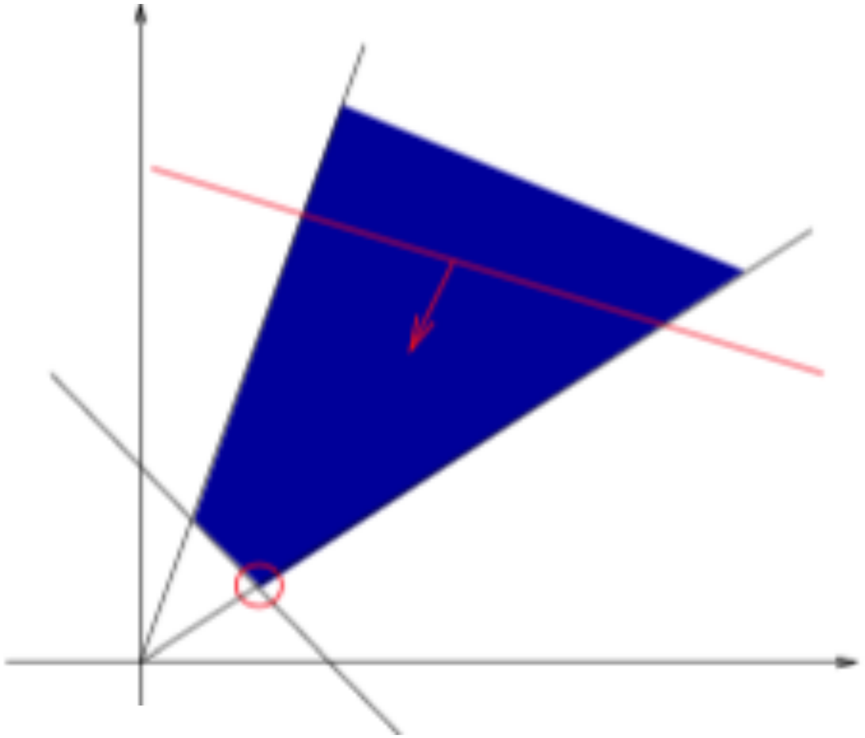
Exemple 2 : Programme linéaire à deux inconnues

Considèrons le programme linéaire suivant

$$\min z = 0.0015x_1 + 0.0045x_2$$

sous les contraintes

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \geq & 400 \\ 0.21x_1 - 0.30x_2 & \leq & 0 \\ 0.03x_1 - 0.01x_2 & \geq & 0 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Solution optimale

$$x_1 = \frac{4000}{17} \simeq 235.3 \quad x_2 = \frac{2800}{17} \simeq 164.7 \quad z = \frac{186}{170} \simeq 1.094$$

Exemple 3 : Allocation de ressources

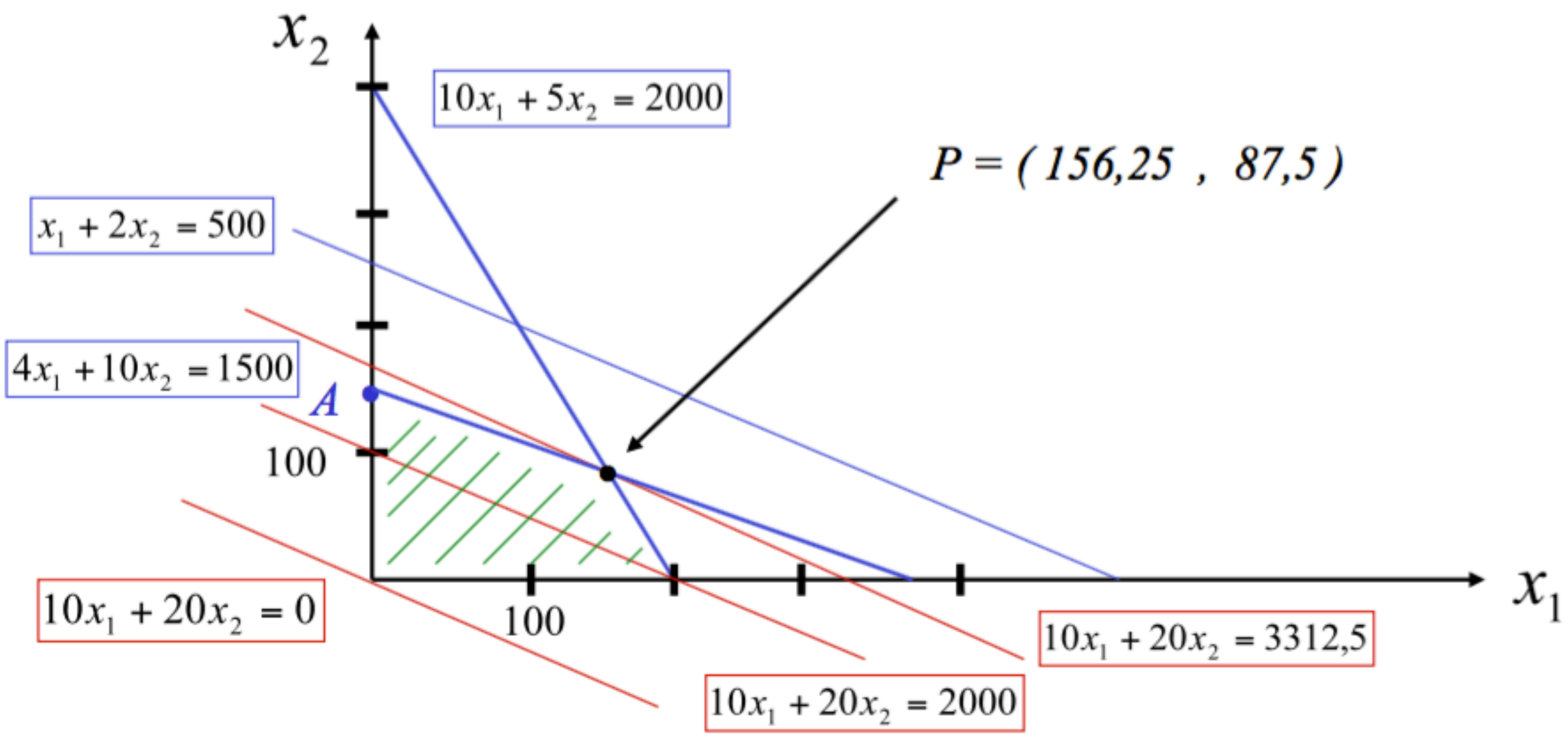
	Produit A	Produit B	Disponibilité
Machine 1	10	5	2000
Machine 2	4	10	1500
Machine 3	1	2	500
Profit	10	20	

Objectif: $\Leftrightarrow \max \quad 10x_1 + 20x_2$ avec $10x_1 + 5x_2 < 2000$

Maximiser le profit

$$4x_1 + 10x_2 < 1500$$

$$x_1 + 2x_2 < 500$$



Tracer $10x_1 + 20x_2 = k$ => l'optimum = P

Si objectif = $8x_1 + 20x_2$ => infinité de solutions = segment (P, A)

Exercice 1

Résoudre le programme linéaire suivant

$$\max Z = 60x + 90y$$

$$\text{sujet à} \quad : \quad \begin{cases} 80x + 90y \leq 9000 \\ 40x + 90y \leq 5400 \\ 30y \leq 1200 \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 2

L'entreprise Simco fabrique différents modèles d'appareils électro- ménagers. Le programme actuel de fabrication est de 500 unités du modèle Elec-100 et 400 unités du modèle Elec-200. Le vice-président de la fabrication veut déterminer si les contributions aux bénéfices de l'entreprise peuvent être augmentées en modifiant le programme actuel de fabrication. Il possède l'information suivante sur le nombre d'heures requises pour fabriquer chaque modèle, ainsi que le temps disponible à chaque atelier.

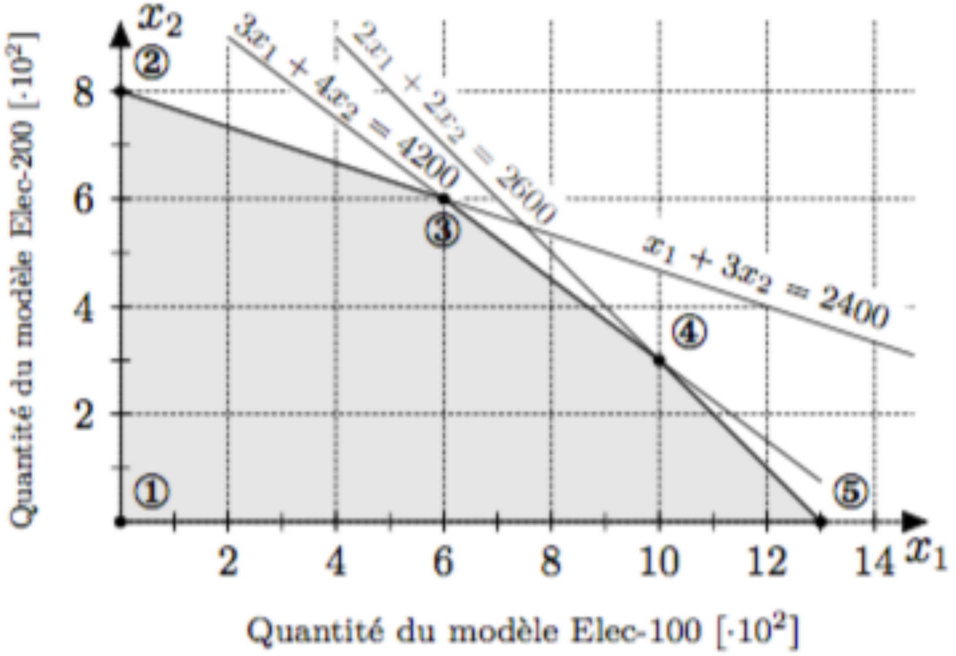
	Modèles		
	Elec-100	Elec-200	
Atelier	Nbre d'heures requises		temps disponible
Assemblage	3	4	4'200 heures
Vérification	1	3	2'400 heures
Empaquetage	2	2	2'600 heures
Contribution	Fr. 100.-/unité	Fr. 120.-/unité	

a) Énoncer le programme de base :

b) Faites la représentation graphique du problème

c) Points-sommets,tla fonction économique et en déduire la solution du problème

Résolution



nt-sommets	Coordonnées	$f(x_1\,;x_2) = 100x_1 + 120x_2$
①	$(0\,;0)$	Fr. 0
②	$(0\,;800)$	Fr. 96'000
③	$(600\,;600)$	Fr. 132'000
④	$(1000\,;300)$	Fr. 136'000
⑤	$(1300\,;0)$	Fr. 130'000

La solution de ce problème est les couple (1000,300)

Exemple : problème linéaire à trois variables

Un marchand d'aliments naturels prépare des mélanges à grignoter en sachets dont les ingrédients de base sont les arachides, les raisins secs et les noix de cajou. Pour préparer ces mélanges, il reçoit hebdomadairement 2'400 g d'arachides, 1'200 g de raisins secs et 1'200 g de noix de cajou. Les quantités utilisées pour chaque mélange et le profit réalisé sont donnés dans le tableau suivant :

	M_1	M_2	M_3	Quantité disponible
Arachides	30	30	20	2'400
Raisins	10	10	20	1'200
Cajou	30	10	10	1'200
Profit	Fr. 2.-	Fr. 1.50	Fr. 1.-	

Sachant que le commerçant écoule tous les mélanges qu'il peut préparer chaque semaine, trouver combien il doit en préparer de chaque sorte pour que son profit soit maximum.

Exemple 3 : Programme linéaire à trois inconnues

Posons
le nombre de sachets du mélange
le nombre de sachets du mélange
le nombre de sachets du mélange

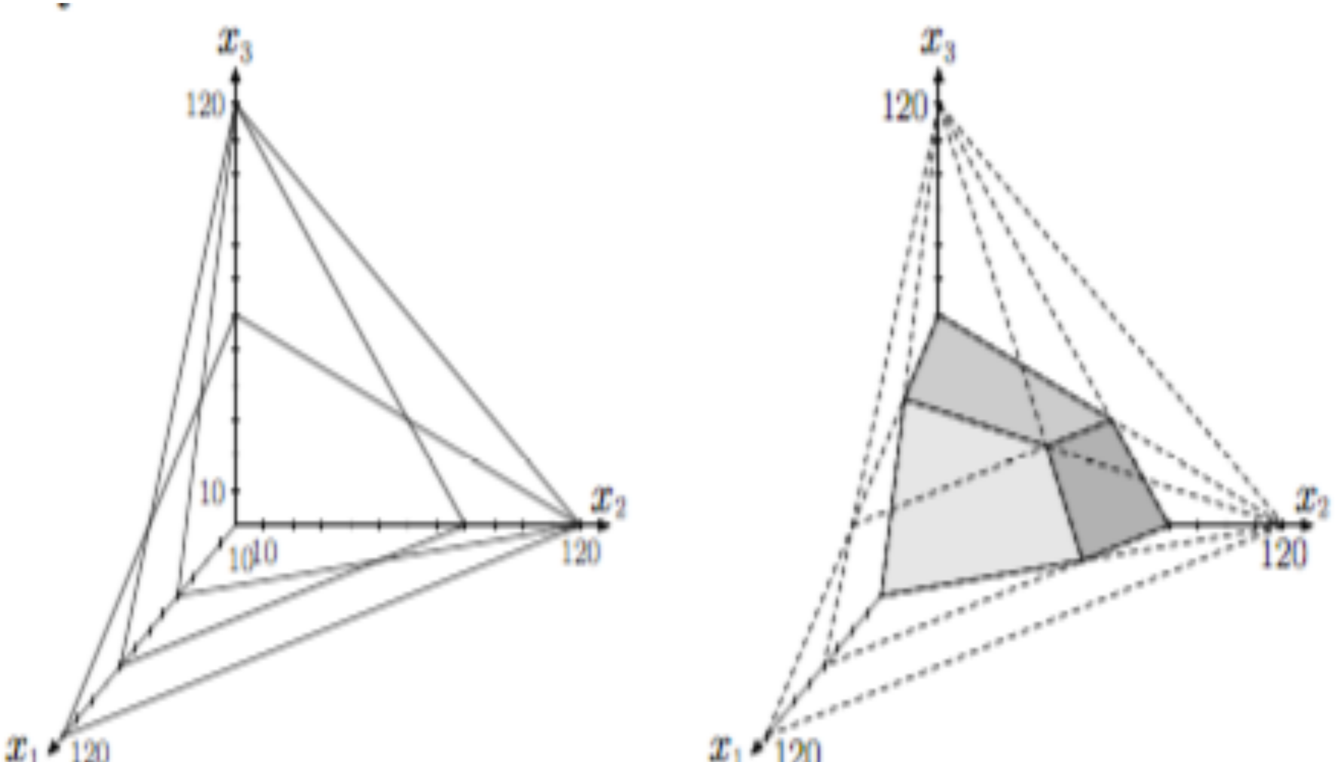
La fonction économique est donnée par

$$f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 2x_1 + 1{,}5x_2 + x_3$$

Et les contraintes

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 240 \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 \leqslant 120 \\ 3x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 \leqslant 120 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

Polyèdre des contraintes



Exercice d'application

1

En utilisant la méthode graphique, déterminer dans chaque cas, la solution (valeurs des variables et de la fonction économique).

a) Maximiser $f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 15x_1 + 6x_2 + 8x_3$
avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 50 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 50 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 40 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

b) Maximiser $f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 15x_1 + 8x_2 + 6x_3$
sujette aux contraintes de la donnée précédente.

c) Maximiser $f(x_1\,;x_2\,;x_3) = x_1 + x_2 + x_3$
avec les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 90 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 80 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 70 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

Exercice d'application

2

Une entreprise fabrique trois pièces P_1, P_2 et P_3 et dispose pour la fabrication de ces pièces de trois ateliers : fraisage (A_1), tournage (A_2) et assemblage (A_3). Le tableau suivant représente les temps unitaires de fabrication (en heures) des pièces aux différents ateliers. La colonne de droite indique le temps disponible par semaine à chaque atelier.

		Pièces			
		P_1	P_2	P_3	temps (en heures)
Ateliers	A_1	1	2	3	120
	A_2	3	1	2	120
	A_3	1	4	1	120

Une étude du marché a démontré qu'il est actuellement en état d'absorber toute la production de l'entreprise. La contribution au bénéfice de l'entreprise est :

Fr. 10.- pour la pièce P_1
Fr. 13.- pour la pièce P_2
Fr. 12.- pour la pièce P_3

a) Déterminer graphiquement le programme optimal de fabrication à mettre en œuvre.

b) Quels sont les ateliers qui seront utilisés à plein rendement ?

c) Quel sera le bénéfice optimal ?

Chapitre 3 : Résolution par la méthode algébrique

Variables d'écart

La méthode de résolution que nous étudions dans ce chapitre nécessite que les contraintes du modèle soient exprimées sous forme d'**équations linéaires** au lieu d'inéquations.

On peut facilement transformer une inéquation linéaire ayant un signe $\leq$ en une équation linéaire en additionnant une variable non négative dite **variable d'écart.**

Soit la $i^{ième}$ contrainte :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i$$

Additionnant au premier membre de l'inéquation, la variable d'écart x_{n+1} vérifiant que $x_{n+1} \geqslant 0$, on obtient :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$$

et alors :

$$x_{n+1} = b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n)$$

représente l'écart entre la quantité disponible de la ressource i et la quantité effectivement utilisée par l'ensemble des x_j. Si la quantité b_i représente des heures (disponibilité d'un département par exemple), la variable d'écart introduite dans la contrainte correspondante représentera alors un temps mort, qui peut être soit positif soit nul.

Nous ajoutons autant de variables d'écart qu'il existe de contraintes du type

Ainsi les contraintes du modèle fil rouge (cf. page 36) exprimées sous forme d'inéquations linéaires, peuvent se ramener à un système d'équations linéaires en introduisant trois variables d'écart, x3, x4 et x5 :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 4'200 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 2'400 \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant 2'600 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4'200 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2'400 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 2'600 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;\ldots;5 \end{cases}$$

Reprenons l'éxemple suivant

L'entreprise Simco fabrique différents modèles d'appareils électro-ménagers. Le programme actuel de fabrication est de 500 unités du modèle Elec-100 et 400 unités du modèle Elec-200. Le vice-président de la fabrication veut déterminer si les contributions aux bénéfices de l'entreprise peuvent être augmentées en modifiant le programme actuel de fabrication. Il possède l'information suivante sur le nombre d'heures requises pour fabriquer chaque modèle, ainsi que le temps disponible à chaque atelier.

	Modèles		
	Elec-100	Elec-200	
Atelier	Nbre d'heures requises		temps disponible
Assemblage	3	4	4'200 heures
Vérification	1	3	2'400 heures
Empaquetage	2	2	2'600 heures
Contribution	Fr. 100.-/unité	Fr. 120.-/unité	

Coefficients des variables d'écart dans la fonction économique

En suivant toujours le même exemple,

La donnée était :

- maximiser :

$f(x_1\,;x_2) = 100x_1 + 120x_2$

- avec les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 4'200 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 2'400 \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant 2'600 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases}$$

elle devient :

- maximiser :

$f(x_1\,;\ldots;x_5) = 100x_1 + 120x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

- avec les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4'200 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2'400 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 2'600 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;\ldots;5 \end{cases}$$

Nous sommes alors en présence d'un système de trois équations à cinq inconnues.

Résolution complète

Ainsi donc, après l'introduction des 3 variables d'écart :

$$x_3 = \text{temps mort en heures à l'atelier d'assemblage,}$$
$$x_4 = \text{temps mort en heures à l'atelier de vérification,}$$
$$x_5 = \text{temps mort en heures à l'atelier d'empaquetage.}$$

l'exemple *fil rouge* s'écrit alors :

maximiser $f(x_1\,;\ldots;x_5) = 100x_1 + 120x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$
avec les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4'200 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2'400 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 2'600 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;\ldots;5 \end{cases}$$

➢ PROGRAMME INITIAL

Pour déterminer le programme initial, on pose habituellement à zéro les **variables principales** du modèle. Pour l'entreprise Simco, ceci correspond à ne fabriquer aucun des deux appareils :

$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0.$$

Notre système de 3 équations à 5 inconnues devient alors un système de 3 équations à 3 inconnues que l'on va pouvoir manipuler.

Dans l'application de la méthode algébrique, le système d'équations correspondant aux contraintes se présente toujours de la façon suivante :

variables dans le programme (les $x_j \neq 0$)	—	en fonction des	—	variables hors programme (les $x_j = 0$)

Dans le programme de base initial, on exprime toujours les variables d'écart (ici x_3, x_4, x_5) en fonction des variables principales (ici x_1, x_2). Donc au départ, ce sont les variables d'écart qui sont dans le programme de base et les variables principales sont hors programme :

variables dans le programme

$$\begin{cases} x_3 = 4'200 - 3x_1 - 4x_2 & (1) \\ x_4 = 2'400 - x_1 - 3x_2 & (2) \\ x_5 = 2'600 - 2x_1 - 2x_2 & (3) \end{cases}$$

variables hors programme

Comme $x_1 = x_2 = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} x_3 = 4'200 \text{ heures} \\ x_4 = 2'400 \text{ heures} \\ x_5 = 2'600 \text{ heures} \end{cases}$$

La valeur de la fonction économique est alors :

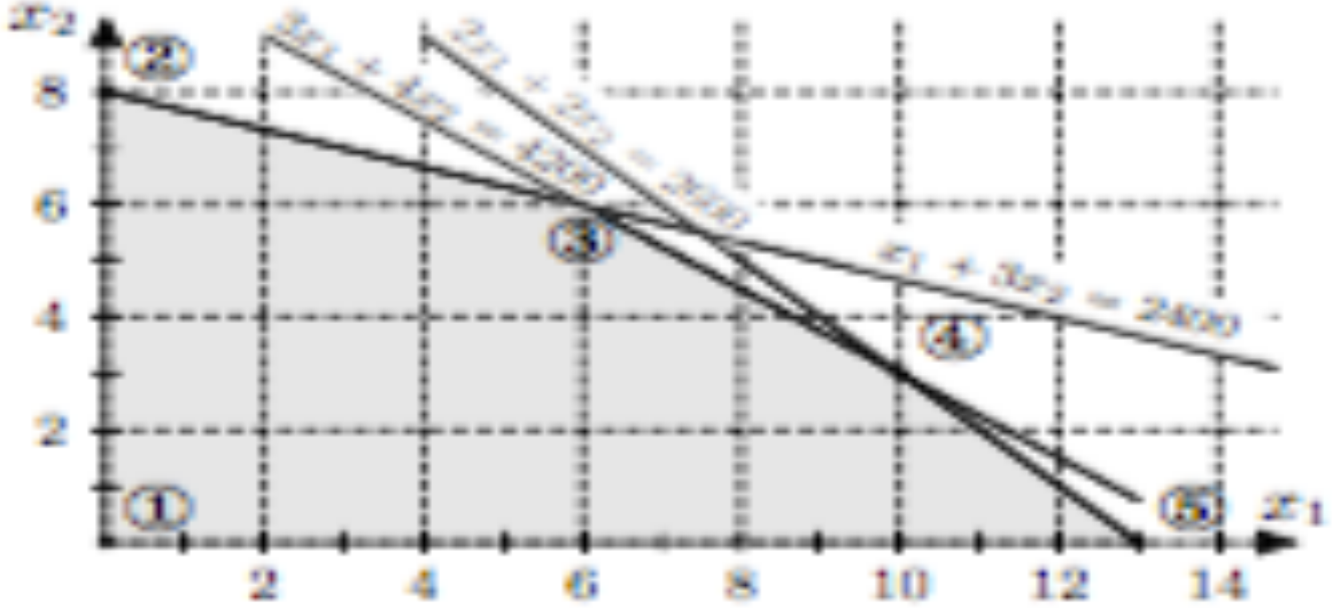
$$f_1(0\,;0\,;4'200\,;2'400\,;2'600) = \\ \mathbf{100} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{120} \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot 4'200 + 0 \cdot 2'400 + 0 \cdot 2'600 = 0$$

<u>Programme de base n° 1</u>

$x_1 = 0$ unité
$x_2 = 0$ unité
$x_3 = 4'200$ heures
$x_4 = 2'400$ heures
$x_5 = 2'600$ heures

fct éco$_1$ = Fr. 0.-

Ce programme de base correspond au point extrême ① de la résolution graphique. Bien qu'il soit réalisable, il n'est pas financièrement attrayant pour l'entreprise. Comme aucun atelier n'est en opération, on peut évidemment améliorer la valeur de la fonction économique en fabriquant quelques unités de l'un ou de l'autre des appareils électroménagers.



On doit maintenant examiner la possibilité d'améliorer la valeur de la fonction économique en introduisant l'une ou l'autre des variables principales (soit x_1, soit x_2 mais non les deux simultanément) dans le programme de base et en sortant une variable actuellement dans le programme de base. Nous savons que nous ne pouvons jamais avoir plus de m (ici 3) variables positives dans un programme de base.
Le choix de la variable (actuellement hors programme) à introduire dans le programme s'effectue à l'aide d'un critère qui permet d'améliorer le plus rapidement possible la valeur de la fonction économique.

Critère d'entrée d'une variable dans le programme de base

À chaque programme, on choisira la variable (actuellement hors programme) qui donne la meilleure augmentation de la valeur de la fonction économique c.-à-d. la variable dont la contribution au bénéfice est la plus élevée. On portera évidemment notre choix sur des variables dont les coefficients sont positifs.
À chaque étape de la résolution (chaque programme), nous exprimons la fonction économique en fonction des variables hors programme :

fct économique	— en fonction des —	variables hors programme

Donc à cette étape-ci, la fonction économique de l'entreprise Simco est :

$$\text{fct économique} = 100x_1 + 120x_2$$

variables hors programme

D'après l'expression de la fonction économique, l'augmentation sera la plus élevée si nous introduisons la variable x_2 dans le programme, Donc :

$$\boxed{\text{Variable entrante : } x_2}$$

Il nous reste maintenant deux choses à déterminer. D'une part, calculer la quantité du modèle Elec-200 (x_2) que l'on doit fabriquer et d'autre part, quelle variable actuellement dans le programme doit devenir une variable hors programme c.-à-d. déterminer la variable sortante.

Détermination de la valeur entrante

Cherchons d'abord la plus grande quantité du modèle Elec-200 (x_2) que l'on peut fabriquer tout en respectant les conditions imposées par les équations (1), (2) et (3).
Nous ne pouvons excéder les temps disponibles à chaque atelier.

Il s'agit donc de déterminer la plus grande valeur pouvant être prise par x_2 dans chaque équation. Ainsi dans la première équation (1) :

$$x_3 = 4'200 - 3x_1 - 4x_2$$

Le modèle Elec-200 (variable x_2) exige 4 heures d'assemblage par unité. Comme nous avons 4'200 heures disponibles, on peut alors fabriquer :

$$\frac{4'200}{4} = 1'050 \text{ unités du modèle Elec-200}$$

Ainsi, pour chaque atelier (Assembage - Vérification - Empactage), on obtiendra les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{llcl}
(1) & x_3 = 4'200 - 3x_1 - 4x_2 & \Rightarrow & \text{Quantité} = 1'050 \text{ unités} \\
(2) & x_4 = 2'400 - x_1 - 3x_2 & \Rightarrow & \text{Quantité} = \dfrac{2'400}{3} = 800 \text{ unités} \\
(3) & x_5 = 2'600 - 2x_1 - 2x_2 & \Rightarrow & \text{Quantité} = \dfrac{2'600}{2} = 1'300 \text{ unités}
\end{array}$$

Pour s'assurer que toutes les contraintes soient respectées en même temps, on choisit parmi ces valeurs **la plus petite quantité positive** :

$$x_2 = 800 \text{ unités}$$

Ce minimum s'obtient dans l'équation (2). On utilise donc tout le temps disponible à l'atelier de vérification pour fabriquer 800 unités du modèle Elec-200. Il n'y aura donc plus aucun temps mort à cet atelier : $x_4 = 0$. C'est la variable qui sort du programme :

$$\boxed{\text{Variable sortante : } x_4}$$

détermination de la nouvelle solution : programme de base no 2

Puisque $x_2 = 800$ et que $x_1 = 0$, on a alors :

$$\begin{cases} x_3 = 4'200 - 3 \cdot 0 - 4 \cdot 800 = 1'000 \text{ heures} \\ x_4 = 2'400 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 800 = 0 \text{ heure} \\ x_5 = 2'600 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 800 = 1'000 \text{ heures} \end{cases}$$

La valeur de la fonction économique est alors :

$$f_2(0\,;800\,;1'000\,;0\,;1'000) =$$
$$\mathbf{100 \cdot 0} + \mathbf{120 \cdot 800} + 0 \cdot 1'000 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1'000 = 96'000$$

Ou plus simplement :

$$f_2(0\,;800) = 100 \cdot 0 + 120 \cdot 800 = 96'000$$

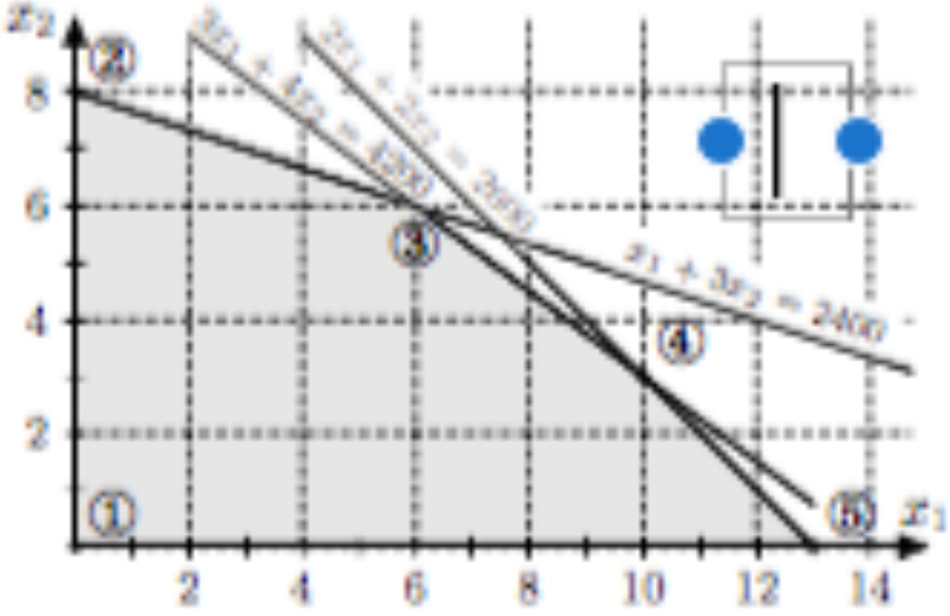
Le nouveau programme de base est donc :

<u>Programme de base n° 2</u>

$x_1 = 0$ unité
$x_2 = 800$ unités
$x_3 = 1'000$ heures
$x_4 = 0$ heure
$x_5 = 1'000$ heures

fct éco$_2$ = Fr. 96'000.-

Il correspond au point-sommet ② de la résolution graphiqu
S'agit-il du programme optimal ?



Toutefois, avant de tester si le programme est optimal, il faut d'abord transformer les équations (1), (2) et (3) pour exprimer les variables dans le programme en fonction des variables hors programme :

- Variables dans le programme (les non nulles) : x_2, x_3, x_5
- Variables hors programme (les nulles) : x_1, x_4

$$\left\{\begin{aligned} x_3 &= 4'200 - 3x_1 - 4x_2 \\ x_4 &= 2'400 - x_1 - 3x_2 \\ x_5 &= 2'600 - 2x_1 - 2x_2 \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x_3 &= 4'200 - 3x_1 - 4x_2 \\ x_2 &= 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 \\ x_5 &= 2'600 - 2x_1 - 2x_2 \end{aligned}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x_3 &= 4'200 - 3x_1 - 4(800 - 1/3x_1 - 1/3x_4) \\ x_2 &= 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 \\ x_5 &= 2'600 - 2x_1 - 2(800 - 1/3x_1 - 1/3x_4) \end{aligned}\right.$$

Et l'on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{variables}\\ \textit{dans le}\\ \textit{programme}\end{array}} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 1'000 - 5/3x_1 + 4/3x_4 & (4)\\ x_2 = \;\; 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 & (5)\\ x_5 = 1'000 - 4/3x_1 + 2/3x_4 & (6)\end{cases}$$

$$\boxed{\textit{variables hors programme}}$$

Il nous reste à exprimer la valeur de la fonction économique, en fonction des variables hors programme x_1 et x_4 à l'aide de la substitution :

$$\begin{cases} \text{fct éco} = 100x_1 + 120x_2\\ x_2 = 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4\end{cases} \Longrightarrow \quad \text{fct éco} = 96'000 + 60x_1 - 40x_4$$

$$\boxed{\textit{variables hors programme}}$$

Cette dernière expression nous indique qu'on peut améliorer encore la valeur de la fonction économique puisque le coefficient de la variable x_1 est positif. En effet, nous remarquons que la fabrication d'une unité du modèle Elec-100 ($x_1 = 1$) permettra d'augmenter la valeur de la fonction économique de Fr. 60.- (le coefficient de la variable x_1). Toutefois, ceci ne peut se faire sans diminuer la fabrication au modèle Elec-200 (x_2) puisqu'actuellement le temps disponible à l'atelier de vérification est complètement utilisé.

Donc si nous voulons fabriquer une certaine quantité du modèle Elec-100 (x_1), il faut sacrifier une partie de la fabrication du modèle Elec-200 (x_2).

Puisque l'atelier de vérification est actuellement utilisé à pleine capacité pour la fabrication du modèle Elec-200 et que les temps opératoires pour chaque appareil sont les suivants :

détermination du troisième programme de base

$$\boxed{\text{Variable entrante : } x_1}$$

Déterminons la valeur de x_1 (quantité d'Elec-100) en utilisant les équations (4), (5) et (6) :

$$(4)\quad x_3 = 1'000 - 5/3x_1 + 4/3x_4 \quad\Rightarrow\quad \text{Quantité} = \frac{1'000}{5/3} = 600 \text{ unités}$$

$$(5)\quad x_2 = \ 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 \quad\Rightarrow\quad \text{Quantité} = \frac{800}{1/3} = 2'400 \text{ unités}$$

$$(6)\quad x_5 = 1'000 - 4/3x_1 + 2/3x_4 \quad\Rightarrow\quad \text{Quantité} = \frac{1'000}{4/3} = 750 \text{ unités}$$

Ainsi x_1 devant respecter les différentes contraintes, nous choisirons $x_1 = 600$ unités qui se réalise dans la première équation et qui impose que x_3 devienne nulle, ainsi :

$$\boxed{\text{Variable sortante : } x_3}$$

Déterminons les nouvelles valeurs sachant que $x_1 = 600$ et $x_4 = 0$

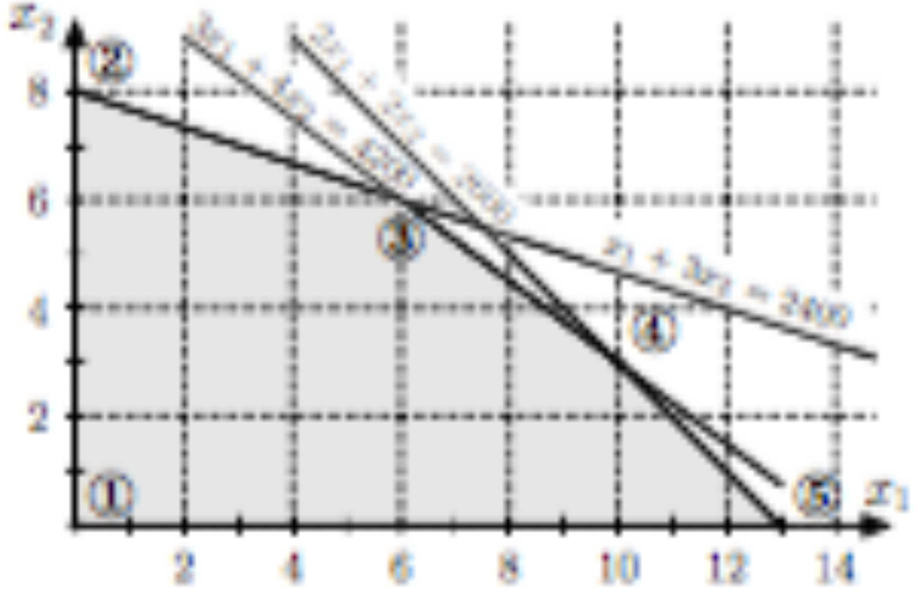
$$\left\{\begin{array}{l} x_3 = 1'000 - 5/3 \cdot 600 + 4/3 \cdot 0 = 0 \text{ heure} \\ x_2 = \ \ 800 - 1/3 \cdot 600 - 1/3 \cdot 0 = 600 \text{ unités} \\ x_5 = 1'000 - 4/3 \cdot 600 + 2/3 \cdot 0 = 200 \text{ heures} \end{array}\right.$$

La valeur de la fonction économique peut se calculer de 2 manières différentes :

- $f(x_1\,,x_2) = 100x_1 + 120x_2 \quad \Rightarrow \quad f(600\,;600) = 132'000$
- $f_3(x_1\,;x_4) = 96'000 + 60 \cdot x_1 - 40 \cdot x_4$
  $\Rightarrow \quad f_3(600\,;0) = 96'000 + 60 \cdot 600 - 40 \cdot 0 = 132'000$

Le nouveau programme de base est donc :

Programme de base n° 3
$x_1 = 600$ unités
$x_2 = 600$ unités
$x_3 = 0$ heure
$x_4 = 0$ heure
$x_5 = 200$ heures
fct éco$_3$ = Fr. 132'000.-



Il correspond au point-sommet ③ de la résolution graphique.
Nous avons maintenant :

- Variables dans le programme (les non nulles) : x_1, x_2, x_5
- Variables hors programme (les nulles) : x_3, x_4

Exprimons à nouveau les variables dans le programme en fonction des variables hors programme :

$$\left\{\begin{array}{l} x_3 = 1'000 - 5/3x_1 + 4/3x_4 \\ x_2 = \ \ 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 \\ x_5 = 1'000 - 4/3x_1 + 2/3x_4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \ \ 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \\ x_2 = \ \ 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 \\ x_5 = 1'000 - 4/3x_1 + 2/3x_4 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \ \ 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \\ x_2 = \ \ 800 - 1/3(600 - 3/5x_3 + 4/5x_4) - 1/3x_4 \\ x_5 = 1'000 - 4/3(600 - 3/5x_3 + 4/5x_4) + 2/3x_4 \end{array}\right.$$

Et l'on obtient :

$$\boxed{\textit{variables dans le programme}} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 & (7) \\ x_2 = 600 + 1/5x_3 - 3/5x_4 & (8) \\ x_5 = 200 + 4/5x_3 - 2/5x_4 & (9) \end{cases}$$

$$\boxed{\textit{variables hors programme}}$$

Exprimons la valeur de la fonction économique, en fonction des variables hors programme x_3 et x_4 à l'aide de la substitution :

$$\begin{cases} \text{fct éco} = 96'000 + 60x_1 - 40x_4 \\ x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \end{cases} \Longrightarrow \quad \text{fct éco} = 132'000 - 36x_3 + 8x_4$$

$$\boxed{\textit{variables hors programme}}$$

Nous n'avons pas encore atteint la solution optimale puisque le coefficient de la variable x_4 est positif. On peut donc améliorer la valeur de la fonction économique en introduisant la variable x_4 dans le programme.

Détermination du quatrième programme de base

$\boxed{\text{Variable entrante : } x_4}$

Déterminons la valeur de x_4 (temps mort à l'atelier de vérification) en utilisant les équations (7), (8) et (9) :

$$(7)\quad x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \quad \Rightarrow \quad \text{valeur} = \frac{600}{-4/5} = -750 \text{ heures}$$

$$(8)\quad x_2 = 600 - 1/5x_3 - 9/15x_4 \quad \Rightarrow \quad \text{Valeur} = \frac{600}{3/5} = 1'000 \text{ heures}$$

$$(9)\quad x_5 = 200 + 4/5x_3 - 6/15x_4 \quad \Rightarrow \quad \text{Valeur} = \frac{200}{2/5} = 500 \text{ heures}$$

x_4 doit vérifier la condition d'être une variable d'écart donc d'être positive. De plus, elle doit correspondre au minimum des deux autres valeurs obtenues. On choisira donc $x_4 = 500$ dans l'équation (9) ce qui impose que x_5 devienne nulle.

$\boxed{\text{Variable sortante : } x_5}$

Déterminons les nouvelles valeurs sachant que $x_4 = 500$ et $x_3 = 0$

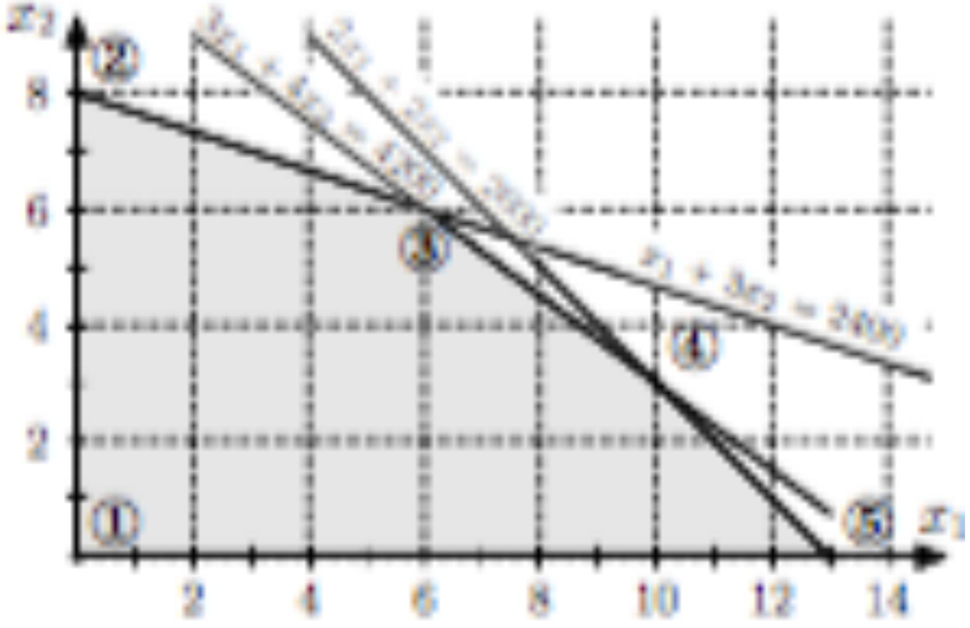
$$\begin{cases} x_1 = 600 - 3/5 \cdot 0 + 4/5 \cdot 500 = 1'000 \text{ unités} \\ x_2 = 600 + 1/5 \cdot 0 - 3/5 \cdot 500 = 300 \text{ unités} \\ x_5 = 200 - 4/5 \cdot 0 - 2/5 \cdot 500 = 0 \text{ heure} \end{cases}$$

La valeur de la fonction économique est alors :

$$f_4(0\,;500) = 132'000 - 36 \cdot 0 + 8 \cdot 500 = 136'000$$

Le nouveau programme de base est donc :

Programme de base n° 4
$x_1 = 1'000$ unités
$x_2 = 300$ unités
$x_3 = 0$ heure
$x_4 = 500$ heures
$x_5 = 0$ heure
fct éco$_4$ = Fr. 136'000.-



Il correspond au point-sommet ④ de la résolution graphique.
Nous avons maintenant :

- Variables dans le programme (les non nulles) : x_1, x_2, x_4
- Variables hors programme (les nulles) : x_3, x_5

Exprimons à nouveau les variables dans le programme en fonction des variables hors programme :

$$\begin{cases} x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \\ x_2 = 600 + 1/5x_3 - 3/5x_4 \\ x_5 = 200 - 4/5x_3 - 2/5x_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \\ x_2 = 600 + 1/5x_3 - 3/5x_4 \\ x_4 = 500 + 2x_3 - 5/2x_5 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5(500 + 2x_3 - 5/2x_5) \\ x_2 = 600 + 1/5x_3 - 3/5(500 + 2x_3 - 5/2x_5) \\ x_4 = 500 + 2x_3 - 5/2x_5 \end{cases}$$

Puis finalement la valeur de la fonction économique, en fonction des variables hors programme x_3 et x_5 à l'aide de la substitution :

$$\begin{cases} \text{fct éco} = 132'000 - 36x_3 + 8x_4 \\ x_4 = 500 + 2x_3 - 5/2x_5 \end{cases} \Longrightarrow \quad \text{fct éco} = 136'000 - 20x_3 - 20x_5$$

$\boxed{\textit{variables hors programme}}$

Pouvons-nous améliorer encore la valeur de la fonction économique ?

La réponse est **non** puisque les coefficients des variables hors programme (x_3 et x_5) sont négatifs.

Un programme de base est optimal si tous les coefficients des variables hors programme, dans l'expression de la fonction économique, sont $\leqslant 0$.

On constate qu'elle correspond bien à la solution optimale obtenue lors de la résolution graphique. Le programme optimal de fabrication de l'entreprise Simco est donc :

1'000 unités de Elec-100 300 unités de Elec-200 pour un bénéfice maximum de Fr. 136'000.- De plus, il n'y a aucun temps mort aux ateliers d'assemblage et d'empaquetage et il y a 500 heures de temps mort à l'atelier de vérification.

Démarche à suivre

1) structurer le problème sous forme d'un système d'équations en introduisant les variables d'écart requises. Il s'agira bien sûr d'avoir précisé préalablement les variables (principales et d'écart) ainsi que la fonction économique.

2) Déterminer le programme de base qui servira de départ au cheminement vers la solution optimale (programme optimal).

3) Expliciter la fonction économique et déterminer si elle peut être améliorée : recherche de l'éventuelle variable (hors programme) admettant le plus grand coefficient positif. Dans la négative, le programme est optimal.

4) En introduisant cette variable dans le programme, on choisira la plus petite valeur positive obtenue à l'aide du système d'équa- tions calculé lors de l'étape précédente. Celà induira la variable sortante.

5) Pour déterminer un nouveau programme de base, on doit trans- former le système d'équations ainsi que l'expression de la fonc- tion économique en exprimant les variables dans le programme de base en fonction des variables hors programme (par substi- tution).

6) Retourner à **3)** jusqu'à l'obtention du programme de base optimal.

7) Donner le programme optimal en précisant la valeur de toutes les variables ainsi que la valeur optimisée de la fonction écono- mique.

Exercice 1

Une entreprise envisage de fabriquer deux produits : SP-1 et SP-2. Les prix de vente de chaque produit sont respectivement Fr. 4.- et Fr. 6.- l'unité. On doit utiliser deux ateliers pour fabriquer ces deux produits et on possède l'information suivante :

	Temps requis (heures/unités)	
	Atelier I	Atelier II
SP-1	5	1
SP-2	6	2
Disponibilité	60 heures	16 heures

La fabrication des produits exige donc de passer par l'atelier I d'abord et par l'atelier II ensuite. Le marché peut absorber au plus 10 unités de SP-1 et 6 unités de SP-2. Les coûts de fabrication sont de Fr. 2.- l'unité pour SP-1 et Fr. 3.- l'unité pour SP-2.

a) Déterminer à l'aide de la méthode algébrique le programme de fabrication à mettre en œuvre pour maximiser les bénéfices.

b) Est-ce qu'il y a plein emploi des ateliers ?

Exercice 2

Déterminer la solution optimale du programme linéaire suivant par la méthode algébrique :

- maximiser :

$$f(x_1\,;x_2) = 2x_1 + x_2$$

- avec les contraintes :

$$\begin{cases} \;\;x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \\ 2x_1 + \;\;x_2 \leqslant 10 \\ \;\;x_1 + \;\;x_2 \leqslant 4 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases}$$

Vérifier ensuite que vous obtenez bien la même solution optimale avec la méthode graphique.

Chapitre 4 : La méthode du simplex

La méthode du simplex

C'est en 1947 que George DANTZIG (mathématicien américain) travaillant sur un projet des forces de l'air américaines, a introduit un algorithme de calcul permettant de résoudre les problèmes de programmation linéaire. Cette technique, connue sous le nom d'algorithme du simplexe, nécessite l'utilisation d'un ordinateur pour résoudre des problèmes de gestion et de production dans le monde des affaires et dans celui de l'industrie.
En 1971, à l'aide de la méthode du simplexe, il a été possible de résoudre en 2 heures et demie un problème comportant 282'468 variables et 50'215 contraintes.

George Dantzig
(1914-2005)

Reprenons le problème discuté dans le chapitre précédent

- maximiser la fonction économique :

$$f(x_1\,;\ldots\,;x_5) = 100x_1 + 120x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$$

- avec les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 & = 4'200 \\ \;\; x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 & = 2'400 \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 2'600 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;\ldots;5 \end{cases}$$

On peut écrire le système précédent sous la forme suivante

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 4'200 \\ x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 2'400 \\ 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2'600 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;\ldots;5 \end{cases}$$

La représentation en tableau sera :

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cc:ccc:c}
3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 4'200 \\
1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2'400 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2'600 \\
\hdashline
100 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

ÉTAPE n° 1 : Matrice du programme de base n° 1

$$
\left(\begin{array}{cc:ccc:c}
3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 4'200 \\
1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2'400 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2'600 \\
\hdashline
100 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

ÉTAPE N° 2 : Matrice du programme de base n° 2 :

Pour accroître le plus rapidement possible la valeur de la fonction économique, il faut donner une valeur positive à x_2 puisque c'est x_2 qui a le plus grand coefficient positif sur la dernière ligne de la matrice. Quelle est la plus grande valeur que l'on peut attribuer à x_2 ?
Pour le déterminer, on prend les rapports des éléments de la colonne de droite sur les éléments de la colonne des x_2. On trouve alors :

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccc} & \downarrow & & & & \downarrow \end{array} & \\
\left(\begin{array}{cc|ccc|c}
3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 4'200 \\
1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2'400 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2'600 \\
\hline
100 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) &
\begin{array}{l}
4'200/4 = 1'050 \\
2'400/3 = 800 \\
2'600/2 = 1'300 \\

\end{array}
\end{array}
$$

Le plus petit de ces rapports est 800 et c'est la plus grande valeur qu'on peut attribuer à x_2. Nous utiliserons donc l'élément de la deuxième ligne deuxième colonne ; encerclons-le pour le mettre en évidence. Nous l'appellerons **pivot de la 1re étape**.

$$\left(\begin{array}{cc:ccc:c} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 4'200 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2'400 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2'600 \\ \hdashline 100 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nous devons maintenant annuler les autres éléments de la deuxième colonne. Pour ce faire, nous effectuons des opérations sur les lignes. En premier lieu, nous allons rendre le pivot unitaire en divisant les termes de la deuxième ligne par 3 :

$$\tfrac{1}{3}L_2 \rightarrow L_2 \left(\begin{array}{cc:ccc:c} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 4'200 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 800 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2'600 \\ \hdashline 100 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En deuxième lieu, on soustrait 4 fois la deuxième ligne à la première, 2 fois la deuxième à la troisième et finalement 120 fois la deuxième à la dernière :

$$\begin{array}{l} L_1 - 4L_2 \to L_1 \\ \\ L_3 - 2L_2 \to L_3 \\ L_4 - 120L_2 \to L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 3-4/3 & 4-4 & 1-0 & 0-4/3 & 0-0 & 4'200-3'200 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 800 \\ 2-2/3 & 2-2 & 0-0 & 0-2/3 & 1-0 & 2'600-1'600 \\ \hline 100-40 & 120-120 & 0-0 & 0-40 & 0-0 & 0-120\cdot 800 \end{array}\right)$$

Donc, nous obtenons après avoir simplifié :

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 5/3 & 0 & 1 & -4/3 & 0 & 1'000 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 800 \\ 4/3 & 0 & 0 & -2/3 & 1 & 1'000 \\ \hline 60 & 0 & 0 & -40 & 0 & -96'000 \end{array}\right)$$

Cette matrice représente alors le système d'équations que nous avions obtenu après la première étape de la résolution algébrique

En effet en retranscrivant les 3 premières lignes, nous obtenons :

$$\begin{cases} 5/3x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 4/3x_4 + 0x_5 = 1'000 \\ 1/3x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1/3x_4 + 0x_5 = 800 \\ 4/3x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 2/3x_4 + 1x_5 = 1'000 \end{cases}$$

qui est bien équivalente à :

$$\begin{cases} x_3 = 1'000 - 5/3x_1 + 4/3x_4 \\ x_2 = \quad 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 \\ x_5 = 1'000 - 4/3x_1 + 2/3x_4 \end{cases}$$

On constate également que la valeur obtenue en bas à droite de la matrice correspond à l'opposé de la valeur numérique obtenue dans la fonction économique :

$$\text{fct économique} = 96'000 + 60x_1 - 40x_4$$

ÉTAPE N° 3 : Matrice du programme de base n° 3 :

On constate que l'on peut encore accroître la valeur à optimiser en introduisant une valeur pour x_1.
À nouveau, effectuons le rapport de la dernière colonne avec celle de x_1 :

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{cccccc} \downarrow & & & & & \downarrow \end{array} \\
\left(\begin{array}{cc:ccc:c}
5/3 & 0 & 1 & -4/3 & 0 & 1'000 \\
1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 800 \\
4/3 & 0 & 0 & -2/3 & 1 & 1'000 \\
\hdashline
60 & 0 & 0 & -40 & 0 & -96'000
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
1'000/(5/3) = 600 \\
800/(1/3) = 2'400 \\
1'000/(4/3) = 750 \\

\end{array}
\end{array}$$

Le plus petit rapport étant sur la première ligne, notre pivot sera l'élément de la première ligne, première colonne. Rendons-le unitaire en le multipliant par 3/5 :

$$\tfrac{3}{5}L_1 \to L_1 \quad \left(\begin{array}{cc:ccc:c}
1 & 0 & 3/5 & -4/5 & 0 & 600 \\
1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 800 \\
4/3 & 0 & 0 & -2/3 & 1 & 1'000 \\
\hdashline
60 & 0 & 0 & -40 & 0 & -96'000
\end{array}\right)$$

Effectuons à nouveau les opérations sur les lignes afin d'annuler les autres éléments de la 1re colonne :

$$
\begin{array}{l}
\\
L_2 - 1/3L_1 \rightarrow L_2 \\
L_3 - 4/3L_1 \rightarrow L_3 \\
L_4 - 60L_1 \rightarrow L_4
\end{array}
\left(\begin{array}{cc:ccc:c}
1 & 0 & 3/5 & -4/5 & 0 & 600 \\
0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 0 & 600 \\
0 & 0 & -4/5 & 2/5 & 1 & 200 \\
\hdashline
0 & 0 & -36 & 8 & 0 & -132'000
\end{array}\right)
$$

Après retranscription en système d'équations :

$$
\begin{cases}
1x_1 + 0x_2 + 3/5x_3 - 4/5x_4 + 0x_5 = 600 \\
0x_1 + 1x_2 - 1/5x_3 + 3/5x_4 + 0x_5 = 600 \\
0x_1 + 0x_2 - 4/5x_3 + 2/5x_4 + 1x_5 = 200
\end{cases}
$$

On obtient le système suivant

$$
\begin{cases}
x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \\
x_2 = 600 + 1/5x_3 - 3/5x_4 \\
x_5 = 200 + 4/5x_3 - 2/5x_4 \\
\text{fct éco} = 132'000 - 36x_3 + 8x_4
\end{cases}
$$

Nous n'avons pas encore atteint la solution optimale puisque le coefficient de la variable x_4, dans la fonction économique, est positif. Effectuons le rapport de la dernière colonne avec celle de x_4.

ÉTAPE N° 4 : Matrice du programme de base n° 4 :

$$
\begin{array}{cl}
\begin{array}{cccccc} & & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\left(\begin{array}{cc:ccc:c}
1 & 0 & 3/5 & -4/5 & 0 & 600 \\
0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 0 & 600 \\
0 & 0 & -4/5 & 2/5 & 1 & 200 \\
\hdashline
0 & 0 & -36 & 8 & 0 & -132'000
\end{array}\right)
&
\begin{array}{l}
600/(-4/5) = -750 \\
600/(3/5) = 1'000 \\
200/(2/5) = 500 \\

\end{array}
\end{array}
$$

Le pivot se situe en 3ᵉ ligne, 4ᵉ colonne. Rendons-le unitaire en le multipliant par 5/2 :

$$
\tfrac{5}{2} L_3 \to L_3 \left(\begin{array}{cc:ccc:c}
1 & 0 & 3/5 & -4/5 & 0 & 600 \\
0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 0 & 600 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 5/2 & 500 \\
\hdashline
0 & 0 & -36 & 8 & 0 & -132'000
\end{array}\right)
$$

Effectuons à nouveau les opérations sur les lignes afin d'annuler les autres éléments de la 4[e] colonne :

$$\begin{array}{l} L_1 + 4/5 L_3 \to L_1 \\ L_2 - 3/5 L_3 \to L_2 \\ \\ L_4 - 8 L_3 \to L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cc:ccc:c} 1 & 0 & \text{-}1 & 0 & 2 & 1'000 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \text{-}3/2 & 300 \\ 0 & 0 & \text{-}2 & 1 & 5/2 & 500 \\ \hdashline 0 & 0 & \text{-}20 & 0 & \text{-}20 & \text{-}136'000 \end{array} \right)$$

Il n'y a plus de coefficients positifs sur la dernière ligne de la matrice et il n'est donc plus possible d'accroître la valeur de la fonction économique.

Retranscrivons le système correspondant :

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 - 1x_3 + 0x_4 + \quad 2x_5 = 1'000 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 - 3/2x_5 = 300 \\ 0x_1 + 0x_2 - 2x_3 + 1x_4 + 5/2x_5 = 500 \end{cases}$$

Que l'on peut comparer à ce que l'on avait obtenu en page 44 :

$$\begin{cases} x_1 = 1'000 + x_3 - 2x_5 \\ x_2 = 300 - x_3 + 3/2x_5 \\ x_4 = 500 + 2x_3 - 5/2x_5 \\ \text{fct éco} = 136'000 - 20x_3 - 20x_5 \end{cases}$$

La solution optimale est donc le quintuplet :

$$(x_1\,;x_2\,;x_3\,;x_4\,;x_5) = (1'000\,;300\,;0\,;500\,;0)$$

qui correspond à un bénéfice maximum de Fr. 136'000.- en produisant 1'000 unités de Elec-100, 300 unités de Elec-200 avec un temps mort de 500 heures à l'atelier de vérification.

Démarche à suivre pour la méthode du complex

1) Déterminer la colonne (sauf la dernière) dont l'élément de la dernière ligne a la plus grande valeur positive. C'est la colonne du pivot.

2) Déterminer la ligne du pivot en faisant le rapport des éléments de la dernière colonne sur les éléments correspondants de la colonne du pivot. La ligne du pivot étant celle donnant le plus petit rapport non négatif.

3) Rendre le pivot unitaire.

4) Annuler tous les termes de la colonne du pivot.

5) Répéter les quatre premières étapes jusqu'à ce que tous les éléments de la dernière ligne soient non positifs.

6) Les colonnes ne contenant qu'un seul élément non nul sont celles correspondant aux variables dans le programme ; la valeur de ces variables est donnée dans la dernière colonne, les variables hors programme étant nulles.

7) La valeur maximale de la fonction économique (plus exactement son opposé) est donnée dans la dernière ligne, dernière colonne.

Exemple: Reprenons l'exemple du controle

Il s'agissait de maximiser $f(x_1 ; x_2 ; x_3) = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3$ avec les contraintes :

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 200 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1; \ldots ; 6 \end{cases}$$

1. Matrice du programme de base no 1 :
2. Déterminer la ligne et la colonne du pivot no 1 :
3. Rendre le pivot no 1 unitaire :
4. Annuler tous les termes de la colonne du pivot no 1 :
5. La fonction économique est-elle optimisée ?
6. Déterminer la ligne et la colonne du pivot no 2 :
7. Rendre le pivot no 2 unitaire :
8. Annuler tous les termes de la colonne du pivot no 2 :
9. La fonction économique est-elle optimisée ?
10. Exprimer alors la situation optimale :

Chapitre 5 : Le solveur du logiciel Excel

Reprenons l’exemple du controle

L’entreprise Simtech doit, dans son processus de fabrication de ses produits, utiliser trois phases successives d’opération : l’usinage des pièces, l’assemblage et la finition. Pour simplifier le problème, supposons que l’entreprise fabrique trois produits que nous noterons P_1, P_2 et P_3. Les différentes phases d’opération ne peuvent toutefois fonctionner que pendant un certain nombre d’heures. La main-d’œuvre actuelle limite le nombre d’heures disponibles aux valeurs suivantes :

Usinage :	100 heures
Assemblage :	120 heures
Finition :	200 heures

Le tableau suivant nous indique les temps de fabrication requis, en heures/unité, aux différentes phases d’opération pour fabriquer les produits P_1, P_2 et P_3.

	Produits		
	P_1	P_2	P_3
Usinage	1	2	1
Assemblage	3	4	2
Finition	2	6	4

Reprenons l’exemple du controle

Le département de compatibilité de l’entreprise a estimé aux valeurs suivantes la contribution au bénéfice de chaque produit :

Produits	Fr./unité
P_1	6.-
P_2	7.-
P_3	8.-

De plus, on suppose qu’il n’existe aucune restriction de marché ; il peut absorber toute la production.
Déterminer le programme optimal.

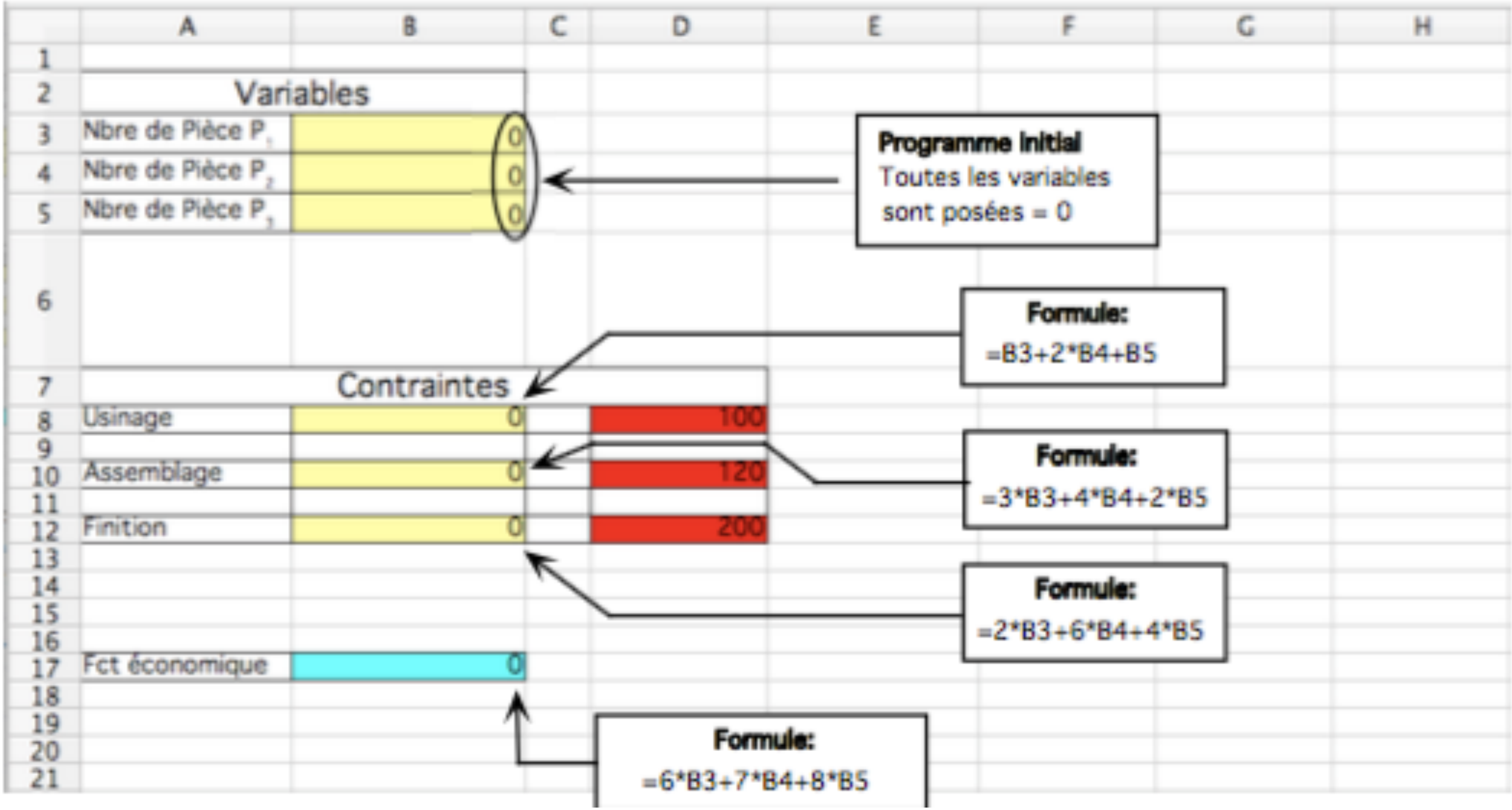
Reprenons l'exemple du controle

Le programme correspondant s'écrit comme suit

$$f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3$$

Sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leqslant 200 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$



Variables
Nbre de Pièce P_1 0
Nbre de Pièce P_2 0
Nbre de Pièce P_3 0
Programme Initial
Toutes les variables
sont posées = 0
Formule:
=B3+2*B4+B5
Contraintes
Usinage 0 100
Assemblage 0 120
Finition 0 200
Formule:
=3*B3+4*B4+2*B5
Formule:
=2*B3+6*B4+4*B5
Fct économique 0
Formule:
=6*B3+7*B4+8*B5

- Les **variables** sont les quantités respectives des différents investissements (cellules jaunes).
- Les **contraintes** sont les valeurs imposées dans la donnée (cellules rouges).
- La **cellule cible** est celle contenant la formule exprimant la valeur à optimiser (cellule bleue).

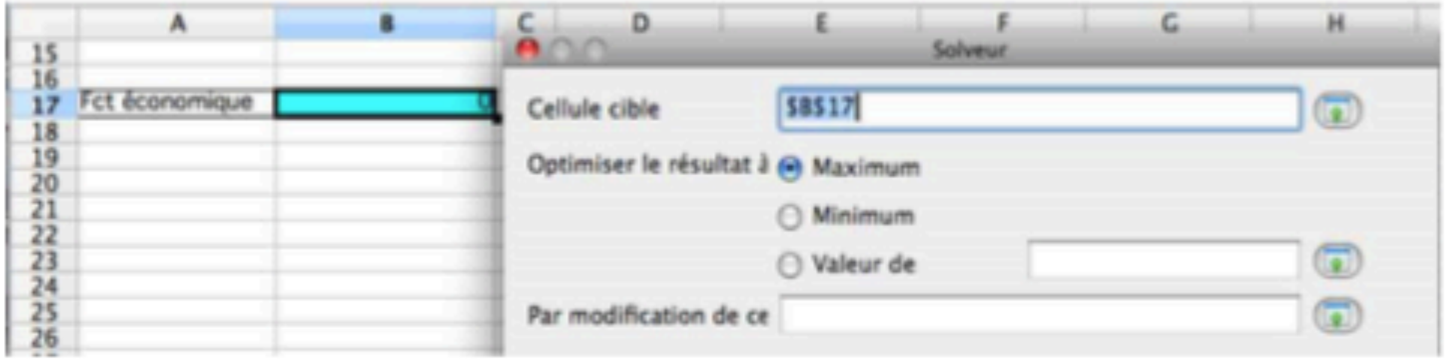
Afin d'optimiser la fonction économique, nous allons utiliser la commande Solveur... du menu Outil.

Remarque

La cellule cible B17 doit contenir la formule correspondante à la fonction économique dépendant directement des cellules variables : =6*B3+7*B4+8*B5 .

ÉTAPE n° 1 : Spécification de la cellule cible :

Dans la zone Cellule cible, précisez la référence de la cellule que vous voulez minimiser ou maximiser (c'est-à-dire la fonction économique).

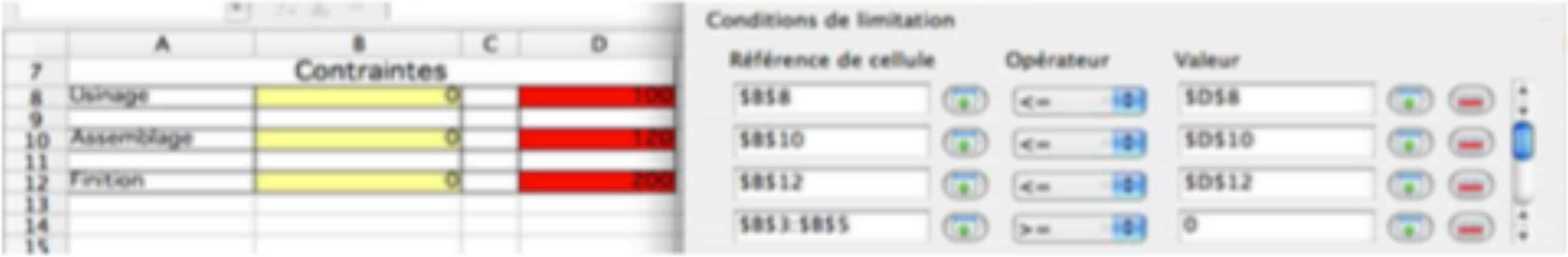


- Si vous désirez maximiser la cellule cible, choisissez le bouton Maximum.
- Si vous désirez minimiser la cellule cible, choisissez le bouton Minimum.
- Si vous désirez que la cellule cible se rapproche d'une valeur donnée, choisissez le bouton Valeur et indiquez la valeur souhaitée dans la zone à droite du bouton.

ÉTAPE n° 2 : Spécification des cellules variables :

Tapez dans la zone Par modifications de cellules les références des cellules devant être modifiées par le solveur jusqu'à ce que les contraintes du problème soient respectées et que la cellule cible atteigne le résultat recherché.

ÉTAPE n° 3 : Spécification des contraintes :



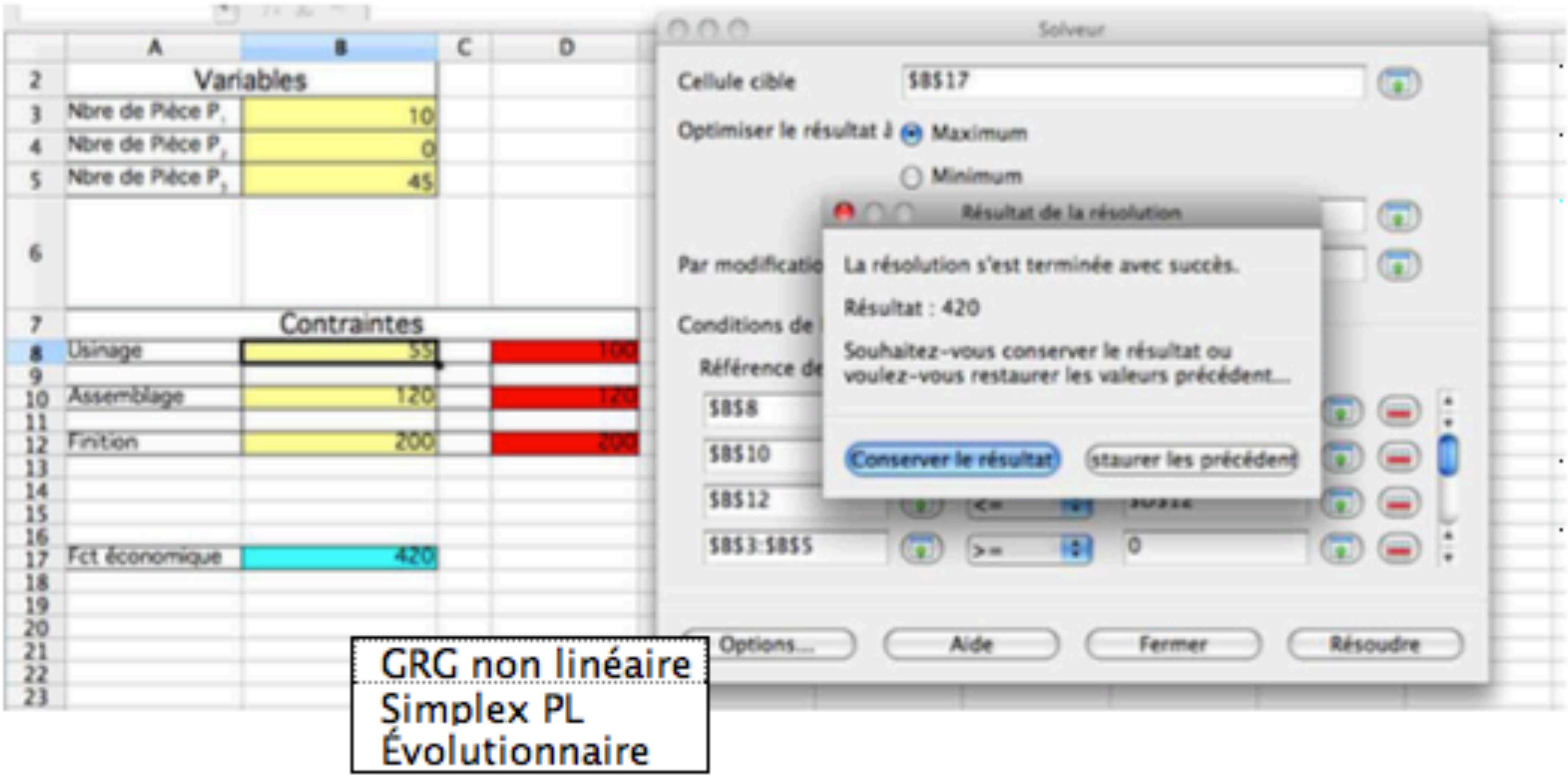
Pour chaque référence de cellule, il suffit de cliquer dans les cellules correspondantes directement sur la feuille OpenOffice. Par exemple, à la case B8, contenant la formule : =B3+2*B4+1*B5, on associe l'opérateur <= à la valeur de la cellule D8. On définit ainsi la contrainte : $\underline{x_1 + 2x_2 + 4x_3} \leqslant 100$.

Remarque :

- Une contrainte peut être limitée inférieurement ($\leqslant$), supérieurement ($\geqslant$), égalité ($=$) ou limitée aux nombres entiers (opérateur Nombre entier).
- La dernière contrainte correspond aux contraintes de non-négativités.

ÉTAPE n° 4 : Résolution et résultat :

Une fois tous les paramètres du problème mis en place, le choix du bouton Résoudre amorce le processus de résolution du problème. Vous obtenez alors les réponses :



Exercice : Résoudre le problème suivant

- maximiser : $f(x_1\,; x_2\,; x_3) = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3$
- avec les contraintes :

$$\begin{cases} \quad x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 \leqslant 1'000 \\ 0.80x_1 + 0.95x_2 + 0.90x_3 \leqslant 900 \\ \quad x_1 - \quad x_2 - \quad x_3 \leqslant 100 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1; 2; 3 \end{cases}$$