



# Penerapan Invers Matriks $3 \times 3$ untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)



## TEORI:

Jika  $A$  adalah matriks  $m \times n$  yang dapat dibalik (invers), maka untuk setiap matriks  $B$  yang berukuran  $n \times 1$ , sistem persamaan  $A.X = B$  mempunyai persis satu pemecahan, yakni  $X = A^{-1}.B$ .

Untuk dapat melakukan penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan matrik ini, kita harus sudah menguasai materi tentang Invers Matriks.



## CONTOH KASUS

Diketahui Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV) sebagai berikut:

$$\begin{array}{rcccccl} X_1 & + & 2X_2 & + & 3X_3 & = & 5 \\ 2X_1 & + & 5X_2 & + & 3X_3 & = & 3 \\ X_1 & & & + & 8X_3 & = & 17 \end{array}$$

Tentukan:

Bentuk matriks yang ekuivalen dengan SPLTV tersebut!

Pemecahan SPLTV tersebut!

**Jawaban, bentuk matriks yang sesuai dengan SPLTV:**

$$\begin{array}{rclclcl} X_1 & + & 2X_2 & + & 3X_3 & = & 5 \\ 2X_1 & + & 5X_2 & + & 3X_3 & = & 3 \\ X_1 & & & + & 8X_3 & = & 17 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

**Jawaban bentuk matriks yang sesuai dengan SPLTV:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$



**A**



**X**



**B**



## Penyelesaian SPLTV dari Contoh Kasus

$$\begin{aligned}A.X &= B \\A^{-1}.A.X &= A^{-1}.B \\I.X &= A^{-1}.B \\X &= A^{-1}.B\end{aligned}$$





**Penyelesaian SPLTV dari Contoh Kasus**  
Untuk memperoleh matriks  $A^{-1}$  digunakan definisi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}.A} \text{Adj}.A$$

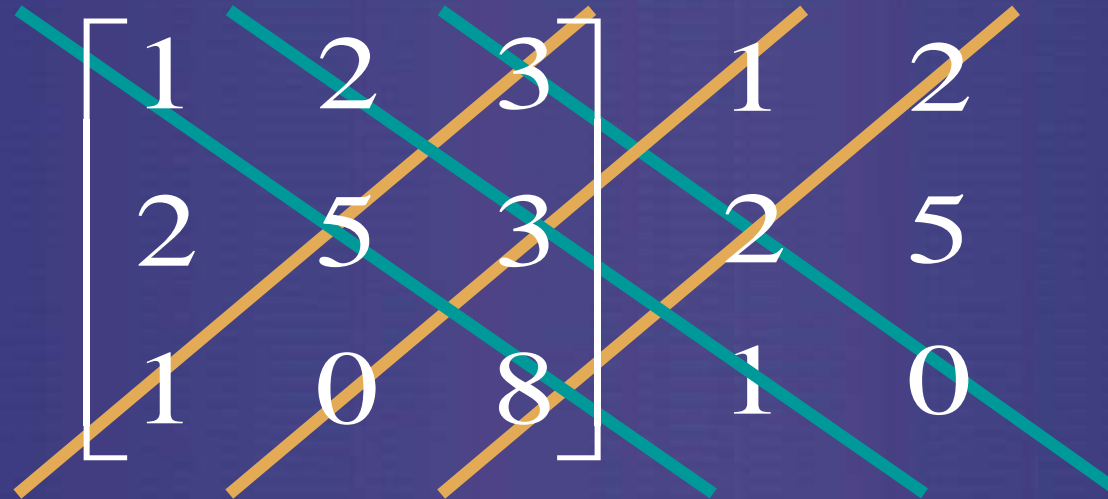


$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

**Menentukan nilai determinan dari matriks A dalam Contoh Kasus.**



## Menentukan Determinan Matriks 3x3 – Metode Sarrus


$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det. } A = (1)(5)(8) + (2)(3)(1) + (3)(2)(0) - (3)(5)(1) - (1)(3)(0) - (2)(2)(8)$$

$$\text{Det. } A = (40) + (6) + (0) - (15) - (0) - (32)$$

$$\text{Det. } A = -1$$



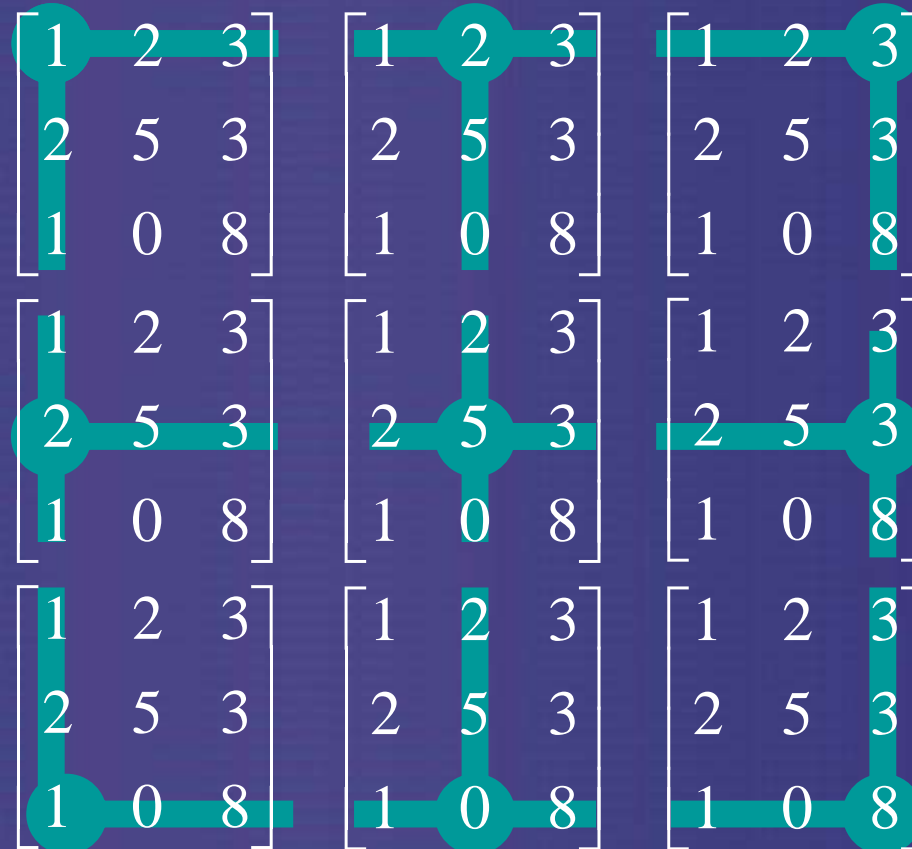
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

**Menentukan minor-minor dari matriks A.**

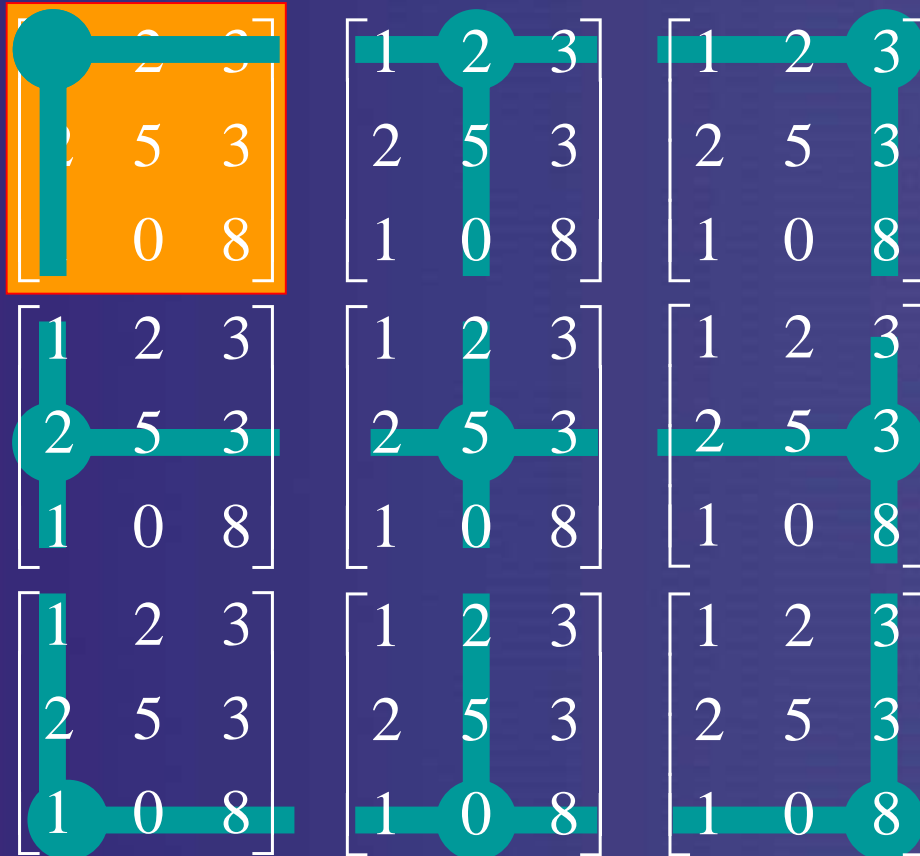
## Persiapan Mencari Minor Matriks 3x3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$




$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

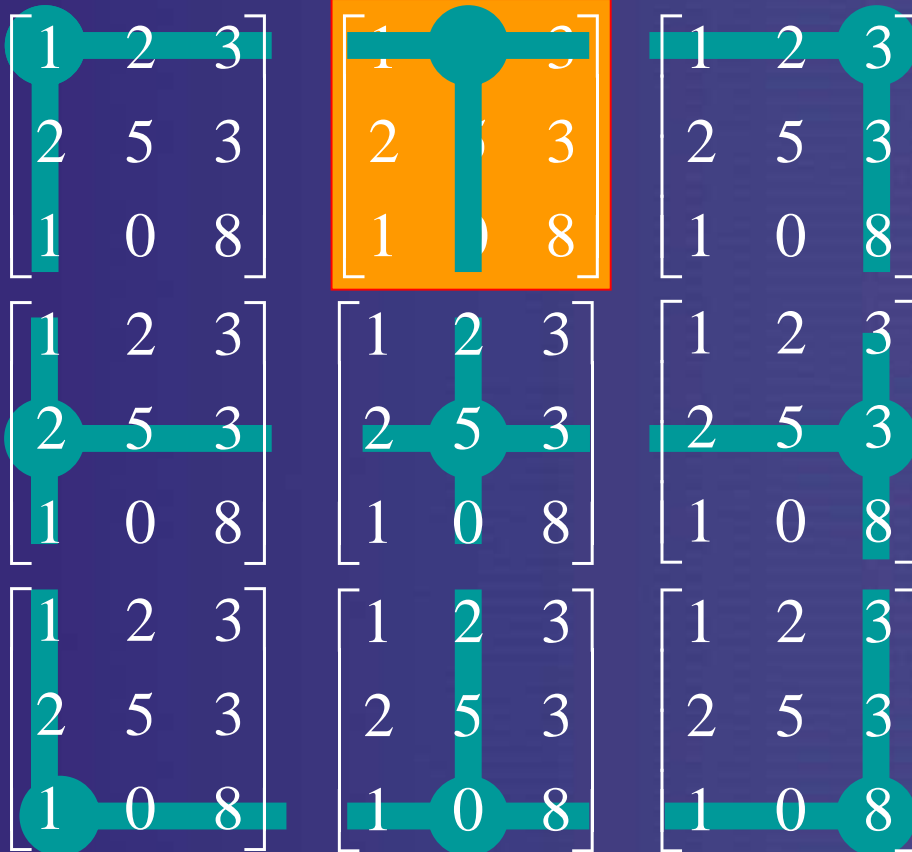
## Menentukan Minor Matriks



Minor 1

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = (5)(8) - (3)(0) \\ = (40) - (0) = 40$$

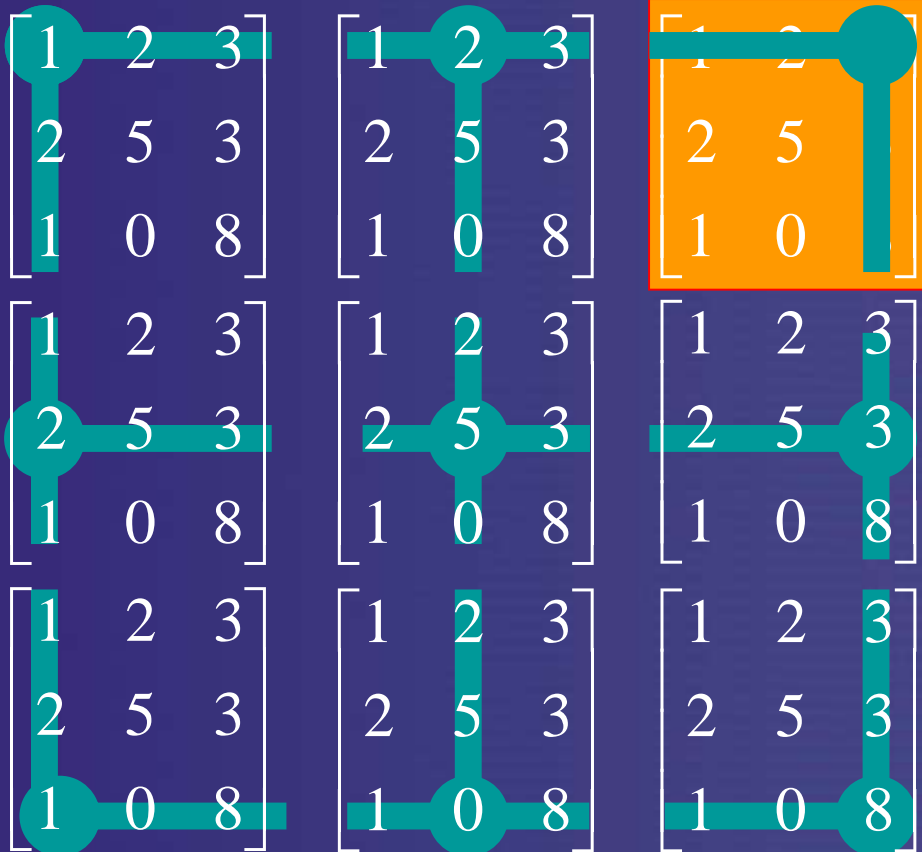
## Menentukan Minor Matriks


$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Minor 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (2)(8) - (3)(1)$$
$$= (16) - (3) = 13$$

## Menentukan Minor Matriks

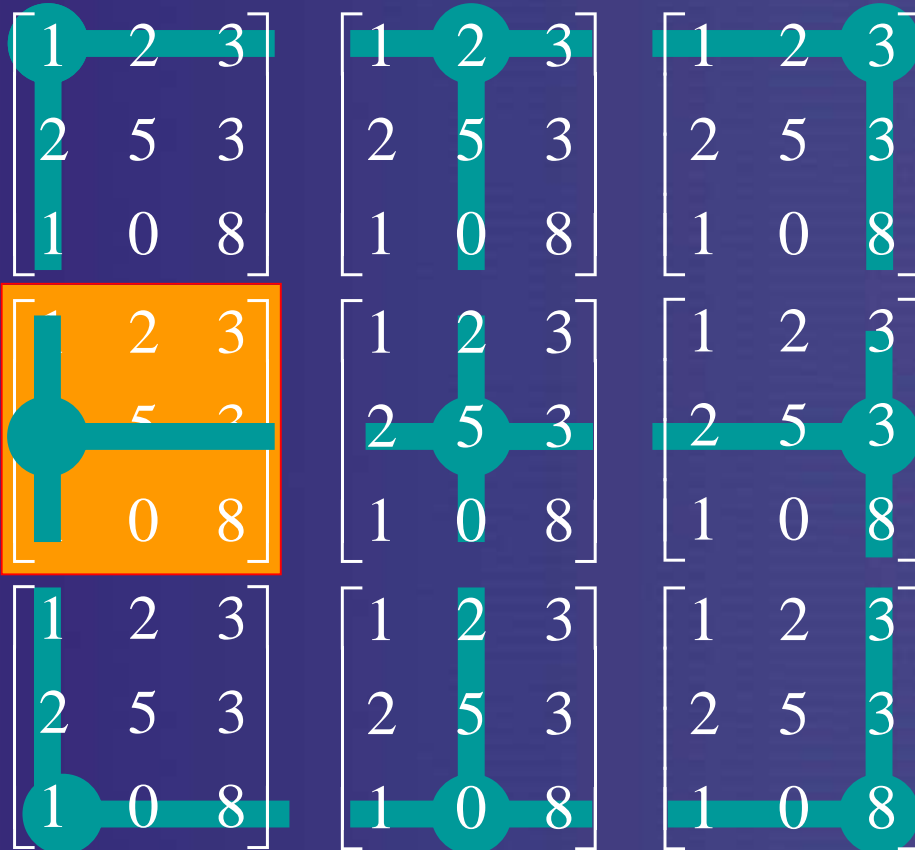

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Minor 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (2)(0) - (5)(1) \\ = (0) - (5) = -5$$



## Menentukan Minor Matriks

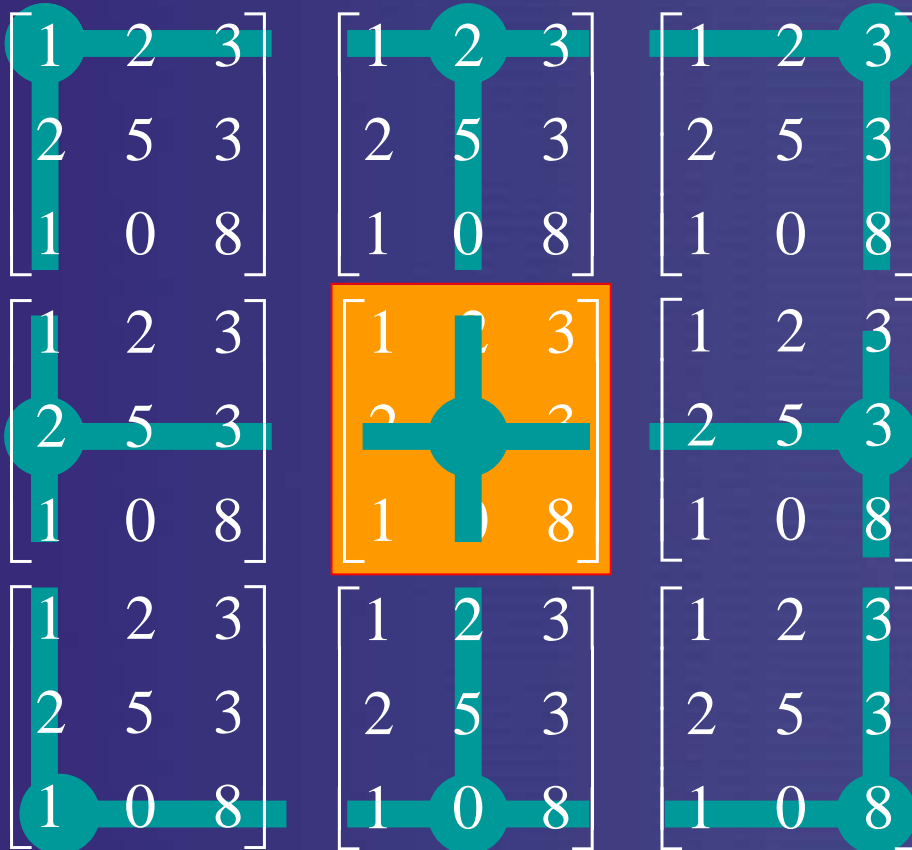

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Minor 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = (2)(8) - (3)(0)$$
$$= (16) - (0) = 16$$



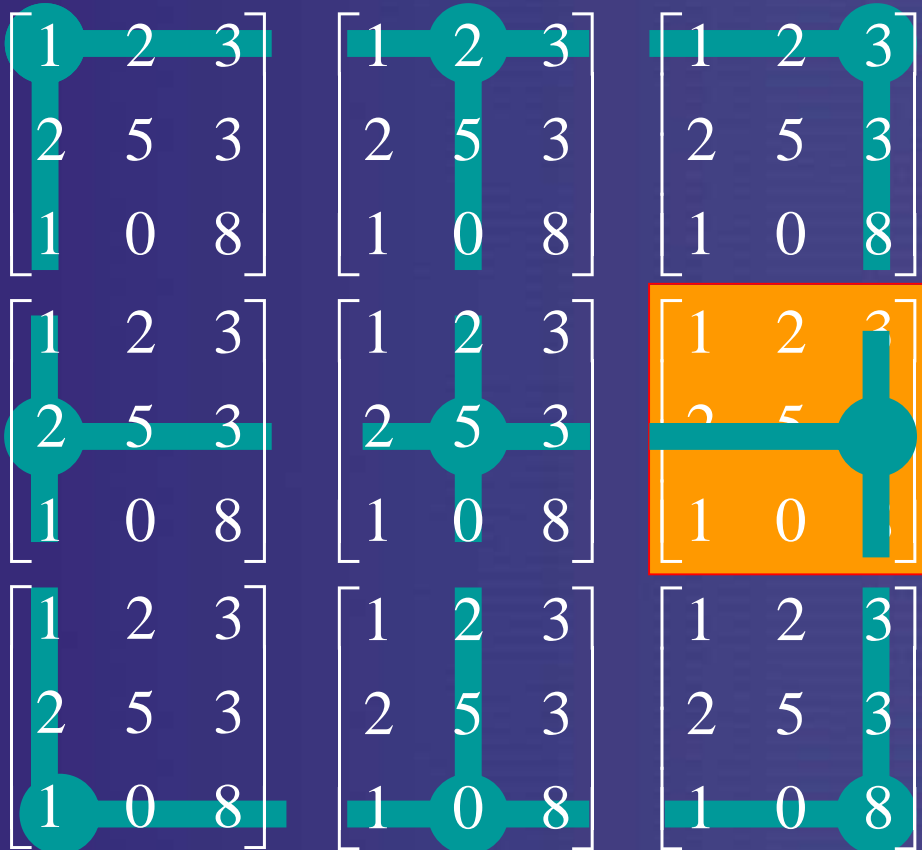
## Menentukan Minor Matriks


$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Minor 5

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (1)(8) - (3)(1) \\ = (8) - (3) = 5$$

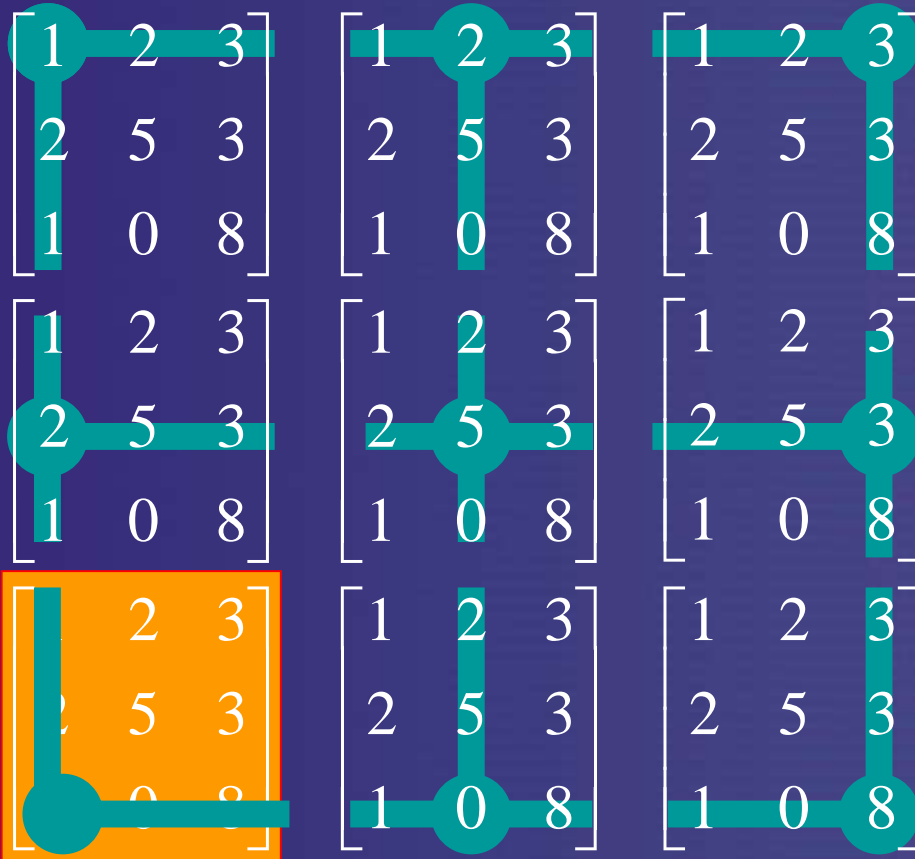
## Menentukan Minor Matriks


$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Minor 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (2)(1)$$
$$= (0) - (2) = -2$$

## Menentukan Minor Matriks

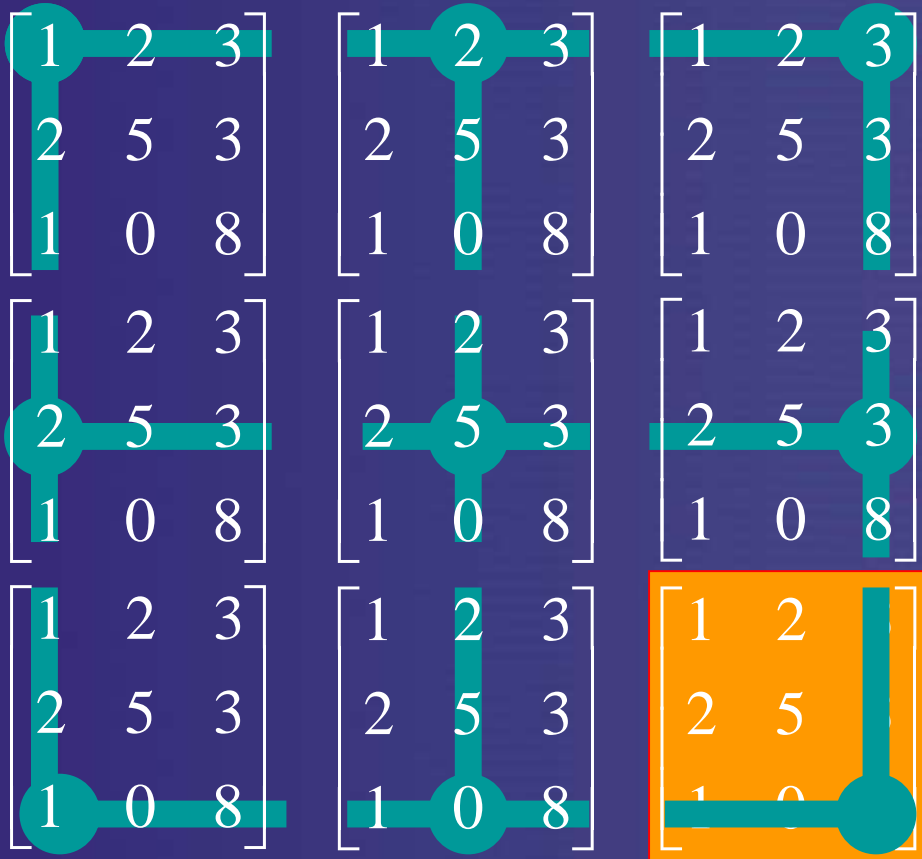

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Minor 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (3)(5)$$
$$= (6) - (15) = -9$$



## Menentukan Minor Matriks


$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Minor 8

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5) - (2)(2)$$
$$= (5) - (4) = 1$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Minor 1} = 40 - 0 = 40$$

$$\text{Minor 2} = 16 - 3 = 13$$

$$\text{Minor 3} = 0 - 5 = -5$$

$$\text{Minor 2} = 16 - 0 = 16$$

$$\text{Minor 5} = 8 - 3 = 5$$

$$\text{Minor 3} = 0 - 2 = -2$$

$$\text{Minor 1} = 6 - 15 = -9$$

$$\text{Minor 0} = 3 - 6 = -3$$

$$\text{Minor 8} = 5 - 4 = 1$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

**Menentukan matriks kofaktor dari matriks A.**





## Matriks Kofaktor dari Matriks A

$$\begin{bmatrix} (+)(40) & (-)(13) & (+)(-5) \\ (-)(16) & (+)(5) & (-)(-2) \\ (+)(-9) & (-)(-3) & (+)(1) \end{bmatrix}$$



## Matriks Kofaktor dari Matriks A

$$\begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

**Menentukan matriks adjoin dari matriks A.**

## Menentukan Adjoin dari Matriks A

$$\begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks Kofaktor dari Matriks A



$$\begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Adjoin dari Matriks A



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

**Menentukan kebalikan (invers) dari matriks A.**



## Invers dari Matriks A Dilambangkan dengan $A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}.A} \text{Adj}.A$$



## Invers dari Matriks A Dilambangkan dengan $A^{-1}$

(Dari jawaban sebelumnya diketahui determinan dari matriks A sebesar -1)

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$





## Invers dari Matriks A Dilambangkan dengan $A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 40/-1 & -16/-1 & -9/-1 \\ -13/-1 & 5/-1 & 3/-1 \\ -5/-1 & 2/-1 & 1/-1 \end{bmatrix}$$



## Invers dari Matriks A Dilambangkan dengan $A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$



## Penyelesaian SPLTV dari Contoh Kasus

$$X = A^{-1}.B$$



## Penyelesaian SPLTV dari Contoh Kasus

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$



## Penyelesaian SPLTV dari Contoh Kasus

$$\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = (-40)(5) + (16)(3) + (9)(17)$$

$$X_1 = -200 + 48 + 153 = 1$$



## Penyelesaian SPLTV dari Contoh Kasus

$$\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = (13)(5) + (-5)(3) + (-3)(17)$$

$$X_2 = 65 - 15 - 51 = -1$$



## Penyelesaian SPLTV dari Contoh Kasus

$$\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = (5)(5) + (-2)(3) + (-1)(17)$$

$$X_3 = 25 - 6 - 17 = 2$$





## Penyelesaian SPLTV dari Contoh Kasus

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



*Thank  
You*