Tehnici de Optimizare / Optimális szabályozáselmélet

Automatizări şi Informatică Industrială

- Alegeţi un răspuns corect dintre următoarele -

- Válasszatok egy helyes választ az alábbiak közül –

1. (5 puncte) Fie următorul sistem dinamic şi criteriu:

$$x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t) \qquad J(u) = \frac{1}{2}e(tf)^T F \cdot e(tf) + \frac{1}{2}\int_0^{tf}\left[e(\tau)^T Q \cdot e(\tau) + u(\tau)^T r \cdot u(\tau)\right] d\tau$$
$$y(t) = C(t)x(t)$$

unde $w(t)$ reprezintă o perturbaţie cunoscută. Dacă $z(t)$ reprezintă ieşirea prescrisă şi $P(t)$ este matricea Riccati să se determine condiţiile necesare de optim.

(5 pont) Legyen a következő dinamikus rendszer és kritérium.

$$x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t) \qquad J(u) = \frac{1}{2}e(tf)^T F \cdot e(tf) + \frac{1}{2}\int_0^{tf}\left[e(\tau)^T Q \cdot e(\tau) + u(\tau)^T R \cdot u(\tau)\right] d\tau$$
$$y(t) = C(t)x(t)$$

ahol, $w(t)$ egy ismert perturbáció. Amennyiben $z(t)$ az előírt kimenet, a $P(t)$ a Riccati mátrix, a kvadratikus optimális vezérlést a következő egyenletek alapján számítsátok ki az optimális szabályozás szükséges feltételeit:

a. $u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)$
$$h(t) = -\left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)\right]^T h(t) - C^T(t)Q(t)z(t) + P(t)w(t)$$
$$h(tf) = C^T(tf)Fz(tf)$$

b. $u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)\left[h(t) - P(t)x(t)\right]$
$$h(t) = -\left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)\right]^T h(t) - C^T(t)Q(t)z(t) + P(t)w(t)$$
$$h(tf) = 0$$

c. $u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)\left[h(t) - P(t)x(t)\right]$ $\quad h(t) = -\left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)\right]^T h(t) - C^T(t)Q(t)z(t)$
$$h(tf) = C^T(tf)Fz(tf)$$

d. $u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)\left[h(t) - P(t)x(t)\right]$
$$h(t) = -\left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)\right]^T h(t) - C^T(t)Q(t)z(t) + P(t)w(t)$$
$$h(tf) = C^T(tf)Fz(tf)$$

Solutie corectă/Helyes megoldás (d)

$$H = \tfrac{1}{2}(z-y)^T Q(z-y) + \tfrac{1}{2}u^T Ru + p^T(Ax + Bu + w) = \tfrac{1}{2}z^T Qz - \tfrac{1}{2}z^T QCx + \tfrac{1}{2}x^T C^T QCx - \tfrac{1}{2}x^T C^T Qz + \tfrac{1}{2}u^T Ru + p^T(Ax + Bu + w)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B^T p + Ru^* = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad u^* = -R^{-1}B^T p \quad u^*(t) = -R^{-1}B^T p(t)$$

$$p(t) = Px - h \quad \Rightarrow \quad u^* = R^{-1}B^T(h - Px)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -C^T Qz + C^T QCx + A^T p = -p \qquad Px + Px - h = -C^T QCx - A^T Px + A^T h + C^T Qz$$

$$x = Ax - BR^{-1}B^T Px + BR^{-1}B^T h + w$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu^* + w = x$$

$$\Rightarrow$$

$$Px + PAx - PBR^{-1}B^T Px + PBR^{-1}B^T h + Pw - h = -C^T QCx - A^T Px + A^T h + C^T Qz$$

$$P + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + C^T QC = 0$$

$$h = -\left[A - BR^{-1}B^T P\right]^T h - C^T Qz + Pw$$

$$\lambda(x(tf)) = \tfrac{1}{2}(z-y)^T F(z-y) = \tfrac{1}{2}z^T Fz - \tfrac{1}{2}z^T FCx + \tfrac{1}{2}x^T C^T FCx - \tfrac{1}{2}x^T C^T Fz \quad \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial x(tf)} = C^T FCx - C^T Fz = p(tf) = Px - h$$

$$h = C^T Fz$$

2. (3 puncte) În cazul unui sistem liniar de reglare optimală după stare unde $P(t)$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale Riccati, $K(t)$ este reacţia optimală, valoarea optimă a criteriului este:

$$x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} x(tf)^T F \cdot x(tf) + \frac{1}{2} \int_0^{tf} \left[x(\tau)^T Q \cdot x(\tau) + u(\tau)^T R \cdot u(\tau) \right] d\tau$$

(3 pont) Ha $P(t)$ a Riccati differenciál egyenlet megoldása és a $K(t)$ az optimális visszacsatolás értéke, akkor az optimális állapotszabályozóval tervezett lineáris rendszer négyzetes kritériumának értéke:

$$x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} x(tf)^T F \cdot x(tf) + \frac{1}{2} \int_0^{tf} \left[x(\tau)^T Q \cdot x(\tau) + u(\tau)^T R \cdot u(\tau) \right] d\tau$$

a. $J^*(x) = \frac{1}{2} x^T(t)\left(Q(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t)\right)x(t)$

b. $J^*(x) = \frac{1}{2} x^T(t)P(t)x(t)$

c. $J^*(x) = \frac{1}{2} x^T(t)(A - B \cdot K(t))x(t)$

d. $J^*(x) = \frac{1}{2} x^T(t)Q(t)x(t)$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás (b):

3. Fie sistemul dinamic:

$x(t) = x(t) - u(t)$ cu $x, u \in \Re$ si criteriul: $J(u) = \int_0^{\infty} \left[x^2(t) + u^2(t) \right] dt$

Să se determine reacţia optimală după stare:

Legyen a következő dinamikus rendszer:

$x(t) = x(t) - u(t)$, ahol $x, u \in \Re$ és a következő kritérium: $J(u) = \int_0^{\infty} \left[x^2(t) + u^2(t) \right] dt$

Határozzátok meg az optimális állapot visszacsatolást:

a. $u^*(t) = -x(t)$

b. $u^*(t) = \left(\sqrt{2} - 1\right)x(t)$

c. $u^*(t) = \sqrt{2} \cdot x(t)$

d. $u^*(t) = \left(\sqrt{2} + 1\right)x(t)$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás (c):

4. (3 puncte) Fie următorul sistem dinamic discret: $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \sqrt{\beta} \cdot u_k$ Se caută secvenţa de comandă care minimizează criteriul: $J = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x_k{}^2 + u_k{}^2$.

(3 pont) Legyen a következő diszkrét dinamikus rendszer: $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \sqrt{\beta} \cdot u_k$ Határozzátok meg azt a vezérlési szekvenciát amely biztosítja a következő kritérium minimumát: $J = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x_k{}^2 + u_k{}^2$

a. $u_k^* = -\frac{\beta \cdot \widetilde{P}}{1 + \beta \cdot \widetilde{P}} x_k$, $\widetilde{P} = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2\beta}$

b. $u_k^* = -\frac{\beta \cdot \widetilde{P}}{1 + \beta \cdot \widetilde{P}} x_k$, $\widetilde{P} = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2\beta}$

c. $u_k^* = \frac{\beta \cdot \widetilde{P}}{1 + \beta \cdot \widetilde{P}} x_k$, $\widetilde{P} = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2\beta}$

d. $u_k^* = -\frac{\beta \cdot \widetilde{P}}{1 + \beta \cdot \widetilde{P}} x_k$, $\widetilde{P} = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\beta}}{2}$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás (b):

5. (5puncte) În cazul problemelor optimale de reglare LQR, cu punct final fixat în momentul final tf soluţia se obţine pe baza:
(5pont) Lineáris rendszerek rögzített végpontú LQR optimális szabályozásának kiszámítása:

a. Ecuaţiei diferenţiale Riccati, dacă $P(tf)=F$, unde F este matricea de ponderare a costului în punctul final/A Riccati differenciálegyenletből ha $P(tf)=F$, ahol a F mátrix a végpontban számított költség súlyzómátrixa.

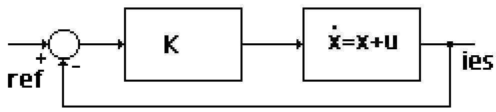
b. Ecuaţiei diferenţiale Riccati, dacă $P(tf)=0$ /A Riccati differenciál-egyenletből ha $P(tf)=0$.

c. Din sistemul de ecuaţii $\frac{\partial H}{\partial x}=-p, \frac{\partial H}{\partial p}=x, \frac{\partial H}{\partial u}=0$, dacă $p(tf)=\frac{\partial \lambda(x(tf))}{\partial x(tf)}$, unde $\lambda(x(tf))$ este costul de punct terminal /A $\frac{\partial H}{\partial x}=-p, \frac{\partial H}{\partial p}=x, \frac{\partial H}{\partial u}=0$ egyenletrendszerből, ha $p(tf)=\frac{\partial \lambda(x(tf))}{\partial x(tf)}$ ahol $\lambda(x(tf))$ a végpont költségfüggvénye

d. Pe baza programării dinamice dacă $J^*(x(tf))=0$, sau sistemul de ecuaţii $\frac{\partial H}{\partial x}=-p, \frac{\partial H}{\partial p}=x, \frac{\partial H}{\partial u}=0$ unde $p(tf)$ nu este fixat / A dinamikus programozás segítségével ha $J^*(x(tf))=0$, vagy a $\frac{\partial H}{\partial x}=-p, \frac{\partial H}{\partial p}=x, \frac{\partial H}{\partial u}=0$ egyenletrendszerből ha a $p(tf)$ nincs lerögzítve.

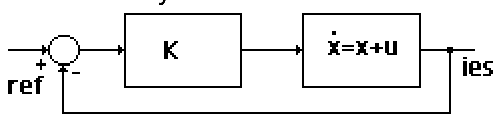
Soluţie corectă / Helyes Megoldás (d):

6. (3puncte) Fie sistemul de reglare din figura alăturată:



Să se determine legea de comandă optimală în forma $u^*(t)=-K\cdot x(t)$, dacă criteriul aferent problemei: $J(u)=\int_0^\infty \{q\cdot x^2(\tau)+u^2(\tau)\}d\tau$, unde $q\geq 0$ şi să se determine polii s^* ai sistemului în buclă închisă.

(3 pont) Legyen a következő szabályozási rendszer:



Határozzátok meg a vezérlő jelet $u^*(t)=-K\cdot x(t)$ formában, ha a kritérium: $J(u)=\int_0^\infty \{q\cdot x^2(\tau)+u^2(\tau)\}d\tau$, ahol $q\geq 0$ és határozzátok meg a zárt hurok s^* pólusait.

a. $\widetilde{P}=1+\sqrt{q+1}$, $K=1+\sqrt{q+1}$, $s^*=-\sqrt{q+1}$
b. $\widetilde{P}=1-\sqrt{1+q}$, $K=1-\sqrt{1+q}$, $s^*=\sqrt{q+1}$
c. $\widetilde{P}=1+\sqrt{q+1}$, $K=1+\sqrt{q+1}$, $s^*=\sqrt{q+1}$
d. $\widetilde{P}=1-\sqrt{1+q}$, $K=1-\sqrt{1+q}$, $s^*=-\sqrt{q+1}$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás (a):

$$-\widetilde{P}\cdot A-A^T\cdot\widetilde{P}+\widetilde{P}\cdot B\cdot R^{-1}\cdot B^T\cdot\widetilde{P}-Q=0$$

$$-\widetilde{P}-\widetilde{P}+\widetilde{P}^2-q=0$$

$$\widetilde{P}^2-2\widetilde{P}-q=0 \Rightarrow \widetilde{P}_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4q}}{2} \Rightarrow \widetilde{P}_1=1+\sqrt{1+q},\ \widetilde{P}_2=1-\sqrt{1+q}$$

$$u^*(t)=-R^{-1}B^T\widetilde{P}x \Rightarrow K=1+\sqrt{1+q}$$

$$x(t) = x(t) - \left(1+\sqrt{1+q}\right)x(t) = -\sqrt{1+q}\cdot x(t)$$

$$s\cdot X(s) - x(0_+) = -\sqrt{1+q}\cdot X(s) \Rightarrow s^* = -\sqrt{1+q}$$

7. (3 puncte) Fie sistemul dinamic liniar scalar:

$$x(t) = a\cdot x(t) + u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

Să se determine comanda $u^*(t)$ de urmărire a traiectoriei $z(t)$ care minimizează criteriul :

$$J(u) = \frac{1}{2} f\cdot e^2(tf) + \frac{1}{2}\int_0^{tf}\left[q\cdot e^2(\tau) + r\cdot u^2(\tau)\right]d\tau$$

unde: $e(t) = z(t) - y(t)$

Dacă . Presupunem că se cunosc relaţiile: $\underline{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\left[\boldsymbol{P}(t)\underline{x}(t) - \underline{g}(t)\right]$

$\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{A}^T(t)\boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{C}^{T(}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{C}(t) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{P}(tf) = \boldsymbol{C}^T(tf)\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}(tf)$

$\underline{g}(t) + \left[\boldsymbol{A}^T(t) - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\right]\underline{g}(t) + \boldsymbol{C}^T(t)\boldsymbol{Q}\underline{z}(t) = \boldsymbol{0}$, $\underline{g}(tf) = \boldsymbol{C}^T(tf)\boldsymbol{F}\,\underline{z}(tf)$

(3pont) Legyen a következő skaláris rendszer:

$$x(t) = a\cdot x(t) + u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

Határozzátok meg azt az $u^*(t)$ vezérlőjelet amely biytosítja a $z(t)$ pálya optimális követését úgy, hogy a következő $J(u)$ célfüggvény minimális legyen.

$$J(u) = \frac{1}{2} f\cdot e^2(tf) + \frac{1}{2}\int_0^{tf}\left[q\cdot e^2(\tau) + r\cdot u^2(\tau)\right]d\tau$$

unde: $e(t) = z(t) - y(t)$

Ha . Feltételezzük, hogy ismerjük a következő követő szabályozó esetén használt egyenleteket: $\underline{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\left[\boldsymbol{P}(t)\underline{x}(t) - \underline{g}(t)\right]$

$\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{A}^T(t)\boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{C}^{T(}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{C}(t) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{P}(tf) = \boldsymbol{C}^T(tf)\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}(tf)$

$\underline{g}(t) + \left[\boldsymbol{A}^T(t) - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\right]\underline{g}(t) + \boldsymbol{C}^T(t)\boldsymbol{Q}\underline{z}(t) = \boldsymbol{0}$, $\underline{g}(tf) = \boldsymbol{C}^T(tf)\boldsymbol{F}\,\underline{z}(tf)$

a. $u^*(t) = -\dfrac{ar + \sqrt{a^2r^2 + rq}}{r}x(t)$

b. $u^*(t) = \dfrac{q}{\sqrt{a^2r^2 + rq}}z(t) - \dfrac{ar + \sqrt{a^2r^2 + rq}}{r}x(t)$

c. $u^*(t) = \dfrac{1}{r - ar + \sqrt{a^2r^2 + rq}}z(t) - \dfrac{ar - \sqrt{a^2r^2 + rq}}{r}x(t)$

d. $u^*(t) = \dfrac{1}{r - ar - \sqrt{a^2r^2 + rq}}z(t) + \dfrac{ar + \sqrt{a^2r^2 + rq}}{r}x(t)$

***Soluţie corectă / Helyes Megoldás (b)*:** Legea de comandă se obţine:

$$u^*(t) = \frac{1}{r}(g(t) - P(t)\cdot x(t))$$

cu ecuaţia Riccati de ordin I :

$$-P(t)\cdot a - a\cdot P(t) + P(t)\cdot 1\cdot\frac{1}{r}\cdot 1\cdot P(t) - q = P(t) \qquad P(tf) = f$$

Ecuaţia diferenţială a lui g este :

$$g(t) = -(a - \frac{1}{r}P(t))\cdot g(t) - z(t) \qquad g(tf) = f\cdot z(tf)$$

În cazul avem :

$$-2a\cdot\widetilde{P} + \frac{1}{r}\widetilde{P}^2 - q = 0 \qquad \widetilde{g}(t) = -\frac{1}{a - \frac{1}{r}\widetilde{P}}\cdot q\cdot z(t) \qquad u^*(t) = \frac{q}{\widetilde{P} - ar}z(t) - \frac{1}{r}\widetilde{P}x(t)$$

$$\Rightarrow$$

$$\widetilde{P}^2 - 2ar\widetilde{P} - rq = 0 \Rightarrow \widetilde{P}_{1,2} = \frac{2ar \pm \sqrt{4a^2r^2 + 4rq}}{2} = ar \pm \sqrt{a^2r^2 + rq}$$

$$u^*(t) = \frac{q}{ar - ar + \sqrt{a^2r^2 + rq}} z(t) - \frac{ar + \sqrt{a^2r^2 + rq}}{r} x(t)$$

8. (5pont) Legyen a következő dinamikus rendszer: $x(t) = x(t) + u(t)$

Tervezzetek egy olyan $u(t) = -(k_1 \quad k_2) \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ optimális szabályozást $z(t) = x(t)$, $J(u) = \int_0^\infty \left\{ (x(\tau) \quad z(\tau)) \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} + u^2(\tau) \right\} d\tau$, $q \geq 0$, amely az $y(t) = x(t)$ kimeneten érzékelt állandósult hibát eltünteti.

(5puncte) Fie următorul sistem dinamic scalar: $x(t) = x(t) + u(t)$

Proiectaţi un regulator optimal $u(t) = -(k_1 \quad k_2) \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ unde $z(t) = x(t)$, care minimizează criteriul $J(u) = \int_0^\infty \left\{ (x(\tau) \quad z(\tau)) \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} + u^2(\tau) \right\} d\tau$, $q \geq 0$, şi care elimină eroarea staţionară măsurată la ieşirea $y(t) = x(t)$.

a. $P = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{q+3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{q+3} \end{pmatrix}$, $u^*(t) = -\left(1 - \sqrt{q+3} \quad 1\right) \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

b. $P = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{q-1} & -1 \\ -1 & \sqrt{q-1} \end{pmatrix}$, $u^*(t) = -\left(1 + \sqrt{q-1} \quad -1\right) \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

c. $P = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{q+3} & 1 \\ 1 & \sqrt{q+3} \end{pmatrix}$, $u^*(t) = -\left(1 + \sqrt{q+3} \quad 1\right) \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

d. $P = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{q-1} & -1 \\ -1 & -\sqrt{q-1} \end{pmatrix}$, $u^*(t) = -\left(1 + \sqrt{q-1} \quad -1\right) \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás(c):

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t) + u(t) \\ z(t) &= x(t) \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$O_C = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(O_C) = 2$$

$$J(u) = \int_0^\infty qx^2(\tau) + z^2(\tau) + u^2(\tau) d\tau \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = 1$$

$$-\begin{pmatrix} \widetilde{p}_{11} & \widetilde{p}_{12} \\ \widetilde{p}_{12} & \widetilde{p}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p}_{11} & \widetilde{p}_{12} \\ \widetilde{p}_{12} & \widetilde{p}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{p}_{11} & \widetilde{p}_{12} \\ \widetilde{p}_{12} & \widetilde{p}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \quad 0) \begin{pmatrix} \widetilde{p}_{11} & \widetilde{p}_{12} \\ \widetilde{p}_{12} & \widetilde{p}_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p}_{11} + \widetilde{p}_{12} & 0 \\ \widetilde{p}_{12} + \widetilde{p}_{22} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{p}_{11} + \widetilde{p}_{12} & \widetilde{p}_{12} + \widetilde{p}_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \widetilde{p}_{11} \\ \widetilde{p}_{12} \end{pmatrix} (\widetilde{p}_{11} \quad \widetilde{p}_{12}) + \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2(\widetilde{p}_{11} + \widetilde{p}_{12}) - \widetilde{p}_{11}^{\,2} + q &= 0 \\ \widetilde{p}_{12} + \widetilde{p}_{22} - \widetilde{p}_{11}\widetilde{p}_{12} &= 0 \\ -\widetilde{p}_{12}^{\,2} + 1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \widetilde{p}_{12} = \pm 1$$

ha $\widetilde{p}_{12} = 1 \Rightarrow \begin{aligned} 2(\widetilde{p}_{11} + 1) - \widetilde{p}_{11}^{\,2} + q &= 0 \\ 1 + \widetilde{p}_{22} - \widetilde{p}_{11} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \widetilde{p}_{11}^{\,2} - 2\widetilde{p}_{11} - q - 2 = 0 \Rightarrow \widetilde{p}_{11} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4q + 8}}{2} = 1 \pm \sqrt{q+3}$

$$\widetilde{p}_{22} = 1 \pm \sqrt{q+3} - 1 = \pm\sqrt{q+3}$$

ha $\tilde{p}_{12}=-1 \Rightarrow -1+\tilde{p}_{22}+\tilde{p}_{11}=0 \Rightarrow 2(\tilde{p}_{11}-1)-\tilde{p}_{11}{}^2+q=0 \Rightarrow \tilde{p}_{11}{}^2-2\tilde{p}_{11}-q+2=0 \Rightarrow \tilde{p}_{11}=\frac{2\pm\sqrt{4+4q-8}}{2}=1\pm\sqrt{q-1}$

$\tilde{p}_{22}=-1\quad \sqrt{q-1}+1=\quad\sqrt{q+3}$

$P=\begin{pmatrix}1\pm\sqrt{q+3} & 1\\ 1 & \pm\sqrt{q+3}\end{pmatrix}$ illetve $P=\begin{pmatrix}1\pm\sqrt{q-1} & -1\\ -1 & \sqrt{q-1}\end{pmatrix}$

Megvizsgálva a Riccati mátrix előjelét kapjuk, mint lehetséges megoldásokat:

$P=\begin{pmatrix}1-\sqrt{q+3} & 1\\ 1 & -\sqrt{q+3}\end{pmatrix}$, $1-\sqrt{q+3}<0$ tehát nem megoldás,

$P=\begin{pmatrix}1-\sqrt{q-1} & -1\\ -1 & \sqrt{q-1}\end{pmatrix}$, $1-\sqrt{q-1}>0$ ha $q<2$, $\left(1-\sqrt{q-1}\right)\sqrt{q-1}-1=\sqrt{q-1}-q<0$, tehát nem megoldás

$P=\begin{pmatrix}1+\sqrt{q+3} & 1\\ 1 & \sqrt{q+3}\end{pmatrix}$ mert $1+\sqrt{q+3}>0$, $\left(1+\sqrt{q+3}\right)\sqrt{q+3}-1=q+2+\sqrt{q+3}>0$

$P=\begin{pmatrix}1+\sqrt{q-1} & -1\\ -1 & -\sqrt{q-1}\end{pmatrix}$ és $1+\sqrt{q-1}>0$, $-\left(1+\sqrt{q-1}\right)\sqrt{q-1}-1=-q+1-\sqrt{q-1}-1<0$ nem megoldás

Tehát csak a $P=\begin{pmatrix}1+\sqrt{q+3} & 1\\ 1 & \sqrt{q+3}\end{pmatrix}$ Riccati mátrix lehet elfogadható megoldás amivel $\Rightarrow$

$$u^*(t)=-(1\quad 0)\begin{pmatrix}1+\sqrt{q+3} & 1\\ 1 & \sqrt{q+3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=-\left(1+\sqrt{q+3}\quad 1\right)\begin{pmatrix}x(t)\\ z(t)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{z}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ z(t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\left(1+\sqrt{q+3}\quad 1\right)\begin{pmatrix}x(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{q+3} & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ z(t)\end{pmatrix}$$

$$\det\left(s\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\sqrt{q+3} & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}s+\sqrt{q+3} & 1\\ -1 & s\end{pmatrix}=s^2+s\sqrt{q+3}+1=0$$

$$s_{1,2}{}^*=\frac{-\sqrt{q+3}\pm\sqrt{q+3-4}}{2}=\frac{-\sqrt{q+3}\pm\sqrt{q-1}}{2}$$

9. (3 puncte) Se consideră sistemul dinamic: $\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{cases}$

Să se determine comanda optimală, care minimizează următorul criteriu pătratic:

$$J(u)=\tfrac{1}{2}\cdot\int_0^\infty(x_1^2(t)+u^2(t))\cdot dt$$

(3. pont) Adott a következő dinamikus rendszer: $\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{cases}$

Határozzuk meg azt az optimális vezérlőjelet, amely biztosítja a következő négyzetes kritérium minimumát:

$$J(u)=\tfrac{1}{2}\cdot\int_0^\infty(x_1^2(t)+u^2(t))\cdot dt$$

a). $u*(t)=x_1(t)+\sqrt{2}\cdot x_2(t)$

b). $u^*(t)=-x_1(t)-\sqrt{2}\cdot x_2(t)$

c). $u^*(t)=\sqrt{2}\cdot x_1(t)+x_2(t)$

d). $u^*(t)=\sqrt{2}\cdot x_1(t)-x_2(t)$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (b)

10. (3 puncte) Se consideră sistemul dinamic: $\begin{cases} \dot{x}(t) = 5 \cdot x(t) + u(t) \\ y(t) = 2 \cdot x(t) \end{cases}$

Să se determine comanda optimală, care minimizează următorul criteriu pătratic:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (x^2(t) + u^2(t)) \cdot dt$$

(3 pont) Adott a következő dinamikus rendszer: $\begin{cases} \dot{x}(t) = 5 \cdot x(t) + u(t) \\ y(t) = 2 \cdot x(t) \end{cases}$

Határozzuk meg azt az optimális vezérlőjelet, amely biztosítja a következő négyzetes kritérium minimumát:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (x^2(t) + u^2(t)) \cdot dt$$

a). $u(t) = (5 + \sqrt{26}) \cdot x(t)$

b). $u(t) = (5 - \sqrt{26}) \cdot x(t)$

c). $u(t) = -(5 + \sqrt{26}) \cdot x(t)$

d). $u(t) = -(5 - \sqrt{26}) \cdot x(t)$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (c)

11. (3 puncte) Se consideră sistemul dinamic: $\begin{cases} \dot{x}(t) = 5 \cdot x(t) + u(t) \\ y(t) = 2 \cdot x(t) \end{cases}$

Să se determine comanda optimală, care minimizează următorul criteriu pătratic:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} ((y(t) - \sin(0.1 \cdot t))^2 + u^2(t)) \cdot dt$$

(3 pont) Adott a következő dinamikus rendszer: $\begin{cases} \dot{x}(t) = 5 \cdot x(t) + u(t) \\ y(t) = 2 \cdot x(t) \end{cases}$

Határozzuk meg azt az optimális vezérlőjelet, mely minimálja a következő négyzetes kritériumot:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} ((y(t) - \sin(0.1 \cdot t))^2 + u^2(t)) \cdot dt$$

a). $u^*(t) = -(5 + \sqrt{29}) \cdot x(t)$

b). $u^*(t) = -(5 + \sqrt{29}) \cdot x(t) + \tfrac{2}{\sqrt{29}} \cdot \sin(0.1 \cdot t)$

c). $u^*(t) = -\tfrac{2}{\sqrt{29}} \cdot \sin(0.1 \cdot t)$

d). $u^*(t) = \tfrac{2}{\sqrt{29}} \cdot \sin(0.1 \cdot t)$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (b)

12. (3 puncte) Se consideră sistemul dinamic: $\begin{cases} \dot{x}(t) = 3 \cdot x(t) + 2 \cdot u(t) \\ y(t) = -2 \cdot x(t) \end{cases}$

Să se determine comanda optimală, care minimizează următorul criteriu pătratic:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (4 \cdot x^2(t) + u^2(t)) \cdot dt$$

(3 pont) Adott a következő dinamikus rendszer: $\begin{cases} \dot{x}(t) = 3 \cdot x(t) + 2 \cdot u(t) \\ y(t) = -2 \cdot x(t) \end{cases}$

Határozzuk meg azt az optimális vezérlőjelet, mely minimálja a következő négyzetes kritériumot:

$$J(u) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (4 \cdot x^2(t) + u^2(t)) \cdot dt$$

a). $u(t) = -4 \cdot x(t)$

b). $u(t) = -5 \cdot x(t)$

c). $u(t) = 4 \cdot x(t)$

d). $u(t) = 5 \cdot x(t)$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (a)

13. (5 puncte) Se consideră sistemul dinamic: $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t) \end{cases}$

Să se determine comanda optimală, care minimizează următorul criteriu pătratic:

$$J(u) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) \cdot dt$$

(5 pont) Adott a következő dinamikus rendszer: $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t) \end{cases}$

Határozzuk meg azt az optimális vezérlőjelet, mely minimálja a következő négyzetes kritériumot:

$$J(u) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) \cdot dt$$

a). $u(t) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot (x_1(t) - x_2(t))$

b). $u(t) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot (x_1(t) + x_2(t))$

c). $u(t) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot (x_1(t) - x_2(t))$

d). $u(t) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot (x_1(t) + x_2(t))$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (d)

14. (3 puncte) Se dă următorul sistem dinamic: $\begin{cases} \dot{x}(t) = 9 \cdot x(t) + 2 \cdot u(t) \\ y(t) = 2 \cdot x(t) \end{cases}$ şi următorul criteriu pătratic:

$$J(u) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (19 \cdot x^2(t) + 4 \cdot u^2(t)) \cdot dt$$

Dacă determinăm comanda optimală, care asigură minimul criteriului J(u), atunci sistemul (închis) cu regulatorul poate fi caracterizat de următoarele ecuaţii diferenţiale:

(3 pont) Adott a következő dinamikus rendszer: $\begin{cases} \dot{x}(t) = 9 \cdot x(t) + 2 \cdot u(t) \\ y(t) = 2 \cdot x(t) \end{cases}$ és a következő négyzetes kritérium:

$$J(u) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (19 \cdot x^2(t) + 4 \cdot u^2(t)) \cdot dt$$

Ha kiszámoljuk az optimális vezérlőjelet, mely biztosítja a J(u) kritérium minimumát, akkor a szabályozott zárt rendszer jellemezhető a következő egyenlettel:

a). $\dot{x}(t) = -10 \cdot x(t)$

b. $\dot{x}(t) = 5 \cdot x(t)$

c). $\dot{x}(t) = -6 \cdot x(t)$

d). $\dot{x}(t) = -19 \cdot x(t)$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (a)

15. (5 puncte) Se dă următorul sistem dinamic: $\begin{cases} \dot{x}(t) = 2 \cdot x(t) + 3 \cdot u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$ şi următorul criteriu pătratic:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (5 \cdot (\cos(t) - y(t))^2 + 9 \cdot u^2(t)) \cdot dt$$

Dacă determinăm comanda optimală, care asigură minimul criteriului J(u), atunci sistemul (închis) cu regulatorul poate fi caracterizat de următoarele ecuaţii diferenţiale:

(5 pont) Adott a következő dinamikus rendszer: $\begin{cases} \dot{x}(t) = 2 \cdot x(t) + 3 \cdot u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$ és a következő négyzetes kritérium:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (5 \cdot (\cos(t) - y(t))^2 + 9 \cdot u^2(t)) \cdot dt$$

Ha kiszámoljuk az optimális vezérlőjelet, mely biztosítja a J(u) kritérium minimumát, akkor a szabályozott zárt rendszer jellemezhető a következő egyenlettel:

a). $\dot{x}(t) = 10 \cdot x(t) + 5 \cdot \cos(t)$

b. $\dot{x}(t) = -3 \cdot x(t) + \tfrac{5}{3} \cdot \cos(t)$

c). $\dot{x}(t) = -6 \cdot x(t)$

d). $\dot{x}(t) = -10 \cdot x(t) + 5 \cdot \cos(t)$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (b)

16. (3 puncte) Se dă următorul sistem dinamic: $H(s) = \frac{1}{s-5}$ şi următorul criteriu pătratic:

$$J(u) = \tfrac{3}{2} \cdot y^2(4) + \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^4 (y^2(t) + u^2(t)) \cdot dt$$

Pentru a determina comanda optimală $\left(u(t) = -R^{-1} \cdot B^T \cdot P \cdot y(t)\right)$ este necesară rezolvarea ecuaţiei diferenţiale:

(3 pont) Adott a következő dinamikus rendszer: $H(s) = \frac{1}{s-5}$ és a következő négyzetes kritérium:

$$J(u) = \tfrac{3}{2} \cdot y^2(4) + \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^4 y(t)^2 + u^2(t) \cdot dt$$

Az optimális jel meghatározásához $\left(u(t) = -R^{-1} \cdot B^T \cdot P \cdot y(t)\right)$szükséges a következő egyenlet megoldása:

a). $\dot{p}(t) = -10 \cdot p(t) + p^2(t) - 1; \quad p(4) = 3$

b). $\dot{p}(t) = -10 \cdot p(t) + p^3(t) - 1; \quad p(4) = 0$

c). $\dot{p}(t) = -10 \cdot p(t) + p^2(t) - 0.5; \quad p(4) = 3$

d). $\dot{p}(t) = -10 \cdot p(t) + p^2(t) - 0.5; \quad p(4) = \tfrac{3}{2}$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (a)

17. (3 puncte) Se dă următorul sistem dinamic : $\begin{cases} \dot{x}(t) = 7 \cdot x(t) + 0.4 \cdot u(t) \\ y(t) = 2 \cdot x(t) \end{cases}$ şi următorul criteriu pătratic:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot x^2(10) + \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^{10} (10 \cdot x^2(t) + 0.01 \cdot u^2(t)) \cdot dt$$

Pentru a determina comanda optimală $\left(u(t) = -R^{-1} \cdot B^T \cdot P \cdot x(t)\right)$ este necesară rezolvarea ecuaţiei diferenţiale:

(3 pont) Adott a következő dinamikus rendszer: $\begin{cases} \dot{x}(t) = 7 \cdot x(t) + 0.4 \cdot u(t) \\ y(t) = 2 \cdot x(t) \end{cases}$ és a következő négyzetes kritérium:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot x^2(10) + \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^{10} (10 \cdot x^2(t) + 0.01 \cdot u^2(t)) \cdot dt$$

Az optimális jel meghatározásához $\left(u(t) = -R^{-1} \cdot B^T \cdot P \cdot x(t)\right)$ szükséges a következő egyenlet megoldása:

a). $p(t) = -14 \cdot p(t) - 16 \cdot p^2(t) + 10; \quad p(10) = 1$

b). $p(t) = -17 \cdot p(t) + 16 \cdot p^2(t) - 1; \quad p(10) = 0.5$

c). $p(t) = -14 \cdot p(t) + 16 \cdot p^2(t) - 10; \quad p(10) = 1$

d). $p(t) = -14 \cdot p(t) + 16 \cdot p^2(t) - 10; \quad p(10) = \tfrac{1}{2}$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (c)

18. (3 puncte) Dacă este dat următorul criteriu pătratic atunci matricile de ponderare vor fi:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot x_1^2(8) + \int_0^8 (5 \cdot x_1^2(t) + 3 \cdot x_2^2(t) + 0.1 \cdot u^2(t)) \cdot dt$$

(3 pont) Ha adott a következő négyzetes kritérium akkor a súlyozó mátrixok a következők:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot x_1^2(8) + \int_0^8 (5 \cdot x_1^2(t) + 3 \cdot x_2^2(t) + 0.1 \cdot u^2(t)) \cdot dt$$

a). $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad R = 0.2$

b). $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad R = 0.02$

c). $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad R = 0.2$

d). $F = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad R = 0.1$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (a)

19. (3 puncte) Matricea Riccati are următoarele proprietăţi:

a) Este o matrice pozitiv definităli şi de dimensiuni n x m (unde n repr. numărul de stări şi m repr. numărul de intrări în sistem)

b) Este o matrice pozitiv definită, pătratică şi simetrică

c) Este o matrice pozitiv definită şi strict diagonală

d) Este o matrice pătratică negativ definită.

(3 pont) A Riccati mátrixnak rendelkeznie kell a következő tulajdonságokkal:

a) Pozitívan értelmezett n x m alakú (ahol n a rendszer állapotok és az m a rendszerbemenetek száma)
b) Pozitívan értelmezett, négyzetes és szimetrikus,
c) Pozitívan értelmezett és szigorúan átlós matrix,
d). Negatívan értelmezett szimetrikus mátrix,

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (b)

20. (3 puncte) Dacă R este matricea de ponderare a intrărilor şi Q este matricea de ponderare a stărilor, atunci:

a) . matricea R este pătratică, simetrică şi strict pozitiv definită,
b). Q, R nu sunt matrici simetrice
c). matricea Q este pătratică, şi strict negativ definită
d). Q şi R sunt strict matrici diagonale

(3 pont) Ha az R a bementek súlyozó mátrixa és a Q az állapotok súlyozó mátrixa, akkor:

a) . R négyzetes, szimmetrikus és szigorúan pozitíven értelmezett,
b). Q, R nem szimmetrikus mátrixok
c). Q négyzetes, szimmetrikus és szigorúan negatívan értelmezett
d). a Q és R szigorúan átlós alakú mátrixok

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (a)

21. (3 puncte) Care din următoarele criterii sunt pătratice:

(3 pont) A következő kritériumok közül melyik négyzetes:

a). $J(u)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(x^3(k)+k\cdot u(k)+x(k)\cdot u(k))$

b). $J(u)=\frac{1}{2}\cdot x^2(9)+\sum_{k=0}^{8}(16\cdot x(k)+0.1\cdot u^2(k))$

c). $J(u)=x^2(3)+\sum_{k=0}^{2}(2\cdot x^2(k)+u^2(k))$

d) $J(u)=\frac{1}{2}\cdot x^2(9)+\sum_{k=0}^{8}(\sqrt{x(k)}+0.1\cdot u^2(k))$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (c)

22. (5puncte) Fie următorul sistem Dinamic:

$$\underline{x}_{k+1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\underline{x}_{k+1}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\cdot u_k$$

şi funcţia criteriu:

$$J=\frac{1}{2}\underline{x}_N{}^T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\underline{x}_N+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\underline{x}_k{}^T\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & q\end{pmatrix}\underline{x}_k+u_k{}^2, \quad N=2$$

Să se determine reacţia optimală după stare dacă se cunoaşte ecuaţia Riccati discretă în

$$P_k=\Phi_k{}^T P_{k+1}\Phi_k+Q_k-\Phi_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\left(R_k+\Gamma_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\right)^{-1}\Gamma_k{}^T P_{k+1}\Phi_k$$

forma: $P_N=F$

(5pont) Legyen a következő diszkrét rendszer:

$$\underline{x}_{k+1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\underline{x}_{k+1}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\cdot u_k$$

és a mellérendelt költségfüggvény:

$$J=\tfrac{1}{2}\underline{x}_N^T\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\underline{x}_N+\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\underline{x}_k^T\begin{pmatrix}2&0\\0&q\end{pmatrix}\underline{x}_k+u_k^2, \quad N=2$$

Határozzátok meg a feladathoz rendelt állapot visszacsatolás értékét, ha ismert a diszkrét Riccati

$$P_k=\Phi_k^TP_{k+1}\Phi_k+Q_k-\Phi_k^TP_{k+1}\Gamma_k\left(R_k+\Gamma_k^TP_{k+1}\Gamma_k\right)^{-1}\Gamma_k^TP_{k+1}\Phi_k$$

egyenlet: $P_N=F$

És az optimális visszacsatolás erősítési tényezője:

$$K=-\left(R_k+\Gamma_k^T\cdot P_{k+1}\cdot\Gamma_k\right)^{-1}\cdot\Gamma_k^T\cdot P_{k+1}\cdot\Phi_k$$

a. $K_1=-\begin{bmatrix}0&\tfrac{1}{2}\end{bmatrix}, K_0=-\begin{bmatrix}0&\tfrac{3}{4}\end{bmatrix}$
b. $K_1=-\begin{bmatrix}0&\tfrac{3}{4}\end{bmatrix}, K_0=-\begin{bmatrix}0&\tfrac{1}{2}\end{bmatrix}$
c. $K_1=-\begin{bmatrix}1&\tfrac{1}{2}\end{bmatrix}, K_0=-\begin{bmatrix}1&\tfrac{3}{4}\end{bmatrix}$
d. $K_1=-\begin{bmatrix}0&\tfrac{1}{2}+q\end{bmatrix}, K_0=-\begin{bmatrix}0&\tfrac{3}{4}+q\end{bmatrix}$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (a)

23. (3 puncte) Dacă se cunoaşte ecuaţia Riccati discretă în forma:

$$P_k=\Phi_k^TP_{k+1}\Phi_k+Q_k-\Phi_k^TP_{k+1}\Gamma_k\left(R_k+\Gamma_k^TP_{k+1}\Gamma_k\right)^{-1}\Gamma_k^TP_{k+1}\Phi_k$$
$$P_N=F$$

Să se determine secvenţa de comandă optimală pentru sistemul dinamic

Care asigură minimul criteriului:

$$J=\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}u_k^2$$

(5pont) Ha ismert a diszkrét Riccati egyenlet:

$$P_k=\Phi_k^TP_{k+1}\Phi_k+Q_k-\Phi_k^TP_{k+1}\Gamma_k\left(R_k+\Gamma_k^TP_{k+1}\Gamma_k\right)^{-1}\Gamma_k^TP_{k+1}\Phi_k$$
$$P_N=F$$

és a következő skaláris rendszer:

Határozzuk meg azt a vezérlési szekvenciát, amely biztosítja a következő kritérium minimumát:

$$J=\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}u_k^2$$

a. $u_k^*=-x_k$
b. $u_k^*=x_k$
c. Valoarea lui u_k^* nu se poate determina deoarece în criteriul $J(x)$ nu apare starea x_k. Az u_k^* értékét nem lehet meghatározni, mert a $J(x)$ kritériumban nem szerepel az x_k állapot.
d. $u_k^*=0$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (d)

$$P_k=\Phi_k^TP_{k+1}\Phi_k+Q_k-\Phi_k^TP_{k+1}\Gamma_k\left(R_k+\Gamma_k^TP_{k+1}\Gamma_k\right)^{-1}\Gamma_k^TP_{k+1}\Phi_k$$
$$P_N=F$$

$$\Phi_k=1,\Gamma_k=1,Q_k=0,R_k=0$$

$$\widetilde{P}=\widetilde{P}-\frac{\widetilde{P}}{1+\widetilde{P}}\Rightarrow \quad \widetilde{P}=0$$

$$\underline{u}_k^*=-\left(\boldsymbol{R}_k+\boldsymbol{\Gamma}_k^T\boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{\Gamma}_k\right)^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_k^T\boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_k\cdot\underline{x}_k \Rightarrow u_k^*=-\frac{\widetilde{P}}{1+\widetilde{P}}x_k=0$$

24. (3 puncte) Formulaţi vă rog metoda programării dinamice (PD) utilizate în teoria controlului optimal dacă, $J^*(x_k)$ respectiv $J^*(x_{k+1})$ reprezintă valoarea criteriului optimal din starea x_k, x_{k+1} respectiv până la mulţimea ţintă, pentru criteriul $J(\underline{u}) = \lambda(\underline{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(\underline{x}_k, \underline{u}_k)$.

(3 pont) Fogalmazzátok meg a diszkrét optimális szabályozásban alkalmazott Dinamikus Programozási (DP) elvet, ha $J^*(x_k)$ jelenti az x_k, valamint az $J^*(x_{k+1})$ az x_{k+1} állapotból az optimális út mentén a végpontig származtatott $J(\underline{u}) = \lambda(\underline{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(\underline{x}_k, \underline{u}_k)$ *alakú* célfüggvényt.

a. $J^*(\underline{x}_k) = \min\limits_{\underline{u}_k}\{L(\underline{x}_k, \underline{u}_k) + J^*(\underline{x}_{k+1})\}$

b. $J^*(\underline{x}_{k+1}) = \min\limits_{\underline{u}_k}\{L(\underline{x}_k, \underline{u}_k) + J^*(\underline{x}_k)\}$

c. $J^*(\underline{x}_{k+1}) = \max\limits_{\underline{u}_k}\{L(\underline{x}_k, \underline{u}_k) + J^*(\underline{x}_k)\}$

d. $\frac{d}{dt} J^*(\underline{x}_k) = \min\limits_{\underline{u}_k}\{L(\underline{x}_k, \underline{u}_k) + J^*(\underline{x}_{k+1})\}$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (a)

25. (3 puncte) În cazul reglării optimale discrete proiectate pe baza criteriului pătratic $J = \frac{1}{2} x_N{}^T \boldsymbol{F} x_N + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} x_k{}^T \boldsymbol{Q}_k x_k + u_k{}^T \boldsymbol{R}_k u_k$ **valoarea patricei Riccati** $\boldsymbol{P}_k$ din relaţia $\underline{p}_k = \boldsymbol{P}_k \cdot \underline{x}_k$ este acceptată numai în cazul în care:

(3 pont) A diszkrét lineáris $J = \frac{1}{2} x_N{}^T \boldsymbol{F} x_N + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} x_k{}^T \boldsymbol{Q}_k x_k + u_k{}^T \boldsymbol{R}_k u_k$ négyzetes kritérium utáni állapot szabályozó megoldásából kapott $\boldsymbol{P}_k$ Riccati mátrix $\underline{p}_k = \boldsymbol{P}_k \cdot \underline{x}_k$ esetében csak azt fogadjuk el megoldásnak amelynek:

a. Partea reală a valorilor proprii ale matricei $\boldsymbol{P}_k$ sunt negative. A $\boldsymbol{P}_k$ Riccati mátrix sajátértékeinek valós része negatív

b. Valorile proprii ale matricei $\boldsymbol{P}_k$ au se află în interiorul cercului de rază unitate. A $\boldsymbol{P}_k$ Riccati mátrix sajátértékei az egységugarú körön belül helyezkednek el.

c. Matricea Riccati este pozitiv definită. A $\boldsymbol{P}_k$ Riccati mátrix pozitívan értelmezett (pozitív definit)

d. Orice valoare a matricei Riccati $\boldsymbol{P}_k$ este acceptată. A $\boldsymbol{P}_k$ Riccati mátrix bármely értékét elfogadjuk.

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (c)

26. (3 puncte) Cum influenţează parametrii criteriului liniar pătratic $J = \frac{1}{2} x_N{}^T F x_N + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} x_k{}^T Q_k x_k + u_k{}^T R_k u_k$ secvenţa de comandă optimală u_k^*.

(3 pont) A lineáris $J = \frac{1}{2} x_N{}^T F x_N + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} x_k{}^T Q_k x_k + u_k{}^T R_k u_k$ négyzetes kritérium utáni állapot szabályozó paraméterei a következőképpen befolyásolják az u_k^* optimális szabályozási szekvenciát:

a. Cu cât sunt mai mari valorile matricei Q_k cu atât este mai mare valoarea comenzii. Minél nagyobbak a Q_k értékei annál nagyobb a vezérlőjel értéke

b. Cu cât sunt mai mari valorile matricei R_k faţă de matricile Q_k respectiv F cu atât semnalul de comandă este mai mic. Minél nagyobbak az R_k értékei a Q_k és F mátrixokhoz viszonyítva annál kisebb a vezérlőjel értéke
c. Cu cât sunt mai mici valorile matricei R_k faţă de matricile Q_k respectiv F cu atât semnalul de comandă este mai mic. Minél kisebbek az R_k értékei a Q_k és F mátrixokhoz viszonyítva annál kisebb a vezérlőjel értéke.
d. Valorile lui u_k^* nu depind de valorile matricilor Q_k şi R_k. Az u_k^* értékei nem függnek a Q_k és R_k értékeitől.

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (c)

27. (3 puncte) Dacă utilizăm principiul Bellman (programarea Dinamică) pentru determinarea secvenţei de comandă optimală se poate demonstra că: $\underline{u}_k^* = -\left(\boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k^T \boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{\Gamma}_k\right)^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_k^T \boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_k \cdot \underline{x}_k$ képletből kapjuk meg. Dacă utilizăm ecuaţiile Hamilton-Jacobi secfvenţa de comandă se obţine din relaţia $u_k^* = -R_k^{-1} \cdot B_k^T \cdot p_{k+1}$ unde P_k este matricea Riccati iar p_{k+1} este vectorul costare.

(3 pont) Amennyiben a Bellman elvet használjuk bizonyítható, hogy az optimális szabályozási szekvenciát $\underline{u}_k^* = -\left(\boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k^T \boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{\Gamma}_k\right)^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_k^T \boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_k \cdot \underline{x}_k$ képletből kapjuk meg. Amennyiben a Hamilton-Jacobi egyenletekből számítjuk ezt akkor $u_k^* = -R_k^{-1} \cdot B_k^T \cdot p_{k+1}$ ahol a P_k a Riccati mátrix a p_{k+1} pedig a segédállapot vektora.

a. Cele două relaţii sunt complementare. A két egyenlet komplementáris azaz kiegészíti egymást.
b. Cele două relaţii sunt similare. A két egyenlet ugyanazt a feltételt fejezi ki.
c. Cele două relaţii nu se pot utiliza simultan, ele sunt contrare. A két feltétel ellentétes.
d. Una din condiţii se utilizează în cazul problemelor cu punct final fixat iar celălat în cazul punctului final liber. Az egyik feltétel a rögzített a másik meg a szabad végállapot esetén használható.

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (b)

28. (3p) A $x = f(x,u,t)$ folytonos rendszeregyenletre bizonyított $\frac{\partial H}{\partial x} = -p, \frac{\partial H}{\partial p} = x, \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \frac{\partial \lambda}{\partial x(tf)} = p(tf)$ Hamilton-Jacobi egyenletek az optimális szabályozás szükséges vagy elégséges feltételeit jelentik.

a. Csak az optimális szabályozás szükséges feltételeit
b. Csak az optimális szabályozás elégséges feltételeit
c. Mindkettőt azaz az optimális szabályozás elégséges és szükséges feltételeit is.
d. Egyiket sem.

Pentru următorul sistem dinamic continuu $x = f(x,u,t)$ ecuaţiile Hamilton Jacobi $\frac{\partial H}{\partial x} = -p, \frac{\partial H}{\partial p} = x, \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \frac{\partial \lambda}{\partial x(tf)} = p(tf)$ reprezintă condiţiile de necesitate sau de suficienţă.

a. Numai condiţii de necesitate.
b. Numai condiţii de suficienţă.
c. Ambele condiţii şi de necesitate şi de suficienţă
d. Nici una dintre condiţii.

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (c)

29. (5 puncte) Fie următorul sistem dinamic discret:

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_k$$, unde $\underline{x}_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ x_{k,2} \end{pmatrix}$

şi funcţia de criteriu aferentă: $J = x_{2,1}^2 + x_{1,1}^2 + 2u_1^2 + x_{0,1}^2 + 2u_0^2$

Să se determine secvenţa de comandă optimală care asigură traiectoria optimală pornind de la starea iniţială $\begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ în starea finală fixată $\begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(5 pont) Legyen a következő diszkrét rendszer:

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_k \text{, ahol } \underline{x}_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ x_{k,2} \end{pmatrix}$$

és a mellérendelt költségfüggvény: $J = x_{2,1}{}^2 + x_{1,1}{}^2 + 2u_1{}^2 + x_{0,1}{}^2 + 2u_0{}^2$

Határozzátok meg a feladathoz rendelt optimális vezérlési szekvencia értékét, amely a $\begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kezdőállapotból, a $\begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rögzített végállapotba viszi a rendszert.

a. $u_0{}^* = 0$, $u_1{}^* = -1$,

b. $u_0{}^* = -1$, $u_1{}^* = -1$,

c. $u_0{}^* = 0$, $u_1{}^* = -\frac{1}{3}$

d. $u_0{}^* = 1$, $u_1{}^* = -1$,

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (b)

$$J = \tfrac{1}{2}\underline{x}_2{}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}_2 + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} \underline{x}_k{}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}_k + 4u_k{}^2 \Rightarrow N = 2, \quad F = Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = 4$$

$$J_1{}^*(\underline{x}_1) = \min_{u_1}\left\{\sum_{k=1}^{1} x_{k,1}{}^2 + 2u_k{}^2 + J_2{}^*(\underline{x}_2)\right\} = \min_{u_1}\left\{x_{1,1}{}^2 + 2u_1{}^2 + x_{2,1}{}^2\right\} = \min_{u_1}\left\{x_{1,1}{}^2 + 2u_1{}^2 + 0\right\}$$

a következő korlátokkal $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_1 \Rightarrow \begin{matrix} 0 = -x_{1,2} + u_1 \\ 1 = -x_{1,1} \end{matrix}$

$$J_1{}^*(\underline{x}_1) = \min_{u_1}\left\{x_{1,1} + 2u_1{}^2 + 0 \middle/ x_{1,2} = u_1, x_{1,1} = -1\right\} = \min_{u_1}\left\{1 + 2x_{1,2}{}^2 + 0\right\} = 1 + 2x_{1,2}{}^2$$

$$J_0{}^*(\underline{x}_0) = \min_{u_0}\left\{\sum_{k=0}^{0} x_{k,1}{}^2 + 2u_k{}^2 + J_1{}^*(\underline{x}_1)\right\} = \min_{u_0}\left\{x_{0,1}{}^2 + 2u_0{}^2 + 1 + 2x_{1,2}{}^2\right\}$$

a következő korlátokkal $\begin{matrix} x_{1,1} = -x_{0,2} + u_0 = -1 \\ x_{1,2} = -x_{0,1} \end{matrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow J_0{}^*(\underline{x}_0) = \min_{u_0}\left\{x_{0,1}{}^2 + 2u_0{}^2 + 1 + 2x_{1,2}{}^2 \middle/ u_0 = -1, x_{1,2} = -x_{0,1}\right\} = x_{0,1}{}^2 + 2 + 1 + 2x_{0,1}{}^2$$

$$u_0{}^* = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_1{}^* = x_{1,2} = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

30. (5p) Fie următorul sistem dinamic discret:

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_k \text{, unde } \underline{x}_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ x_{k,2} \end{pmatrix}$$

şi funcţia de criteriu aferentă: $J = x_{2,1}{}^2 + x_{1,1}{}^2 + 2u_1{}^2 + x_{0,1}{}^2 + 2u_0{}^2$.

Să se determine secvenţa de comandă optimală care asigură traiectoria optimală pornind de la starea iniţială $\begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ în starea finală liberă $\begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix}$. Ecuaţia ARE discretă este:

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

Legyen a következő diszkrét rendszer:

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_k \text{, ahol } \underline{x}_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ x_{k,2} \end{pmatrix}$$

és a mellérendelt költségfüggvény: $J = x_{2,1}{}^2 + x_{1,1}{}^2 + 2u_1{}^2 + x_{0,1}{}^2 + 2u_0{}^2$.

Határozzátok meg a feladathoz rendelt optimális vezérlési szekvencia értékét, amely a $\begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kezdőállapotból, a $\begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix}$ szabad végállapotba viszi a rendszert. A diszkrét ARE egyenlete:

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1}\Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\right)^{-1}\Gamma_k{}^T P_{k+1}\Phi_k$$
$$P_N = F$$

a. $u_0{}^* = 0$, $u_1{}^* = -1$,

b. $u_0{}^* = -1$, $u_1{}^* = -1$,

c. $u_0{}^* = 0$, $u_1{}^* = -\frac{1}{3}$

d. $u_0{}^* = 1$, $u_1{}^* = -1$,

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (c)

$$J = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k + u_k{}^T \cdot 4 \cdot u_k$$

Felírva a Hamilton Jacobi egyenleteket kapjuk:

$$\underline{u}_k{}^* = -\left(\boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k{}^T \boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{\Gamma}_k\right)^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_k{}^T \boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_k \cdot \underline{x}_k$$

$$\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{\Phi}_k{}^T \boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_k + \boldsymbol{Q}_k - \boldsymbol{\Phi}_k{}^T \boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{\Gamma}_k\left(\boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k{}^T \boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{\Gamma}_k\right)^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_k{}^T \boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_k$$
$$\boldsymbol{P}_N = \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \Phi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}_2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \left(4 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{P}_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{P}_2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}_1{}^* = -\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{\Gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{\Phi} \cdot \underline{x}_1 = -\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_1$$

$$\underline{u}_0{}^* = -\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\Gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\Phi} \cdot \underline{x}_0 = -\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\underline{x}_1{}^* = \boldsymbol{\Phi} \cdot \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{u}_1{}^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{x}_2{}^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

31. (3 puncte) Fie următorul sistem dinamic discret:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \sqrt{\beta} \cdot u_k$$

Se caută secvenţa de comandă care minimizează criteriul:

$$J = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x_k{}^2 + u_k{}^2$$

Presupunem cunoscută matricea Hamiltoniană H, respectiv ecuaţia ARE discretă:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1}\Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\right)^{-1}\Gamma_k{}^T P_{k+1}\Phi_k$$
$$P_N = F$$

(3 pont) Legyen a következő dinamikus rendszeregyenlet:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \sqrt{\beta} \cdot u_k, \quad \beta > 0$$

Keressük azt a vezérlési szekvenciát amely biztosítja a következő kritérium minimumát:

$$J = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{\ 2} + u_k^{\ 2}$$

Feltételezzük, hogy ismerjük a H Hamilton mátrixot és a diszkrét ARE egyenletet:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k^{\ T} P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k^{\ T} P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k^{\ T} P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k^{\ T} P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

a. $\widetilde{P} = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2\beta}$, $u_k^{\ *} = \left(1 + \beta \cdot \widetilde{P}\right)^{-1} \sqrt{\beta} \cdot \widetilde{P} \cdot x_k$

b. $\widetilde{P} = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2\beta}$, $u_k^{\ *} = -\left(1 - \beta \cdot \widetilde{P}\right)^{-1} \sqrt{\beta} \cdot \widetilde{P} \cdot x_k$

c. $\widetilde{P} = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2\beta}$, $u_k^{\ *} = -\left(1 + \beta \cdot \widetilde{P}\right)^{-1} \sqrt{\beta} \cdot \widetilde{P} \cdot x_k$

d. $\widetilde{P} = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2\beta}$, $u_k^{\ *} = -\left(1 + \beta \cdot \widetilde{P}\right)^{-1} \sqrt{\beta} \cdot \widetilde{P} \cdot x_k$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (d)

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \underline{p}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{R}_k^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Phi}^{T^{-1}} \boldsymbol{Q}_k & \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{R}_k^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Phi}^{T^{-1}} \\ -\boldsymbol{\Phi}^{T^{-1}} \boldsymbol{Q}_k & \boldsymbol{\Phi}^{T^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{p}_k \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{u}_k^{\ *} = -\boldsymbol{R}_k^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^T \underline{p}_{k+1}$$

$$\underline{x}_2 = \left(\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{R}_k^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Phi}^{T^{-1}} \boldsymbol{Q}_k\right) \underline{x}_1 - \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{R}_k^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Phi}^{T^{-1}} \underline{p}_1 \Rightarrow \quad \underline{p}_1 = \boldsymbol{P}_1 x_1 - \underline{q}_1$$

$$H = \tfrac{1}{2} x_k^{\ 2} + \tfrac{1}{2} u_k^{\ 2} + p_{k+1} \cdot \left(x_k + \sqrt{\beta} \cdot u_k\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{k+1}} = x_k + \sqrt{\beta} \cdot u_k^{\ *} = x_{k+1}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_k} = x_k + p_{k+1} = p_k, \quad \frac{\partial H}{\partial u_k} = u_k^{\ *} + \sqrt{\beta} \cdot p_{k+1} = 0$$

$$\begin{matrix} x_{k+1} = x_k - \beta \cdot p_{k+1} \\ p_k = x_k + p_{k+1} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_{k+1} = (1+\beta) \cdot x_k - \beta \cdot p_k \\ p_{k+1} = -x_k + p_k \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ p_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\beta & -\beta \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{\beta} & -\beta \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda \cdot I - H\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 - \beta & \beta \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - \beta \cdot \lambda + \beta - \beta = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{\beta + 2 \pm \sqrt{\beta^2 + 4\beta + 4 - 4}}{2},$$

Pentru verificarea valorilor proprii stabile se utilizează relaţia:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{(\beta+2)^2}}}{2} \quad \overset{\beta \geq 0}{\Rightarrow} \quad \lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(\beta+2)^2}}}{2} < 1$$

$$\begin{bmatrix} 1+\beta & -\beta \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{\beta + 2 - \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$-v_1 + v_2 = \frac{\beta + 2 - \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2} v_2 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{P}_1 = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta}} = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2\beta}$$

Pe de altă parte soluţia se poate obţine din soluţia DARE:

$$\widetilde{P}=\widetilde{P}+1-\widetilde{P}\sqrt{\beta}\left(1+\sqrt{\beta}\cdot\widetilde{P}\cdot\sqrt{\beta}\right)^{-1}\sqrt{\beta}\cdot\widetilde{P}$$

$$\widetilde{P}^2\cdot\beta-1-\widetilde{P}\cdot\beta=0 \quad\Rightarrow\quad \widetilde{P}_{1,2}=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2+4\beta}}{2\beta}$$

$$\widetilde{P}>0$$

Adică soluţia stabilizantă care este: $\widetilde{P}=\dfrac{\beta+\sqrt{\beta^2+4\beta}}{2\beta}$

Verificând comportarea sistemului în buclă închisă obţinem: $u_k^*=-\left(1+\beta\cdot\widetilde{P}\right)^{-1}\sqrt{\beta}\cdot\widetilde{P}\cdot x_k$ respectiv:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{\beta\cdot\widetilde{P}}{1+\beta\cdot\widetilde{P}}x_k=\frac{1}{1+\beta\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4\beta}}{2\beta}}\cdot x_k=\frac{2}{2+\beta+\sqrt{\beta^2+4\beta}}x_k$$

32. (3 puncte) Fie următorul sistem dinamic scalar:

cu valori iniţial şi finale fixate:

Să se determine secvenţa u_0,u_1,u_2 de comandă optimală care asigură minimul funcţiei criteriu:

$$J(x,u)=\sum_{k=0}^{2}x_k^2+u_k^2$$

(3 pont) Legyen a következő skaláris rendszer:

a következő határfeltételekkel:

Határozzuk meg azt az u_0,u_1,u_2 vezérlési szekvenciát, amely biztosítani tudja a következő célfüggvény minimumát:

$$J(x,u)=\sum_{k=0}^{2}x_k^2+u_k^2$$

a. $u_0^*=\frac{3}{8}$, $u_1^*=\frac{3}{4}$, $u_2^*=\frac{15}{8}$

b. $u_0^*=1$, $u_1^*=1$, $u_2^*=1$

c. $u_0^*=-1$, $u_1^*=-1$, $u_2^*=-1$

d. $u_0^*=0$, $u_1^*=-\frac{1}{3}$, $u_2^*=-\frac{2}{3}$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (a)

Legyen $J_k^*(x_k)$ a minimális célfüggvény az x_k állapotból az x_3 végállapotig ahol $J_3^*(x_3)=0$. Tehát következik:

$$J_2^*(x_2)=\min_{u_2}\left\{\sum_{k=2}^{2}x_k^2+u_k^2+J_3^*(x_3)\right\}=\min_{u_2}\left\{x_2^2+u_2^2+0\right\}$$

Viszont mivel a végállapot le van rögzítve az u_2 vezérlőjel nem szabad, hanem a $3=x_3=x_2+u_2$ egyenlet határozza meg. Ezek alapján:

$$J_2^*(x_2)=x_2^2+\left(3-x_2\right)^2+0$$

Elvégezve a következő iteratív lépést, kapjuk:

$$J_1^*(x_1)=\min_{u_1}\left\{x_1^2+u_1^2+x_2^2+\left(3-x_2\right)^2\right\}$$

Tehát:

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left\{x_1^2+u_1^2+\left(x_1+u_1\right)^2+\left(3-x_1-u_1\right)^2\right\}=2\cdot u_1+2\left(x_1+u_1\right)-2\left(3-x_1-u_1\right)=0$$

$$6u_1^*+4x_1-6=0 \quad\Rightarrow\quad u_1^*=1-\tfrac{2}{3}x_1$$

Amivel az célfüggvény optimális értéke:

$$J_1^*(x_1)=x_1^2+\left(1-\tfrac{2}{3}x_1\right)^2+\left(x_1+1-\tfrac{2}{3}x_1\right)^2+\left(3-x_1-1+\tfrac{2}{3}x_1\right)^2=x_1^2+\left(1-\tfrac{2}{3}x_1\right)^2+\left(1+\tfrac{1}{3}x_1\right)^2+\left(2-\tfrac{1}{3}x_1\right)^2$$

Ezzel végső lépésként kapjuk:

$$J_0^*(x_0) = \min_{u_0}\left\{x_0^2 + u_0^2 + J_1^*(x_1)\right\} = \min_{u_0}\left\{x_0^2 + u_0^2 + x_1^2 + \left(1 - \tfrac{2}{3}x_1\right)^2 + \left(1 + \tfrac{1}{3}x_1\right)^2 + \left(2 - \tfrac{1}{3}x_1\right)^2\right\} =$$
$$= \min_{u_0}\left\{x_0^2 + u_0^2 + (x_0 + u_0)^2 + \left(1 - \tfrac{2}{3}x_0 - \tfrac{2}{3}u_0\right)^2 + \left(1 + \tfrac{1}{3}x_0 + \tfrac{1}{3}u_0\right)^2 + \left(2 - \tfrac{1}{3}x_0 - \tfrac{1}{3}u_0\right)^2\right\}$$

Amelyet deriválva megkapjuk az optimális vezérlés első szekvenciáját

$$\frac{\partial}{\partial u_0}\left\{x_0^2 + u_0^2 + (x_0 + u_0)^2 + \left(1 - \tfrac{2}{3}x_0 - \tfrac{2}{3}u_0\right)^2 + \left(1 + \tfrac{1}{3}x_0 + \tfrac{1}{3}u_0\right)^2 + \left(2 - \tfrac{1}{3}x_0 - \tfrac{1}{3}u_0\right)^2\right\} =$$
$$= 2u_0 + 2(x_0 + u_0) - \tfrac{4}{3}\left(1 - \tfrac{2}{3}x_0 - \tfrac{2}{3}u_0\right) + \tfrac{2}{3}\left(1 + \tfrac{1}{3}x_0 + \tfrac{1}{3}u_0\right) - \tfrac{2}{3}\left(2 - \tfrac{1}{3}x_0 - \tfrac{1}{3}u_0\right) =$$
$$= 4u_0 - \tfrac{4}{3}\left(1 - \tfrac{2}{3}u_0\right) + \tfrac{2}{3}\left(1 + \tfrac{1}{3}u_0\right) - \tfrac{2}{3}\left(2 - \tfrac{1}{3}u_0\right) = 0$$
$$\left(4 + \tfrac{8}{9} + \tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{9}\right)u_0^* = \tfrac{4}{3} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad u_0^* = \tfrac{18}{48} = \tfrac{3}{8} = 0.3750$$

Ezt visszahelyettesítve a rendszeregyenletbe kapjuk:

$$x_1^* = x_0 + u_0^* = \tfrac{3}{8} \Rightarrow u_1^* = 1 - \tfrac{2}{3}\tfrac{3}{8} = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} = 0.75 \Rightarrow x_2^* = \tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{8} \Rightarrow u_2^* = 3 - \tfrac{9}{8} = \tfrac{15}{8} = 1.875$$

És végül a kritérium értékére kapjuk:

$$J^*(x,u) = \sum_{k=0}^{2} x_k^2 + u_k^2 = x_0^2 + u_0^2 + x_1^2 + u_1^2 + x_2^2 + u_2^2 = 0 + \tfrac{9}{64} + \tfrac{9}{64} + \tfrac{36}{64} + \tfrac{81}{64} + \tfrac{225}{64} = \tfrac{45}{8} = 5.62$$

Összehasonlításként a $u_0^* = 1, u_1^* = 1, u_2^* = 1$ szekvenciára kapjuk:

$$J(x,u) = \sum_{k=0}^{2} x_k^2 + u_k^2 = x_0^2 + u_0^2 + x_1^2 + u_1^2 + x_2^2 + u_2^2 = 0 + 1 + 1 + 1 + 4 + 1 = 8$$

33. Se consideră sistemul dinamic : $\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -x_1(k) \end{cases}$

Să se determine secvenţa de comandă optimală, care minimizează următorul criteriu pătratic:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x_1^2(k) + x_2^2(k) + u^2(k))$$

Presupunem cunoscută matricea Hamiltoniană H, respectiv ecuaţia ARE discretă:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k^T P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

Adott a következő dinamikus rendszer: $\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -x_1(k) \end{cases}$

Határozzuk meg azt az optimális vezérlőjel szekvenciát, mely minimálja a következő négyzetes kritériumot:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x_1^2(k) + x_2^2(k) + u^2(k))$$

Feltételezzük, hogy ismerjük a H Hamilton mátrixot és a diszkrét ARE egyenletet:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k^T P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

a). $u(k) = (1 - \sqrt{3}) \cdot x_2(k)$

b). $u(k) = (\sqrt{3} - 1) \cdot x_1(k) + x_2(k)$

c). $u(k) = (1-\sqrt{15})\cdot x_2(k)$

d). $u(k) = (1+\sqrt{3})\cdot x_2(k)$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (a)

34. (5 puncte) Se consideră sistemul dinamic: $\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -x_1(k) \end{cases}$

Să se determine secvenţa de comandă optimală, care minimizează următorul criteriu pătratic:

$$J(u) = \tfrac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(x_1^2(k) + x_2^2(k) + u^2(k))$$

şi determinaţi ecuaţiile de stare a sistemului (închis) cu regulatorul:

Presupunem cunoscută matricea Hamiltoniană H, respectiv ecuaţia ARE discretă:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma\cdot R^{-1}\cdot\Gamma^T\cdot\left(\Phi^T\right)^{-1}\cdot Q & -\Gamma\cdot R^{-1}\cdot\Gamma^T\cdot\left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1}\cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1}\Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\right)^{-1}\Gamma_k{}^T P_{k+1}\Phi_k$$
$$P_N = F$$

(5 pont) Adott a következő dinamikus rendszer: $\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -x_1(k) \end{cases}$

Határozzuk meg azt az optimális vezérlőjelet, mely minimálja a következő négyzetes kritériumot

$$J(u) = \tfrac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(x_1^2(k) + x_2^2(k) + u^2(k))$$

és határozzuk meg a szabályozott (zárt) rendszer állapot egyenleteit:

Feltételezzük, hogy ismerjük a H Hamilton mátrixot és a diszkrét ARE egyenletet:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma\cdot R^{-1}\cdot\Gamma^T\cdot\left(\Phi^T\right)^{-1}\cdot Q & -\Gamma\cdot R^{-1}\cdot\Gamma^T\cdot\left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1}\cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1}\Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\right)^{-1}\Gamma_k{}^T P_{k+1}\Phi_k$$
$$P_N = F$$

a). $\begin{cases} x_1(k+1) = (2-\sqrt{3})\cdot x_2(k) + x_1(k) \\ x_2(k+1) = -x_1(k) \end{cases}$

b). $\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -x_1(k) \end{cases}$

c). $\begin{cases} x_1(k+1) = (2-\sqrt{3})\cdot x_2(k) \\ x_2(k+1) = -x_1(k) \end{cases}$

d). $\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + \left(2-\sqrt{3}\right)u(k) \\ x_2(k+1) = -x_1(k) \end{cases}$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (c)

35. (3 puncte) Se consideră sistemul dinamic: $x(k+1) = 2\cdot x(k) + u(k)$

Să se determine secvenţa de comandă optimală, care minimizează următorul criteriu pătratic:

$$J(u) = \tfrac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(x^2(k) + u^2(k))$$

Presupunem cunoscută matricea Hamiltoniană H, respectiv ecuaţia ARE discretă:

$$H=\begin{bmatrix} \Phi+\Gamma\cdot R^{-1}\cdot\Gamma^T\cdot\left(\Phi^T\right)^{-1}\cdot Q & -\Gamma\cdot R^{-1}\cdot\Gamma^T\cdot\left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1}\cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k=\Phi_k{}^T P_{k+1}\Phi_k+Q_k-\Phi_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\left(R_k+\Gamma_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\right)^{-1}\Gamma_k{}^T P_{k+1}\Phi_k$$
$$P_N=F$$

(3 pont) Adott a következő dinamikus rendszer: $x(k+1)=2\cdot x(k)+u(k)$
Határozzuk meg azt az optimális vezérlőjel szekvenciát, mely minimálja a következő négyzetes kritériumot:

$$J(u)=\tfrac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(x^2(k)+u^2(k))$$

Feltételezzük, hogy ismerjük a H Hamilton mátrixot és a diszkrét ARE egyenletet:

$$H=\begin{bmatrix} \Phi+\Gamma\cdot R^{-1}\cdot\Gamma^T\cdot\left(\Phi^T\right)^{-1}\cdot Q & -\Gamma\cdot R^{-1}\cdot\Gamma^T\cdot\left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1}\cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k=\Phi_k{}^T P_{k+1}\Phi_k+Q_k-\Phi_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\left(R_k+\Gamma_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\right)^{-1}\Gamma_k{}^T P_{k+1}\Phi_k$$
$$P_N=F$$

a). $u(k)=-0.5\cdot(1+\sqrt{5})\cdot x(k)$

b). $u(k)=(\sqrt{3}-1)\cdot x(k)$

c). $u(k)=(1-\sqrt{15})\cdot x(k)$

d). $u(k)=0.5\cdot(1+\sqrt{5})\cdot x(k)$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (a)

36. (3 puncte) Se dă următorul sistem dinamic: $x(k+1)=2\cdot x(k)+u(k)$ şi următorul criteriu pătratic:

$$J(u)=\tfrac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(x^2(k)+u^2(k))$$

Dacă comanda optimală este calculată cu ajutorul metodei Potter discretă, atunci matricea Hamiltoniană determinată va avea următoarele valori proprii:
Presupunem cunoscută matricea Hamiltoniană H, respectiv ecuaţia ARE discretă:

$$H=\begin{bmatrix} \Phi+\Gamma\cdot R^{-1}\cdot\Gamma^T\cdot\left(\Phi^T\right)^{-1}\cdot Q & -\Gamma\cdot R^{-1}\cdot\Gamma^T\cdot\left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1}\cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k=\Phi_k{}^T P_{k+1}\Phi_k+Q_k-\Phi_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\left(R_k+\Gamma_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\right)^{-1}\Gamma_k{}^T P_{k+1}\Phi_k$$
$$P_N=F$$

(3 pont) Adott a következő dinamikus rendszer: $x(k+1)=2\cdot x(k)+u(k)$ és a következő négyzetes kritérium:

$$J(u)=\tfrac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(x^2(k)+u^2(k))$$

Ha az optimális vezérlő jel szekvenciát a diszkrét Potter módszer segitségével számoljuk ki akkor a kapott Hamilton matrix sajátértékei:
Feltételezzük, hogy ismerjük a H Hamilton mátrixot és a diszkrét ARE egyenletet:

$$H=\begin{bmatrix} \Phi+\Gamma\cdot R^{-1}\cdot\Gamma^T\cdot\left(\Phi^T\right)^{-1}\cdot Q & -\Gamma\cdot R^{-1}\cdot\Gamma^T\cdot\left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1}\cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k=\Phi_k{}^T P_{k+1}\Phi_k+Q_k-\Phi_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\left(R_k+\Gamma_k{}^T P_{k+1}\Gamma_k\right)^{-1}\Gamma_k{}^T P_{k+1}\Phi_k$$
$$P_N=F$$

a). $\lambda_1=0.5\cdot(3+\sqrt{5})\quad\lambda_2=0.5\cdot(3+\sqrt{7})$

b). $\lambda_1 = 0.5 \cdot (3+\sqrt{5}) \quad \lambda_2 = 0.5 \cdot (3-\sqrt{7})$

c). $\lambda_1 = 0.5 \cdot (3+\sqrt{5}) \quad \lambda_2 = 0.5 \cdot (3-\sqrt{5})$

d). $\lambda_1 = 0.5 \cdot (3+7) \quad \lambda_2 = 0.5 \cdot (3-\sqrt{7})$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (c)

37. Se dă următorul sistem dinamic: $x(k+1) = 3 \cdot x(k) + 2 \cdot u(k)$

Să se determine secvenţa de comandă optimală, care minimizează următorul criteriu pătratic:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (u^2(k))$$

Presupunem cunoscută matricea Hamiltoniană H, respectiv ecuaţia ARE discretă:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

Adott a következő dinamikus rendszer: $x(k+1) = 3 \cdot x(k) + 2 \cdot u(k)$

Határozzuk meg azt az optimális vezérlőjel szekvenciát, mely minimálja a következő négyzetes kritériumot:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (u^2(k))$$

Feltételezzük, hogy ismerjük a H Hamilton mátrixot és a diszkrét ARE egyenletet:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

a). $u(k) = -\tfrac{4}{3} \cdot x(k)$

b). $u(k) = -\sqrt{3} \cdot x(k)$

c). $u(k) = 4 \cdot x(k)$

d). $u(k) = -\tfrac{3}{4} \cdot x(k)$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (a)

38. (3 puncte) Se dă următorul sistem dinamic: $x(k+1) = 2 \cdot x(k) + \tfrac{1}{2} \cdot u(k)$ şi următorul criteriu pătratic :

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{2} (x^2(k) + u^2(k))$$

Să se determine secvenţa matricilor Riccati necesară pentru calcularea comenzii optimale:
Presupunem cunoscută matricea Hamiltoniană H, respectiv ecuaţia ARE discretă:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

(3 pont) Adott a következő dinamikus rendszer: $x(k+1) = 2 \cdot x(k) + \tfrac{1}{2} \cdot u(k)$ és a következő négyzetes kritérium:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{2} (x^2(k) + u^2(k))$$

Határozzuk meg az optimális vezérlőjel kiszámításához szükséges Riccati mátrix szekvenciát:
Feltételezzük, hogy ismerjük a H Hamilton mátrixot és a diszkrét ARE egyenletet:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

a). $P_3 = 0; \quad P_2 = 1; \quad P_1 = \frac{21}{5};$

b). $P_3 = 0; \quad P_2 = 2; \quad P_1 = \frac{-21}{5};$

c). $P_3 = 1; \quad P_2 = 2; \quad P_1 = \frac{21}{5};$

d). $P_3 = 1; \quad P_2 = 2; \quad P_1 = 3;$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (a)

39. (3 puncte) Se dă următorul sistem dinamic: $x(k+1) = \frac{1}{2} \cdot x(k) + 2 \cdot u(k)$ şi următorul criteriu pătratic :

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x^2(k) + u^2(k))$$

Dacă comanda optimală este calculată cu ajutorul metodei Potter discretă, atunci matricea Hamiltoniană determinată va avea următoarele valori proprii:
Presupunem cunoscută matricea Hamiltoniană H, respectiv ecuaţia ARE discretă:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

(3 pont) Adott a következő dinamikus rendszer: $x(k+1) = \frac{1}{2} \cdot x(k) + 2 \cdot u(k)$ és a következő négyzetes kritérium:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x^2(k) + u^2(k))$$

Ha az optimális vezérlő jel szekvenciát a diszkrét Potter módszer segitségével számoljuk ki akkor a kapott Hamilton matrix sajátértékei:
Feltételezzük, hogy ismerjük a H Hamilton mátrixot és a diszkrét ARE egyenletet:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

a). $\lambda_1 = 0.5 \cdot (3 - \sqrt{5}); \qquad \lambda_2 = 0.3 \cdot (3 + \sqrt{5})$

b). $\lambda_1 = 0.25 \cdot (21 + 5 \cdot \sqrt{17}); \quad \lambda_2 = 0.25 \cdot (21 - 5 \cdot \sqrt{17})$

c). $\lambda_1 = 0.5 \cdot (21 + 5 \cdot \sqrt{11}); \quad \lambda_2 = 0.5 \cdot (21 - 5 \cdot \sqrt{11})$

d). $\lambda_1 = 0.5 \cdot (2 + 5 \cdot \sqrt{11}); \quad \lambda_2 = 0.5 \cdot (2 - 5 \cdot \sqrt{11})$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (b)

40. (3 puncte) Se dă următorul sistem dinamic: $x(k+1) = 2 \cdot x(k) + u(k)$ şi următorul criteriu pătratic $J(u) = \frac{1}{2} \cdot x^2(3) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{2} (2 \cdot x^2(k) + u^2(k))$

Să se determine secvenţa matricilor Riccati necesară pentru calcularea comandei optimale:
Presupunem cunoscută matricea Hamiltoniană H, respectiv ecuaţia ARE discretă:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

Adott a következő dinamikus rendszer: $x(k+1) = 2 \cdot x(k) + u(k)$ és a következő négyzetes kritérium:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot x^2(3) + \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{2} (2 \cdot x^2(k) + u^2(k))$$

Határozzuk meg az optimális vezérlőjel kiszámitásához szükséges Riccati mátrix szekvenciát:
Feltételezzük, hogy ismerjük a H Hamilton mátrixot és a diszkrét ARE egyenletet:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

a). $P_3 = 0; \quad P_2 = 1; \quad P_1 = \frac{21}{5};$

b). $P_3 = 1; \quad P_2 = 2; \quad P_1 = \frac{2}{5};$

c). $P_3 = 1; \quad P_2 = 4; \quad P_1 = \frac{26}{5};$

d). $P_3 = 1; \quad P_2 = 2; \quad P_1 = 3;$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (c)

41. Se dă următorul sistem dinamic: $x(k+1) = 2 \cdot x(k) + u(k)$ şi următorul criteriu pătratic:

$$J(u) = \sum_{k=0}^{2} (x^2(k) + u^2(k))$$

Să se determine secvenţa de comandă optimală, care minimizează criteriul pătraatic J(u) şi conduce sistemul din stare iniţială $x_0=1$ în starea finală $x_3=10$:
Presupunem cunoscută matricea Hamiltoniană H, respectiv ecuaţia ARE discretă:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

Adott a következő dinamikus rendszer: $x(k+1) = 2 \cdot x(k) + u(k)$ és a következő négyzetes kritérium:

$$J(u) = \sum_{k=0}^{2} (x^2(k) + u^2(k))$$

Határozzuk meg azt az optimális vezérlőjel szekvenciát, mely $x_0=1$ kezdeti állapotból az $x_3=10$ állapotba vezérel és minimizálja J(u) kritériumot:
Feltételezzük, hogy ismerjük a H Hamilton mátrixot és a diszkrét ARE egyenletet:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

a). $u_0 = \frac{3}{4}; \quad u_1 = -\frac{11}{4}; \quad u_2 = \frac{9}{2}$

b). $u_0 = \frac{3}{4}; \quad u_1 = \frac{11}{4}; \quad u_2 = \frac{9}{2}$

c). $u_0 = -\frac{3}{4}; \quad u_1 = -\frac{11}{4}; \quad u_2 = \frac{9}{2}$

d). $u_0 = \frac{1}{4}; \quad u_1 = -\frac{11}{4}; \quad u_2 = \frac{9}{2}$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (a)

42. Dacă este dat următorul criteriu pătratic atunci matricile de ponderare vor fi:

$$J(u) = \frac{1}{2} \cdot x^2(9) + \sum_{k=0}^{8} 16 \cdot x^2(k) + 0.1 \cdot u^2(k))$$

Presupunem cunoscută matricea Hamiltoniană H, respectiv ecuaţia ARE discretă:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$

$$P_N = F$$

Ha adott a következő diszkrét négyzetes kritérium, akkor a súlyozó mátrixok a következők:

$$J(u) = \frac{1}{2} \cdot x^2(9) + \sum_{k=0}^{8} 16 \cdot x^2(k) + 0.1 \cdot u^2(k))$$

Feltételezzük, hogy ismerjük a H Hamilton mátrixot és a diszkrét ARE egyenletet:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$

$$P_N = F$$

a). $F = 1 \quad Q = 32 \quad R = 0.2$

b). $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = 0.2$

c). $F = 1 \quad Q = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \quad R = 0.2$

b). $F = 0.5 \quad Q = 16 \quad R = 0.2$

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (a)

43. Se dă următorul sistem dinamic : $x(k+1) = 2 \cdot x(k) + u(k)$ şi următorul criteriu pătratic:

$$J(u) = \frac{1}{2} \cdot x^2(3) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{2} (2 \cdot x^2(k) + u^2(k))$$

Pentru determinare comandei optimale matricea Riccati poate fi calcula cu metoda:
Presupunem cunoscută matricea Hamiltoniană H, respectiv ecuaţia ARE discretă:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$

$$P_N = F$$

a) Metoda Potter discretă
b) Rezolvând numeric ecuaţia diferencială Riccati
c) Rezolând recursiv ecuaţi Riccati discretă
d) Rezolvând ecuaţia algebrică Riccati

Adott a következő dinamikus rendszer: $x(k+1) = 2 \cdot x(k) + u(k)$ és a következő négyzetes kritérium:

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \cdot x^2(3) + \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{2} (2 \cdot x^2(k) + u^2(k))$$

Az optimális vezérlőjel kiszámításához a Riccati mátrix kiszámítható a következő módszerekkel:
Feltételezzük, hogy ismerjük a H Hamilton mátrixot és a diszkrét ARE egyenletet:

$$H = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & -\Gamma \cdot R^{-1} \cdot \Gamma^T \cdot \left(\Phi^T\right)^{-1} \\ -\left(\Phi^T\right)^{-1} \cdot Q & \left(\Phi^T\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} \Phi_k + Q_k - \Phi_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k \left(R_k + \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Gamma_k\right)^{-1} \Gamma_k{}^T P_{k+1} \Phi_k$$
$$P_N = F$$

a) A diszkrét Potter módszer
b) A folytonos Riccati differenciál egyenlet megoldása alapján
c) A diszkrét Riccati egyenlet rekurzív megoldása alapján
d) Megoldva a diszkrét algebrai Riccati egyenletet.

Soluţie corectă / Helyes Megoldás: (c)