Exercice 1

Un réseau est modélisé par un arbre $A = (V, E)$.
On appelle distance $d(x, y)$ entre 2 sommets x et y la longueur de la chaine qui relie ces sommets.
L'écartement $e(x)$ d'un sommet x est le maximum des distances de x aux autres sommets dans l'arbre.
$e(x) = max_{y \in V} d(x, y)$

Un centre est un sommet c dont l'écartement est minimum.

$e(c) = max_{x \in V} e(x)$

On cherchera par exemple à placer au centre d'un tel réseau des ambulances ou des ins-

tallations de protection contre le feu.
Le centre est-il unique dans un tel réseau ? Si oui, le montrer, si non, est-ce que ce nombre est limité ?

Exercice 2

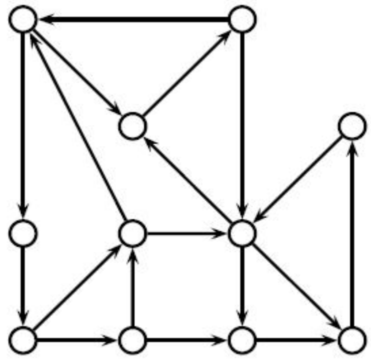
1. Un graphe biparti peut-il contenir un cycle de longueur impaire (c-à-d avec un nombre impair d'arêtes) ? Donner un exemple ou justifier ;
2. Donner un algorithme de reconnaissance d'un graphe biparti.

Exercice 3

On désire organiser le ramassage des ordures dans une grande ville dans laquelle les rues ont des sens de parcours fixés, avec un nombre minimum de véhicules. Le modÃ¨le de graphes est donné ci-dessous. Étant donné un graphe G orienté, on cherche à partitionner l'ensemble de ses arcs en chemins. Une telle partition P est eulérienne si elle comporte un nombre minimum de chemins.

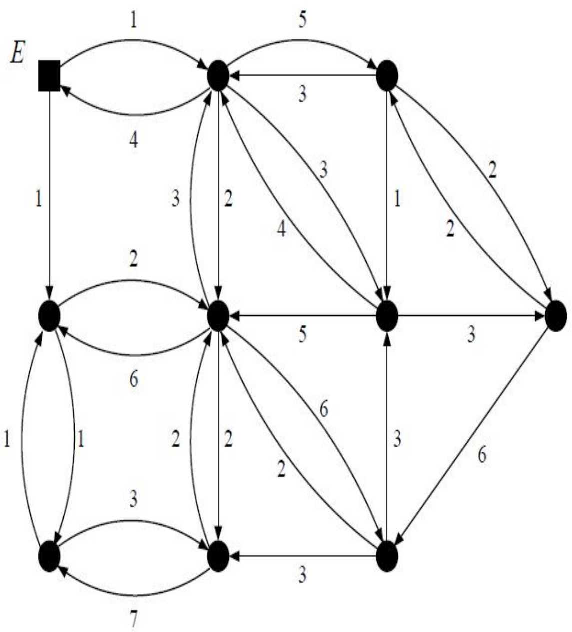
1. Donner un algorithme permettant de trouver une partition eulérienne de G et le justifier ;
2. Établir une formule fournissant le nombre minimum de chemins ou de circuits dans une partition P.

Application :



Exercice 4

Un réseau de traitement d'eaux usées est décrit dans la figure ci-dessous. Le sommet E est la station d'épuration et les autres sommets sont des sites de production de déchets liquides (quartiers). Ce réseau est vieux et l'ONAS décide de le rénover ; Le coût de rénovation de chaque tronçon a été évalué.



1. On demande de déterminer les tronçons à rénover pour obtenir à moindre coût un réseau permettant d'acheminer vers E les déchets liquides en tous les points du réseaux ;

2. Même question si la station E peut être placée au choix en chacun des 5 points de la première colonne et de la dernière ligne du dessin.

Exercice 5

Pendant les n = 6 jours à venir, des tests médicaux vont être effectués sur m patients; On décide de représenter ces tests par un tableau m*n, $d_{i,j} = k$ signifie que le test sur le patient i avec l'appareillage j se fera le jour k.
Il n'y a qu'un appareillage de chaque type qui est disponible; Chaque patient ne peut subir qu'un test par jour.
a) On a déjà envoyé quelques convocations à certains patients, ce qui a donné le tableau ci-dessous. Peut-on le compléter ?
Sinon comment modifier un rendez-vous pour que le tableau puisse être complété ?

1	2		4		5
4	3		5		2
3	5		1		4

b) Montrer qu'on peut toujours achever le remplissage des n - p lignes restantes quand on a réussi les p premières lignes (quand on avait initialement un rectangle p * q déjà rempli).

Exercice 6

Un ensemble de trajets à effectuer par une compagnie de transport est donné avec l'horaire. On décide de représenter ceci par un graphe (un arc de T_i à T_j représente le fait que le trajet T_j peut être effectué par le même véhicule que celui qui a effectué le trajet T_i).
Déterminer le nombre minimum de véhicules nécessaires pour effectuer ces trajets.
Application :

Trajet	T_1	T_2	T_3	T_4
de à	A B	B C	C A	B A
départ à :	6h	10h	8h	12h

Temps de parcours	A	B	C
A		1	3
B	2		1
C	2	4	

Exercice 7

a) Donner un algorithme calculant le nombre de composantes connexes d'un graphe.
b) Donner un algorithme déterminant si un graphe a au moins un cycle.
c) Donner un algorithme de construction d'une forêt maximale dans un graphe.
Appliquer les trois algorithmes au graphe donné par sa liste des successeurs :
$S = [\{4\}, \{\}, \{2, 10\}, \{\}, \{4, 9\}, \{8\}, \{6, 8\}, \{11\}, \{4\}, \{\}, \{6\}, \{\}]$

Exercice 8

On désire relie par un réseau un serveur central P, avec des intermédiaires éventuels. Pour chacune des lignes possibles entre i et j, on a une vitesse de transmission c_{ij} en Mb/s. La vitesse de transmission d'une chaîne de P à k est égale au plus petit des c_{ij} rencontrés sur la chaîne entre P et k.
Modifier l'algorithme de Dijkstra pour calculer des chaînes de vitesses maximales de P à tous les sommets d'un réseau.
Exemples graphiques :

$[i,j]$	c_{ij}
1 2	4
1 P	5
2 3	1
2 4	2
2 5	2

$[i,j]$	c_{ij}
3 5	2
4 5	3
4 6	5
4 P	1
6 P	3

Exercice 9

Dans un graphe, on veut calculer le nombre de chemins différents ayant exactement k arcs entre toutes les paires de sommets. On donne une matrice $A = (a_{ij})$, où a_{ij} est le nombre d'arcs orientés de i à j.
Comment trouver ces nombres à partir de A ?
Application : k = 4